

**Ловейкін В.С.,  
Ромасевич Ю.О.,  
Ляшко А.П.,  
Закревський Б.В.**  
Національний університет  
біоресурсів і  
природокористування України,  
м. Київ, Україна  
**E-mail:** lovvs@ukr.net

**ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМУ РУХУ  
РОБОТА-МАНІПУЛЯТОРА  
З ДВОМА ПОСТУПАЛЬНИМИ ТА  
ОДНІЄЮ ОБЕРТАЛЬНОЮ ЛАНКАМИ  
У ПЛОЩИНІ ПОВОРОТУ**

<https://doi.org/10.37700/ts.2024.24.168-184>

УДК 621.87

*Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О., Ляшко А.П., Закревський Б.В. Оптимізація режиму руху робота-маніпулятора з двома поступальними та однією обертальною ланками у площині повороту.*

**Анотація.** В представлений науковій роботі наведено оптимізацію режимів руху робота-маніпулятора з двома поступальними та однією обертальними ланками в площині повороту маніпулятора. Між двома крайніми положеннями захвату робота-маніпулятора вибрано траєкторію його руху, яка представляє собою пряму, що з'єднує ці положення, оскільки по ній найкоротша відстань переміщення вантажу. Вздовж обраної траєкторії протягом всього циклу руху визначені оптимальні режими руху, де за критерії оптимізації використані середні значення кінетичної енергії та енергії ривків захвату з вантажем. В першому випадку отримали режим руху, який забезпечує постійну швидкість захвату на всій ділянці руху. При такому режимі руху забезпечуються мінімальні енергетичні витрати, але його не можна використати на всій ділянці руху, бо в ньому відсутні ділянки пуску та зупинки. Рекомендовано використовувати оптимальний енергетичний режим на ділянках усталеного руху. В другому випадку отримали режим руху, у якого швидкість змінюється протягом всього циклу руху за кривою четвертого порядку, а пришвидшення – третього. Причому, на відміну від оптимального енергетичного режиму руху, при оптимальному ривковому режимі швидкість і пришвидшення захвату на початку і в кінці руху дорівнюють нулю, тому цей режим може бути використаний протягом всього циклу руху. Розроблено комплексний режим руху захвату з вантажем, де оптимальний ривковий режим руху захвату використано на окремих ділянках пуску та зупинки, а на ділянці усталеного руху – оптимальний енергетичний режим руху. В результаті розв'язування зворотних задач кінематики для визначених оптимальних режимів руху захвату встановлені закони зміни узагальнених координат робота-маніпулятора, які дають можливість оцінити характеристики приводних механізмів і систем їхнього керування. Порівняння кінематичних характеристик захвату при оптимальних режимах руху з визначеними характеристиками узагальнених координат при цих же режимах руху показує їхню принципову відмінність. Якщо оптимальні характеристики захвату плавно змінюються, то узагальнені координати мають знакозмінний характер, що вказує на необхідність постійного керування рухом приводними механізмами. Встановлено, що на характер зміни кінематичних характеристик приводних механізмів поряд з режимом руху захватного пристрою має значний вплив конструкція елементів робота-маніпулятора. В результаті проведених досліджень для реалізації оптимальних режимів

руху захвату встановлені необхідних параметрів та характеристик приводних механізмів видовження та повороту руки захвату, які дозволять розробляти систему їхнього керування.

**Ключові слова:** робот-маніпулятор, захватний пристрій, траєкторії руху, критерії оптимізації, оптимальні режими руху, узагальнені координати, приводні механізми, системи керування.

Loveikin V.S., Romasevych Yu.O., Liasko A.P., Zakrevskiy B.V. **Optimization of movement mode of robot-manipulator with two translational and one rotary links in plane of rotation.**

**Abstract.** The presented scientific paper describes the optimization of the motion modes of a robot-manipulator with two translational and one rotational links in the plane of the manipulator rotation. Between the two extreme positions of the robot-manipulator grip, the trajectory of its movement was chosen, which is a straight line connecting these positions, since it is the shortest distance of a load moving. Along the selected trajectory during the entire movement cycle, the optimal movement modes were determined, where the average values of kinetic energy and energy of grip jerks with the load were used as optimization criteria. In the first case, a movement mode that provides a constant speed of a grip over the entire movement section was received. With this mode of movement, minimum energy consumption is ensured, but it cannot be used on the entire section of movement, because there are no start and stop sections in it. It is recommended to use the optimal energy mode in lines of steady movement. In the second case, a mode of movement in which the speed changes during the entire cycle of movement according to the curve of the fourth order, and the acceleration – of the third were obtained. Moreover, in contrast to the optimal energy movement mode, with the optimal jerk mode, the speed and acceleration of the grip at the beginning and at the end of the movement are equal to zero, so this mode can be used throughout the entire movement cycle. A complex mode of movement of the grip with a load was developed, where the optimal jerk mode of movement of the grip was used in separate sections of the start and stop, and in the section of steady motion – the optimal energy mode of movement. As a result of solving the inverse problems of kinematics, laws were established. They allow to determine optimal modes of motion of the grip in terms of the generalized coordinates of the robot-manipulator. It makes it possible to evaluate the characteristics of drive mechanisms and their control systems. A comparison of the kinematic characteristics of the grip in the optimal modes of movement with the determined characteristics of the generalized coordinates in the same modes of movement shows their fundamental difference. Optimal grip characteristics change smoothly, the generalized coordinates have a sign-changing character, which indicates the need for constant movement control by drive mechanisms. It was established that the design of the elements of the robot-manipulator has a significant influence on the nature of the change in the kinematic characteristics of the drive mechanisms along with the movement mode of the grip. As a result of the conducted research, the necessary parameters and characteristics of the drive mechanisms for the extension and rotation of the grip have been established for the implementation of its optimal modes of movement. It allows the development of their control system.

**Key words:** manipulator, gripping device, motion trajectories, optimization criteria, optimal motion modes, generalized coordinates, drive mechanisms, control systems.

### Постановка проблеми

В процесі переміщення робота- маніпулятором з одного положення в інше виникає задача вибору траєкторії переміщення захвату, режиму його руху вздовж обраної

траєкторії та параметрів і характеристик приводних механізмів, які реалізують необхідні режими руху. При виборі режимів руху виникає проблема встановлення критерію оптимізації і знаходження його екстремального значення. Якщо критерій відображає небажані властивості, то його необхідно мінімізувати, а якщо бажані, то – максимізувати. Розв'язання цієї задачі дозволяє вибрати оптимальний режим руху захватного пристрою робота-маніпулятора. Для реалізації оптимального режиму руху захвату виникає задача вибору приводних механізмів та систем їхнього керування. Для цього необхідно розв'язати зворотню задачу кінематики, яка полягає в тому, щоб за характеристиками оптимального режиму руху захвату визначити кінематичні характеристики узагальнених координат робота-маніпулятора. За законами зміни узагальнених координат визначаються параметри та характеристики приводних механізмів і системи їхнього керування.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

При переміщенні роботів-маніпуляторів значна увага надається плануванню та вибору траєкторії переміщення, а також її відслідковування в процесі руху [1]. Важливого значення набувають питання планування траєкторії і керування рухом роботів-маніпуляторів для відслідковування траєкторій. В роботі [2] розглянуті питання оптимізації та планування траєкторії руху робота з мінімізацією умов невизначеності при постійному моніторингу. В статті [3], за критерій оптимізації використано плавність зміни траєкторії під час руху, що мінімізує дію динамічних навантажень на захватний пристрій та елементи конструкції маніпулятора. Авторами роботи [4] розглянуті питання оптимального планування траєкторії в динамічних середовищах, де перешкода, переміщенню робота-маніпулятора, рухається по довільних траєкторіях. В роботі [5] наведено огляд генетичних алгоритмів оптимізації та здійснено багатокритеріальну оптимізацію планування траєкторії руху робота-маніпулятора на основі покращеного генетичного алгоритму. В роботі [6] проведено оптимізацію планування траєкторії руху промислового робота з використанням алгоритму імітації процесу відпалювання. При оптимізації планування траєкторій значна увага приділяється методам штучного інтелекту. Так, наприклад, авторами статті [7] для оптимізації планування траєкторії руху робота-маніпулятора використано алгоритм штучного бджолиного рою, що дозволило з різних точок зору розглядати вибір траєкторії руху.

