

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І
ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ**

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ХРОПОСТ ВЯЧЕСЛАВ ІВАНОВИЧ

УДК 514.18

ДИСЕРТАЦІЯ

**ГЕОМЕТРИЧНІ АСПЕКТИ ДЕФОРМУВАННЯ ДЕТАЛЕЙ ІЗ
ВРАХУВАННЯМ ЇХ ФОРМИ І ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛУ**

131 «Прикладна механіка»

13 «Механічна інженерія»

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

В.І. Хропост

Наукові керівники

Пилипака Сергій Федорович,

доктор технічних наук, професор

Кресан Тетяна Анатолівна,

кандидат технічних наук, доцент

Київ – 2025

АНОТАЦІЯ

Хропост В.І. Геометричні аспекти деформування деталей із врахуванням їх форми і властивостей матеріалу. Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії PhD (кандидата технічних наук) за спеціальністю 131 – Прикладна механіка. Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, 2025.

У роботі розглянуто різні варіанти деформації металевих виробів: пружне згинання, абсолютно пружне згинання, згинання плоскої заготовки із металевого листа у готовий виріб (розгортна або нерозгортна поверхня), прокатка прямолінійної смуги між валками при значних пластичних деформаціях. Аналітичний опис процесів деформування ґрунтується на геометричних розмірах заготовки і готового виробу, незмінності об'єму в процесі деформації, ізотропній властивості металу при його пластичній деформації, положень теорії опору матеріалів при пружному згинанні стержнів. Процес деформування металу є надзвичайно складними, тому отримати його точний аналітичний опис практично неможливо. Однак наближені результати дають можливість подальшого їх уточнення шляхом експерименту.

Найбільш точними є результати по абсолютно пружному згинанню стержнів, оскільки вони отримані на основі фундаментального положення теорії опору матеріалів, згідно якого кривина пружної осі стержня прямо пропорційна прикладеному моменту і обернено пропорційна жорсткості стержня. Також точними є результати знаходження плоских заготовок із металевого листа (розгорток) для згинання їх у готовий виріб. Якщо поверхня готового виробу є розгортною, то розгортку можна знайти абсолютно точно при ігноруванні товщини листа. Чим менша товщина листа, тим більша точність розрахунків, які базуються на теорії згинань поверхонь диференціальної геометрії. Ця теорія також абсолютно точно описує процес згинання нерозгортних поверхонь, для

яких плоскої заготовки не існує. Згинанням розгортного гелікоїда шляхом зменшення його кроку до нуля можна отримати плоску розгортку. В результаті зменшення кроку до нуля нерозгортних гелікоїдів (косого гелікоїда, гвинтового коноїда, інших гвинтових поверхонь) отримаємо різні поверхні обертання. Однак виготовлення цих поверхонь (зокрема дуже поширеного в техніці гвинтового коноїда – шнека) здійснюється із плоских заготовок. Для цих поверхонь точної розгортки не існує, однак можна знаходити наближену або умовну розгортку, яка дає прийнятні результати при її формуванні у готовий виріб з мінімальними пластичними деформаціями. В роботі розглянуто два підходи до побудови наближеної розгортки витка нерозгортної гвинтової поверхні. Один ґрунтується на допущенні, що довжини обмежувальних гвинтових ліній витка дорівнюють довжинам відповідних дуг кіл плоского кільця – наближеної розгортки. У другому підході запропоновано поверхню обертання, на яку згинається нерозгортна гвинтова поверхня, апроксимувати розгортною, якою є конус, і розгортку конуса вважати наближеною розгорткою витка. Обидва підходи були застосовані до знаходження наближеної розгортки гвинтоподібного ножа подрібнювального барабана кормозбирального комбайна і дали практично однакові результати.

Існують дві основні технології отримання гвинтової поверхні із плоского кільця: штамповка і навивка. В першому випадку поверхня зварюється із окремих витків, в другому вона є суцільною, відповідно таким має бути і кільце. Для цього в роботі розроблено аналітичний опис прокатки між валками прямолінійної смуги трапецеїдального поперечного перерізу. Після прокатки трапеція трансформується у прямокутник – поперечний переріз кільця. Його внутрішній радіус розраховується на основі введеного коефіцієнта подовження при пластичній деформації смуги і незмінності її об'єму після деформації.

В роботі розглянуто абсолютно пружне і пружне згинання металевих виробів. При абсолютно пружному згинанні виріб повністю відновлює свою початкову форму після припинення дії деформуючого зусилля, а при пружному – частково. Самим простим прикладом абсолютно пружного згинання є

згинання консольно защемленої прямолінійної смуги або стержня в результаті дії зосередженої сили. В роботі розглянуто більш складні випадки, коли пружна вісь стержня є криволінійною. Розглянуті випадки стосуються стояків культиваторних лап сільськогосподарських знарядь, а також пружинних зубів, які поєднують криволінійну і прямолінійну частини. Стояки і зуби згладжують пульсуюче динамічне навантаження при роботі агрегату. При відомому максимальному значенні сили опору ґрунту в роботі отримано деформовану форму пружної осі стояка лапи і пружинного зуба, що дозволило вести розрахунки для допустимих їх відхилень по висоті в межах шару оброблюваного ґрунту.

Розглянуто обернену задачу абсолютно пружного згинання смуги на прикладі знаходження форми спіральної пружини і поршневого кільця у вільному стані. В першому випадку потрібно забезпечити рівномірну відстань між витками пружини в заведеному стані для уникнення тертя між сусідніми витками, а у другому – рівномірний тиск на стінки циліндра. Якщо у першому випадку сила є зосередженою, то у другому – розподіленою. Для обох випадків знайдено форму пружної осі виробу вільному стані для забезпечення необхідних характеристик у робочому стані. Для цього використовується теорія нелінійного згину, яка зводиться до розв'язування диференціальних рівнянь.

В роботі розглянуто також пружне згинання циліндричних і конічних деталей із листового матеріалу згинанням їх з допомогою трьох валків. Особливість налаштування валків полягає в тому, що для отримання заданої форми деталі потрібно враховувати часткове її розгинання після проходження між валками. Для циліндричних деталей можна порівняти розрахунковий радіус деталі і отриманий після часткового розгинання. Ступінь відновлення початкової форми деталі можна оцінити коефіцієнтом пружинення – відношенням розрахункового радіуса до отриманого. Цей коефіцієнт дає можливість налаштувати валки на фіктивний радіус, який після часткового розгинання стає реальним. Для конічних деталей такий підхід є неприйнятним, оскільки поперечним перерізом конуса є кола різного радіуса, що призводить до

коефіцієнтів пружинення різного значення. Це суперечить здоровому глузду, оскільки для партії листового матеріалу коефіцієнтом пружинення є стале число. Для усунення цієї невідповідності була використана теорія згинання поверхонь із курсу диференціальної геометрії. Згідно неї кривину лінії на поверхні (в нашому випадку основи конуса) потрібно розкласти на нормальну і геодезичну складові. При згинанні поверхні змінюється тільки нормальна складова, а геодезична залишається незмінною. З урахуванням цього в роботі розроблена математична модель налаштування конічних валків для виготовлення деталей фіктивної форми, які після проходження між валками і часткового розгинання набувають потрібної форми.

Класична теорія згинання поверхонь диференціальної геометрії застосована і в інших практичних задачах. Зокрема, показано, що нерозгортну поверхню гвинтоподібного ножа можна замінити поверхнею розгортного гелікоїда. В такому випадку можна знайти його точну розгортку без врахування товщини, яка може бути досить точною. При цьому спрощується деформування її у готовий виріб без погіршення експлуатаційних властивостей.

Ключові слова: пластична деформація, ізотропні властивості, об'єм, пружне і абсолютне пружне згинання, жорсткість.

ANNOTATION

Hropost V.I. Geometric aspects of deformation of parts taking into account their shape and material properties.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) (candidate of technical sciences), 131 - Applied Mechanics. National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, 2025.

The paper considers various variants of deformation of metal products: elastic bending, absolutely elastic bending, bending of a flat billet from a metal sheet into a finished product (reamable or non-reamable surface), rolling of a straight strip between rolls under significant plastic deformations. The analytical description of the deformation process is based on the geometric dimensions of the billet and finished product, the constant volume during deformation, the isotropic properties of the metal during plastic deformation, and the theory of material resistance in elastic bending of rods. The process of metal deformation is extremely complex, so it is almost impossible to obtain an accurate analytical description of it. However, approximate results make it possible to further refine them by experiment.

