

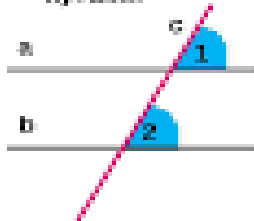
Лінії. Кути. Коло. Трикутники.

Відповідні, внутрішні різносторонні і внутрішні односторонні кути

Властивості кутів

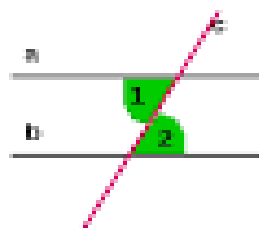
Ознаки паралельності прямих

1. Відповідні кути
відповідними кутами



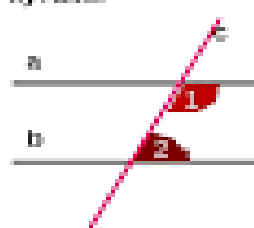
Якщо
відповідні кути рівні
то прямі паралельні

2. Різносторонні кути
різносторонні кутами

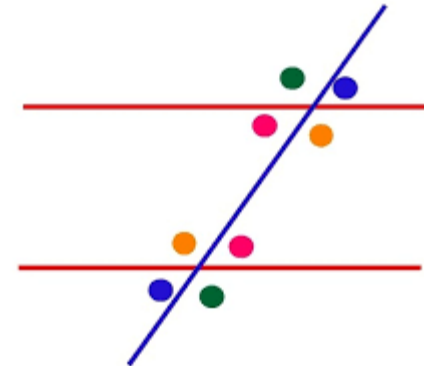


Якщо
різносторонні кути рівні
то прямі паралельні

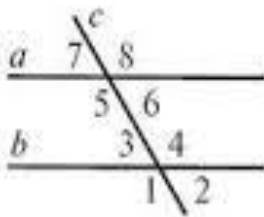
3. Односторонні кути
односторонні кутами



Якщо
сума односторонніх кутів 180°
то прямі паралельні



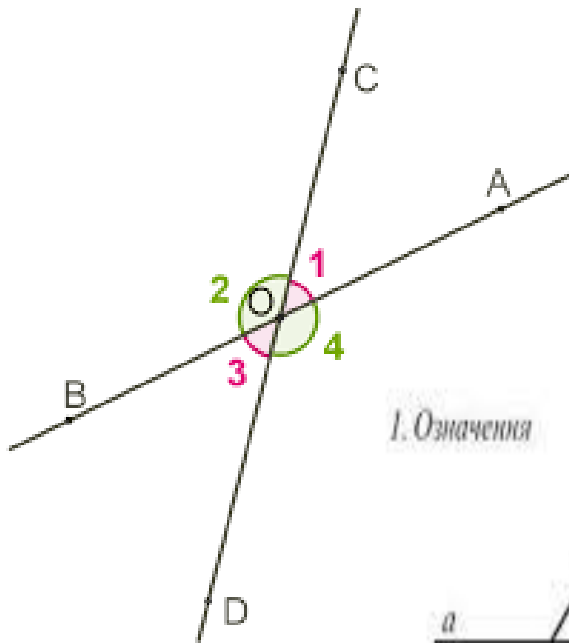
Властивості кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною



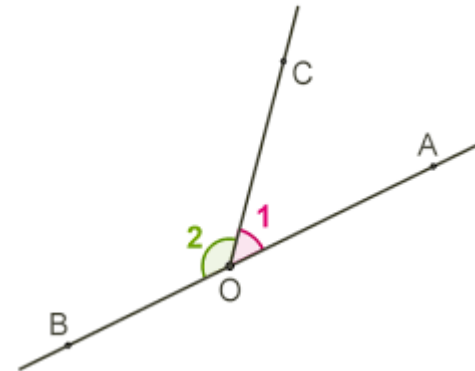
Якщо $a \parallel b$, c — січна, то:

- 1) $\angle 3 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 5$ (як внутрішні різносторонні);
- 2) $\angle 4 + \angle 6 = \angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$ (як внутрішні односторонні);
- 3) $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 7$ (як відповідні)

Вертикальні кути. Суміжні кути.



1. Означення

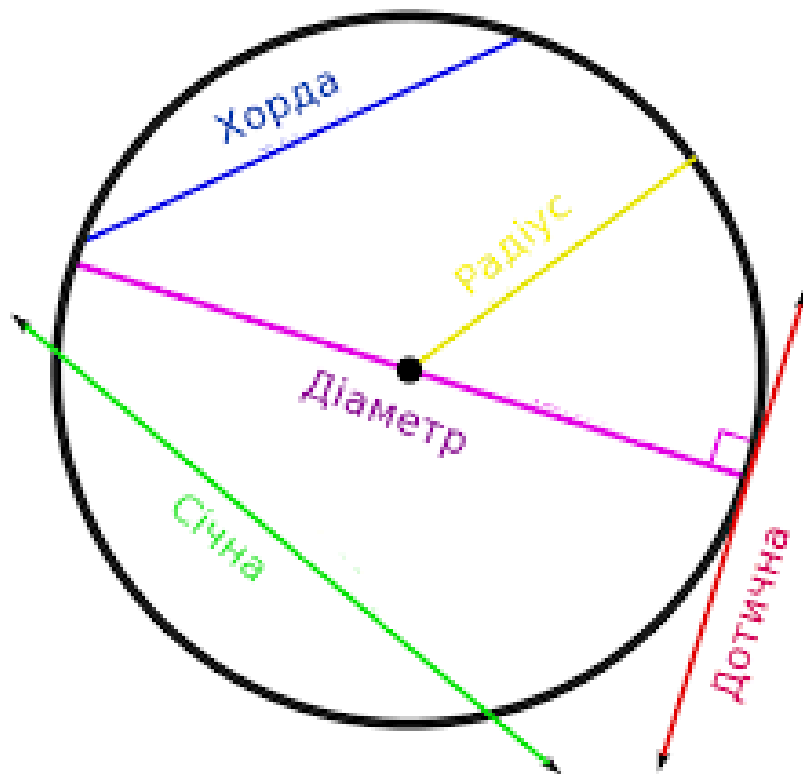


Суміжні кути

- 1) два кути $\angle(ab)$ і $\angle(bc)$;
- 2) мають спільну сторону b ;
- 3) дві інші сторони a і c — доповняльні півпрямі, тому $\angle(ab)$ і $\angle(bc)$ — суміжні.