Важливого значення набувають методи моделювання та оптимізації режимів руху роботів і маніпуляторів по оптимально запланованих траєкторіях. В роботі [8] здійснено математичне моделювання динаміки руху маніпулятора в процесі зміни вильоту захвату вздовж вибраної траєкторії руху. В роботі [9] оптимізовано одночасний рух механізмів зміни вильоту та повороту крана-маніпулятора з використанням в якості критерію оптимізації середньоквадратичного значення сумарної потужності механізмів. В роботі [10] здійснено мінімізацію високочастотних коливань механізму зміни вильоту крана-маніпулятора при усталеному режимі повороту з використанням в якості критерію оптимізації середньоквадратичного значення швидкості зміни рушійних зусиль. В статтях [11] та [12] здійснено оптимізацію режимів руху маніпулятора, в якого стріла розміщена на пружній основі. Тут за критерії оптимізації використані середньоквадратичні значення кінематичних та силових характеристик маніпулятора. З наведеного аналізу проведених досліджень можна бачити, що питанням планування траєкторій руху роботів і маніпуляторів, а також їхнього моделювання та оптимізації режимів рухом приділяється значна увага.

При визначенні узагальнених координат робота-маніпулятора та їх похідних за часом виникає потреба в розв'язуванні зворотних задач кінематики. Проаналізуємо

сучасні публікації з цього напрямку досліджень.. Авторами роботи [13] наведений новий підхід до розв'язування зворотних задач кінематики маніпуляторів з надлишковими ступенями вільності з використанням алгоритму мурашиної колонії. В статті [14] розв'язані зворотні задачі кінематики роботів-маніпуляторів з п'ятьма ступенями вільності з використанням методів нейронних мереж. В роботі [15] розв'язувались зворотні задачі кінематики керуванням дублюючих маніпуляторів з надлишковими ступенями вільності. Авторами статті [16] проведено аналіз досліджень з відкритим вихідним кодом для покращення вирішення загальних задач зворотної кінематики маніпуляторів. В роботі [17] розглянуто розв'язок зворотних задач кінематики декількох маніпуляторів з надлишковими ступенями вільності з метою запобігання зіткнень в динамічних середовищах. В статті [18] наведено співставлення розв'язування зворотних задач кінематики градієнтними алгоритмами оптимізації роботів-маніпуляторів з надлишковими ступенями вільності. Огляд розв'язувань зворотних задач кінематики роботів-маніпуляторів з надлишковими ступенями вільності і послідовним інтерфейсом присвячені роботи [19-21].

З наведеного аналізу наукових досліджень по плануванню траєкторій, оптимізації режимів руху та розв'язування зворотних задач кінематики руху показує, що на достатньому рівні вирішується кожна з задач, однак є потреба в комплексній постановці і вирішенні задач оптимізації всього процесу планування руху роботів-маніпуляторів.

### Формулювання мети досліджень

Мета досліджень направлена на оптимізацію режимів руху робота-маніпулятора з двома поступальними та однією обертальною ланками в площині повороту.

### Результати досліджень

Дослідження руху робота-маніпулятора з трьома ступенями вільності проведено в площині повороту, до складу якого входить дві поступальні і одна обертальна ланки (рис. 1). За узагальнені координати такого робота-маніпулятора прийняті: кутова координата повороту стійки  $\varphi_1$  та лінійні координати вертикального підйому  $s_2$  (на рис.1 не показано) і горизонтального переміщення захвату з вантажем  $s_3$ . В площині повороту здійснюють рух ланки, що мають поступальний та обертальний рух, тобто ланки 1 і 3, а ланка 2 повертається разом з ланкою 1, тому координата  $s_2$  залишається незмінною. Поставлена задача перемістити захват робота-маніпулятора з точки 0 з координатами  $(y_0, x_0)$  в точку 1 з координатами  $(y_1, x_1)$  за час  $t_1$  вздовж прямої осі  $\xi$ , яка обрана за траєкторію руху захвату з вантажем. В довільний момент часу  $t$  ( $0 \leq t \leq t_1$ ) положення захвату з вантажем характеризується координатою  $\xi$ .

Переміщення точки D захватного пристрою відносно точки 0 вздовж осі  $\xi$  визначається наступною залежністю:

$$\xi = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (1)$$

В точці 0 переміщення  $\xi = 0$ , а в точці 1 -

$$\xi_1 = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}.$$

Визначимо оптимальний енергетичний режим руху захвату вздовж прямої  $\xi$  на ділянці від точки 0 до точки 1. За критерій оптимізації оберемо середнє значення кінематичної енергії захвату на ділянці руху  $0 \leq \xi \leq \xi_1$  за час  $0 \leq t \leq t_1$

$$T_{cp} = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} T dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

де  $t$  – час;  $t_1$  – тривалість руху захватного пристрою з вантажем;  $T$  – кінематична енергія захвату з вантажем, яка визначається наступною залежністю

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2, \quad (3)$$

де  $m$  – маса захватного пристрою з вантажем.

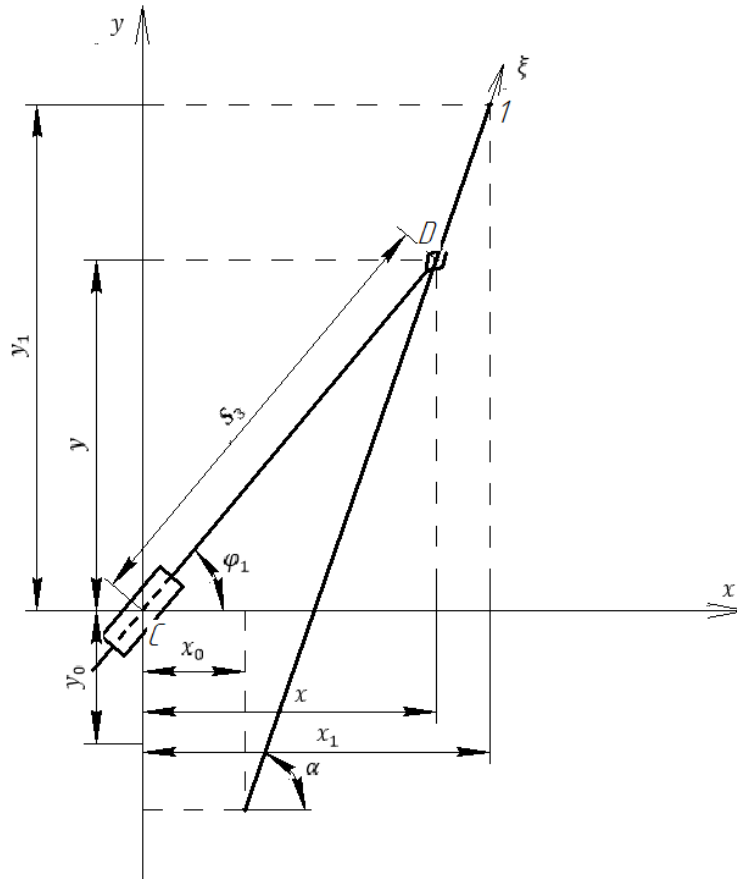


Рис. 1. Схема руху робота-маніпулятора у площині повороту

Умовою мінімуму критерію (2) є рівняння Ейлера, яке має вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = 0. \quad (4)$$

В результаті підстановки виразу (3) в рівняння (4) отримаємо

$$\ddot{\xi} = 0. \quad (5)$$

Розв'язок рівняння (5) при крайових умовах руху::

$$t=0; \xi = 0; t=t_1; \xi = \xi_1. \quad (6)$$

дає закон руху захвату з вантажем:

$$\xi = \frac{\xi_1 t}{t_1}; \dot{\xi} = \frac{\xi_1}{t_1} = const; \ddot{\xi} = 0. \quad (7)$$

Отже, для забезпечення оптимального енергетичного режиму руху захват повинен рухатися на всій ділянці руху з постійною швидкістю.