The most accurate results are those for absolutely elastic bending of rods, since they are based on the fundamental premise of the theory of resistance of materials, according to which the curvature of the elastic axis of a rod is directly proportional to the applied moment and inversely proportional to the stiffness of the rod. The results of finding flat metal sheet blanks (reams) for bending them into a finished product are also accurate. If the surface of the finished product is a reamer, then the reamer can be found absolutely accurately while ignoring the thickness of the sheet. The smaller the sheet thickness, the more accurate the calculations, which are based on the theory of bending surfaces of differential geometry. This theory also accurately describes the bending process of unrolled surfaces, for which there is no flat workpiece. By bending an unwrapped helicoid by reducing its pitch to zero, a flat unwrapper can be obtained. Reducing the pitch to zero of non-sweeping helicoids (oblique helicoids, helical conoids, and other helical surfaces) will result in various rotational surfaces. However,

these surfaces (in particular, the screw conoid, which is very common in the technique) are made from flat blanks. For these surfaces, there is no exact scan, but it is possible to find an approximate or conditional scan that gives acceptable results when it is molded into a finished product with minimal plastic deformation. In this paper, we consider two approaches to constructing an approximate unwrapping of a coil of a non-unwrapped helical surface. One is based on the assumption that the lengths of the bounding helical lines of the coil are equal to the lengths of the corresponding arcs of the circles of a flat ring - the approximate scan. In the second approach, it is proposed to approximate the surface of rotation on which the non-scanning helical surface is bent by the scanning surface, which is a cone, and to consider the cone's scan as an approximate scan of the coil. Both approaches were applied to finding the approximate sweep of a helical knife of the chopping drum of a forage harvester and gave almost identical results.

which becomes real after partial extension. For conical parts, this approach is unacceptable because the cross-section of the cone is a circle of different radii, which leads to springing coefficients of different values. This is contrary to common sense, since for a batch of sheet material, the spring rate is a constant number. To eliminate this discrepancy, we used the theory of surface bending from the course in differential geometry. According to this theory, the curvature of a line on a surface (in our case, the base of a cone) must be decomposed into normal and geodesic components. When the surface is bent, only the normal component changes, and the geodesic component remains unchanged. Taking this into account, the paper develops a mathematical model for setting up conical rolls for the manufacture of fictitiously shaped parts, which, after passing between the rolls and partial extension, acquire the desired shape.

The classical theory of bending surfaces of differential geometry is applied to other practical problems. In particular, it is shown that the non-unfolding surface of a helical knife can be replaced by the surface of an unfolding helicoid. In this case, it is possible to find its exact scan without taking into account the thickness, which can be quite accurate. This makes it easier to deform it into a finished product without compromising its performance.

Key words: *plastic deformation, isotropic attribute, size, spring and absolute spring applying, stiffness.*

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у періодичних наукових виданнях,
включених до категорії «А» Переліку наукових фахових видань України
та/або у закордонних виданнях, проіндексованих у базах даних
Web of Science Core Collection та/або Scopus

1. Pylypaka S., **Hropost V.**, Kresan T., Hryshchenko I., Babka V. Calculation of the bending parameters of a flat workpiece into a twist of a helicoid torso. *Machinery & Energetics*. 2022. № 13 (4). P. 81–88. *(Hropost V. виконано наукові дослідження і отримано рівняння, які описують неперервне згинання плоскої заготовки у розгортний гелікоїд, визначено актуальність та наукову новизну отриманих результатів. Pylypaka S. здійснено науковий та методичний супровід дослідження. Kresan T. зроблено огляд літератури за напрямом дослідження. Hryshchenko I. зроблено візуалізацію отриманих результатів. Babka V. зроблено перевірку отриманих рівнянь на паперовій моделі і оформлено статтю).*

2. Volina T., Pylypaka S., **Hropost V.**, Kresan T., Zabolotnii O. Construction of a flat workpiece for manufacturing a turn of the right helicoid. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2023. № 2 (1 (122)). P. 6–11. *(Hropost V. сформульовано мету досліджень та отримано параметричні рівняння, які описують згинання плоскої заготовки у готовий виріб. Volina T. проведено науковий пошук та зроблено порівняльний аналіз праць, близьких до теми дослідження. Pylypaka S. здійснено науковий та методичний супровід дослідження. Kresan T. здійснено візуалізацію отриманих результатів. Zabolotnii O. систематизовано і проаналізовано результати досліджень інших авторів та оформлено статтю).*

3. Volina T., Pylypaka S., **Hropost V.**, Kresan T., Vasyliuk V. The Form of a Spiral Spring in a Free State. *Advanced Manufacturing Processes V*. 2023. P. 509–517. *(Hropost V. визначено актуальність, сформульовано наукову новизну, розроблено методику і за нею отримано рівняння пружної осі пружини у*

вільному стані, узгоджено висновки із співавторами. Volina T. проведено науковий пошук статей, близьких до напрямку досліджень. Pylypaka S. здійснено науковий та методичний супровід дослідження. Kresan T. здійснено візуалізацію отриманих результатів. Vasyliuk V. підготовлено публікацію до друку згідно вимог видання).

4. Pylypaka S., **Hropost V.**, Volina T., Kresan T., Borodai S. Analytical description of adjustment of rolls for manufacturing parts from elastic sheet material. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2024. № 1 (7 (127)). P. 60–65. (Hropost V. сформульовано актуальність, мету роботи, зроблено математичний опис плоскої заготовки для прокатування її між конічними валками, розраховано кути при вершині конічних валків. Pylypaka S. здійснено науковий та методичний супровід дослідження. Volina T. проведено огляд літературних джерел за напрямом досліджень і систематизовано їх. Kresan T. здійснено візуалізацію отриманих результатів. Borodai S. оформлено публікацію згідно із вимогами видання).

5. Ahmed A. K., Pylypaka S., Volina T., **Hropost V.**, Kresan T. Elastic Bending of a Strip Under the Action of Applied Forces. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2024. P. 121–130. (Hropost V. проаналізовано результати досліджень, математично описано процес деформації пружної осі смуги під дією прикладених сил, сформульовано висновки. Ahmed A. K. проведено літературний пошук і зроблено порівняльний аналіз наявних досліджень. Pylypaka S. здійснено науковий та методичний супровід дослідження. Volina T. визначено форму пружної осі смуги для різних видів навантаження. Kresan T. здійснено візуалізацію отриманих результатів і підготовлено статтю до друку згідно вимог).

6. Pylypaka S., **Hropost V.**, Nesvidomin V., Volina T., Kalenyk M., Volokha M., Zalevska O., Shuliak I., Dieniezhnikov S., Motsak S. Designing a helical knife for a shredding drum using a sweep surface. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2024. № 4 (1 (130)). P. 37–44. (Hropost V. проаналізовано поверхні гвинтоподібних ножів, зроблено висновок, що їх можна виготовляти із

розгортної поверхні, за конструктивними параметрами ножа складено параметричні рівняння поверхні. Pylypaka S. здійснено науковий та методичний супровід дослідження. Nesvidomin V. виведено рівняння ліній, які є контурами гвинтоподібного ножа на поверхні. Volina T. виведено рівняння ліній, які є контурами гвинтоподібного ножа на розгортці поверхні. Kalenyk M. Знайдено криву поперечного перерізу гвинтоподібного ножа. Volokha M. Зроблено перехід від незалежної змінної – довжини прямолінійної твірної, до радіуса – відстані від осі обертання до леза ножа. Zalevska O. виконано креслення поперечного перерізу ножа із позначенням конструктивних параметрів. Shuliak I. в рівняннях поверхні перейдено від прямолінійних твірних до кривих перерізу поверхні. Dieniezhnikov S. математично описано ребро звороту розгортної поверхні. Motsak S. здійснено огляд літератури та підготовлено публікацію до друку згідно вимог видання).

7. Pylypaka S., Volina T., **Hropost V.**, Kozlova O., Tatsenko O. Investigation of deformation of the spring tooth of agricultural implements from the action of the force applied to it. *Machinery & Energetics*. 2024. № 15 (1). P. 23–32. (*Hropost V. математично описано пружинну вісь зуба сільськогосподарського знаряддя, причому це зроблено для прямолінійної і криволінійної ділянок окремо. Pylypaka S. здійснено науковий та методичний супровід дослідження. Volina T. з'єднано обидві частини деформованого зуба в єдине ціле за першим порядком гладкості. Kozlova O. здійснено візуалізацію отриманих результатів. Tatsenko O. проведено огляд літератури за темою досліджень і підготовлено статтю до друку згідно вимог видання*).

8. Pylypaka S., **Hropost V.**, Volina T., Kalenyk M., Ruzhilo Z., Dieniezhnikov S., Tarel'nyk N., Tatsenko O., Semirnenko S., Motsak S. Constructing a model of the axis form in a S-shaped riser of a cultivator paw. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2024. № 5 (1 (131)). P. 65–71. (*Hropost V. запропоновано розбити стояк культиваторної лапи, який має двояку кривину, на дві частини, математично описано деформацію верхньої частини, більш складної для опису, оскільки потрібно враховувати не тільки силу опору ґрунту,*

а й зусилля, які передаються від нижньої частини стояка. Pylypaka S. здійснено науковий та методичний супровід дослідження. Volina T. зроблено креслення верхньої частини стояка до деформації. Kalenyuk M. зроблено креслення верхньої частини стояка після деформації. Ruzhilo Z. зроблено креслення нижньої частини стояка до деформації. Dieniezhnikov S. виконано креслення нижньої частини стояка після деформації. Tarelnyuk N. зроблено літературний пошук джерел та узагальнено їх. Tatsenko O. виконано альтернативну форму стояка однакової висоти, але із різними верхньою і нижньою криволінійними частинами. Semirnenko S. з'єднано обидві частини стояка в єдине ціле за першим порядком гладкості. Motsak S. сформульовано висновки та підготовлено публікацію до друку відповідно до вимог видання).