2. Теорема. Якщо $\angle(ab)$ і $\angle(bc)$ — суміжні, то $\angle(ab) + \angle(bc) = 180^\circ$

Коло



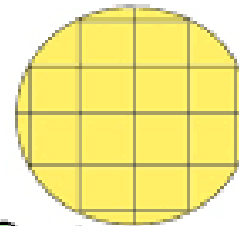
Довжина кола

$$C = \pi d$$

$$C = 2\pi R$$

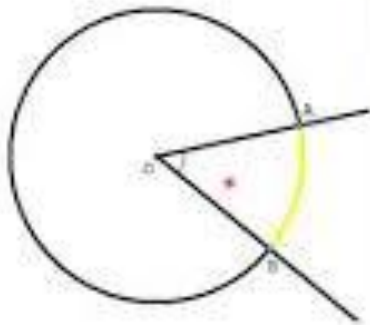
Площа круга

$$S = \pi R^2$$



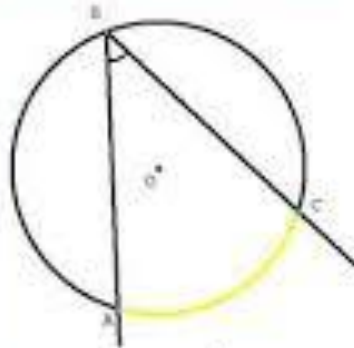
Вписані, центральні кути

Центральним кутом кола називається кут з вершиною в центрі кола.



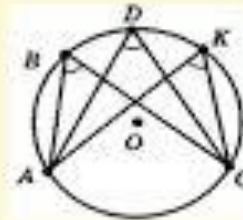
$$\angle AOB = \text{arc } AB$$

Вписаним кутом кола називається кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло.



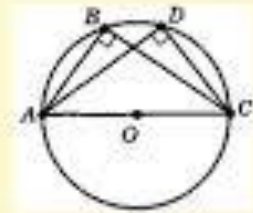
$$\angle ABC = \frac{1}{2} \text{arc } AC$$

Властивості вписаних кутів.



$$\angle ABC = \angle ADC = \angle AKC$$

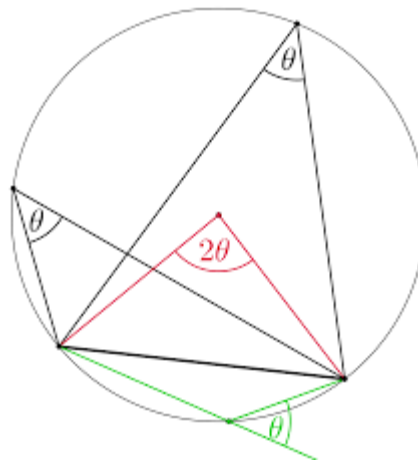
Вписані кути, які спираються на ту саму дугу, рівні між собою.



$$\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$$

Вписаний кут, що спирається на діаметр, дорівнює 90° .

www.dreamstime.com

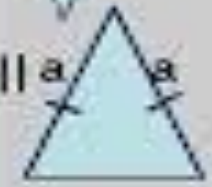
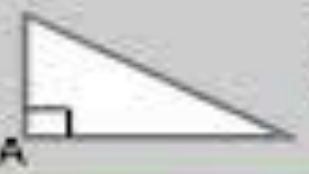


Правила трикутників

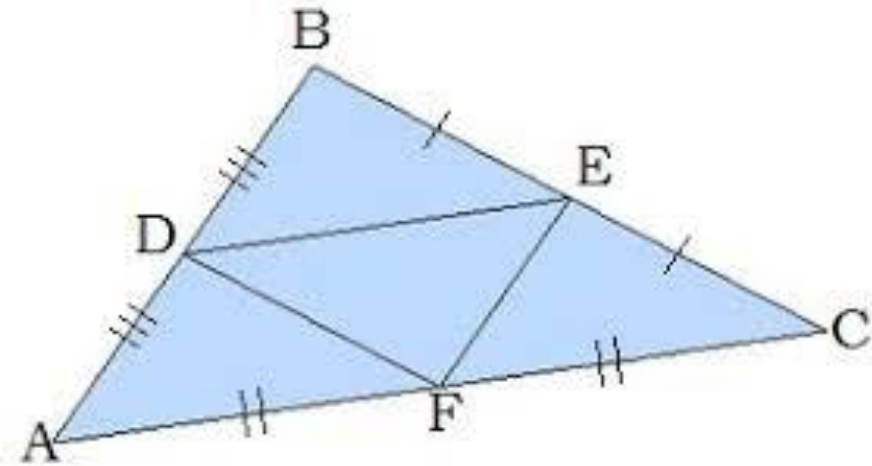
1. Сума будь-яких двох сторін трикутника завжди більша за третю
2. Проти більшого кута лежить більша сторона, проти рівних кутів – рівні сторони.

Запам'ятайте!
Класифікація трикутників



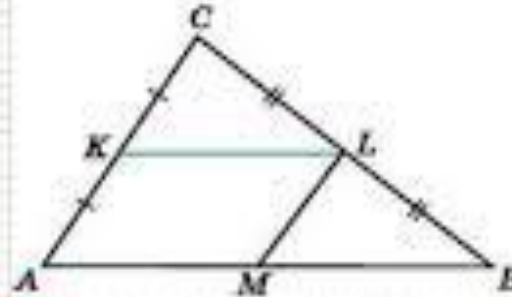
За сторонами	За кутами
I  Різносторонній $P = a + b + c$	 Тупокутний $\angle A > 90^\circ$
II  Рівнобедрений $P = 2a + b$	 Гострокутний $\angle A < 90^\circ$
III  Рівносторонній $P = 3a$	 Прямокутний $\angle A = 90^\circ$

Середня лінія трикутника



Властивості середньої лінії трикутника

Середня лінія трикутника, що сполучає середини двох сторін, паралельна третій стороні і дорівнює її половині.