Знайдемо для цього режиму руху захватного пристрою з вантажем кінематичні характеристики узагальнених координат  $\varphi_1$  та  $S_3$  виражених через координату  $\xi$ :

$$S_3 = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$x = x_0 + (x_1 - x_0) \frac{t}{t_1}; y = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{t}{t_1}. \quad (8)$$

Тоді

$$S_3 = \sqrt{\left[ x_0 + (x_1 - x_0) \frac{t}{t_1} \right]^2 + \left[ y_0 + (y_1 - y_0) \frac{t}{t_1} \right]^2}. \quad (9)$$

Візьмемо похідні за часом від виразів (8):

$$\dot{x} = \frac{x_1 - x_0}{t_1}; \quad \dot{y} = \frac{y_1 - y_0}{t_1}; \quad \ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = 0. \quad (10)$$

Візьмемо похідну за часом від виразу (9) і знайдемо швидкість видовження руки маніпулятора

$$\dot{s}_3 = \frac{[x_0 + (x_1 - x_0)\frac{t}{t_1}] \cdot \frac{x_1 - x_0}{t_1} + [y_0 + (y_1 - y_0)\frac{t}{t_1}] \cdot \frac{y_1 - y_0}{t_1}}{\sqrt{[x_0 + (x_1 - x_0)\frac{t}{t_1}]^2 + [y_0 + (y_1 - y_0)\frac{t}{t_1}]^2}}. \quad (11)$$

За залежністю (11) побудуємо графік швидкості видовження руки маніпулятора (рис. 2).

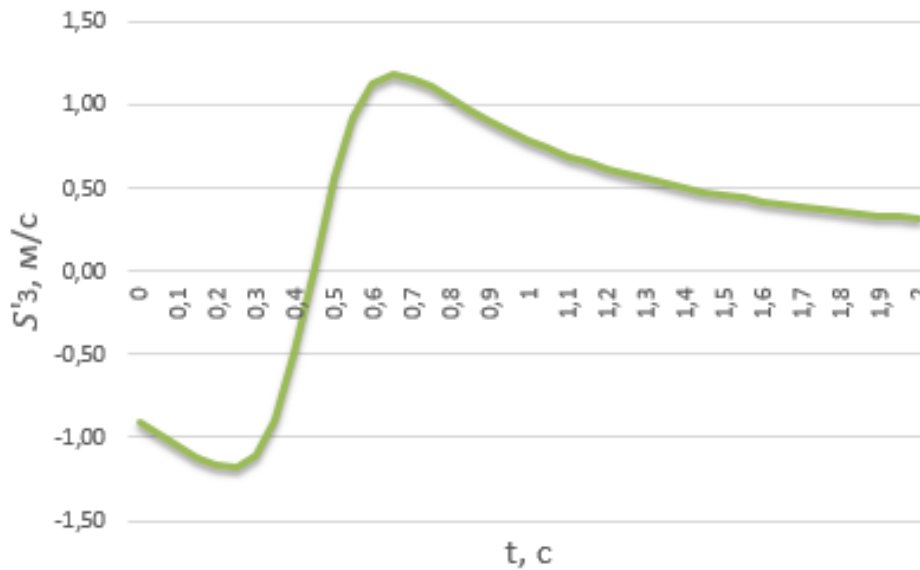


Рис. 2. Графік швидкості видовження руки

З графіка на рис. 2 видно, що при постійній швидкості захвату вздовж вибраної траєкторії руху швидкість видовження захвату має знакозмінний характер, причому на початку і в кінці руху вона приймає не нульові значення. Це вказує на те, що такий режим видовження руки захвату може бути застосований лише на ділянці усталеного руху і не може бути використаний на ділянках пуску та зупинки.

Взявши похідну за часом від виразу (11) з урахуванням виразів (8) і (10), отримаємо лінійне пришвидшення видовження руки захвату при оптимальному енергетичному режимі руху захвату:

$$\ddot{s}_3 = \frac{[(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(x^2 + y^2) - (x\dot{x} + y\dot{y})^2]}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (12)$$

За залежністю (12) з урахуванням виразів (8) і (10) побудовано графік пришвидшення видовження руки маніпулятора (рис.3) при оптимальному енергетичному режимі руху захвату.

З рис.3 можна зробити висновок, що при нульовому значенні пришвидшення захвату на всій ділянці руху, пришвидшення видовження руки захвату має змінний характер, причому на початку руху воно різко спадає, а потім таким же чином зростає з подальшою стабілізацією і в кінці руху досягає нульового значення.

Визначимо кутову координату повороту руки маніпулятора при оптимальному енергетичному режимі руху захвату

$$\tan \varphi_1 \frac{y}{x}; \quad \varphi_1 = \arctan \frac{y_0 + (y_1 - y_0)\frac{t}{t_1}}{x_0 + (x_1 - x_0)\frac{t}{t_1}}. \quad (13)$$

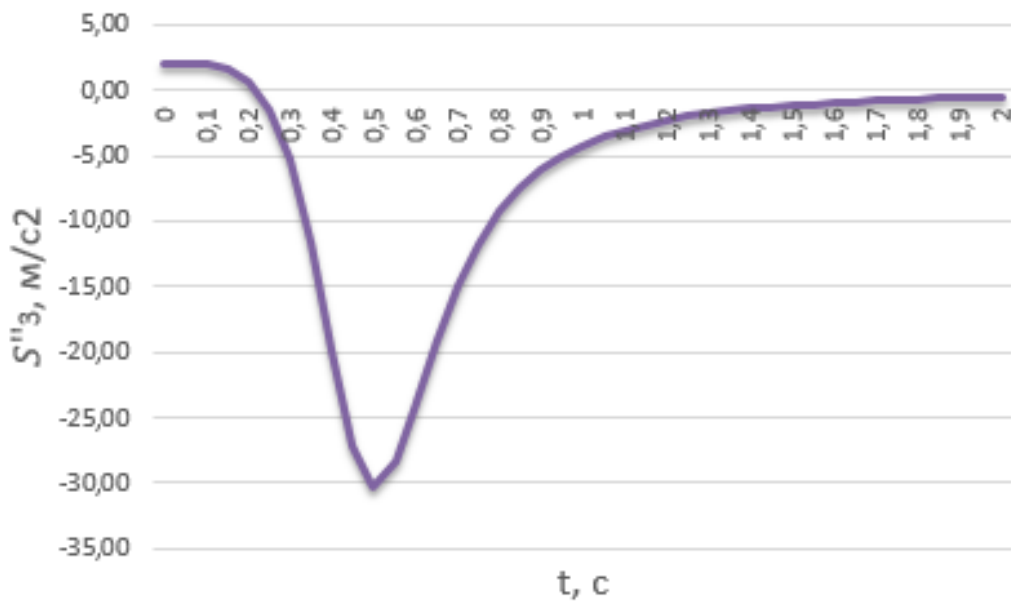


Рис. 3. Графік пришвидшення видовження руки

Взявши похідну за часом від виразу (13), отримаємо кутову швидкість повороту руки маніпулятора при оптимальному енергетичному режимі руху захвату

$$\varphi_1 = \frac{(y_1 - y_0) \left[ x_0 + (x_1 - x_0) \frac{t}{t_1} \right] - (x_1 - x_0) \left[ y_0 + (y_1 - y_0) \frac{t}{t_1} \right]}{\left\{ \left[ x_0 + (x_1 - x_0) \frac{t}{t_1} \right]^2 + \left[ y_0 + (y_1 - y_0) \frac{t}{t_1} \right]^2 \right\} t_1} \quad (14)$$

За виразом (14) побудовано графік кутової швидкості повороту руки маніпулятора (рис. 4) при оптимальному енергетичному режимі руху захвату.

