



Логарифми.
Логарифмічна функція.
Логарифмічні рівняння та
нерівності

ЛОГАРИФМ

Логарифмом числа b за основою a називається показник степеня x , до якого слід піднести основу a , щоб одержати число b , де $a > 0, a \neq 1, b > 0$:

$$\log_a b = x$$

Якщо основа дорівнює 10, то такий логарифм називається десятиковим:

$$\log b = x$$

Якщо основа логарифма дорівнює числу e , то логарифм називається натуральним:

$$\ln b = x$$

Основна логарифмічна тотожність: $a^{\log_a b} = b$

ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$1) \log_a a = 1$$

$$2) \log_a 1 = 0$$

$$3) \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$4) \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$5) \log_a b^p = p \cdot \log_a b$$

$$6) \log_{a^q} b = \frac{1}{q} \cdot \log_a b, \quad q \neq 0$$

$$7) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad c \neq 1$$

$$8) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad b \neq 1$$

$$9) a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \quad c \neq 1, \quad b \neq 1$$


Означення

Логарифм – з грецької означає “логос” - відношення і “аритмос” - число.

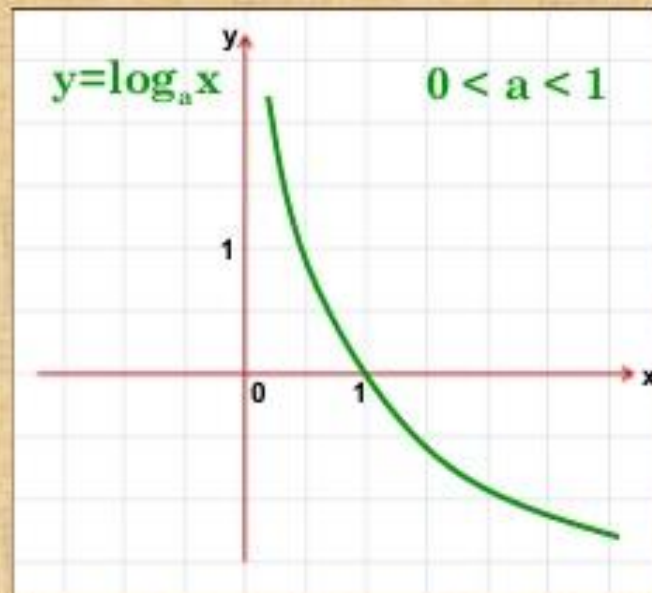
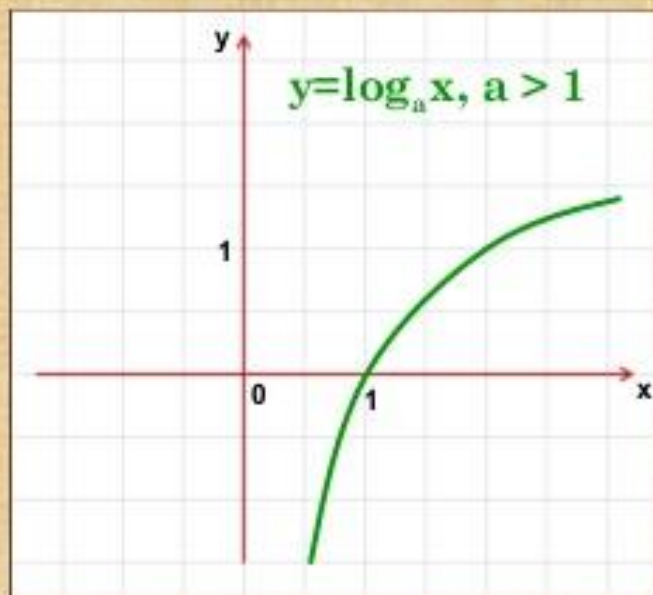
Логарифмічною функцією називається функція виду $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

Десятковий логарифм – це логарифм з основою 10, позначається $lg b$.