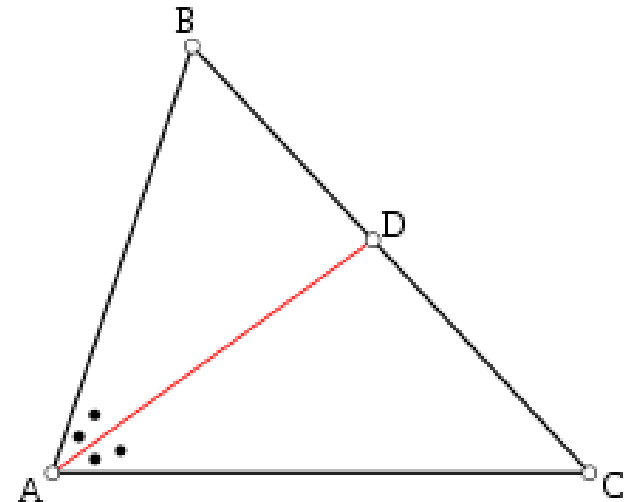
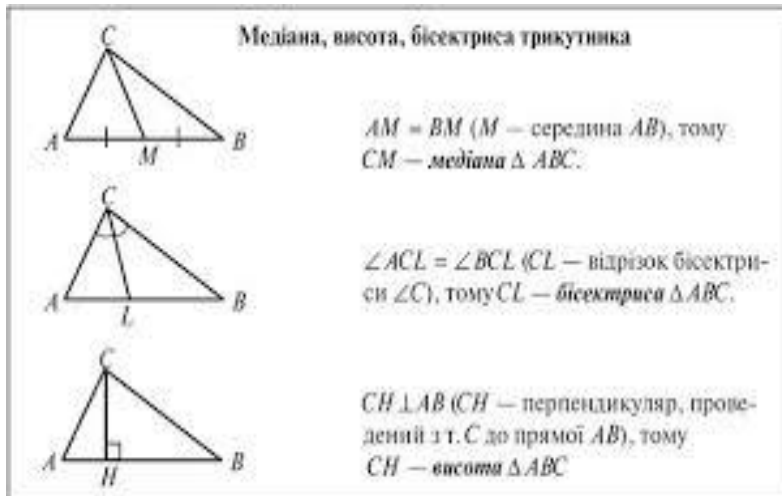
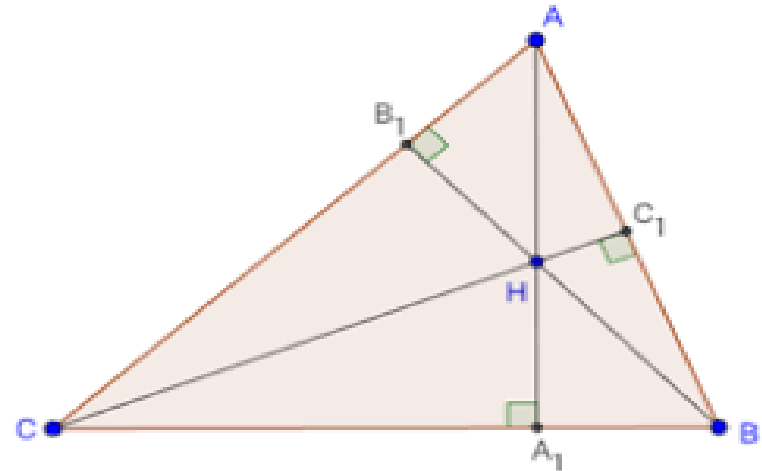
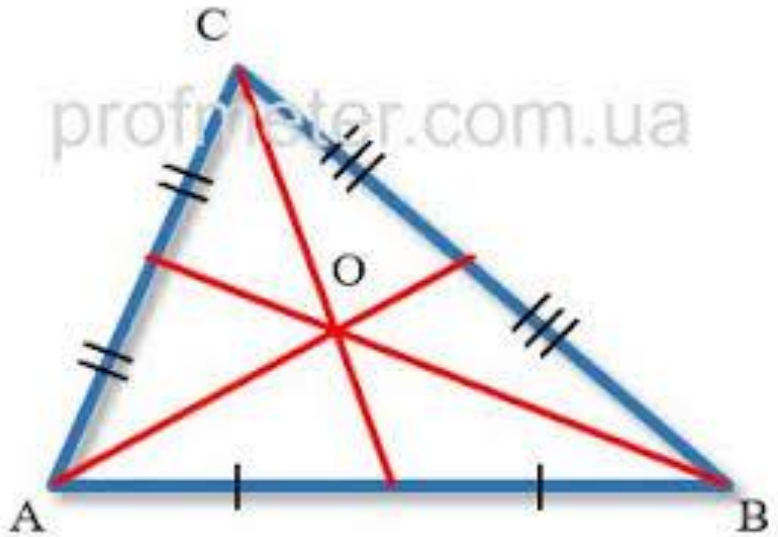


KL паралельна AB .

$$KL = \frac{1}{2}AB.$$



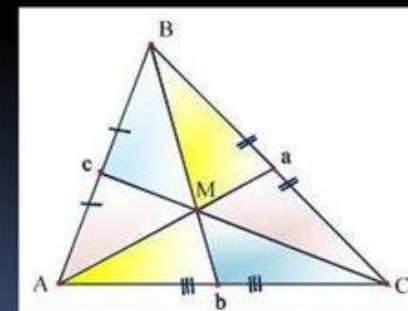
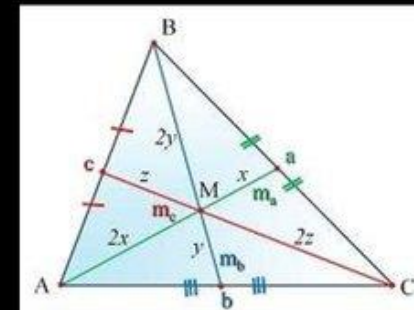
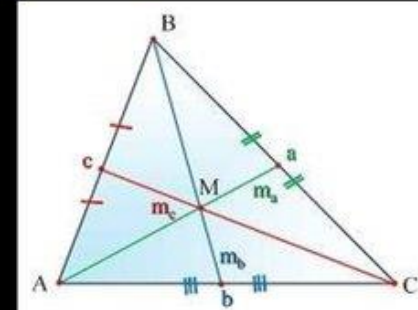
Медіана, висота, бісектриса трикутника



Властивості медіани трикутника

- У будь-якому трикутнику медіани перетинаються в одній точці (вона називається **центроїдом** трикутника) і в цій точці поділяються у відношенні 2:1, починаючи від вершини.
- Медіана ділить трикутник на два трикутника, площі яких рівні.
- Три медіани трикутника ділять трикутник на шість трикутників, площі яких рівні.
- Медіана трикутника, проведена до сторони, визначається через сторони трикутника за формулою:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

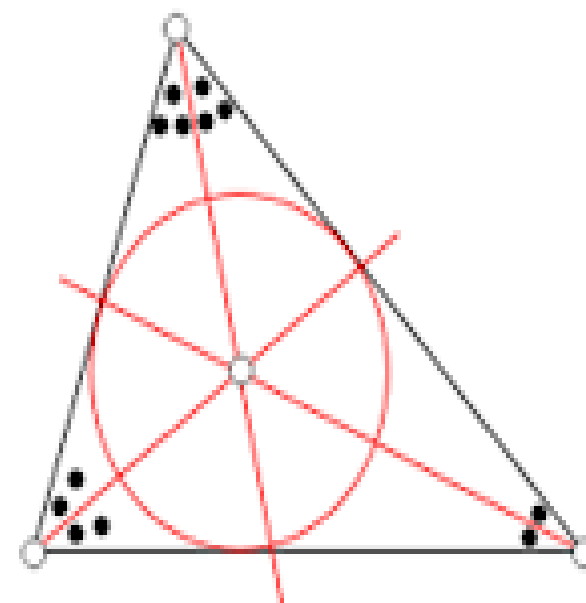
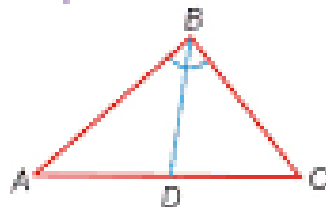




Теорема (властивість бісектриси трикутника)

Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам

$$AD:AB=DC:BC$$



Для довільного трикутника

радіус кола, описаного навколо трикутника

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}, \quad R = \frac{abc}{4S_{\Delta}}$$

