Тема доповіді: Інтегрування диференціальних рівнянь операційним численням

Автор: студент II курсу Національного Університету Біоресурсів і Природокористування України
Жук Денис Євгенійович
Науковий керівник:
Панталієнко Л.А.

План доповіді

1. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ТА ЙОГО ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ.
2. РОЗВ’ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ
   2.1 Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами.
   2.2 Застосування інтеграла Дюамеля.
   2.3 Системи лінійних диференціальних рівнянь.
3. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ, ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ ТА ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ.
   3.1 Диференціальні рівняння механічних коливань.
   3.2 Задачі про коливання в електричному колі.
   3.3 Задачі теорії автоматичного керування.

Операційне числення

У різних сферах діяльності людини виникає багато задач, пов’язаних зі створенням математичної моделі деякого процесу (фізичного, хімічного, біологічного, економічного і т.і.). Здебільшого така модель набуває вигляду диференціального рівняння, тому подальша задача стосується методів їх розв’язання, одним із яких є операційне числення.

Операційне числення

Ідея операційного методу полягає у наступному:

від шуканої функцію «оригіналу» переходять до функції комплексної змінної – «зображення»
$x(t) \rightarrow X(p)$

над зображенням здійснюють операції, що відповідають заданим операціям над $x(t)$, – одержують «операторне рівняння»

операторне рівняння розв’язують відносно $X(p)$, що зводиться до простих алгебраїчних дій

від знайденого зображення переходять до оригіналу, що і буде шуканою функцією.
$X(p) \rightarrow x(t)$

1. Перетворення Лапласа та його основні властивості

Оригіналом називається однозначна функція $f(t)$ дійсної змінної t, яка задовольняє такі умови:

1) $f(t)$ — неперервна або кусково неперервна функція на інт

2) $f(t) = 0$ пр

3) існують так … для всіх $t \geq 0$

$$|f(t)| < Me^{at}$$

Зображенням функції-оригіналу $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p = \sigma + is$, яка визначається рівністю:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

Інтеграл Лапласа

1. Перетворення Лапласа та його основні властивості

Якщо $f(t) \to F(p)$, а функції $f'(t), f''(t), \ldots f^{(n)}(t)$ є оригіналами, то:

$$f'(t) \to pF(p) - f(0);$$
$$f''(t) \to p^2F(p) - pf(0) - f'(0);$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$f^{(n)}(t) \to p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Якщо функція $f(t)$ неперервна, то при $t = 0$, $f(0) = 0$,

$f'(t) \to pF(p)$, тобто *диференціювання оригіналу* $f(t)$ *відповідає множення на р його зображення* $F(p)$.

1. Перетворення Лапласа та його основні властивості

Інтегрування оригіналу	Диференціювання зображення	Інтегрування зображення
$\int_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(p)}{p}$	$F^{(n)}(p) \to (-t)^n f(t)$	$\int_p^\infty F(p)dp \to \frac{f(t)}{t}$

1. Перетворення Лапласа та його основні властивості

1) *Теорема лінійності*

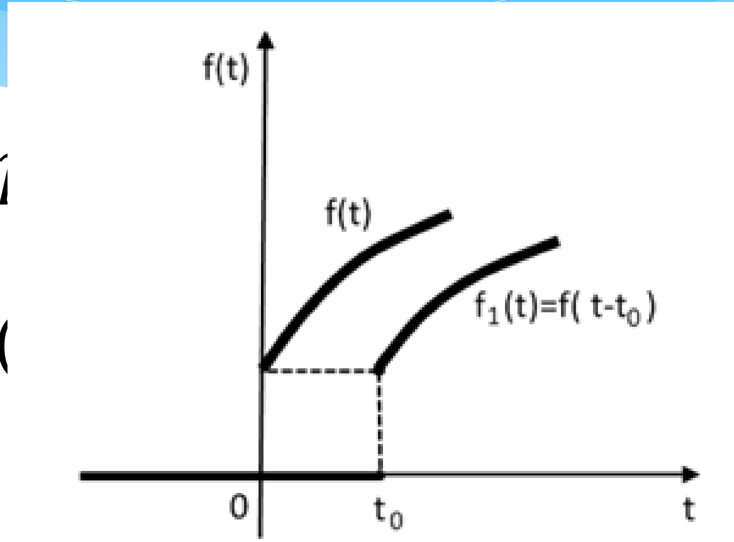
Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $g(t) \rightarrow G($ …, то: для довільних комплексних сталих α і β:

$$\alpha f(t) + \beta g(p) \rightarrow \alpha F($$ …

3) *Теорема запізнення*

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, $t_0 > 0$, то:

$$f(t - t_0) \rightarrow e^{-pt_0} \alpha F(p)$$



2) *Теорема подібності*

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то для довільного числа λ:

$$f(\lambda t) \rightarrow \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