Натуральний логарифм – це логарифм за основою e
 e – ірраціональне число, наближене значення якого $\approx 2,7$, позначається $ln b$.



Властивості функції



1. Область визначення: $x > 0$. $D(\log_a x) = (0; +\infty)$

2. Область значень: $y \in R$. $E(\log_a x) = R$

3. Функція: ні парна, ні непарна

4. Точки перетину з осями
координат:

з віссю Oy : немає

з віссю Ox :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$



Рівняння, яке містить змінну під знаком логарифма або в основі логарифма, називають *логарифмічним*.

Найпростіші логарифмічні рівняння

1. $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b, a > 0, a \neq 1.$

2. $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b, a > 0, a \neq 1.$

3. $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1.$

4. Рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ f(x) > 0; \end{cases}$ або системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ g(x) > 0, \end{cases}$ де $a > 0,$

$a \neq 1.$

5. Рівняння $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ f(x) > 0; \\ \varphi(x) > 0; \\ \varphi(x) \neq 1; \end{cases}$ або системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ g(x) > 0; \\ \varphi(x) > 0; \\ \varphi(x) \neq 1. \end{cases}$

Запам'ятай!

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$a > 0, a \neq 1$$

$$a > 1$$

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

*Знак нерівності
не змінюється при
проходженні ОДЗ*

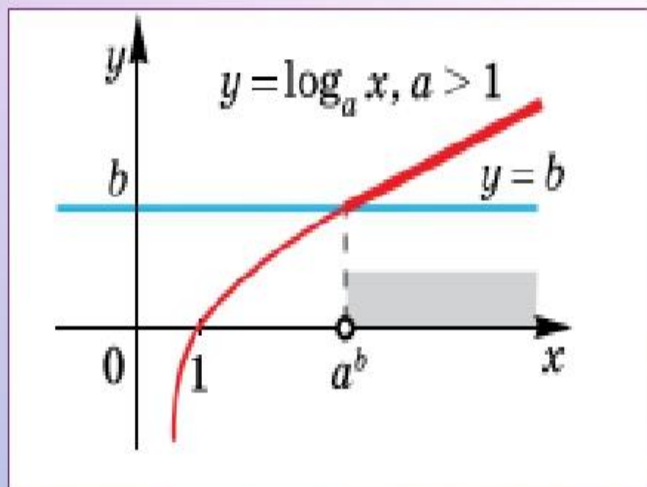
$$0 < a < 1$$

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

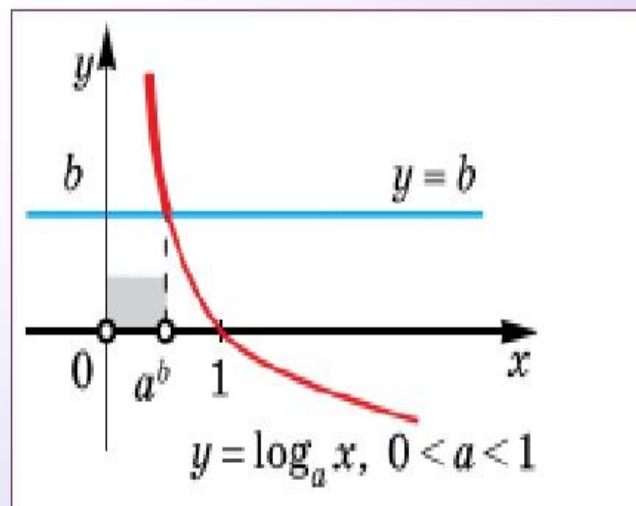
*Знак нерівності
змінюється при
проходженні ОДЗ*

Найпростіші логарифмічні нерівності

$$\log_a x > b \quad b = \log_a a^b \quad \log_a x > \log_a a^b$$



$$x > a^b$$



$$0 < x < a^b$$

1) якщо $a > 1$, то при переході від логарифмічної нерівності до нерівності, яка не містить логарифмів, знак нерівності не змінюємо; якщо $0 < a < 1$, то змінюємо на протилежний;

2) якщо в отриманій нерівності немає гарантії того, що значення x додатне, то враховуємо область допустимих значень: $x > 0$; якщо така гарантія є, то враховувати область допустимих значень немає потреби.