**Статті у наукових виданнях,
включених до Переліку наукових фахових видань України**

9. Пилипака С. Ф., Кресан Т. А., Федорина Т. П., **Хропост В. І.** Врахування товщини листового матеріалу при виготовленні конічного диска згинанням плоского кільця. Інженерія природокористування. 2020. № 2 (16), С. 78–83. (Хропостом В. І. зроблено розрахунки за отриманими результатами і візуалізовано їх, а також оформлено статтю. Пилипакою С. Ф. здійснено науковий та методичний супровід дослідження. Кресан Т. А. проаналізовано літературу з даного напрямку досліджень. Федориною Т. П. зроблено розрахунок розгортки кільця).

10. Пилипака С. Ф., Кресан Т. А., **Хропост В. І.**, Бабка В. М. Пружне згинання смуги із значним прогином під дією прикладених сил та моменту. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2021. № 101. С. 137–147. (Хропостом В. І. отримано формули, що описують пружну вісь смуги. Пилипакою С. Ф. здійснено науковий та методичний супровід дослідження. Кресан Т. А. зроблено огляд літератури з напрямку досліджень. Бабкою В. В. зроблено візуалізацію і оформлено статтю).

11. Пилипака С. Ф., Кресан Т. А., **Хропост В. І.**, Бабка В. М. Особливості згинання заготовки у вигляді плоского кільця у гвинтовий коноїд. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2022. № 102. С. 157–164. *(Хропостом В. І. отримано параметричні рівняння, якими описується неперервне згинання коноїда. Пилипакою С. Ф. здійснено науковий та методичний супровід дослідження. Кресан Т. А. зроблено розрахунок плоскої заготовки. Бабкою В. М. здійснено візуалізацію отриманих результатів і оформлено статтю).*

12. **Хропост В. І.**, Демчук І. О. Пружне згинання криволінійної смуги із заданою початковою кривино її пружної осі. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2023. № 104. С. 183–189. *(Хропостом В. І. виведено рівняння, якими описується згинання смуги і здійснено візуалізацію. Демчук І. О. зроблено огляд літератури і оформлено статтю).*

13. **Хропост В. І.**, Кресан Т. А. Конструювання витка відкритого гелікоїда з плоскої заготовки. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2023. № 105. С. 213–221. *(Хропостом В. І. отримано формули, які описують плоску заготовку і виток гелікоїда та оформлено статтю. Кресан Т. А. здійснено огляд літератури і візуалізацію результатів).*

14. Пилипака С. Ф., Кресан Т. А., **Хропост В. І.**, Грищенко І. Ю., Демчук І. О. Керування згинанням торсів зміною залежності кута підйому його ребра звороту. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2024. Т. 1. № 106. С. 201–209. *(Хропостом В. І. знайдено залежність, що описує кут підйому ребра звороту. Пилипакою С. Ф. здійснено науковий та методичний супровід дослідження. Кресан Т. А. зроблено огляд літератури. Грищенко І. Ю. зроблено візуалізацію отриманих результатів. Демчук І. О. отримано рівняння, що описують згинання торса, оформлено статтю).*

Тези наукових доповідей

15. Пилипака С. Ф., Кресан Т. А., **Хропост В. І.** Особливості згинання плоскої заготовки із листового металу у поверхню торса-гелікоїда. Прикладна геометрія, інженерна графіка та об'єкти інтелектуальної власності: науково-

практична конференція з всеукраїнською участю, м. Київ, 23 червня 2022 року: тези доповіді. Київ, 2022. С. 8–10. (*Хропостом В. І. отримано рівняння, що описують згинання заготовки у поверхню торса-гелікоїда. Пилипакою С. Ф. здійснено науковий та методичний супровід дослідження. Кресан Т. А. зроблено візуалізацію результатів і оформлено тези*).

16. Хропост В. І. Способи деформації плоских заготовок у просторову форму. Здобутки та досягнення прикладних та фундаментальних наук ХХІ століття: науково-практична конференція з міжнародною участю, м. Вінниця, 16 грудня 2022 року: тези доповіді. Вінниця, 2022. С. 178–180.

17. **Хропост В. І.**, Пилипака С. Ф., Кресан Т. А. Математичне моделювання згинання стояка культиваторної лапи. Progressive research in the modern world: науково-практична конференція з міжнародною участю, м. Бостон, США, 28–30 грудня 2022 року: тези доповіді. Бостон, 2022. С. 270–277. (*Хропостом В. І. розроблено математичну модель згинання стояка лапи. Пилипакою С. Ф. здійснено науковий та методичний супровід дослідження. Кресан Т. А. зроблено візуалізацію результатів і оформлено тези*).

18. Пилипака С. Ф., **Хропост В. І.**, Захарова І. О. Особливості формування витків шнеків із листових заготовок. Сучасні проблеми землеробської механіки: ХХІІІ Міжнародна наукова конференція, м. Київ – м. Житомир, 16–18 жовтня 2022 року: тези доповіді. Київ – Житомир, 2022. С. 71–74. (*Хропостом В. І. отримано формули, що описують процес формування витка шнека. Пилипакою С. Ф. здійснено науковий та методичний супровід дослідження. Захаровою І. О. зроблено огляд літератури і оформлено тези*).

19. **Хропост В. І.**, Кресан Т. А. Форма пружної осі спіральної стрічкової пружини у вільному стані. Крамаровські читання: Х Міжнародна науково-технічна конференція, м. Київ, 23–24 лютого 2023 року: тези доповіді. Київ, 2023. С. 371–373. (*Хропостом В. І. отримано рівняння осі пружини у вільному стані. Кресан Т. А. зроблено візуалізацію і оформлено тези*).

20. **Хропост В. І.**, Пилипака С. Ф. Згинання торса, у якого ребро звороту задане рівняннями кривини і кута його підйому. Прикладна геометрія,

інженерна графіка та об'єкти інтелектуальної власності: науково-практична конференція з всеукраїнською участю, м. Київ, 14 червня 2023 року: тези доповіді. Київ, 2023. С. 40–43. *(Хропостом В. І. отримано рівняння, що описують згинання торса, здійснено візуалізацію отриманих результатів і оформлено тези. Пилипакою С. Ф. здійснено науковий і методичний супровід дослідження).*

21. Пилипака С. Ф., **Хропост В. І.** Моделювання форми пружної осі стояка лапи культиватора. Обуховські читання: XVII Міжнародна науково-практична конференція, м. Київ, 30 березня 2023 року: тези доповіді. Київ, 2023. С. 11–12. *(Хропостом В. І. здійснено математичне моделювання осі стояка і оформлено тези. Пилипакою С. Ф. здійснено науковий і методичний супровід дослідження).*

22. Кресан Т. А., **Хропост В. І.** Розрахунок плоскої заготовки для виготовлення витка прямого гелікоїда. Сучасні проблеми геометричного моделювання: XXV Міжнародна науково-практична конференція, м. Мелітополь, 6–9 червня 2023 року: тези доповіді. Мелітополь, 2023. С. 26 – 28. *(Хропостом В. І. розраховано плоску заготовку для виготовлення витка гелікоїда. Кресан Т. А. зроблено візуалізацію і оформлено тези).*

23. Пилипака С. Ф., Кресан Т. А., **Хропост В. І.** До прокатки циліндричних і конічних деталей із плоских заготовок пружного листового матеріалу. Обуховські читання: XVIII Міжнародна науково-практична конференція, м. Київ, 28 березня 2024 року: тези доповіді. Київ, 2024. С. 4. *(Хропостом В. І. розраховано взаємне розташування конічних валків для прокатки деталей. Пилипакою С. Ф. здійснено науковий і методичний супровід дослідження. Кресан Т. А. зроблено візуалізацію і оформлено тези).*

24. Пилипака С. Ф., **Хропост В. І.** Прокатка конічними котками прямолінійного профілю трапецеїдального перерізу в плоске кільце. Обуховські читання: XVIII Міжнародна науково-практична конференція, м. Київ, 28 березня 2024 року: тези доповіді. Київ, 2024. С. 5. *(Хропостом В. І. розроблено математичну модель прокатки, здійснено візуалізацію і оформлено тези. Пилипакою С. Ф. здійснено науковий і методичний супровід дослідження).*

25. Пилипака С. Ф., Кресан Т. А., **Хропост В. І.** Конструювання гвинтоподібних ножів подрібнювального барабана із розгортної і нерозгортної поверхонь. Прикладна геометрія, інженерна графіка та об'єкти інтелектуальної власності: XIII Всеукраїнська науково-практична конференція, м. Київ, 12 червня 2024 року: тези доповіді. Київ, 2024. С. 30–34. *(Хропостом В. І. розраховано розгортку гвинтоподібного ножа. Пилипакою С. Ф. здійснено науковий і методичний супровід дослідження. Кресан Т. А. здійснено візуалізацію результатів).*