4) *Теорема зміщення*

Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то для довільного комплексного числа p_0:

$$F(p - p_0) \rightarrow f(t) e^{p_0 t}$$

1. Перетворення Лапласа та його основні властивості

Згорткою неперервних функцій і $f(t)$ і $\varphi(t)$, $0 \leq t < \infty$ $(f * \varphi)$ називають функцію від t вигляду:

$$f * \varphi = \int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau$$

Згортці оригіналів відповідає множення зображень

$$f * \varphi = F(p)\Phi(p)$$

1. Перетворення Лапласа та його основні властивості

Якщо продиференціювати інтеграл по змінній ліворуч, дістанемо такий запис формули:

Інтегралом Дюамеля називають похідну від згортки оригіналів:

$$f(0)\cdot\varphi(t)+\int_0^t \varphi(\tau) f_t'(t-\tau)\,d\tau \to p\cdot F(p)\cdot\Phi(p)$$

2.1 Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t)$$

Потрібно знайти розв'язок $x(t)$ рівняння, що задовольняє початкові умови:

$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = x'_0, \qquad \dots , \qquad x^{(n-1)}(0) = x^{(n-1)}_0$$

Ідея застосування методів операційного числення до розв'язання диференціальних рівнянь полягає в наступному:

Застосовуючи до рівняння перетворення Лапласа, теореми про диференціювання оригіналу та лінійності, від задачі Коші перейдемо до *операторного рівняння*:

$$\left(p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n\right) X(p) + Q(p) = F(p)$$

Розв'язавши операторне рівняння відносно $X(p)$:

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n}$$

знаходимо оригінал, що і буде шуканим розв'язком $x(t)$.

Приклад 1

Розв'язати задачу Коші: $y'' - 2y' + y = e^t,\ y(0) = 0,$ $y'(0) = 1.$

Розв'зання:

Нехай: $y(t) \to Y(p)$

Тоді:

$y'(t) \to pY(p) - y(0)$

$y''(t) \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0)$

$e^t \to \dfrac{1}{p-1}$

$$p^2Y(p) - 1 - 2pY(p) + Y(p) = \frac{1}{p-1}$$

$$Y(p)(p^2 - 2p + 1) = \frac{1}{p-1} + 1$$

$$Y(p) = \frac{1 + p - 1}{(p-1)^3} = \frac{p}{(p-1)^3} = \frac{1}{(p-1)^3} + \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$\frac{1}{(p-1)^3} \to \frac{t^2}{2!}e^t, \qquad \frac{1}{(p-1)^2} \to \frac{t}{1!}e^t$$

$$Y(p) = \frac{p}{(p-1)^3} \to \frac{t^2}{2!}e^t + \frac{t}{1!}e^t$$

Відповідь: $y(t) = \dfrac{t^2}{2}e^t + te^t = e^t\left(\dfrac{t^2}{2} + t\right)$

2.2 Застосування інтеграла Дюамеля

Нехай потрібно розв'язати рівняння:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t)$$

При нульових початкових умовах:

$$x^{(n)}(0) = 0;\ x^{(n-1)}(0) = 0; \ldots x'(0) = 0; x(0) = 0$$

Позначимо ліву частину рівняння символом $L(x)$, що називають *лінійним диференціальним оператором n-го порядку*:

$$L(x) = f(x)$$

2.2 Застосування інтеграла Дюамеля

Теорема. Якщо $x_1(t)$– розв'язок рівняння $L(x_1) = 1$ при нульових початкових умовах, то розв'язком рівняння $L(x) = f(x)$ при тих самих початкових умовах є функція:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x'_1(t-\tau)d\tau$$

Або

$$x(t) = \int_0^t x'_1(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

Приклад 2

Застосовуючи інтеграл Дюамеля знайти розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = e^t$, при початкових умовах $y(0) = y'(0) = 0$.