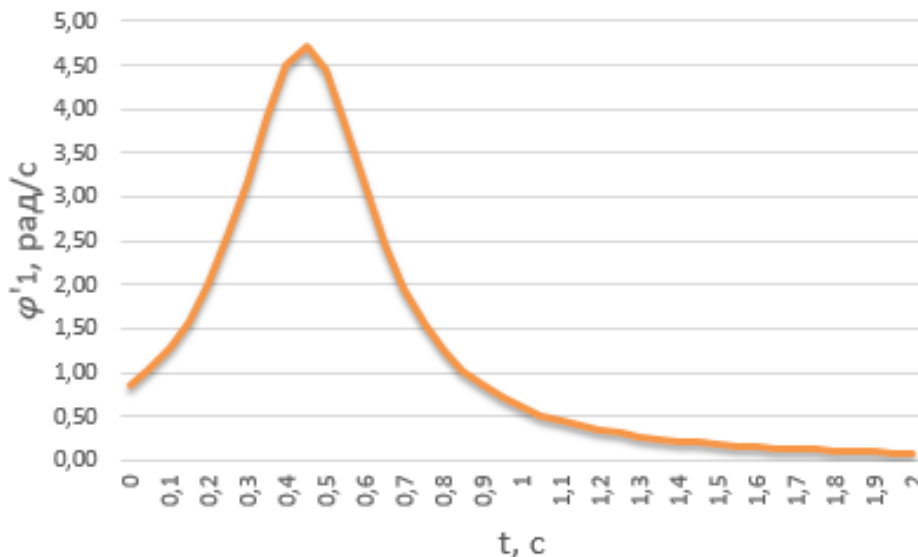


Рис.4. Графік кутової швидкості повороту руки

З графіка на рис.4 видно, що при постійній швидкості захвату, вздовж вибраної траєкторії руху, кутова швидкість повороту руки має змінний характер, причому на початку руху вона приймає не нульове значення, а в кінці – прямує до нуля. Це вказує на

те, що такий режим повороту руки може бути застосований на ділянці усталеного руху та при зупинці і не може бути використаний на ділянці пуску.

Візьмемо похідну за часом від залежності (14) з урахуванням виразів (8) і (10), в результаті чого отримаємо

$$\ddot{\varphi}_1 = -\frac{2(x\dot{x}+y\dot{y})(y\dot{x}-x\dot{y})}{(x^2+y^2)^2}. \quad (15)$$

За виразом (15) побудовано графік кутового пришвидшення повороту руки маніпулятора (рис. 5) при оптимальному енергетичному режимі руху захвату.

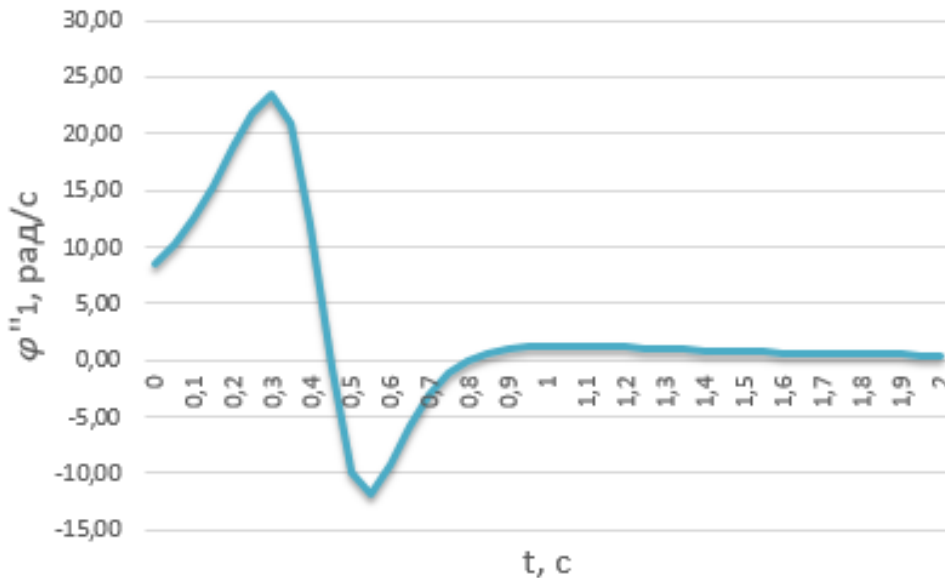


Рис. 5. Графік кутового пришвидшення повороту руки

З рис. 5 можна зробити висновок, що при нульовому значенні пришвидшення захвату на всій ділянці руху, кутове пришвидшення повороту руки маніпулятора має змінний характер, причому на початку руху воно різко зростає, а потім таким же чином спадає з подальшою стабілізацією і в кінці руху досягає нульового значення.

Оскільки оптимальний енергетичний режим не вдається реалізувати на практиці, бо в нього відсутні ділянки пуску та гальмування, тому він може бути використаний лише на ділянці усталеного руху приводних механізмів робота-маніпулятора. Тому визначимо оптимальний режим руху захвату, який може бути використаний на ділянках пуску та гальмування, а також протягом всього циклу руху. Таким оптимальним режимом руху захватного пристрою може бути режим, що мінімізує швидкість зміни динамічних навантажень. В цьому випадку за критерій оптимізації використаємо середнє значення енергії ривків за цикл руху захвату з вантажем:

$$W_{cp} = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} W dt \rightarrow \min, \quad (16)$$

де  $W$  – енергія ривків, яка для захвату робота-маніпулятора визначається наступною залежністю

$$W = \frac{1}{2} m \ddot{\xi}^2. \quad (17)$$

Тут  $m$  – маса вантажу з захватом. Умовою мінімуму критерію (16) з урахуванням виразу (17) є рівняння Пуассона, яке має вигляд

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial \dot{\xi}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial W}{\partial \ddot{\xi}} - \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial W}{\partial \ddot{\xi}} = 0. \quad (18)$$

Визначимо складові частини рівняння (18):

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial \dot{\xi}} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial \ddot{\xi}} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial \ddot{\xi}} = m \ddot{\xi}; \quad \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial W}{\partial \ddot{\xi}} = m \ddot{\xi}^{\cdot\cdot\cdot}. \quad (19)$$



Підставимо вирази (19) в рівняння (18), після чого отримаємо:

$$m\ddot{\xi} = 0.$$

Отримане рівняння виконується при умові, що

$$\ddot{\xi} = 0. \quad (20)$$

Тут і в подальшому крапки над координатами означають похідні за часом, а їх кількість вказує на порядок похідної.

Розв'яжемо диференціальне рівняння (20). Для цього візьмемо шість разів інтеграл зліва і справа рівняння (20). В результаті чого будемо мати:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= D_1; \\ \dot{\xi} &= D_1 t + D_2; \\ \ddot{\xi} &= \frac{1}{2} D_1 t^2 + D_2 t + D_3; \\ \dot{\xi} &= \frac{1}{6} D_1 t^3 + \frac{1}{2} D_2 t^2 + D_3 t + D_4; \\ \xi &= \frac{1}{24} D_1 t^4 + \frac{1}{6} D_2 t^3 + \frac{1}{2} D_3 t^2 + D_4 t + D_5; \\ \xi &= \frac{1}{120} D_1 t^5 + \frac{1}{24} D_2 t^4 + \frac{1}{6} D_3 t^3 + \frac{1}{2} D_4 t^2 + D_5 t + D_6, \end{aligned} \quad (21)$$

де  $D_1, D_2, \dots, D_6$  – постійні інтегрування, які визначаються з крайових умов руху захвату:

$$t = 0: \xi = 0, \dot{\xi} = 0, \ddot{\xi} = 0; \quad t = t_1: \xi = \xi_1, \dot{\xi} = 0, \ddot{\xi} = 0.$$

Після підстановки цих крайових умов в залежності (21) будемо мати:

$$D_6 = 0; \quad D_5 = 0; \quad D_4 = 0; \quad (22)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{120} D_1 t_1^5 + \frac{1}{24} D_2 t_1^4 + \frac{1}{6} D_3 t_1^3 = 0; \\ \frac{1}{24} D_1 t_1^4 + \frac{1}{6} D_2 t_1^3 + \frac{1}{6} D_3 t_1^2 = 0; \\ \frac{1}{6} D_1 t_1^3 + \frac{1}{2} D_2 t_1^2 + D_3 t_1 = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Розв'язавши систему лінійних алгебраїчних рівнянь (23), отримаємо:

$$D_1 = 720 \frac{\xi_1}{t_1^5}; \quad D_2 = -360 \frac{\xi_1}{t_1^4}; \quad D_3 = 60 \frac{\xi_1}{t_1^3}. \quad (24)$$

Підставивши вирази (22) і (24) в останню залежність виразів (21), отримаємо оптимальний режим руху захвату з вантажем, який мінімізує швидкість зміни динамічних навантажень:

$$\xi = \xi_1 \frac{t^3}{t_1^3} \left( 6 \frac{t^2}{t_1^2} - 15 \frac{t}{t_1} + 10 \right). \quad (25)$$

Візьмемо похідні за часом від виразу (25) і отримаємо вирази швидкості і пришвидшення захвату:

$$\dot{\xi} = 30 \xi_1 \frac{t^2}{t_1^3} \left( \frac{t^2}{t_1^2} - 2 \frac{t}{t_1} + 1 \right); \quad (26)$$

$$\ddot{\xi} = 60 \xi_1 \frac{t}{t_1^3} \left( 2 \frac{t^2}{t_1^2} - 3 \frac{t}{t_1} + 1 \right). \quad (27)$$

За виразами (26) і (27) побудуємо графічні залежності швидкості та пришвидшення захватного пристрою, що відповідають оптимальному ривковому режиму руху (рис. 6).