ЗМІСТ

ВСТУП.....	20
РОЗДІЛ 1 АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ СПОСОБІВ ДЕФОРМУВАННЯ ДЕТАЛЕЙ І ПОВЕРХОНЬ З ТОЧКИ ЗОРУ ТЕХНОЛОГІЇ, ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ТА КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ ЗГИНАННЯ	25
1.1. Варіанти згинання металевої смуги	25
1.1.1. Згинання смуги у готовий виріб за рахунок пластичної деформації металу	25
1.1.2. Пружне згинання листового металу	30
1.1.3. Абсолютно пружне згинання металевих стержнів і смуг	33
1.2. Лінійний елемент або перша квадратична форма поверхні	36
1.3. Незмінність геодезичної кривини лінії на поверхні при її згинанні.....	39
1.4. Неперервне згинання розгортних поверхонь	40
1.5. Неперервне згинання нерозгортних поверхонь	44
Висновки до першого розділу	48
РОЗДІЛ 2 ПЛАСТИЧНА ДЕФОРМАЦІЯ МАТЕРІАЛУ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ЙОГО ВЛАСТИВОСТЕЙ, ФОРМИ І ОБ'ЄМУ.....	49
2.2. Врахування товщини листового матеріалу при згинанні плоского кільця у конічну поверхню.....	56
2.3. Знаходження наближеної розгортки нерозгортної поверхні з мінімізацією пластичних деформацій	62
Висновки до другого розділу	70
РОЗДІЛ 3 ПРУЖНЕ І АБСОЛЮТНО ПРУЖНЕ ЗГИНАННЯ.....	72
МЕТАЛЕВИХ ВИРОБІВ	72
3.1. Пружне згинання листового металу за допомогою валків у конічну поверхню	72
3.1.1. Складання параметричних рівнянь конуса, до яких входить коефіцієнт пружинення.....	72

3.1.2. Налаштування валків для виготовлення конічних деталей із врахуванням пружинення заготовки	74
3.2. Абсолютно пружне згинання консольно закріплених прямолінійних стержнів і смуг	78
3.3. Абсолютно пружне згинання консольно закріплених криволінійних стержнів і смуг	81
3.3.1. Абсолютно пружне згинання криволінійної смуги із сталою кривиною пружної осі	81
3.3.2. Абсолютно пружне згинання криволінійної смуги, пружна вісь якої поєднує прямолінійний відрізок і дугу кола	84
3.3.3. Абсолютно пружне згинання криволінійної смуги, пружна вісь якої поєднує дві дуги кола із різним знаком кривини	90
3.4. Обернена задача знаходження пружної осі смуги після припинення дії прикладеного моменту	97
3.4.1. Знаходження форми заготовки для виготовлення спіральної пружини	97
3.4.2. Знаходження форми заготовки для виготовлення поршневого кільця	101
Висновки до третього розділу	107
РОЗДІЛ 4 ЗГИНАННЯ ЛІНІЙЧАТИХ ПОВЕРХОНЬ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ ЇХ ВНУТРІШНЬОЇ ГЕОМЕТРІЇ	109
4.1. Аналітичний опис неперервного згинання відсіку розгортної поверхні	110
4.1.1. Неперервне згинання розгортного гелікоїда зміною радіуса циліндра, на якому розташоване ребро звороту	110
4.1.2. Неперервне згинання розгортної поверхні зміною закономірності кута підйому ребра звороту	121
4.1.3. Вирізання гвинтоподібного ножа із поверхні торса-гелікоїда	128
4.2. Аналітичний опис неперервного згинання відсіку нерозгортної поверхні	138
4.2.1. Побудова наближеної розгортки витка прямого відкритого гелікоїда за допомогою його неперервного згинання	138
4.2.2. Побудова наближеної розгортки витка гвинтового коноїда за допомогою його неперервного згинання	146

	19
Висновки до четвертого розділу	154
ВИСНОВКИ	156
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:	159
Додаток А	175
Додаток Б	176
Додаток В	177
Додаток Г	180

ВСТУП

У виготовленні металевих виробів накопичено величезний досвід. Він ґрунтується як на теоретичних дослідженнях, так і на експериментальних даних. Важливість перших і других напрямків досліджень не підлягає сумніву, однак деформування заготовки у готовий виріб є настільки складним процесом, що отримання теоретичних розрахунків не можуть дати готового результату і потребують уточнюючого експерименту. Накопичений матеріал відносно деформування металу, в результаті чого змінюється початкова форма заготовки, ґрунтується на багаторічних дослідженнях фахівців в цій галузі. Однак деякі теоретичні положення прикладної геометрії можуть бути застосовані для розуміння протікання цих процесів. Вони стосуються ізотропних властивостей матеріалу при його пластичній деформації, незмінного об'єму під час деформації, пружного та абсолютно пружного згинання деталей, згинання листового матеріалу в робочі розгортні і нерозгортні поверхні.

Актуальність теми.

Зумовлена недостатньо вивченим зв'язком між процесом деформації матеріалу і його геометричними параметрами. Більшою мірою це стосується теорії згинання листового матеріалу. Згідно теорії згинання поверхонь диференціальної геометрії це стосується не тільки прикладів згинання розгортних поверхонь, а і нерозгортних. Багато робочих органів машин за своєю будовою є нерозгортними, виготовлення яких із плоскої заготовки викликає певні труднощі на відміну від розгортних. Відмінність між згинанням розгортних і нерозгортних поверхонь з точки зору диференціальної геометрії дає відповідь на пошук раціональних шляхів виготовлення цих поверхонь з урахуванням їх товщини та інших параметрів. Це також стосується пружного згинання виробів із листового матеріалу при їх частковому відновленні форми після припинення дії деформуючих зусиль. Механічне перенесення способу виготовлення циліндричних деталей прокаткою плоскої заготовки між валками із врахуванням часткового розгинання на конічні деталі не дає бажаного результату. Застосування теорії згинання поверхонь, згідно якої кривина кривої

на поверхні розкладається на геодезичну і нормальну складові, дозволяє вирішити це питання.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась в рамках науково-дослідної роботи кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України «Вдосконалення органів машин із гравітаційними і ротаційними робочими поверхнями для сепарації, переміщення та розкидання сільськогосподарських матеріалів» (номер держреєстрації 0110U003619).

Мета і завдання досліджень. Метою дослідження є виявлення особливостей деформування металевих деталей та використання їх в задачах пружного, абсолютно пружного згинання та знаходженні геометричних зв'язків між заготовкою та готовим виробом.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

- проаналізувати способи деформування металевих заготовок у готовий виріб;
- з'ясувати особливості деформування металевої деталі із зміною її форми за умови, що об'єм залишається незмінним;
- вивести математичний опис згинання пружного листа в циліндричну і конічну поверхні із врахуванням їх часткового розгинання;
- розробити рекомендації по налаштуванню валків для прокатки між ними циліндричних і конічних деталей із плоских заготовок;
- вивести натуральні рівняння пружної осі смуги після абсолютно пружного її згинання із прямолінійної в криволінійну форму під дією прикладених сил і моментів, а також абсолютно пружної деформації деталей і заданою початковою кривиною пружної осі;
- розглянути випадки згинання розгортних і нерозгортних лінійчатих поверхонь нульової товщини на основі класичної теорії згинання диференціальної геометрії;
- впровадити отримані результати в практику формування деталей потрібної форми та практичному використанні зміни форми при абсолютно

пружному згинанні.

Об’єкт дослідження – процес деформування металу під дією прикладених сил для надання йому заданої форми.

Предмет дослідження – встановлення закономірностей деформування матеріалу у готовий виріб із врахуванням його властивостей, форми і геометричних параметрів.

Методи дослідження. Дослідження ґрунтуються на методах аналітичної та диференціальної геометрії, теорії внутрішньої геометрії поверхонь, інтегрального числення. Для розв’язання задач щодо згинання, перетворення і деформації поверхонь і тіл застосовувалась система символічної математики “Mathematica”, для побудови поверхонь – програмний продукт “MatLab”.

Достовірність результатів проведеного дослідження, висновків та рекомендацій, які викладені у дисертації. Висновки, наведені у дисертаційному дослідженні, належно обґрунтовані і базуються на отриманих результатах. Результатами є зображення поверхонь при їх згинанні. Достовірність отриманих зображень забезпечується аналітичною перевіркою першої квадратичної форми рівнянь поверхні.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

- вперше отримано формулу для розрахунку внутрішнього і зовнішнього радіусів плоского кільця в результаті прокатки прямолінійного профілю із трапецеїдальним поперечним перерізом між конічними валками;
- вперше здійснено математичний опис деформації плоского кільця у конічну форму із врахуванням товщини листового матеріалу;
- отримав подальший розвиток спосіб згинання плоского кільця у конічну форму з розділенням кривини основи конуса на нормальну і геодезичну складові;
- вперше розв’язано задачу на знаходження пружної осі деталі у вільному стані, яка після прикладеної або розподіленої сили набуде потрібної форми;
- удосконалено спосіб виготовлення гвинтових лінійчатих поверхонь поєднанням обертального руху плоскої заготовки навколо осі і розтягуванням її вздовж осі;

- запропоновано розрахунок абсолютно пружного згинання деталей із двоякою кривиною пружної осі умовним розділенням їх на окремі частини.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані результати можуть бути використані при налагодженні різних процесів деформування металевих заготовок у готовий виріб. При виготовленні виробів із листового матеріалу потрібно враховувати їх форму. Якщо поверхня є розгортною, то контури плоскої заготовки знаходяться абсолютно точно. При цьому не враховується товщина листа, проте це практично не відображається на точності виготовлення деталей. Для нерозгортних поверхонь знаходиться наближена розгортка. В роботі запропоновано два способи її побудови для гвинтових поверхонь. Такою розгорткою є плоске кільце, яке необхідно деформувати у гвинтову поверхню. Для цього отримано залежності між розтягуванням кільця в осьовому напрямі і його скручуванням навколо осі. Ці результати були надані підприємствам, зацікавленим у малосерійному виготовленні гвинтових поверхонь, а також у навчальний процес ВП НУБіП України «Ніжинського агротехнічного інституту».