радіус кола, вписаного в трикутник

$$r = \frac{2S_{\Delta}}{a+b+c}$$

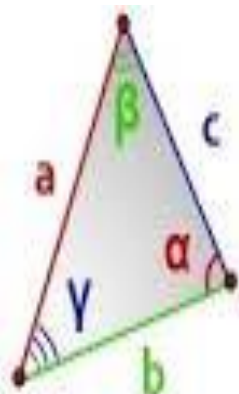
*Коло, описане навколо трикутника.
Коло, вписане в трикутник*



*«Серед рівних розумом - за однакових умов –
переважає той, хто знає геометрію»*

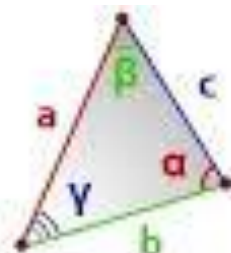
Блез Паскаль

Теорема синусів. Теорема косинусів



a, b, c - сторони трикутника

α, β, γ - протилежні кути



a, b, c - сторони трикутника

α, β, γ - кути трикутника

Формули

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

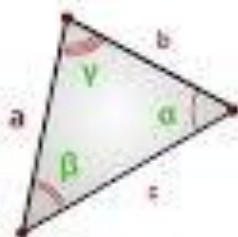
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Формула (теорема синусів):

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

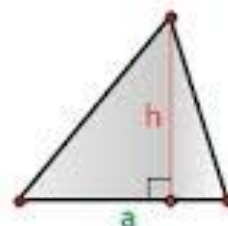
Площа трикутників



Знаючи трикутника, две сторони і синус (тобто між ними), за допомогою формули, його площа:

a, b, c - сторони трикутника

alpha, beta, gamma - углы



h - висота трикутника

a - основание

Формулы площади треугольника, через две стороны и угол между ними, (**S**):

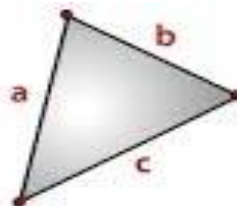
$$S = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha)$$

$$S = \frac{1}{2}ac \sin(\beta)$$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin(\gamma)$$

Площадь треугольника (**S**):

$$S = \frac{1}{2}ah$$



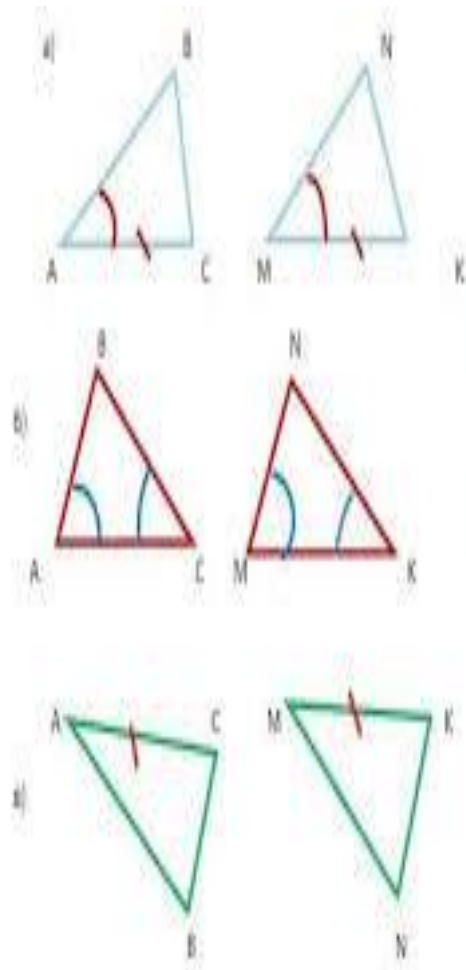
a, b, c - стороны треугольника

p - полупериметр, $p = (a+b+c)/2$

Формула (**Герона**) площади треугольника через полупериметр (**S**):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ознаки рівності і подібності трикутників



Ознаки
рівності
трикутників



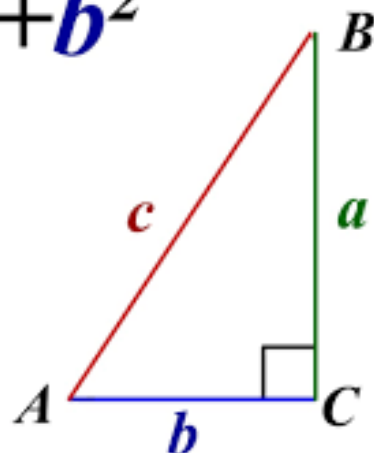
Прямокутний трикутник

$$c^2 = a^2 + b^2$$

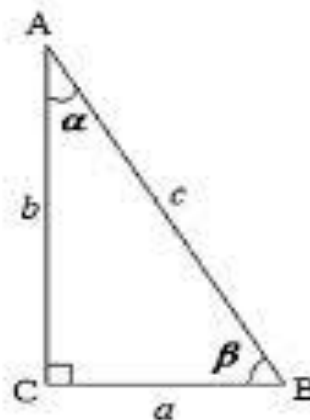
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



По данным рисунка определите синус, косинус, тангенс и котангенс углов α и β



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

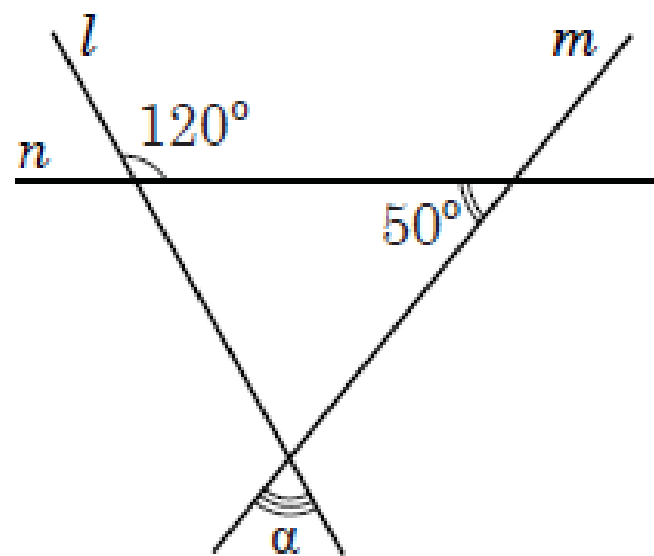
$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}$$

Функції Кут	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

ЗНО 2020

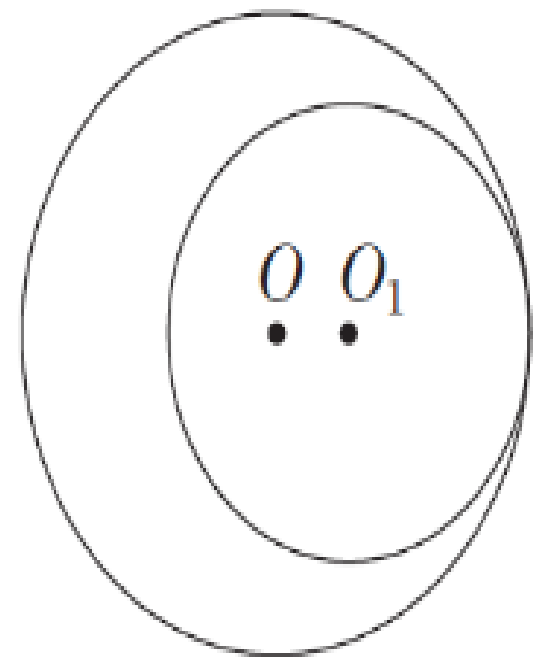
Прямі l , m і n лежать в одній площині (див. рисунок). Визначте градусну міру кута α .