Для забезпечення оптимального ривкового режиму руху захвату необхідно, щоб швидкість (рис.6,а) змінювалась за параболічним законом четвертого порядку, а пришвидшення (рис.6,б) - за законом третього порядку.

Для отриманого ривкового режиму руху захвату визначимо кінематичні характеристики узагальнених координат робота-маніпулятора. Для цього спочатку виразимо положення захвату відносно нерухомої системи координат  $x$  і  $y$ :

$$x = x_0 + (x_1 - x_0) \frac{t^3}{t_1^3} \left( 6 \frac{t^2}{t_1^2} - 15 \frac{t}{t_1} + 10 \right); \quad (28)$$

$$y = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{t^3}{t_1^3} \left( 6 \frac{t^2}{t_1^2} - 15 \frac{t}{t_1} + 10 \right). \quad (29)$$

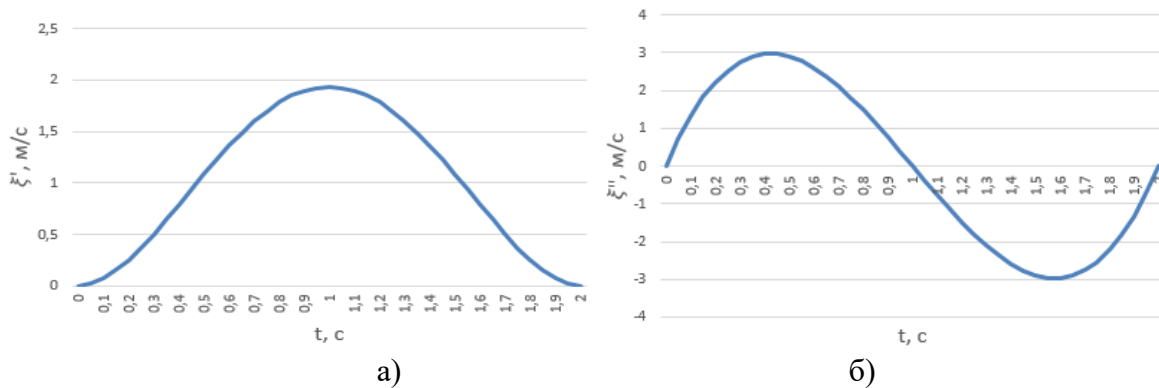


Рис. 6. Графіки швидкості (а) та пришвидшення (б) оптимального ривкового режиму руху захвату

Взявши похідні за часом від виразів (28) і (29), отримаємо проекції швидкості захвату на координатні осі:

$$\dot{x} = 30(x_1 - x_0) \frac{t^2}{t_1^3} \left( \frac{t^2}{t_1^2} - 2 \frac{t}{t_1} + 1 \right); \quad (30)$$

$$\dot{y} = 30(y_1 - y_0) \frac{t^2}{t_1^3} \left( \frac{t^2}{t_1^2} - 2 \frac{t}{t_1} + 1 \right). \quad (31)$$

Взявши похідні за часом від виразів (30) і (31), отримаємо проекції пришвидшень захвату на координатні осі:

$$\ddot{x} = 60(x_1 - x_0) \frac{t}{t_1^3} \left( 2 \frac{t^2}{t_1^2} - 3 \frac{t}{t_1} + 1 \right); \quad (32)$$

$$\ddot{y} = 60(y_1 - y_0) \frac{t}{t_1^3} \left( 2 \frac{t^2}{t_1^2} - 3 \frac{t}{t_1} + 1 \right). \quad (33)$$

Узагальнена координата видовження руки маніпулятора  $S_3$  визначається залежністю

$$s_3 = \sqrt{x^2 + y^2} = \left\{ \left[ x_0 + (x_1 - x_0) \frac{t^3}{t_1^3} \left( 6 \frac{t^2}{t_1^2} - 15 \frac{t}{t_1} + 10 \right) \right]^2 + \left[ y_0 + (y_1 - y_0) \frac{t^3}{t_1^3} \left( 6 \frac{t^2}{t_1^2} - 15 \frac{t}{t_1} + 10 \right) \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (34)$$

Взявши похідну за часом від виразу (34), отримаємо залежність швидкості видовження руки маніпулятора

$$\dot{s}_3 = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (35)$$

Підставивши у вираз (35) залежності (28), ..., (31), отримаємо залежність швидкості видовження руки при оптимальному ривковому режимі руху захвату, як це показано для переміщення при видовженні руки у формулі (34).

Взявши похідну за часом від виразу (35), отримаємо залежність пришвидшення видовження руки маніпулятора

$$\ddot{s}_3 = \frac{(x^2 + x\ddot{x} + y^2 + y\ddot{y})(x^2 + y^2) - (x\dot{x} + y\dot{y})^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (36)$$

Підставивши у вираз (36) залежності (28), ..., (33), отримаємо залежність пришвидшення видовження руки маніпулятора при оптимальному ривковому режимі руху захвату.

Скориставшись виразами (35) і (36), з урахуванням проекцій координат, швидкостей і пришвидшень захвату (28), ..., (33), побудуємо графічні залежності

швидкості та пришвидшення видовження руки маніпулятора при оптимальному ривковому режимі руху захвату (рис. 7).

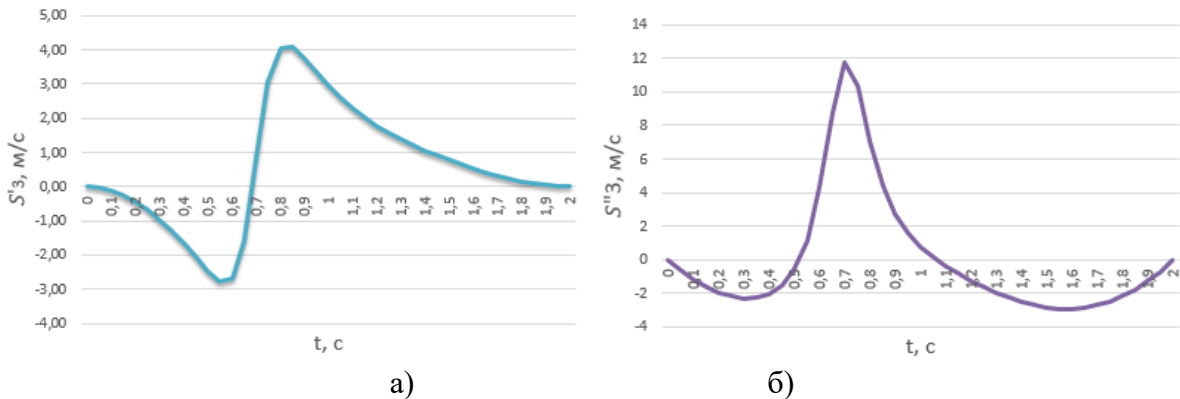


Рис. 7. Графіки швидкості (а) та пришвидшення (б) видовження руки при оптимальному ривковому режимі руху захвату

Порівнюючи графіки швидкості видовження руки маніпулятора при оптимальних енергетичному (рис.2) та ривковому (рис.7,а) режимах руху захвату можна зробити висновок, що характер зміни цих графіків є подібний, однак при оптимальному енергетичному режимі руху захвату швидкість видовження руки на початку руху приймає не нульове значення, а при оптимальному ривковому режимі руху це значення є нульовим. Тому оптимальний енергетичний режим може бути використаний лише на ділянці усталеного руху, а оптимальний ривковий – на всій ділянці руху.