Особистий внесок здобувача. Основні теоретичні дослідження за темою роботи виконані здобувачем особисто. Було проведено аналіз наукових праць за обраним напрямом досліджень; здійснено аналітичний опис абсолютно пружного згинання прямолінійних і криволінійних смуг під дією зосередженої сили; розв'язано обернену задачу знаходження початкової форми пружної осі смуги у вільному стані, яка під дією зосередженої сили набуває потрібної форми; описано деформацію прямолінійної смуги в результаті її прокатки між конічними валками; запропоновано розкладати кривину основи конуса на нормальну і геодезичну складові при виготовленні конічних деталей пружним згинанням з допомогою конічних валків; описано неперервне згинання прямого гвинтового відкритого гелікоїда в однопорожнинний гіперболоїд обертання.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи доповідались на: ХІХ міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми землеробської механіки" (м. Житомир, 16–18 жовтня 2022 року); Х

Міжнародній науково-практичній конференції «Крамаровські читання» (м. Київ, 23-24 лютого 2023 року); XXV міжнародній науково-практичній конференції "Сучасні проблеми геометричного моделювання" (онлайн, 6 – 9 червня 2023 року); XVII і XVIII Міжнародних науково-технічних конференціях «Обуховські читання» (м. Київ, 2023, 2024 р.р.); XI, XII, XIII Всеукраїнських науково-практичних конференціях «Прикладна геометрія, інженерна графіка та об'єкти інтелектуальної власності» (м. Київ, 2022, 2023, 2024 р.р.).

Публікації. За результатами проведених дисертаційних досліджень опубліковано 26 наукові праці, у яких представлено основні отримані результати. Серед них 6 статей в наукових фахових виданнях категорії “Б”, 8 статей у виданнях, які проіндексовані у наукометричних базах даних Scopus, 1 стаття англійською мовою у закордонному виданні, 11 тез доповідей на наукових конференціях.

Обсяг і структура дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, списку використаних джерел, висновків та додатків. Повний обсяг роботи складає 181 сторінки комп'ютерного тексту, з них 8 сторінок додатків. Дисертація містить 62 ілюстрацій, 0 таблиць. До списку використаних джерел входить 119 найменувань.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ СПОСОБІВ ДЕФОРМУВАННЯ ДЕТАЛЕЙ І ПОВЕРХОНЬ З ТОЧКИ ЗОРУ ТЕХНОЛОГІЇ, ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ТА КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ ЗГИНАННЯ

1.1. Варіанти згинання металевої смуги

В процесі аналізу літератури стосовно згинання металевої смуги було обрано три випадки (рис. 1.1).

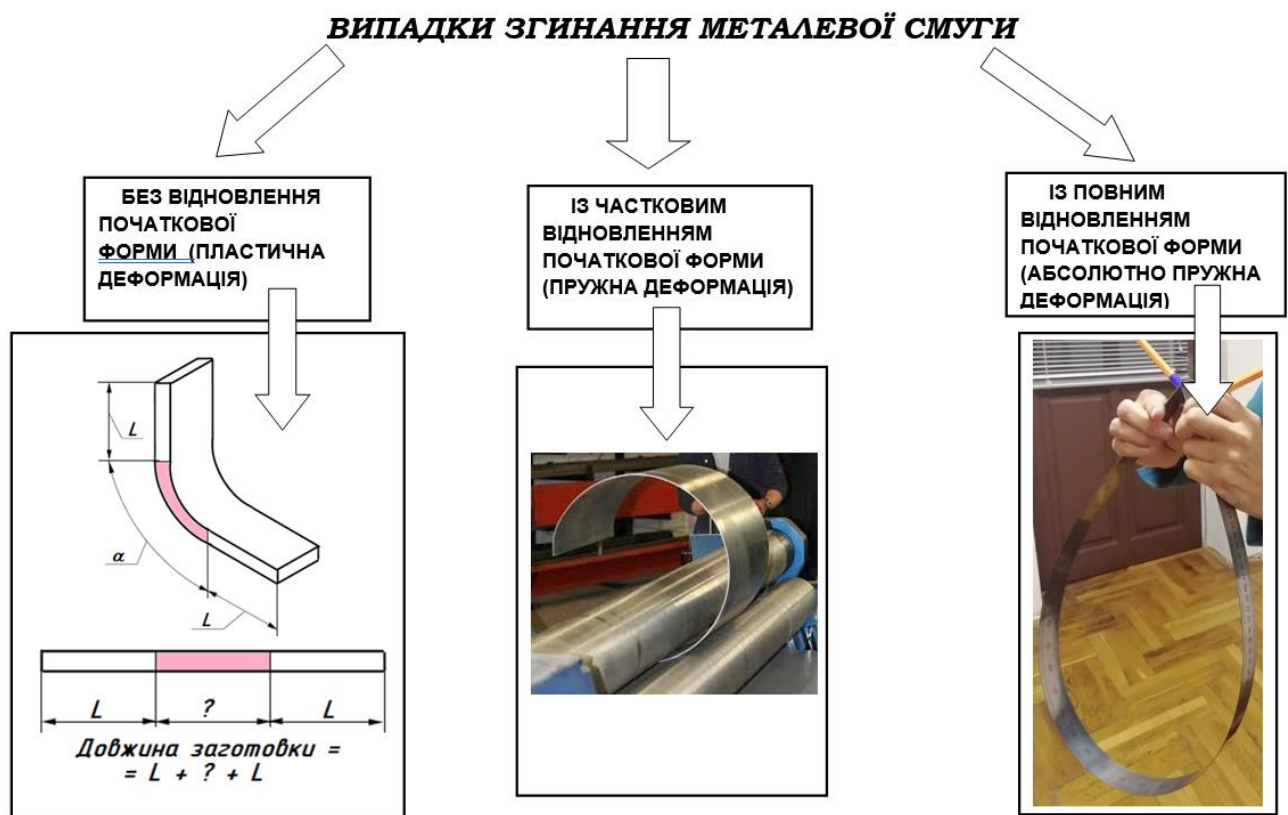


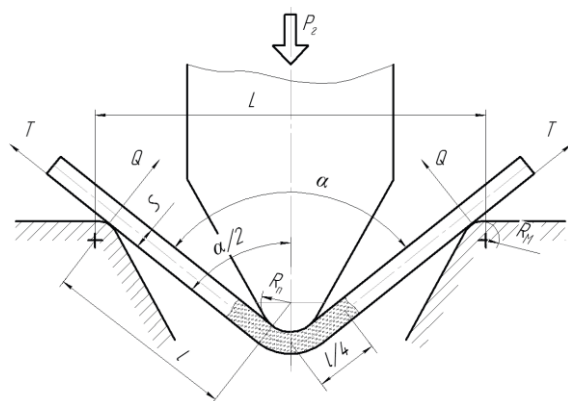
Рисунок 1.1 – Вибрані випадки згинання металевої смуги
для проведення подальших досліджень

1.1.1. Згинання смуги у готовий виріб за рахунок пластичної деформації металу

Прикладом такого згинання може бути простий випадок деформування прямолінійної смуги у Г-подібну деталь, як показано на рис. 1.1 ліворуч. Задану форму можна надати деталі штампуванням. Найпоширенішим способом

виготовлення таких деталей є гаряче штампування. Температура істотно впливає на деформативні властивості металу. Висока температура може зменшити міцність і збільшити пластичність. Холодна штамповка вимагає суттєво уточнювати як граничні можливості процесу з метою уникнення тріщин, так і визначення його енергосилових параметрів. Існуючі на сьогоднішній день теоретичні підходи та експериментально-аналітичні моделі не дозволяють з необхідною точністю прогнозувати напружено-деформований стан в процесі виготовлення гнуттям товстолистових заготовок навіть для найпростіших випадків [1].

При пластичній деформації деталь набуває остаточної форми, яка залишається незмінною після припинення дії деформуючих зусиль. Прикладом такої деформації є згинання деталей у штампах (рис. 1.2,а). В монографії [1, стор. 19] зазначено, що після гнуття форма та розміри поперечного перерізу заготовки при пластичній деформації змінюються.