А	Б	В	Г	Д
110°	50°	60°	70°	80°

ЗНО 2019

Кола із центрами в точках O і O_1 мають внутрішній дотик (див. рисунок). Обчисліть відстань OO_1 , якщо радіуси кіл дорівнюють 12 см і 8 см .

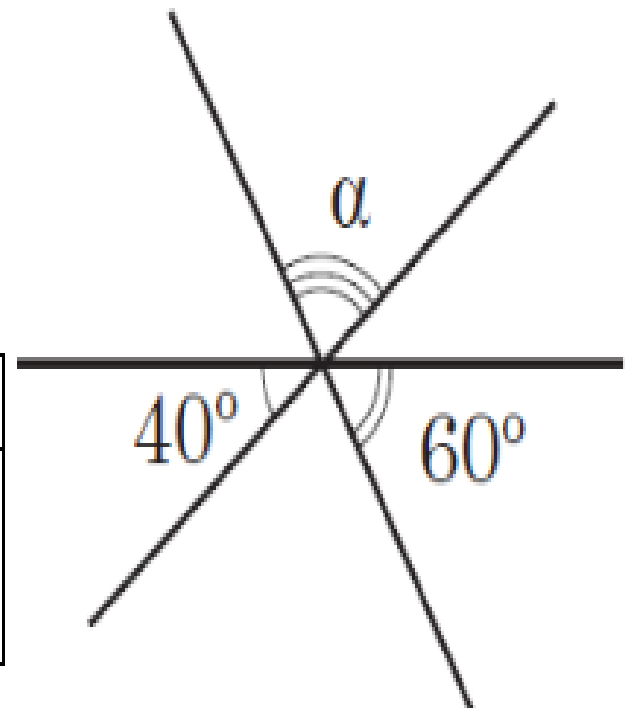


А	Б	В	Г	Д
$1,5\text{ см}$	2 см	3 см	4 см	8 см

ЗНО 2018

Три прямі, розміщені в одній площині, перетинаються в одній точці (див. рисунок).
Визначте градусну міру кута α .

А	Б	В	Г	Д
80°	50°	90°	100°	70°



ЗНО 2018

У просторі задано паралельні прямі m і n . Які з наведених тверджень є правильними?

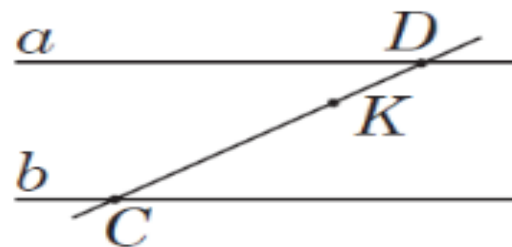
I. Існує площина, що містить обидві прямі m і n .

II. Існує пряма, що перетинає обидві прямі m і n .

III. Існує точка, що належить обом прямим m і n .

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише II та III	лише III	лише I та II

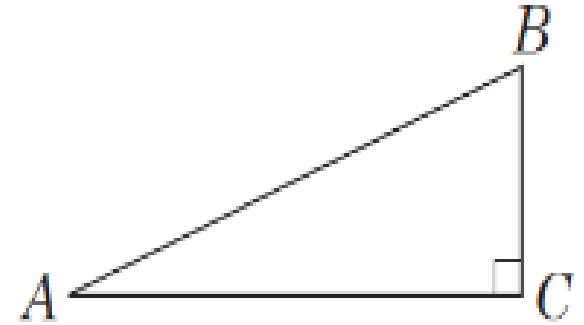
На рисунку зображено паралельні прямі a і b та січну CD . Знайдіть відстань між прямими a і b , якщо $CK = 5$ см, $KD = 2$ см, а відстань від точки K до прямої a , дорівнює 1 см.



А	Б	В	Г	Д
2,5 см	3 см	3,5 см	4 см	4,5 см

ЗНО 2018

У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) відстані від середини медіани BM до катетів AC і BC дорівнюють 5 см і 6 см відповідно.



1. Визначте довжину катета AC (у см).
2. Визначте радіус (у см) кола, описаного навколо трикутника ABC .

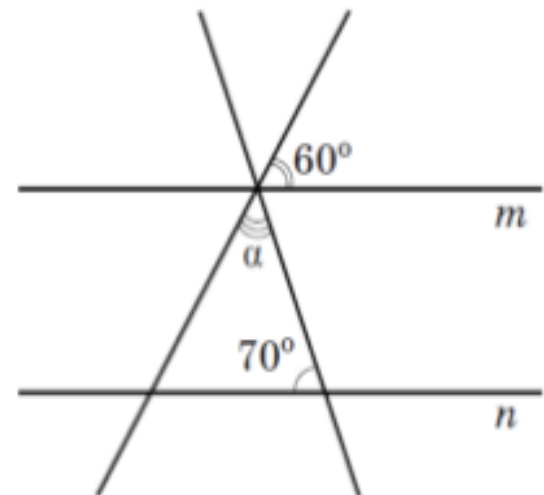
ЗНО 2017

На відрізку AB вибрано точку M так, що довжина відрізка AM утричі більша за довжину MB . Визначте довжину відрізка AB , якщо $MB = 12$ см.

А	Б	В	Г	Д
48 см	36 см	24 см	42 см	54 см

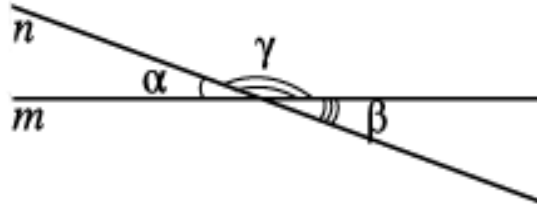
Усі зображені на рисунку прямі лежать в одній площині, прямі m і n є паралельними. Визначте градусну міру кута α

А	Б	В	Г	Д
20°	50°	60°	70°	110°



ЗНО 2016

На рисунку зображено прямі m і n , що перетинаються. Визначте градусну міру кута γ , якщо $\alpha + \beta = 50^\circ$.



А	Б	В	Г	Д
310°	155°	145°	140°	130°

Якому значенню серед наведених може дорівнювати довжина сторони AC трикутника ABC , якщо $AB = 3$ см, $BC = 10$ см?

А	Б	В	Г	Д
3 см	5 см	7 см	11 см	15 см

ЗНО 2016

Прямі a та b мимобіжні. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Прямі a та b перетинаються.