Порівнюючи графіки пришвидшень видовження руки при оптимальних енергетичному (рис.3) та ривковому (рис.7,б) режимах руху захвату можна бачити, що характер їхньої зміни значно відрізняється і на початку руху пришвидшення видовження руки при енергетичному режимі є не нульовим, а при ривковому режимі пришвидшення на початку і в кінці руху є нульовими, що усуває початкові та кінцеві коливання в системі робота-маніпулятора при цьому режимі руху.

Визначимо кутову координату повороту руки робота- маніпулятора при оптимальному ривковому режимі руху захвату

$$\varphi_1 = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{y_0 + (y_1 - y_0) \frac{t^3}{t_1^3} \left( 6 \frac{t^2}{t_1^2} - 15 \frac{t}{t_1} + 10 \right)}{x_0 + (x_1 - x_0) \frac{t^3}{t_1^3} \left( 6 \frac{t^2}{t_1^2} - 15 \frac{t}{t_1} + 10 \right)} \quad (37)$$

Взявши похідну за часом від виразу (37), отримаємо залежність кутової швидкості повороту руки робота

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} \quad (38)$$

В результаті підстановки виразів (28), ..., (31) у залежність (38) отримаємо кутову швидкість повороту руки робота при оптимальному ривковому режимі руху захватного пристрою.

Взявши похідну за часом від виразу (38), знайдемо залежність кутового пришвидшення повороту руки робота

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{(\dot{y}x - \dot{x}y)(x^2 + y^2) - 2(x\dot{x} + y\dot{y})(\dot{y}x - \dot{x}y)}{(x^2 + y^2)^2} \quad (39)$$

Після підстановки виразів (28), ..., (33) у залежність (39) отримаємо кутове пришвидшення повороту руки робота при оптимальному ривковому режимі руху захватного пристрою. Побудуємо графічні залежності кутової швидкості та пришвидшення повороту руки робота-маніпулятора при оптимальному ривковому режимі руху захватного пристрою (рис. 8).

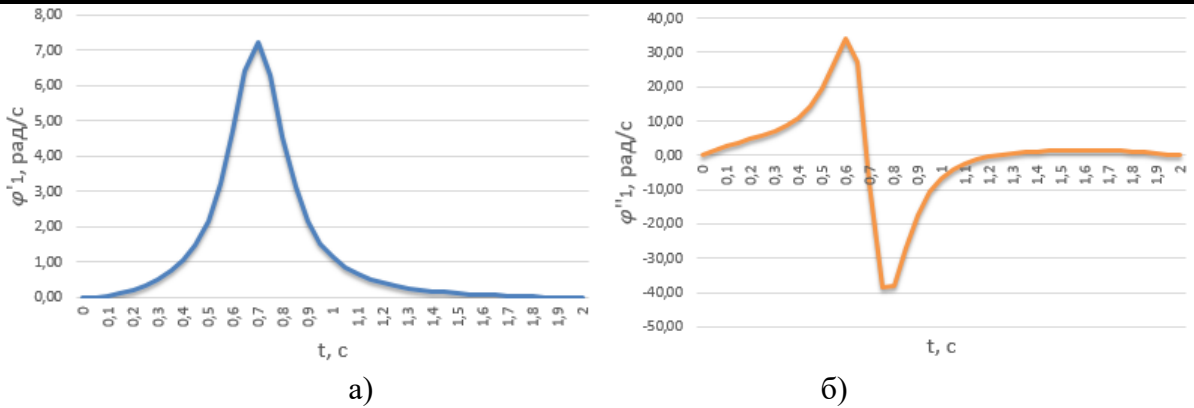


Рис.8. Графіки кутової швидкості (а) та пришвидшення (б) повороту руки робота при оптимальному ривковому режимі руху захвату

Порівнюючи графіки кутової швидкості повороту руки робота при оптимальних енергетичному (рис.4) та ривковому (рис.8,а) режимах руху захвату можна зробити висновок, що характер зміни цих графіків є подібний, однак при оптимальному енергетичному режимі руху захвату кутова швидкість повороту руки на початку руху приймає відмінні від нуля значення, а при оптимальному ривковому режимі руху ці значення є нульовими. Тому оптимальний енергетичний режим може бути використаний тільки на ділянці усталеного руху, а оптимальний ривковий – на всій ділянці руху.

Порівнюючи графіки кутових пришвидшень повороту руки робота при оптимальних енергетичному (рис.5) та ривковому (рис.8,б) режимах руху захвату можна бачити, що характер їхньої зміни є подібним, а відмінністю є те, що на початку руху кутове пришвидшення повороту руки при енергетичному режимі приймає відмінне від нуля значення, а при ривковому режимі кутове пришвидшення на початку і в кінці руху є нульовим, що усуває початкові та кінцеві коливання в системі робота-маніпулятора при цьому режимі руху.

Оптимальний ривковий режим для руху робота-маніпулятора на всій ділянці доцільно застосовувати при переміщенні захвату на незначні відстані, коли відсутня ділянка усталеного руху і рух складається тільки з ділянок пуску та гальмування. Цей режим руху для узагальнених координат механізмів видовження та повороту руки робота-маніпулятора показано на рис.7 і 8.

Розглянемо також режим руху захватного пристрою робота-маніпулятора, який складається з ділянок пуску, усталеного руху та гальмування. На ділянці усталеного руху використаємо оптимальний енергетичний режим руху, який забезпечується постійною швидкістю захвату. На ділянках пуску та гальмування використаємо оптимальний режим руху, який мінімізує середнє значення енергії ривків захватного пристрою.

Для визначення оптимального режиму пуску захватного пристрою використаємо залежності (21), в яких постійні інтегрування визначаються з наступних крайових умов:

$$t = 0: \xi = 0, \dot{\xi} = 0, \ddot{\xi} = 0; \quad t = t_1: \xi = v, \dot{\xi} = 0, \ddot{\xi} = 0. \quad (40)$$

В результаті підстановки умов (40) в залежності (21) отримуємо:

$$D_6 = 0; \quad D_5 = 0; \quad D_4 = 0; \quad (41)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{24}D_1t_p^4 + \frac{1}{6}D_2t_p^3 + \frac{1}{2}D_3t_p^2 = v; \\ \frac{1}{6}D_1t_p^3 + \frac{1}{2}D_2t_p^2 + D_3t_p = 0; \\ \frac{1}{2}D_1t_p^3 + D_2t_p + D_3 = 0. \end{cases} \quad (42)$$

Тут  $t_p$  – тривалість розгону захватного пристрою;  $v$  – швидкість усталеного руху захвату, яка при триперіодному комплексному оптимальному режимі руху визначається наступною залежністю:

$$v = \frac{\xi_1}{\frac{t_p}{2} + t_y + t_z/2}, \quad (43)$$

де  $\xi_1$  – переміщення захвату з одного крайнього положення в інше;  $t_p, t_z, t_y$  – відповідно час розгону, зупинки та усталеного руху захвату.