а



б

Рисунок 1.2 – Графічні ілюстрації до згинання пластины прямокутного перерізу: а) схема дії сил при згинанні у штампі; б) деформація прямокутної сітки після згинання заготовки

Зміни поперечного перерізу заготовки тим більші, чим менший радіус згину. При цьому існує мінімально допустиме значення радіуса гнуття. Він встановлюється за гранично допустимими деформаціями крайніх волокон. При

переході допустимих норм матеріал деталі переходить в зону руйнування, що виявляється в появі тріщин на поверхні деталі.

В криволінійній ділянці смуги під час деформації відбуваються зміни внаслідок подовження зовнішньої сторони. Оскільки теоретично складно описати процес деформації, для його розуміння застосовують різні експерименти. Один із них – нанесення сітки на заготовку з наступним аналізом її зміни після виготовлення деталі (рис. 1.2,б). Таким чином, задача визначення довжини металевої смуги для виготовлення Г-подібної деталі заданих розмірів не є простою.

Згідно із теорією опору матеріалів при такому згинанні волокна матеріалу з внутрішньої сторони стискаються, а із зовнішньої – розтягуються. Між ними існує нейтральний шар, який не змінює своєї довжини і він знаходиться не посередині, а ближче до внутрішньої сторони циліндричної частини деталі (рис. 1.3,а). Це зміщення нейтрального шару розраховується теоретично і на основі цього складаються таблиці для визначення довжини заготовки, однак на практиці точну довжину визначають після пробних згинань. Це обумовлено низкою факторів, в тому числі властивістю матеріалу і навіть тим, що деякі із дослідників вважають, що нейтральний шар є не колом, а кривою, близькою до параболи (рис. 1.3,б).

При визначенні розмірів і форми заготовок при пластичній деформації використовується основне правило – рівність об'ємів заготовки і готової деталі [2, стор. 23]. У студентській науковій роботі [3] на основі цього положення було прийнято інші припущення щодо деформації прямолінійної області смуги при її деформації у циліндричну. Оскільки форма поперечного перерізу циліндричної ділянки деталі змінюється, було прийнято припущення, що вона із прямокутника перетворюється у рівнобічну трапецію, у якої менша основа відповідає зовнішній стороні циліндра. При згинанні внутрішня сторона смуги згідно припущення не стискається, а зовнішня розтягується. При цьому чиниться опір розтягуванню зовнішньої сторони в тому сенсі, що її площа намагається

залишатися незмінною. На основі цих умов було складено систему рівнянь для знаходження невідомих сторін трапеції.

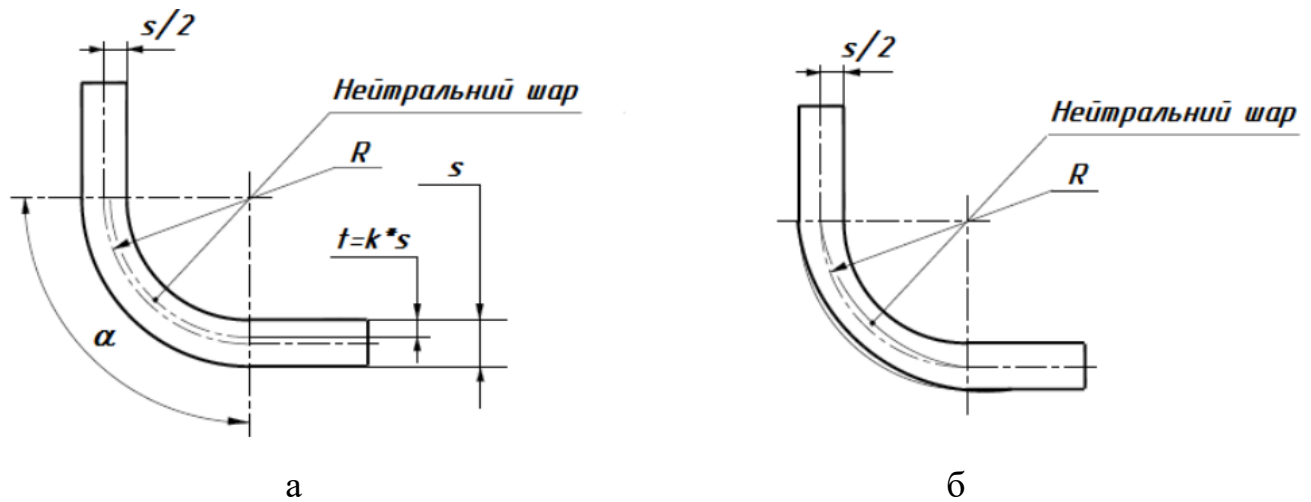


Рисунок 1.3 – Графічні ілюстрації до деформації циліндричної частини деталі:
а) нейтральний шар у вигляді дуги кола; б) нейтральний шар у вигляді кривої, близької до параболи

Таке припущення має часткове підтвердження. Розроблена модель деформації смуги тільки наближено описує процес, який відбувається в реальності. На рис. 1.4 показано фото двох однаково зігнутих пластин. Еліпсом виділено місце, на якому видно, що протилежні сторони поперечного перерізу циліндра відрізняються по величині, тобто він є трапецією.



Рисунок 1.4 – Дві однаково зігнуті пластини, на яких видно зменшення ширини зовнішньої поверхні циліндричної частини

Очевидно, що такий підхід не є точним, оскільки згідно нього розміри трапеції залежать від ширини смуги, тоді як в реальності цього не відбувається.

В спеціалізованих виданнях (наприклад, «Обробка матеріалів тиском»), розглядаються вузькопрофільні питання деформації металу. В праці [4] проведені дослідження згинання біметалевих пластин, утворених смугами із різних металів. Розробляються програмні компоненти для моделювання пластичного деформування металу [5], що відповідає сучасним тенденціям розвитку науки із широким залученням комп'ютерних технологій. В роботі [6] запропоновано метод оцінювання якості листових деталей на основі функціональних залежностей від показників їх геометричних розмірів. При цьому велику роль відіграє експериментальна перевірка отриманих результатів. Про це свідчить праця [7], в якій проводиться порівняння використанні методу скінченних елементів процесу правки прокату із даними експерименту. Згинанню товстолистових заготовок присвячені праці [8, 9]. Гнуття із витягуванням розглянуто в праці [10]. Проведені в роботі дослідження зорієнтовані на геометричні питання, які спираються на незмінність об'єму в процесі пластичної деформації і ймовірні перетворення початкової форми заготовки. Для цього було опрацьовано навчальну літературу [11 – 14], яка дає відповідь на основні процеси, які відбуваються при пластичній деформації металу.

Зв'язок між технологією виготовлення деталей згинанням із врахуванням товщини смуги і методами прикладної геометрії свідчить публікація [15] у періодичному виданні, в якому висвітлюються практичне застосування геометричних методів. Зокрема, для згинання Г-подібних деталей (рис. 1.3) для визначення положення нейтрального шару вводиться К-фактор [16]. Як видно із рис. 1.5, взятого із цього електронного ресурсу, К-фактор є коефіцієнтом, який визначається відношенням шару, який стискається, до товщини смуги. Його значення коливається у межах 0,35 – 0,5. Зазвичай цей коефіцієнт визначається експериментальним шляхом на підприємстві для конкретного типу обладнання та партії листового прокату, з подальшими рекомендаціями щодо його використання в обмеженому діапазоні товщин матеріалу і кутів згину. Наприклад, у програмі Autodesk Inventor коефіцієнт К-фактор за замовчуванням

встановлено на значенні $K=0,44$ [15], що цілком відповідає вимогам навчального процесу для виготовлення простих деталей. Чим точніше визначено це значення, тим точнішими будуть розміри розгортки, а отже, й розміри деталі в згорнутому вигляді.

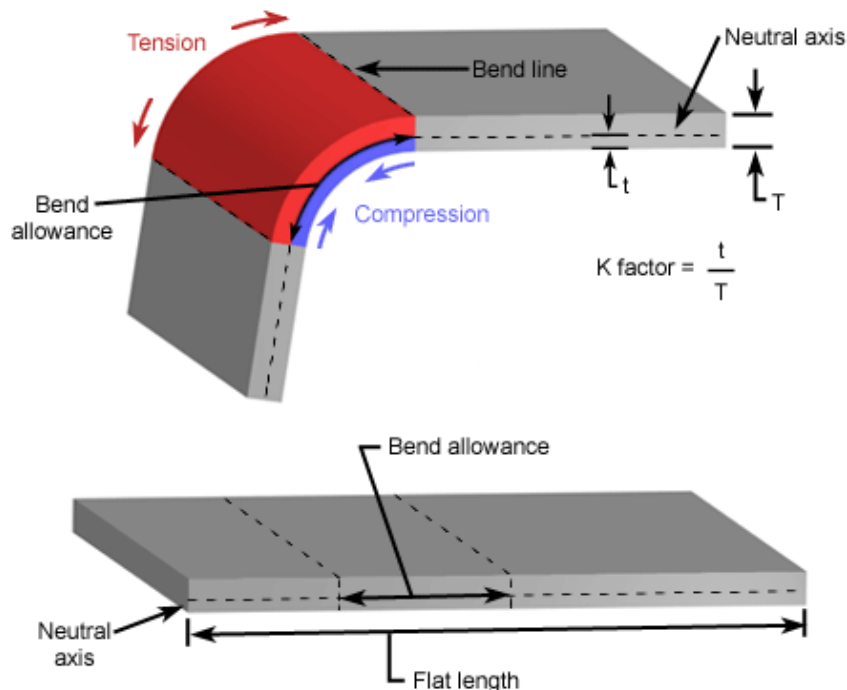


Рисунок 1.5 – Графічні ілюстрації до визначення положення нейтрального шару за допомогою К-фактора

Таким чином К-фактор має досить широкий діапазон значень і уточнюється експериментально для кожного конкретного випадку із врахуванням партії металу.