Розв'язання:

Розглянемо допоміжне рівняння:

$$y'' - 2y' + y = 1$$

Розв'язок позначимо за $y_1(t)$

Нехай $y_1(t) \to Y_1(p)$, тоді:

$y'_1(t) \to pY_1(p)$;

$y''_1(t) \to p^2 Y_1(p)$;

$1 \to \frac{1}{p}$

$$p^2 Y_1(p) - 2pY_1(p) + Y_1(p) = \frac{1}{p}$$

$$Y_1(p)(p^2 - 2p + 1) = \frac{1}{p}$$

$$Y_1(p)(p-1)^2 = \frac{1}{p}$$

$$\boldsymbol{Y_1(p) = \frac{1}{p(p-1)^2}}$$

$$= -\frac{(p-1) - p}{p(p-1)^2} = -\frac{1}{p(p-1)} + \frac{1}{(p-1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$y_1(t) = 1 - \frac{t^0}{0!}e^t + \frac{t}{1!}e^t = 1 - e^t + te^t$$

$$y'_1(t) = -e^t + e^t + te^t = te^t$$

$$y(t) = \int_0^t \tau e^\tau e^{t-\tau} d\tau = \int_0^t \tau e^t d\tau = e^t \int_0^t \tau d\tau = e^t \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t = e^t \frac{t^2}{2}$$

Відповідь: $y(t) = e^t \frac{t^2}{2}$

2.3 Системи лінійних диференціальних рівнянь

Розв'язання задачі Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку зі сталими коефіцієнтами здійснюється за аналогією:

1) Застосовуємо перетворення Лапласа до кожного з рівнянь системи з урахуванням початкових умов.

2) Розв'язуємо отриману систему операторних рівнянь методом визначників або виключення.

3) Відновлюємо оригінали, що і будуть розв'язками вихідної задачі Коші.

3.1 Диференціальні рівняння механічних коливань.

В механіці коливання матеріальної точки маси m описується рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}\ f_1(t).$$

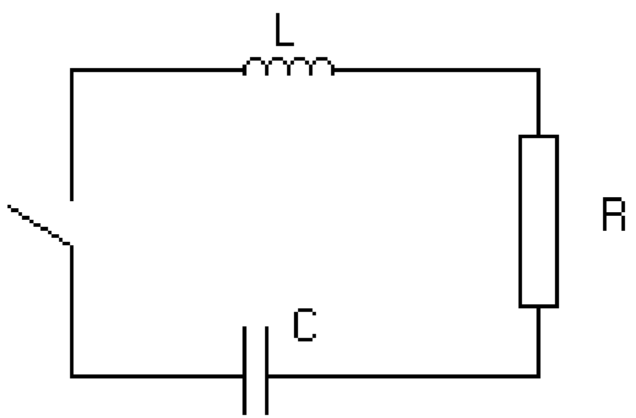
Розв'язком такого типу рівнянь описують малі коливання й інші механічні системи з одним ступенем свободи.

При вивченні пружних коливань механічних систем часто потрібно розглядати різні типи зовнішньої сили, зокрема періодичної. У цьому випадку процес описується рівнянням:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = A\sin\omega t$$

3.2 Задачі про коливання в електричному колі

Напруга включається в деякий момент часу в контур, який складається з послідовно з'єднаних коефіцієнту самоіндукції L, опору R та ємності C. Потрібно знайти величину струму в колі як функцію часу t, якщо в початковий момент часу величина струму в контурі і заряд конденсатора дорівнюють нулю.



3.2 Задачі про коливання в електричному колі

Закон Кірхгофа:

Диференційні рівняння

Маємо такі рівняння, перетворюємо та здійснюємо заміну:

$$U = U_L + U_C + U_R$$

$$U_L = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$U_C = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$$

$$U_R = Ri(t)$$

$$U_L + U_C + U_R = U$$

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dU}{dt}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{dU}{dt}\frac{1}{L}$$

де $2\lambda = \frac{R}{L}$, $\omega = \sqrt{\frac{1}{CL}}$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\lambda\frac{di(t)}{dt} + \omega^2 i = \frac{dU}{dt}\frac{1}{L}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\lambda\frac{di(t)}{dt} + \omega^2 i = 0$$

Рівняння вільних коливань

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\lambda\frac{di(t)}{dt} + \omega^2 i = f(t)$$

Рівняння вимушених коливань

Приклад 3

Нехай до електричного кола, в яке послідовно включені самоіндукція L, опір R та ємність C з початковим струмом $i(0) = 0$ і зарядом $Q(0) = 0$,

... дістанемо диференціальне рівняння:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = e(t)$$

$$LpI(p) + RI(p) + \frac{1}{Cp}I(p) = E(p)$$

$$I(p) = \frac{E(p)}{Lp + R + \frac{1}{Cp}}$$

$E(p) = \frac{1}{p}$

$$I_1(p) = \frac{1}{pR + Lp^2 + \frac{1}{C}}$$

Отже, можна здійснювати розрахунок кола, не знаючи його параметрів, якщо тільки вдається експериментально одержати струм $i_1(t)$ тобто реакцію кола на одиничну напругу.