В результаті розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (42) отримуємо:

$$D_1 = 72 \frac{v}{t_p^4}; \quad D_2 = -48 \frac{v}{t_p^3}; \quad D_3 = 12 \frac{v}{t_p^2}. \quad (44)$$

Підставивши вирази (41) і (42) в останню залежність (21), будемо мати:

$$\begin{cases} \xi = v \left( \frac{3}{5} \frac{t^5}{t_p^4} - 2 \frac{t^4}{t_p^3} + 2 \frac{t^3}{t_p^2} \right); \\ \dot{\xi} = \frac{vt^2}{t_p^2} \left( 3 \frac{t^2}{t_p^2} - 8 \frac{t}{t_p} + 6 \right); \\ \ddot{\xi} = 12 \frac{vt}{t_p^2} \left( \frac{t^2}{t_p^2} - 2 \frac{t}{t_p} + 1 \right). \end{cases} \quad (45)$$

Знаючи кінематичні характеристики захватного пристрою вздовж осі  $\xi$  (45), знайдемо проекції на нерухому систему координат:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{t_1 t_p^2} t^3 \left( \frac{3}{5} \frac{t^2}{t_p^2} - 2 \frac{t}{t_p} + 2 \right); \\ y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{t_1 t_p^2} t^3 \left( \frac{3}{5} \frac{t^2}{t_p^2} - 2 \frac{t}{t_p} + 2 \right). \end{cases} \quad (46)$$

Взявши похідні за часом від виразу (46), отримаємо проекції швидкості захвату на нерухомі осі координат:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 t_p^2} t^2 \left( 3 \frac{t^2}{t_p^2} - 8 \frac{t}{t_p} + 6 \right); \\ \dot{y} = \frac{y_1 - y_0}{t_1 t_p^2} t^2 \left( 3 \frac{t^2}{t_p^2} - 8 \frac{t}{t_p} + 6 \right). \end{cases} \quad (47)$$

Взявши похідні за часом від виразу (47), отримаємо проекції пришвидшення захвату на нерухомі координатні осі:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 12 \frac{x_1 - x_0}{t_1 t_p^2} t \left( \frac{t^2}{t_p^2} - 2 \frac{t}{t_p} + 1 \right); \\ \ddot{y} = 12 \frac{y_1 - y_0}{t_1 t_p^2} t \left( \frac{t^2}{t_p^2} - 2 \frac{t}{t_p} + 1 \right). \end{cases} \quad (48)$$

За характеристиками нерухомих осей координат захватного пристрою знайдемо характеристики узагальнених координат оптимального ривкового режиму руху захвату на ділянці пуску.

Координата видовження руки робота-маніпулятора визначається за наступною формулою

$$S_3 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (49)$$

з урахуванням виразу (46). Швидкість видовження руки робота визначається за формулою (35) з урахуванням виразів (46) і (47), а пришвидшення – за формулою (36) з урахуванням виразів (46), ..., (48).

Кутова координата повороту руки робота-маніпулятора визначається за формулою

$$\varphi_1 = \arctan \frac{y}{x} \quad (50)$$

З урахуванням виразів (46), а кутові швидкість та пришвидшення повороту руки визначаються відповідно за формулами (38) і (39) з урахуванням виразів (46), ..., (48).

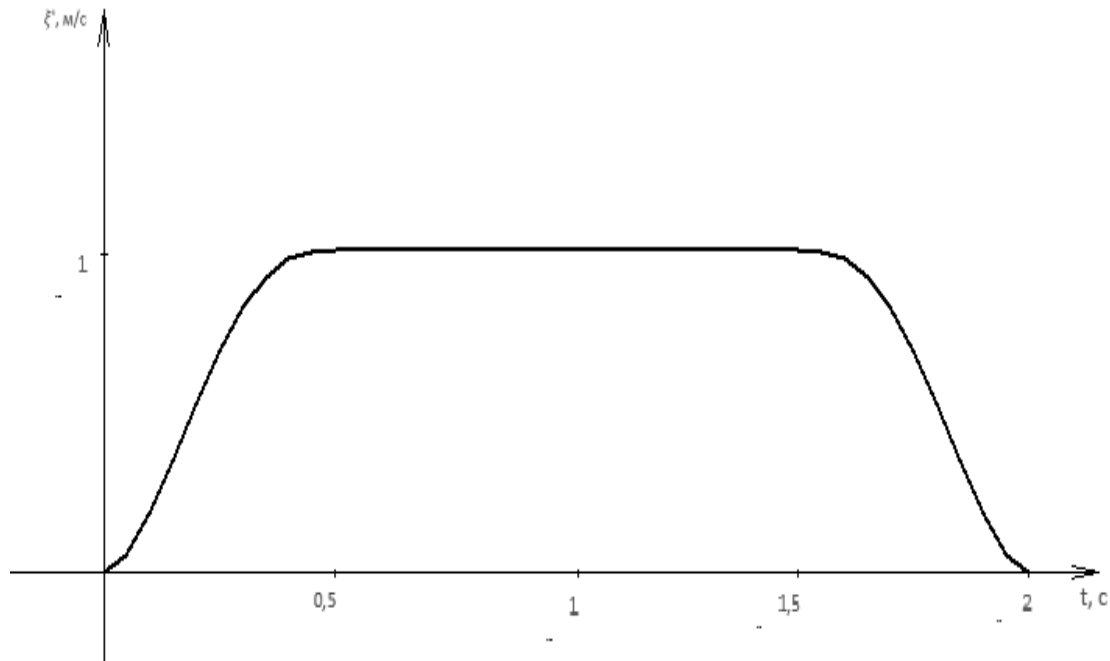


Рис. 9. Графік швидкості комплексного оптимального режиму руху захвату

Аналогічно визначаються оптимальні режими гальмування, що забезпечують мінімізацію середнього значення енергії ривків захватного пристрою та відповідні закони руху узагальнених координат видовження та повороту руки робота-маніпулятора.

В результаті проведених розрахунків побудуємо графічну залежність швидкості руху захватного пристрою при триперіодній діаграмі руху. Тут на ділянці усталеного руху використано оптимальний енергетичний режим, а на ділянках пуску та зупинки – режими, що мінімізують середні значення енергії ривків. На рис.9 представлена графічна залежність швидкості комплексного оптимального режиму руху захватного пристрою робота – маніпулятора.

## Висновки

1. В наведеній роботі представлено процес оптимізації режиму руху робота-маніпулятора з двома поступальними і однією обертальною ланки. Розглянуто рух робота в площині повороту між двома заданими положеннями захвату. Траєкторією руху захвату обрано пряму, що з'єднує його крайні положення.

2. Розраховані оптимальні режими руху захвату вздовж обраної траєкторії за критеріями середніх значень кінетичної енергії та енергії ривків протягом всього циклу руху, а також окремо на ділянках пуску та зупинки. За першим режимом захват рухається на всій ділянці з постійною швидкістю, а за другим – швидкість представляється параболічним законом четвертого порядку, а пришвидження – третього.. Запропоновано також комплексний оптимальний режим руху захвату, де на ділянках пуску та гальмування швидкість змінюється за оптимальним ривковим режимом руху, а на ділянці усталеного руху вона є постійною.

3. В результаті розв'язування зворотних задач кінематики для визначених оптимальних режимів руху захвату встановлені закони зміни узагальнених координат робота-маніпулятора, які дають можливість оцінити характеристики приводних механізмів і систем їхнього керування. Порівняння кінематичних характеристик захвату при оптимальних режимах руху з визначеними характеристиками узагальнених координат при цих же режимах руху показує їхню принципову відмінність. Якщо

оптимальні характеристики захвату плавно змінюються, то узагальнені координати робота-маніпулятора мають знакозмінний характер, що вказує на необхідність постійного керування рухом приводними механізмами. Встановлено, що на характер зміни кінематичних характеристик приводних механізмів поряд з режимом руху захватного пристрою має значний вплив конструкція елементів робота-маніпулятора.