ЗНО 2020

Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\log_{64}x = \frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0]$	$(0; 1]$	$(1; 6]$	$(6; 32)$	$[32; +\infty)$

Установіть відповідність між виразом (1–3) та тотожно рівним йому виразом (А – Д), якщо a – довільне від'ємне число.

Вираз

Тотожно рівний вираз

1 a^0

А 0

2 $|a| + a$

Б $2a$

3 $a \log_2 2^a$

В a^2

Г 1

Д $-2a$

ЗНО 2019, 2018

Якому з наведених проміжків належить число $\log_2 \frac{1}{3}$?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$(-3; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; 3)$	$(3; +\infty)$

Яке з наведених чисел є коренем рівняння $\log_4(x - 1) = 3$?

А	Б	В	Г	Д
4	13	63	65	82

Обчисліть значення виразу $\log_3 45 + \log_3 900 - \log_3 500$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	4	3	27	$\log_3 445$

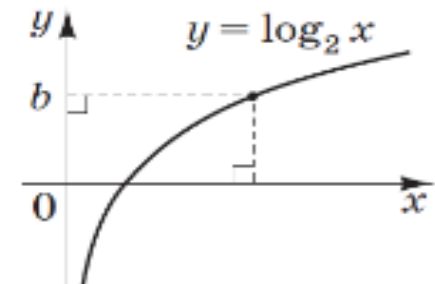
ЗНО 2017

Укажіть проміжок, якому належить число $\log_2 9$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(2; 3)$	$(3; 4)$	$(4; 5)$

Розв'яжіть нерівність $\log_2 x < b$, використавши рисунок.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 2^b)$	$(0; b)$	$(-\infty; 2^b)$	$(\log_2 b; +\infty)$	$(-\infty; b)$



ЗНО 2016

$$\log_2 5 + \log_2 1,6 =$$

А	Б	В	Г	Д
3	3,3	0,25	4	$\log_2 6,6$

Розв'яжіть нерівність $\log_3 x < -1$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$	$\left(0; \frac{1}{3}\right)$	$\left(-\infty; -3\right)$

ЗНО2015

Укажіть проміжок, якому належить число $\log_5 4$.

А	Б	В	Г	Д
(0; 1)	(1; 2)	(2; 3)	(3; 4)	(4; 5)

Розв'яжіть рівняння $\log_5^2 x + \log_5 x = 2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповіді, якщо рівняння має кілька коренів, то у відповіді запишіть їхню суму. Якщо рівняння не має коренів, запишіть у відповіді число 100.

$$\log x = t$$

$$t_1 \cdot t_2 = -2$$

$$t_1 + t_2 = -1 \quad t = 1 \quad t = -2$$

$$x = 5 \quad x = 1/25$$

ЗНО 2014

До кожного виразу (1–4) доберіть тотожно йому рівний (А–Д), якщо $m > 2$, m – натуральне число.

1 $(m + 1)^2 - m^2 - 1$

2 $m \cos^2 \alpha + m \sin^2 \alpha$

3 $100^{\lg m}$

4 $\log_2 \sqrt[m]{2}$

А 0

Б m

В $2m$

Г m^2

Д $\frac{1}{m}$

Розв'яжіть рівняння $\log_{0,4}(5x^2 - 8) = \log_{0,4}(-3x)$. Якщо рівняння має єдиний корінь, запишіть його у відповіді. Якщо рівняння має кілька коренів, запишіть у відповіді їхню суму.