Якщо в контур ввімкнути довільну напругу $e(t)$, то матимемо за формулами Дюамеля:

$$i(t) = e(0)i_1(t) + \int_0^t e'(\tau)i_1(t-\tau)d\tau$$

3.3 Теорія автоматичного керування

Основною задачею автоматичного керування є отримання можливості розрахунку вихідного сигналу y(t) для будь-якого відомого вхідного сигналу x(t). У зв'язку з цим необхідна наявність певного математичного апарату для дослідження лінійної системи.

3.3 Теорія автоматичного керування

Основними динамічними характеристиками, що застосовуються в теорії керування є:

1. Передавальна функція – це відношення перетворення Лапласа вихідного сигналу до перетворення Лапласа вхідного за нульових початкових умов. $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

2. Вагова функція w(t) – реакція системи на δ-функцію при нульових початкових умовах.

3. Перехідна функція – реакція системи на одиничний імпульс. $w(t) = h'(t);\ \ h(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau$

3.3 Теорія автоматичного керування

Для отримання вагової функції, її також називають імпульсною перехідною функцією, в якості стандартного сигналу використовується δ-функція:

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 0 \text{ при } t \neq \tau \\ \infty \text{ при } t = \tau \end{cases}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

Вагову функцію можна отримати і як розв'язок диференціального рівняння:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b\delta(t);$$

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n)}(0) = 0$$

Приклад 4

Нехай на вхід об'єкта подається сигнал x(t) = 1(t), а на виході знімається сигнал, що описується функцією $y(t) = 2e^{-2t}$. Визначити передавальну функцію

Розв'язок: $x(t) = 1$ $y(t) = 2e^{-2t}$

$$x(s) = \frac{1}{s} \qquad y(s) = \frac{2}{s+2}$$

$$W(s) = \frac{2s}{s+2}$$

Вирази для передавальної функції є не що інше, як перетворення Лапласа від вагової функції. $w(t) \to W(s)$

Приклад 5

Нехай об'єкт описується диференціальним рівнянням $y''(t) + 3y'(t) + 4y(t) = 2x(t); y(0) = y'(0) = 0.$ Знайти h(s) і w(s).

Розв’язання:

$$y'(t) \to sy(s)$$
$$y''(t) \to s^2 y(s)$$
$$x(t) \to x(s)$$

Оскільки: $h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$, то $h(s) = \frac{w(s)}{s}$