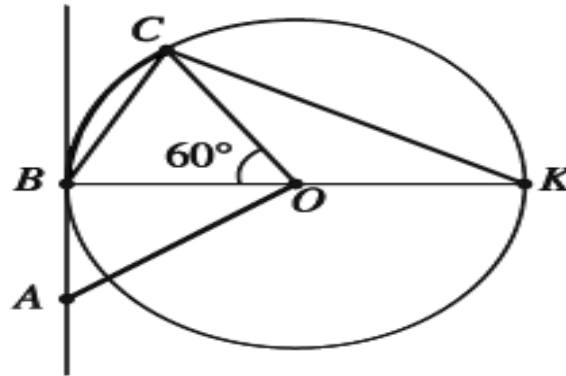
II. Прямі a та b лежать в одній площині.

III. Існує пряма, паралельна прямій a , що перетинає пряму b .

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише I та II	лише III	I, II та III

ЗНО 2016

На рисунку зображено коло з центром у точці O , радіус якого дорівнює 6. Хорду BC видно з центра кола під кутом 60° , BK – діаметр. Через точку A до кола проведено дотичну AB , причому $AO = 2AB$. Установіть відповідність між відрізком (1–4) та його довжиною (А–Д).



Відрізок

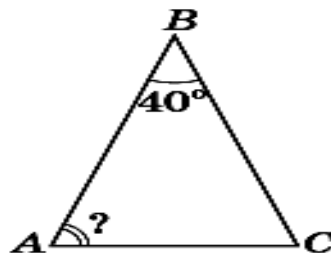
Довжина відрізка

- | | |
|---|------|
| 1 | BK |
| 2 | AB |
| 3 | BC |
| 4 | CK |

- | | |
|---|-------------|
| А | 6 |
| Б | $2\sqrt{3}$ |
| В | 12 |
| Г | $6\sqrt{3}$ |
| Д | $3\sqrt{3}$ |

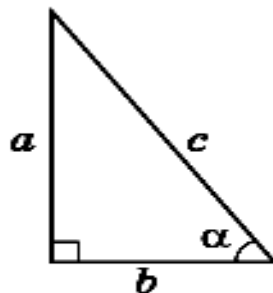
ЗНО 2015

На рисунку зображено рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$). Визначте градусну міру кута BAC , якщо $\angle B = 40^\circ$.



А	Б	В	Г	Д
80°	70°	60°	50°	40°

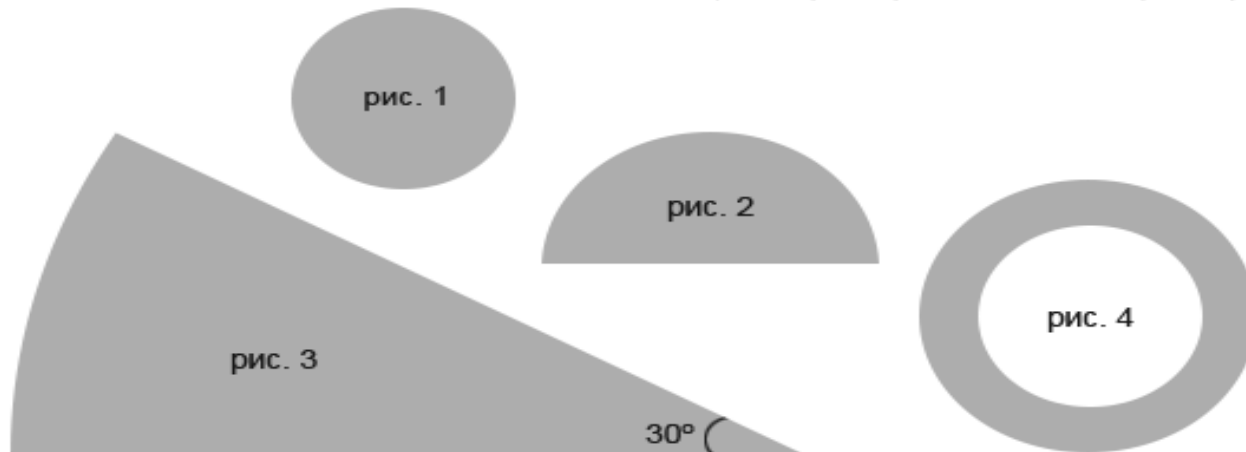
На рисунку зображено прямокутний трикутник з катетами a і b , гіпотенузою c та гострим кутом α . Укажіть правильну рівність.



А	Б	В	Г	Д
$\cos \alpha = \frac{a}{b}$	$\cos \alpha = \frac{c}{b}$	$\cos \alpha = \frac{a}{c}$	$\cos \alpha = \frac{c}{a}$	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$

ЗНО 2015

Установіть відповідність між геометричною фігурою (1—4) та її площею (А—Д).



Геометрична фігура

- | | |
|----------|--|
| 1 | круг радіуса 4 см (рис. 1) |
| 2 | півкруг радіуса 6 см (рис. 2) |
| 3 | сектор радіуса 12 см з градусною мірою центрального кута 30° (рис. 3) |
| 4 | кільце, обмежене колами радіусів 4 см і 6 см (рис. 4) |

Площа геометричної фігури

- | | |
|----------|----------------------|
| А | $12\pi \text{ см}^2$ |
| Б | $16\pi \text{ см}^2$ |
| В | $18\pi \text{ см}^2$ |
| Г | $20\pi \text{ см}^2$ |
| Д | $24\pi \text{ см}^2$ |

ЗНО 2014

Які з наведених тверджень є правильними?

I. Сума двох будь-яких вертикальних кутів дорівнює 180° .

II. Сума двох будь-яких суміжних кутів дорівнює 180° .

III. Сума будь-якого гострого кута та будь-якого тупого кута дорівнює 180° .

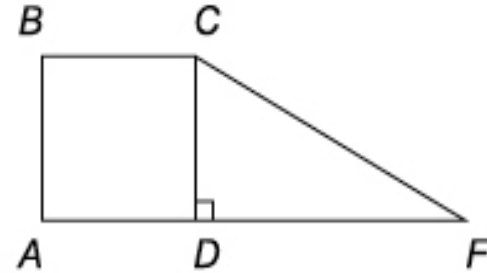
А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише I і III	лише II і III	I, II і III

У гострокутному трикутнику ABC проведено висоту BM . Визначте довжину сторони AB , якщо $BM = 12$, $\angle A = \alpha$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{12}{\cos \alpha}$	$12 \cos \alpha$	$12 \operatorname{tg} \alpha$	$12 \sin \alpha$	$\frac{12}{\sin \alpha}$

ЗНО 2014

На рисунку зображено квадрат $ABCD$ зі стороною 1 см та прямокутний трикутник CDF , гіпотенуза якого CF дорівнює $\sqrt{5}\text{ см}$. Фігури лежать в одній площині. Установіть відповідність між початком речення (1–4) та його закінченням (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення

- 1** Довжина катета FD трикутника CDF дорівнює
- 2** Довжина радіуса кола, описаного навколо квадрата $ABCD$, дорівнює
- 3** Відстань від точки F до прямої BC дорівнює
- 4** Відстань від точки F до прямої BD дорівнює

Закінчення речення

- А** 1 см .
- Б** $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ см}$.
- В** $\sqrt{2}\text{ см}$.
- Г** 2 см .
- Д** $\sqrt{5}\text{ см}$.