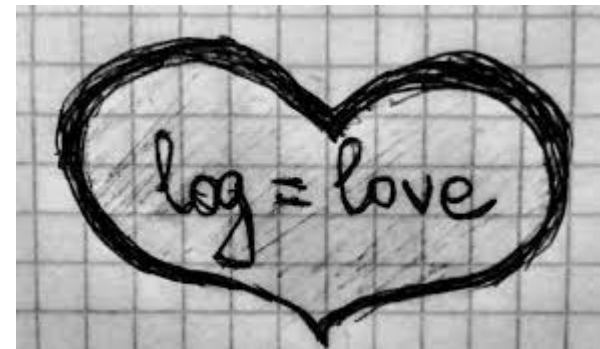
ЗНО 2013, 2012

$$\log_5 49 + 2 \log_5 \frac{5}{7} =$$

А	Б	В	Г	Д
25	$\log_5 70$	$\log_5 49 \frac{5}{7}$	$\log_5 35$	2

Обчисліть значення виразу $\log_a 500 - \log_a 4$, якщо $\log_5 a = \frac{1}{4}$.

Логарифм за основою а
позначено в розв'язанні
лише позначенням log
 $\text{Log } 500/4 = \text{log } 125$
 $\text{Log } 5 = 4$
 $3 \text{ log } 5 = 3 * 4 = 12$



ЗНО 2011,2010

Обчисліть $\log_2 \frac{1}{8} + \log_5 25$.

А	Б	В	Г	Д
2	-1	5	$\lg \frac{25}{8}$	$\log_7 25 \frac{1}{8}$

Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5}(x - 1) > 2$.

А	Б	В	Г	Д
(1; 1,25)	(2; $+\infty$)	(1,25; $+\infty$)	(0; 0,25)	($-\infty$; 1,25)

Обчисліть $\log_3 18 - \log_3 2$.

А	Б	В	Г	Д
2	3	$\log_3 16$	6	9

ЗНО 2010, 2009

Розв'яжіть рівняння $\log_6(x-3) + \log_6(x-8) = 2$.

Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь; якщо воно має два корені, то у відповідь запишіть їх суму.



$$\begin{cases} x^2 - 11x + 24 = 36 \\ x > 3 \\ x > 8 \end{cases}$$
$$x^2 - 11x - 12 = 0$$
$$x_1 = 12 \quad x_2 = -1 - \text{якщо зазвичай}$$

Знайдіть кількість усіх цілих розв'язків нерівності $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 6x) \geq -2$.

Якщо нерівність має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.



Handwritten solution for the inequality $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 6x) \geq -2$:

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 6x) \geq \log_{\frac{1}{4}} 16$$
$$x^2 + 6x \leq 16$$
$$\begin{cases} x^2 + 6x - 16 \leq 0 \\ x^2 + 6x > 0 \end{cases}$$

$\text{I } D = 36 + 4 \cdot 16 = 100$ $\text{II } x = 0$

$$x_1 = \frac{-6 - 10}{2} = -8 \quad x = -6$$

$$x_2 = \frac{-6 + 10}{2} = 2$$

-8; -7; 1; 2
Відповідь: 4

ЗНО 2008, 2007

Обчисліть $\log_a \sqrt{ab}$, якщо $\log_a b = 7$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	2	3	$\frac{7}{2}$	4

Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5} 5 < \log_{0,5} x$

А	Б	В	Г	Д
$(-5; 0)$	$(0; 5)$	$(5; +\infty)$	$(0,5; 5)$	$(-\infty; 5)$

Розташуйте у порядку спадання числа $\sqrt{5}; 2^{\log_2 5}; \frac{5}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$2^{\log_2 5}; \frac{5}{2}; \sqrt{5}$	$\frac{5}{2}; \sqrt{5}; 2^{\log_2 5}$	$\frac{5}{2}; 2^{\log_2 5}; \sqrt{5}$	$\sqrt{5}; \frac{5}{2}; 2^{\log_2 5}$	$2^{\log_2 5}; \sqrt{5}; \frac{5}{2}$