$$s^2 y(s) + 3sy(s) + 4y(s) = 2x(s)$$

$$y(s)(s^2 + 3s + 4) = 2x(s)$$

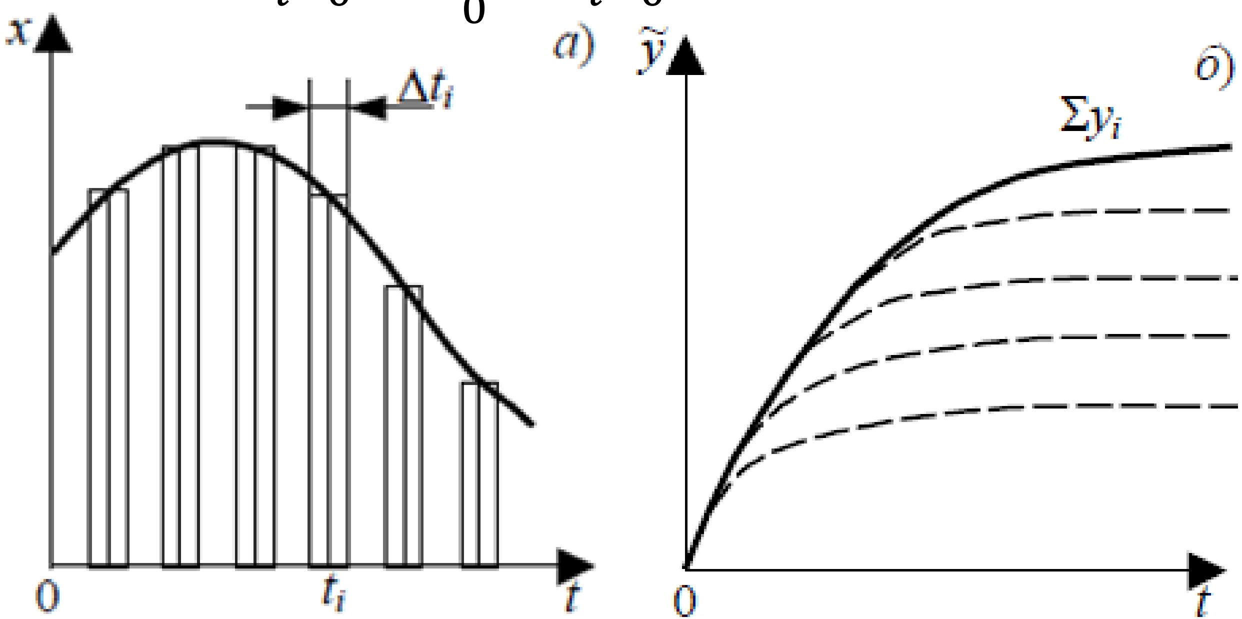
$$h(s) = \frac{2}{s(s^2 + 3s + 4)}$$

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 4} = W(s)$$

3.3 Застосування інтегралу Дюамеля

Передбачається, що на вхід об'єкта, що описується ваговою функцією w(t), подається сигнал x(t).

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{y}_i(t) = \sum_{i=0}^{n} w(t-t_i)\Delta t_i x(t_i)$$



3.3 Застосування інтегралу Дюамеля

Якщо для подання вхідного сигналу використовувати формулу

$$x(t) = x(0) * 1(t) + \int_0^t x'(\tau) * 1(t-\tau)d\tau,$$

то інтеграл Дюамеля записується через перехідну функцію:

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t \frac{h(t-\tau)(dx(\tau))}{d\tau}d\tau$$

або

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t \frac{dx(t-\tau)}{d\tau}h(\tau)d\tau$$

3.3 Теорія автоматичного керування

Одним з найважливіших застосувань операційного числення є розв’язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, якими якраз і описуються системи автоматичного керування.

Розв’язування диференціального рівняння у цьому випадку складається з наступних етапів:

1
- перетворення рівняння за Лапласом

2
- пошук розв’язку в області комплексної змінної s

3
- перехід в область дійсної змінної шляхом зворотного перетворення Лапласа

Приклад 5

Розв’язати задачу Коші

$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_0 1(t);\ \ y(0) = y'(0) = 0$$

Розв’язання:

$$a_2s^2y(s) + a_1sy(s) + a_0y(s) = b_0\frac{1}{s}$$

$$y(s) = \frac{b_0}{s(a_2s^2 + a_1s + a_0)}$$

Нехай поліном $a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$, тоді воно матиме корені s_1 та s_2.

$$y(s) = \frac{b_0}{s(s - s_1)(s - s_2)}$$

$$y(s) = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{(s - s_1)} + \frac{C_2}{(s - s_2)}$$

Методом невизначених коефіцієнтів знаходимо $C_0,\ C_1,\ C_2$

$$C_0 = \frac{b_0}{s_1s_2};\ C_1 = \frac{b_0}{s_1(s_1 - s_2)};\ C_2 = \frac{b_0}{s_2(s_2 - s_1)}$$

Здійснюємо зворотнє перетворення Лапласа

$$y(t) = C_0 + C_1e^{s_1t} + C_2e^{s_2t}$$

Висновки

1. Метод операційного числення ефективний щодо розв'язання прикладних фізико-технічних задач.

2. Розв'язання конкретної задачі за методикою операційного числення можна подати у різних варіантах (із застосуванням теорем про диференціювання та інтегрування оригіналу, інтеграла Дюамеля).

3. Основні динамічні характеристики, що застосовуються в теорії керування означають саме через поняття теорії перетворення Лапласа.

4. Не всі поширені в теорії керування та автоматиці моделі диференціальних рівнянь можна розв'язати класичними методами (наприклад, релейні системи, системи зі змінною структурою)

5. Характерною особливістю перетворення Лапласа є широкий круг задач, що охоплюються даною методикою, та різноманітність підходів операційного числення щодо їх конкретного розв'язання.