1.1.2. Пружне згинання листового металу

При згинанні листового металу можливе часткове відновлення початкової форми. Таке явище носить назву пружинення. Якщо, наприклад, згинати металевий лист у Г-подібну деталь, то при припиненні дії деформуючих зусиль кут між кінцями деталі може бути більшим від заданого прямого кута. Різниця між отриманим кутом і заданим прямим називається кутом пружинення. Його визначають за допомогою вимірювання. Якщо згинання здійснювалося за

допомогою пуансона, то потрібно зменшити його кут на кут пружинення [2]. Пружинення враховують при художньому куванні [17], при формуванні листового металу з подвійною криволінійною формою [18], при гарячому штампуванні сталі [19], при багатоходовому згинанні листових заготовок [20].



Рисунок 1.6 – формування
циліндричної деталі
прокаткою металевго листа
між валками

Пружинення відбувається при виготовленні циліндричних поверхонь прокаткою листа між циліндричними валками (рис. 1.6). Його врахування для отримання деталі заданого радіуса розглянуто в праці [21]. В ній запропоновано оцінювати пружинення не кутом, а відносним показником – відношенням заданого радіуса циліндра R_v до фіктивного R_f після проходження листа між валками. Оскільки радіус є оберненою величиною до кривини, то коефіцієнт p пружинення є

відношенням кривини фіктивного циліндра k_f після проходження листа між валками до заданої кривини k_v :

$$p = \frac{R_v}{R_f} = \frac{k_f}{k_v}, \quad (1.1)$$

Таким чином, щоб знайти кривину перерізу фіктивного циліндра, на якого налаштовуються валки, потрібно кривину перерізу дійсного циліндра помножити на коефіцієнт p , тобто збільшити кривину перерізу дійсного циліндра у p раз:

$$k_f = pk_v \quad \text{або} \quad R_f = \frac{R_v}{p}. \quad (1.2)$$

На рис. 1.7,а показана схема прокатки плоского листа у циліндричну форму з позначенням дійсного і фіктивного радіусів, а на рис. 1.7,б – налаштування валків.

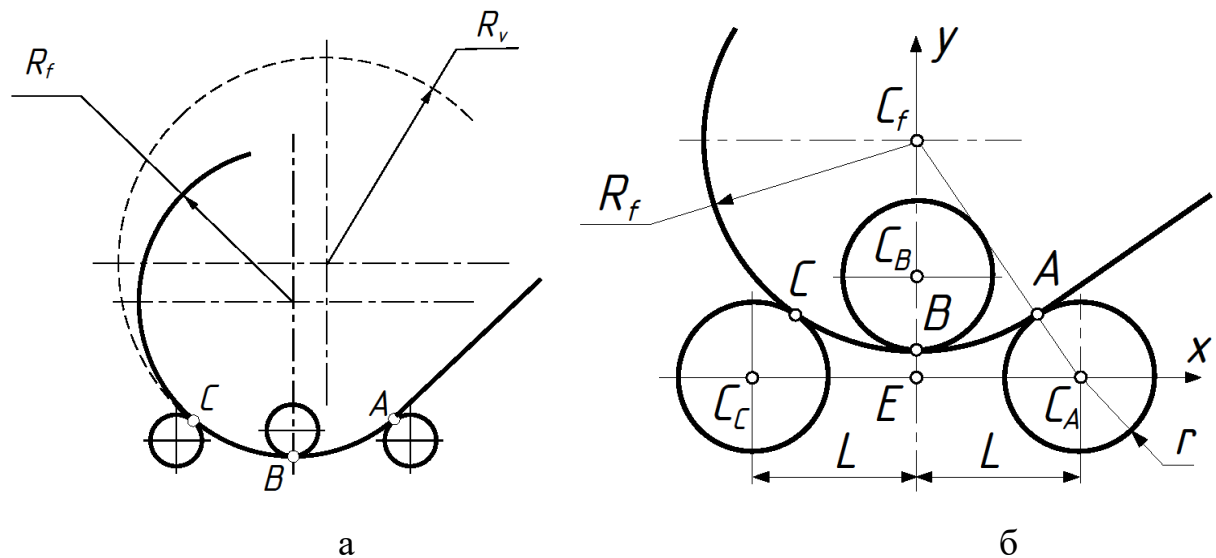


Рисунок 1.7 – Схема прокатки плоского листа у циліндричну форму:

а) циліндричні котки налаштовані на отриманні фіктивного радіуса, який після пружинення набуває дійсного значення; б) позначення розмірів для знаходження взаємного налаштування валків

Виходячи із заданої відстані L , радіуса r котків і фіктивного радіуса циліндричної деталі R_f , знаходиться відстань EC_B розташування верхнього валка:

$$EC_B = C_A C_f - R_f + r = \sqrt{(R_f + r)^2 - L^2} - R_f + r. \quad (1.3)$$

Виходячи із відомого коефіцієнта пружинення p можна знайти радіус фіктивного циліндра R_f згідно (2). Далі за формулою (1.3) можна знайти відстань EC_B для розміщення верхнього валка. При цьому відстань L і радіус котків r можуть варіювати в певних межах.

1.1.3. Абсолютно пружне згинання металевих стержнів і смуг

При абсолютно пружному згинанні стержнів і смуг вони повністю відновлюють свою початкову форму. Згинання стержнів і смуг відбувається під дією деформуючих зусиль. Початкова форма стержня у вільному стані може бути прямолінійною або криволінійною. Набута форма під дією навантаження оцінюється зміною пружної осі. Під час згинання стержень зазнає деформації, яка розподіляється від нейтральної осі. Нейтральна вісь — це уявна лінія, де не відбувається зміни її довжини: над нею волокна стискаються, а під нею — розтягуються. Під пружною віссю стержня розуміють нейтральну вісь.

Існує лінійна і нелінійна теорія згину пружних елементів (стержнів, смуг, балок). Лінійна теорія застосовується для розрахунку прогину балок будівельних конструкцій. Балки розраховуються таким чином, щоб їх прогини були мінімальними і не виходили за певні межі. Тому для практичних розрахунків прогину стержнів точне рівняння зігнутої осі стержня замінюють спрощеним лінійним диференціальним рівнянням пружної осі. Воно дає прийнятні для практики переміщення стержня для малих деформацій при будь-яких видах навантаження. Однак є випадки, коли тонкий стержень сильно згинається при роботі матеріалу в межах пружності (пружини, пружинні елементи сільськогосподарських ґрунтообробних знарядь). В таких випадках переміщення при згині стають співрозмірними із довжиною самої деталі. Тут спостерігається нелінійна залежність великих переміщень від дії зовнішніх сил, хоча матеріал працює пружно. Поведінка пружних деталей з великими прогинами не може бути вивчена за допомогою лінійної теорії згину. Форма пружної осі описується натуральним рівнянням, тобто залежністю кривини від довжини її дуги. До виразу кривини входять похідні першого і другого порядку параметричних рівнянь, що її описують. Наявність цих похідних є ознакою нелінійної теорії згину. При невеликих прогинах другими похідними нехтують, що призводить до лінійної теорії. В наших дослідженнях застосовується нелінійна теорія згину. Вона базується на теорії опору матеріалу, згідно якої кривина пружної осі прямо

пропорційна прикладеному моменту і обернено пропорційна жорсткості стержня.

Розглянемо сказане прикладі консольно защемленої смуги прямокутного поперечного перерізу (рис. 1.8).