#### Список використаних джерел

1. Gasparetto A., Boscariol P., Lanzutti A. Trajectory planning in robotics. *Math. Comput. Sci.* 2012. Vol. 6. P. 269–279.
2. Ostertag M., Atanasov N., Rosing T. Trajectory planning and optimization for minimizing uncertainty in persistent monitoring applications. *J Intell Robot Syst.* 2022. Vol. 106. P. 2.
3. Zhang T., Zhang M., Zou Y. Time-optimal and smooth trajectory planning for robot manipulators. *Int. J. Control Autom. Syst.* 2021. Vol. 19. P. 521–531.
4. Shiller Z., Large F., Sekhavat S. Motion planning in dynamic environments: Obstacles moving along arbitrary trajectories. In: *Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 01CH37164).* 2001. Vol. 4. P. 3716–3721.
5. Wang Y., Gao Z., Zhu J. Multi-objective optimization of robot path planning based on improved genetic algorithm. *Journal of Intelligent & Robotic Systems.* 2017. Vol. 88, no. 1. P. 29–44.
6. Zhang J., Li J., Liu Y. Optimal trajectory planning for industrial robots based on simulated annealing algorithm. *Journal of Intelligent & Robotic Systems.* 2018. Vol. 89, no. 3-4. P. 577–592.
7. Gao X., Qian Y., Zhou Y. Optimal trajectory planning for robotic manipulators based on an improved artificial bee colony algorithm. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing.* 2019. Vol. 55. P. 79–89.
8. Loveikin V., Romasevych Yu., Spodoba O., Loveikin A., Pochka K. Mathematical model of the dynamics change departure of the jib system manipulator with the simultaneous movement of its links. *Strength of Materials and Theory of Structures. Kyiv. Ukraine.* 2020. Vol. 104. P. 175–190.
9. Loveikin V., Romasevych Y., Shymko L., Mushtin D., Loveikin Y. The optimization of luffing and slewing regimes of a tower crane. *Journal of Theoretical and applied Mechanics.* 2021. Vol. 51. P. 421–436.
10. Loveikin V., Romasevych Y., Loveikin A., Lyashko A., Korobko M. Minimization of high frequency oscillations of trolley movement mechanism during steady tower crane slewing. *U.P.B Sci. Bull. Series D.* 2022. Vol. 84. N 1. P. 31–44.
11. Lovejkin V.S., Mishchuk D.A. Synthesis of the optimal dynamic mode of movement of the manipulator boom mounted on an elastic base. *Science and technology.* 2019. Vol. 18. No. 1. P. 55–61.
12. Loveykin V.S., Mishchuk D.O., Mishchuk Ye.O. Optimization of manipulator's motion mode on elastic base according to the criteria of the minimum central square value of drive torque. *Strength of Materials and Theory of Structures.* 2022. No. 109. P. 403–415.
13. Zeeshan A.I., Atiq M.T., Ehsan M. Inverse kinematics solutions using neural networks for a five freedom robot manipulator. *International Journal of Advanced Robotic Systems.* 2014. Vol. 11. No 10. P. 1–8.
14. Gharavian M., Ahmadi M. A new approach to inverse kinematics solution for redundant manipulators using the ant colony algorithm. *Mechatronics.* 2012. Vol. 22, no 5. P. 579–587.

15. Siciliano B. Kinematic control of redundant robot manipulators. *J Intell Robot Syst.* 1990. Vol. 3. P. 201–212.
16. Beeson P., Ames B. An open-source library for improved solving of generic inverse kinematics. 2015. Vol. IEEE. P. 928–935.
17. Zhao L., Zhao J., Liu H. Solving the inverse kinematics problem of multiple redundant manipulators with collision avoidance in dynamic environments. *J Intell Robot Syst.* 2021. Vol. 101. P. 30.
18. Jahanbekam M.R., Alasty A., Moosavi M.R. A comparison of gradient-based optimization algorithms for inverse kinematics of redundant manipulators. *Robotica.* 2016. Vol. 34. No 9. P. 2023–2037.
19. Mousavi M.R., Gholami M. A review of inverse kinematics solutions for serial-link robot manipulators. *Journal of Intelligent and Robotic Systems.* 2018. Vol. 90. No 1-2. P. 17–49.
20. Nazarenko I., Mishchuk Y., Mishchuk D., Ruchynskiy M., Rogovskii I., Mikhailova L., Titova L., Berezovyi M., Shatrov R. Determination of energy characteristics of material destruction in the crushing chamber of the vibration crusher. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2021. Vol. 4(7(112)). P. 41–49. doi: 10.15587/1729-4061.2021.239292.
21. Zagurskiy O., Pokusa Z., Pokusa F., Titova L., Rogovskii I. Study of efficiency of transport processes of supply chains management under uncertainty. Monograph. Opole: The Academy of Management and Administration in Opole. 2020. ISBN 978-83-66567-13-9. 162 p.

## References

1. Gasparetto A., Boscariol P., Lanzutti A. (2012). Trajectory planning in robotics. *Math. Comput. Sci.* Vol. 6. P. 269–279.
2. Ostertag M., Atanasov N., Rosing T. (2022). Trajectory planning and optimization for minimizing uncertainty in persistent monitoring applications. *J Intell Robot Syst.* Vol. 106. P. 2.
3. Zhang T., Zhang M., Zou Y. (2021). Time-optimal and smooth trajectory planning for robot manipulators. *Int. J. Control Autom. Syst.* Vol. 19. P. 521–531.
4. Shiller Z., Large F., Sekhavat S. (2001). Motion planning in dynamic environments: Obstacles moving along arbitrary trajectories. In: *Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 01CH37164).* Vol. 4. P. 3716–3721.
5. Wang Y., Gao Z., Zhu J. (2017). Multi-objective optimization of robot path planning based on improved genetic algorithm. *Journal of Intelligent & Robotic Systems.* Vol. 88, no. 1. P. 29–44.
6. Zhang J., Li J., Liu Y. (2018). Optimal trajectory planning for industrial robots based on simulated annealing algorithm. *Journal of Intelligent & Robotic Systems.* Vol. 89, no. 3-4. P. 577–592.
7. Gao X., Qian Y., Zhou Y. (2019). Optimal trajectory planning for robotic manipulators based on an improved artificial bee colony algorithm. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing.* Vol. 55. P. 79–89.
8. Loveikin V., Romasevych Yu., Spodoba O., Loveikin A., Pochka K. (2020). Mathematical model of the dynamics change departure of the jib system manipulator with the simultaneous movement of its links. *Strength of Materials and Theory of Structures.* Kyiv. Ukraine. Vol. 104. P. 175–190.



9. Loveikin V., Romasevych Y., Shymko L., Mushtin D., Loveikin Y. (2021). The optimization of luffing and slewing regimes of a tower crane. *Journal of Theoretical and applied Mechanics*. Vol. 51. P. 421–436.
10. Loveikin V., Romasevych Y., Loveikin A., Lyashko A., Korobko M. (2022). Minimization of high frequency oscillations of trolley movement mechanism during steady tower crane slewing. *U.P.B Sci. Bull. Series D*. Vol. 84. N 1. P. 31–44.
11. Lovejkin V.S., Mishchuk D.A. (2019). Synthesis of the optimal dynamic mode of movement of the manipulator boom mounted on an elastic base. *Science and technology*. Vol. 18. No. 1. P. 55–61.
12. Loveykin V.S., Mishchuk D.O., Mishchuk Ye.O. (2022). Optimization of manipulator's motion mode on elastic base according to the criteria of the minimum central square value of drive torque. *Strength of Materials and Theory of Structures*. No. 109. P. 403–415.
13. Zeeshan A.I., Atiq M.T., Ehsan M. (2014). Inverse kinematics solutions using neural networks for a five freedom robot manipulator. *International Journal of Advanced Robotic Systems*. Vol. 11. No 10. P. 1–8.
14. Gharavian M., Ahmadi M. (2012). A new approach to inverse kinematics solution for redundant manipulators using the ant colony algorithm. *Mechatronics*. Vol. 22, no 5. P. 579–587.
15. Siciliano B. (1990). Kinematic control of redundant robot manipulators. *J Intell Robot Syst*. Vol. 3. P. 201–212.
16. Beeson P., Ames B. (2015). An open-source library for improved solving of generic inverse kinematics. *IEEE*. P. 928–935.
17. Zhao L., Zhao J., Liu H. (2021). Solving the inverse kinematics problem of multiple redundant manipulators with collision avoidance in dynamic environments. *J Intell Robot Syst*. Vol. 101. P. 30.
18. Jahanbekam M.R., Alasty A., Moosavi M.R. (2016). A comparison of gradient-based optimization algorithms for inverse kinematics of redundant manipulators. *Robotica*. Vol. 34. No 9. P. 2023–2037.
19. Mousavi M.R., Gholami M. (2018). A review of inverse kinematics solutions for serial-link robot manipulators. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*. Vol. 90. No 1-2. P. 17–49.
20. Nazarenko I., Mishchuk Y., Mishchuk D., Ruchynskiy M., Rogovskii I., Mikhailova L., Titova L., Berezovyi M., Shatrov R. (2021). Determination of energy characteristics of material destruction in the crushing chamber of the vibration crusher. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Vol. 4(7(112)). P. 41–49. doi: 10.15587/1729-4061.2021.239292.
21. Zagurskiy O., Pokusa Z., Pokusa F., Titova L., Rogovskii I. (2020). Study of efficiency of transport processes of supply chains management under uncertainty. Monograph. Opole: The Academy of Management and Administration in Opole. ISBN 978-83-66567-13-9. 162 p.