ЗНО 2013

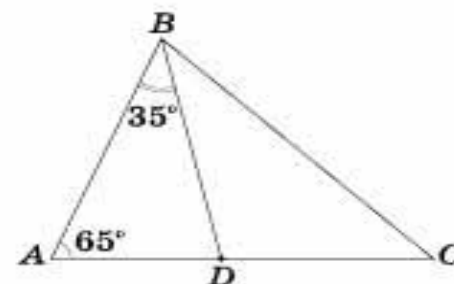
Пряма b не має спільних точок з площиною a . Які з наведених тверджень є правильними?

- I. Через пряму b можна провести лише одну площину, перпендикулярну до площини a .
- II. Через пряму b можна провести лише одну площину, паралельну площині a .
- III. У площині a можна провести лише одну пряму, паралельну прямій b .

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише I і II	лише II і III	I, II і III

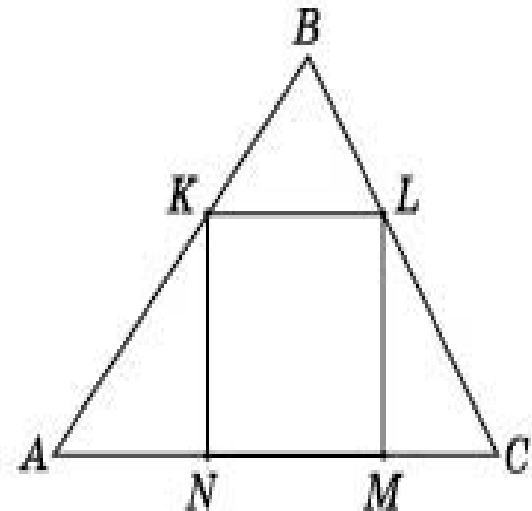
У трикутнику ABC : $\angle A = 65^\circ$, BD – бісектриса кута B (див. рисунок). Знайдіть градусну міру кута BCA , якщо $\angle ABD = 35^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
35°	45°	50°	55°	80°



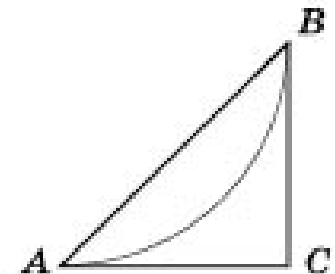
ЗНО 2013

У трикутник ABC вписано квадрат $KLMN$ (див. рисунок). Висота цього трикутника, проведена до сторони AC , дорівнює 6 см. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AC = 10$ см.



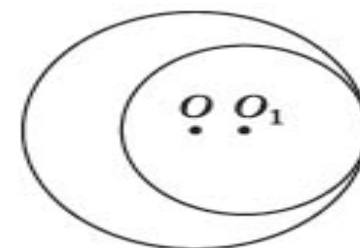
А	Б	В	Г	Д
7,5 см	12,5 см	17,5 см	15 см	20 см

План паркової зони, обмеженої трикутником ABC , зображено на рисунку. Дуга AB – велосипедна доріжка. Відомо, що дуга AB є четвертою частиною кола радіуса 1,8 км. CA і CB – дотичні до цього кола (A і B – точки дотику). Обчисліть площу зображеної на плані паркової зони (у км^2).



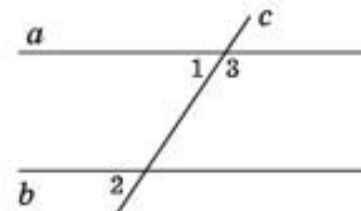
ЗНО 2012

Два кола з центрами в точках O і O_1 мають внутрішній дотик (див. рисунок). Обчисліть відстань OO_1 , якщо радіуси кіл дорівнюють 12 см і 8 см .



А	Б	В	Г	Д
$1,5\text{ см}$	2 см	3 см	4 см	8 см

Пряма c перетинає паралельні прямі a і b (див. рисунок). Які з наведених тверджень є правильними для кутів 1 , 2 , 3 ?



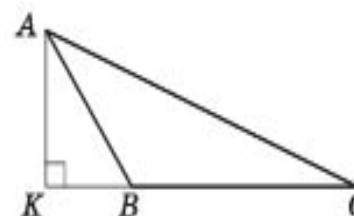
I. $\angle 1$ і $\angle 3$ – суміжні.

II. $\angle 1 = \angle 2$.

III. $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише I і III	лише III	лише I і II	I, II та III

У трикутнику ABC основа висоти AK лежить на продовженні сторони BC (див. рисунок). $AK = 6$, $KB = 2\sqrt{3}$. Радіус описаного навколо трикутника ABC кола дорівнює $15\sqrt{3}$. Визначте довжину AC .

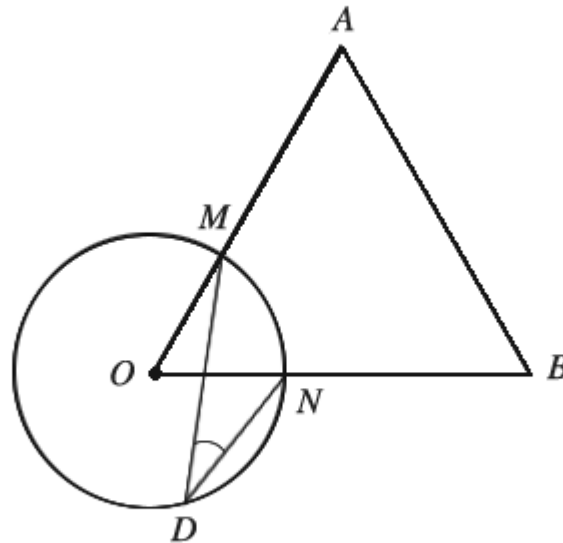


ЗНО 2011

Доберіть таке закінчення речення, щоб утворилося правильне твердження: «Сума квадратів катетів прямокутного трикутника дорівнює...».

А	Б	В	Г	Д
гіпотенузі	квадрату суми катетів	квадрату гіпотенузи	добутку катетів	подвійному добутку катетів

На рисунку зображено коло з центром у точці O і рівносторонній трикутник AOB , що перетинає коло в точках M і N . Точка D належить колу. Знайдіть градусну міру кута MDN .



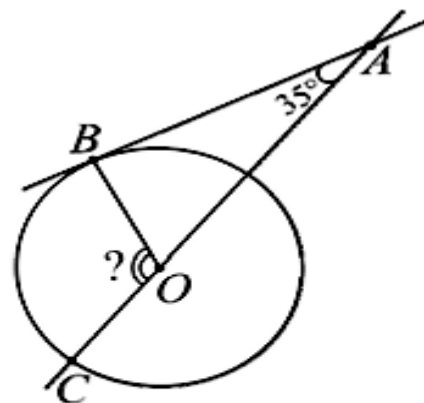
А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	120°

ЗНО 2011

У трикутнику ABC : $AB = 31$ см, $BC = 15$ см, $AC = 26$ см. Пряма a , паралельна стороні AB , перетинає сторони BC і AC у точках M і N відповідно. Обчисліть периметр трикутника MNC , якщо $MC = 5$ см.