ЗНО 2007

Обчисліть $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt{5}$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Розв'яжіть нерівність $\log_{0,1} 10 < \log_{0,1} x$

А	Б	В	Г	Д
$(10; +\infty)$	$(0; 10)$	$(0,1; 10)$	$(-10; 0)$	$(-\infty; 10)$

Handwritten solution for a system of equations:

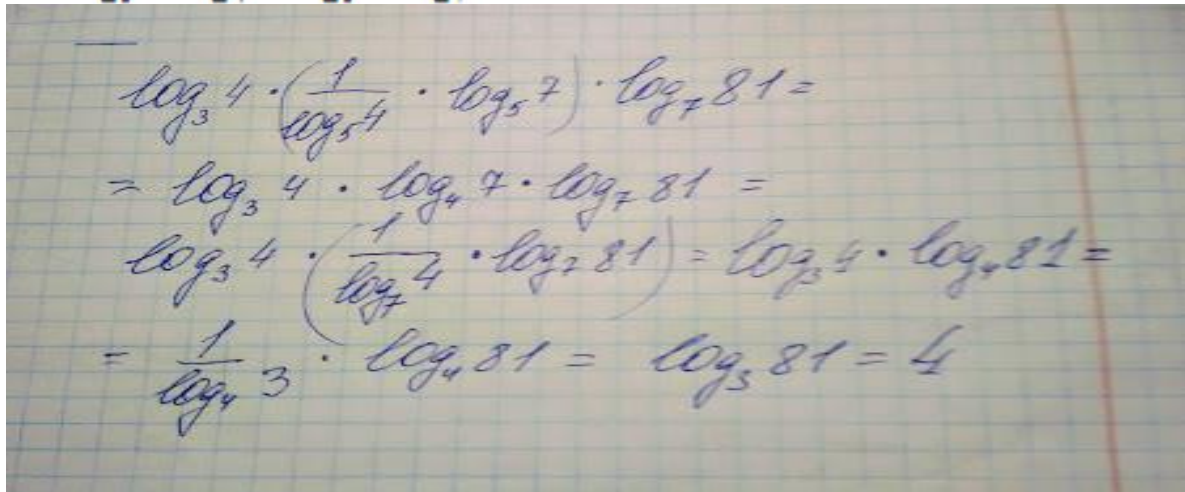
$$\begin{cases} 2^{2y-x} = 2^5 \\ \log_{\frac{1}{2}}(y-x) = \log_{\frac{1}{2}} 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y-x=5 \\ y-x=4 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} & \underline{y-x=4} \\ & 2y-x=5 \\ & \hline & y = 1 \\ & x = -3 \end{aligned}$$

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2^{2y-x} = 32, \\ \log_{\frac{1}{2}}(y-x) = -2. \end{cases}$

Запишіть у відповідь добуток $x_0 \cdot y_0$, якщо пара (x_0, y_0) є розв'язком вказаної системи рівнянь.

ЗНО 2007

Обчисліть $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 81$



The image shows a handwritten solution on grid paper. The steps are as follows:

$$\begin{aligned} & \log_3 4 \cdot \left(\frac{1}{\log_5 4} \cdot \log_5 7 \right) \cdot \log_7 81 = \\ & = \log_3 4 \cdot \log_4 7 \cdot \log_7 81 = \\ & \log_3 4 \cdot \left(\frac{1}{\log_7 4} \cdot \log_7 81 \right) = \log_3 4 \cdot \log_4 81 = \\ & = \frac{1}{\log_4 3} \cdot \log_4 81 = \log_3 81 = 4 \end{aligned}$$

Знайдіть найменше ціле значення параметра a , при якому рівняння $\log_8(x+2) = \log_8(2x-a)$ має корені.