А	Б	В	Г	Д
15 см	24 см	48 см	21 см	26 см

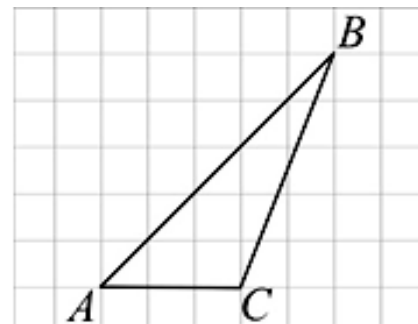
До кола проведено дотичну AB (B – точка дотику) та січну AC , що проходить через центр O кола (див. рисунок). Знайдіть градусну міру кута COB , якщо $\angle OAB = 35^\circ$.



А	Б	В	Г	Д
105°	115°	120°	125°	145°

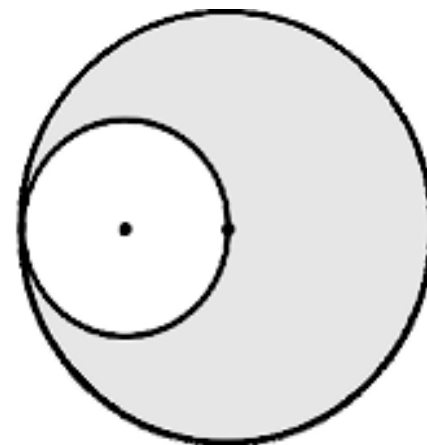
ЗНО 2010

На папері у клітинку зображено трикутник ABC , вершини якого збігаються з вершинами клітинок (див. рисунок). Знайдіть площу трикутника ABC , якщо кожна клітинка є квадратом зі стороною завдовжки 1 см.



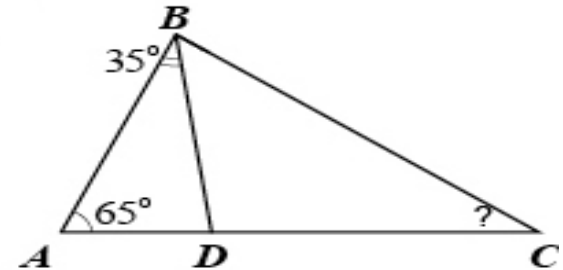
А	Б	В	Г	Д
15 см^2	$8,5 \text{ см}^2$	8 см^2	$7,5 \text{ см}^2$	7 см^2

Два кола дотикаються, причому менше з кіл проходить через центр більшого кола (див. рисунок). Знайдіть площу зафарбованої фігури (у см^2), якщо менше з кіл обмежує круг площею 64 см^2 .



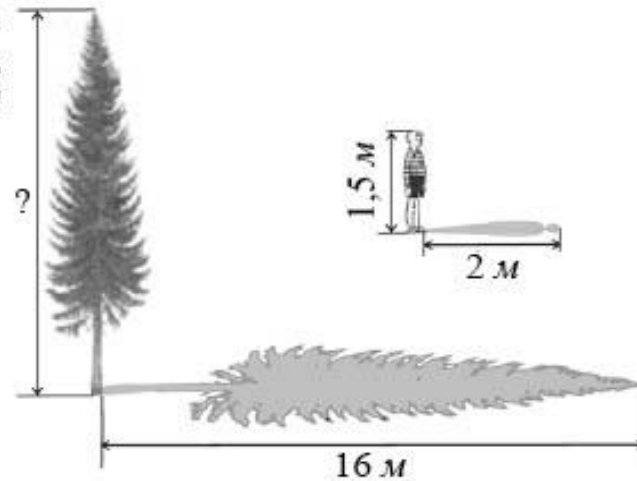
ЗНО 2009

У трикутнику ABC : $\angle A = 65^\circ$, BD – бісектриса кута B (див. рисунок). Знайдіть градусну міру кута BCA , якщо $\angle ABD = 35^\circ$.



А	Б	В	Г	Д
35°	45°	50°	55°	65°

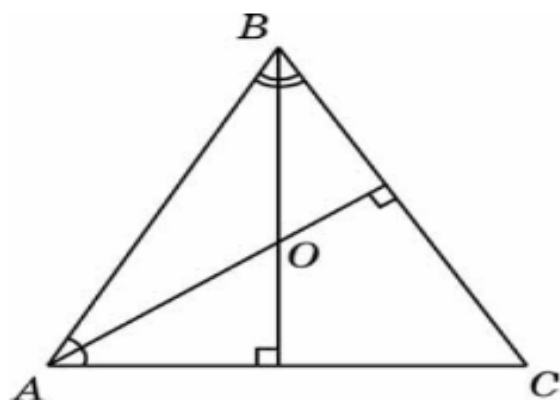
У сонячний день довжина тіні від дерева становить 16 м. У той самий час тінь від хлопчика, який має зріст 1,5 м, дорівнює 2 м (див. рисунок). Визначте висоту дерева.



А	Б	В	Г	Д
12 м	$12,5\text{ м}$	13 м	14 м	$15,5\text{ м}$

ЗНО 2008

У трикутнику ABC $\angle A = 59^\circ$, $\angle B = 62^\circ$. Із вершин цих кутів проведено висоти, що перетинаються в точці O . Визначте величину кута AOB .



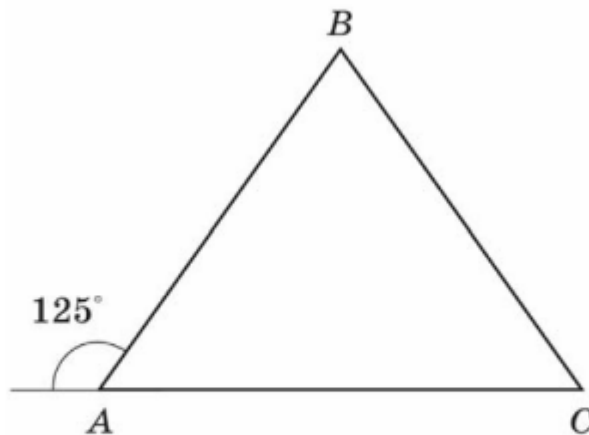
А	Б	В	Г	Д
98°	121°	144°	149°	154°

Сторони трикутника, одна з яких на 8 см більша за другу, утворюють кут 120° , а довжина третьої сторони дорівнює 28 см. Знайдіть периметр трикутника.

А	Б	В	Г	Д
84 см	72 см	64 см	60 см	56 см

ЗНО 2007

Градусна міра зовнішнього кута A рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) становить 125° . Знайдіть градусну міру внутрішнього кута B .



А	Б	В	Г	Д
30°	40°	50°	60°	70°