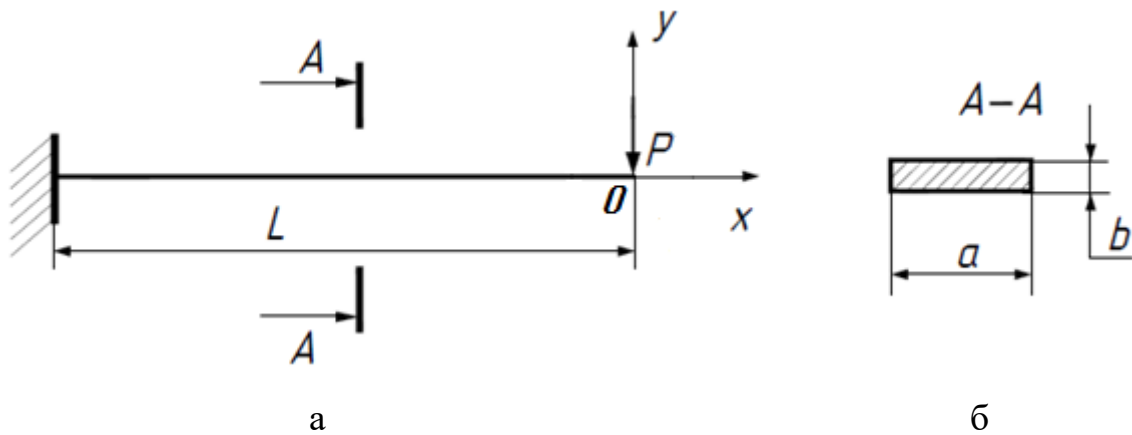


Рисунок 1.8 – Схема навантаження консольно защемленої смуги прямокутного поперечного перерізу: а) позначення зосередженої сили P , прикладеної в кінці смуги; б) позначення розмірів поперечного перерізу смуги

Математично кривина пружної осі запишеться наступним виразом:

$$k(s) = \frac{M(s)}{EI}, \quad (1.4)$$

де s є значення довжини смуги від її кінця (точки O) до поточної точки;

$M=M(s)$ – прикладений момент, який є функцією довжини s пружної осі;

EI – жорсткість смуги, яка є добутком модуля Юнга E , що характеризує властивість матеріалу, на момент інерції I поперечного перерізу смуги.

Жорсткість характеризує здатність смуги чинити спротив згинанню. Якщо смуга виготовлена із однорідного матеріалу і має однаковий поперечний переріз по всій довжині, то жорсткість є величиною сталою. Модуль Юнга і момент інерції є табличними даними. Наприклад, для прямокутного перерізу (рис. 1.8,б),

момент інерції знаходять за формулою: $I=ab^3/12$. Якщо смугу поставити «на ребро», то момент інерції для такого випадку буде: $I=a^3b/12$.

До прикладення сили смуга є прямолінійною і кривина її осі дорівнює нулю. Після прикладення сили смуга згинається і її вісь набуває кривини. Як відомо, кривина є границею відношення кута між дотичними на кінцях елемента дуги до довжини цього елемента. Отже, формулу (1.4) можна переписати наступним чином:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{M(s)}{EI}. \quad (1.5)$$

По суті, рівняння (1) є натуральним рівнянням пружної осі смуги. Існує перехід від натурального рівняння до координатної форми запису:

$$x = \int \cos \alpha(s) ds; \quad y = \int \sin \alpha(s) ds, \quad (1.6)$$

де кут α знаходиться інтегруванням виразу (1.5).

Для наведеного прикладу зосередженої сили P момент запишеться: $M=Ps$. Визначаємо кут α за формулою (1.5):

$$\alpha = \frac{P}{EI} \int s ds = \frac{Ps^2}{2EI}. \quad (1.7)$$

Для побудови пружної осі зігнутої смуги потрібно вираз кута α (1.7) підставити у рівняння (1.6). Навіть для такого простого прикладу потрібно застосовувати чисельне інтегрування рівнянь (1.6).

Абсолютно пружне згинання смуги із прямокутним поперечним перерізом під дією зосередженої сили, а також розподіленої сили, якою є сила ваги, розглянуто в праці [22]. Різні варіанти згину пружних стержнів розглянуто в працях [23 – 25]. Окрему групу стосовно пружного згину стержнів складають праці із згинання бурильних колон у криволінійних каналах [26 – 29]. Згинання брусів із криволінійною віссю розглянуто в працях [30 – 33].

1.2. Лінійний елемент або перша квадратична форма поверхні

Згинання поверхонь є окремим розділом диференціальної геометрії. Поверхня описується параметричними рівняннями:

$$X = X(u, v); \quad Y = Y(u, v); \quad Z = Z(u, v) , \quad (1.8)$$

де u і v є незалежними змінними.

Вони утворюють координатну сітку поверхні. Якщо одній змінній, наприклад, u надати сталого значення і змінювати v , то на поверхні буде описана координатна v –лінія. При сталому значенні v і зміні u буде описана координатна u –лінія. Сім’ї координатних ліній утворюють сітку, яка може бути прямокутною або косокутною. Таким чином з точки зору диференціальної геометрії поверхню можна розглядати, як каркас нульової товщини.

Загальну умову згинання одержав Л. Ейлер, виходячи із інваріантності довжини лінії на поверхні. Він вперше ввів лінійний елемент, через який визначається довжина лінії на поверхні.

Як відомо із курсу математики, диференціал довжини дуги визначається із виразу:

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 . \quad (1.9)$$

Якщо X , Y і Z є функціями однієї змінної, наприклад, t , то вони опишуть просторову криву. Вираз (1.9) в такому випадку прийме вигляд:

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2, \quad (1.10)$$

звідки довжина дуги цієї кривої визначиться інтегруванням по змінній t :

$$S = \int_t \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} dt. \quad (1.11)$$

В такому випадку кожна складова виразу (1.9) запишеться як повний диференціал двох змінних u і v :

$$\begin{aligned} dX &= \frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv; & dY &= \frac{\partial Y}{\partial u} du + \frac{\partial Y}{\partial v} dv; \\ dZ &= \frac{\partial Z}{\partial u} du + \frac{\partial Z}{\partial v} dv, \end{aligned} \quad (1.12)$$

де $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial Y}{\partial u}$, $\frac{\partial Z}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$, $\frac{\partial Y}{\partial v}$, $\frac{\partial Z}{\partial v}$ – частинні похідні.

Підставивши (1.12) в (1.9), після піднесення до квадрату і групування, одержимо:

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \text{де } E &= \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u} \right)^2; \quad F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial Z}{\partial v}; \\ G &= \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Вираз (1.13) називається диференціалом дуги або лінійним елементом поверхні. Права частина формули (1.13) називається також першою квадратичною формою поверхні, заданої у формі (1.8). Вирази E , F , G називаються коефіцієнтами першої квадратичної форми поверхні.

Якщо є дві поверхні, віднесені до криволінійних координат таким чином, що їх перші квадратичні форми збігаються, то такі поверхні називаються накладеними. Це означає, що одну із них можна перевести в іншу. При цьому відбувається процес згинання поверхні – така неперервна її деформація, при якій довжини кривих на поверхні не змінюються. Якщо між початковим і кінцевим положенням поверхні вдається знайти хоч одну проміжну поверхню з тим же лінійним елементом, то це означає, що в такому випадку можна знайти безліч проміжних положень і процес згинання буде описаний неперервно. Наглядно продемонструвати згинання розгортної поверхні можна на прикладі листа паперу. Очевидно, що і кути між лініями та площа відсіку поверхні при її згинанні теж не змінюються. Згинання розгортних поверхонь є найбільш вивчене в теоретичному плані, тому що окремий випадок згинання таких поверхонь на площину, тобто одержання розгорток, носить прикладний характер. В зв'язку із цим пошук можливості згинання як розгортних, так і нерозгортних поверхонь здійснювався на основі незмінності коефіцієнтів першої квадратичної форми. Відшукувалися такі нові параметричні рівняння поверхні шляхом введення певної постійної величини p , щоб коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні не змінилися, тобто були незалежними від p . Кожному конкретному значенню величини p відповідала конкретна поверхня, а ряду значень p – ряд ізометричних перетворень поверхні, тобто її згинань.

Згодом було з'ясовано, що координатними лініями таких поверхонь є сім'ї спряжених ліній, які ними залишалися і під час згинання. Ці сім'ї були названі головною основою, а саме згинання — згинанням на головній основі.

1.3. Незмінність геодезичної кривини лінії на поверхні при її згинанні

Кривину лінії на поверхні можна розкласти на геодезичну і нормальну складові. При згинанні поверхні геодезична кривина лінії на ній і довжина лінії залишаються незмінними. Лінії на поверхні, для яких геодезична складова дорівнює нулю, називаються геодезичними. Прикладом може служити коло — основа циліндра. Його нормальна складова кривини є величиною, оберненою до радіуса, а геодезична дорівнює нулю. На розгортці коло перетворюється у пряму лінію, у якої кривина дорівнює нулю.

При згинанні поверхні не змінюється перша квадратична форма, тобто вона є інваріантом згинання. Таким інваріантом є також геодезична кривина лінії на поверхні. Її можна знайти через коефіцієнти першої квадратичної форми. Розглянемо елементарний випадок для конуса, де за лінію на ньому візьмемо його основу. Вектор кривини k спрямований по нормалі кривої (в нашому випадку кола радіуса R) до центра кривини (рис. 1.9,а). Він розкладається на геодезичну складову k_g , розташовану у дотичній до поверхні площині і нормальну k_n , розташовану вздовж нормалі до поверхні. Запишемо вираз геодезичної кривини через кут β при вершині конуса:

$$k_g = k \sin \beta = \frac{\sin \beta}{R}. \quad (1.15)$$

На розгортці конуса (рис. 1.9,б) його основа перетворилася на дугу кола радіуса u (рис. 1.9,б). Отже після згинання конуса на площину геодезична кривина набула значення $1/u$. Але згідно рис. 1.9,а знаходимо $u=R/\sin\beta$.

Оскільки кривина є величиною, оберненою до радіуса u , то ми отримуємо вираз (1.15).

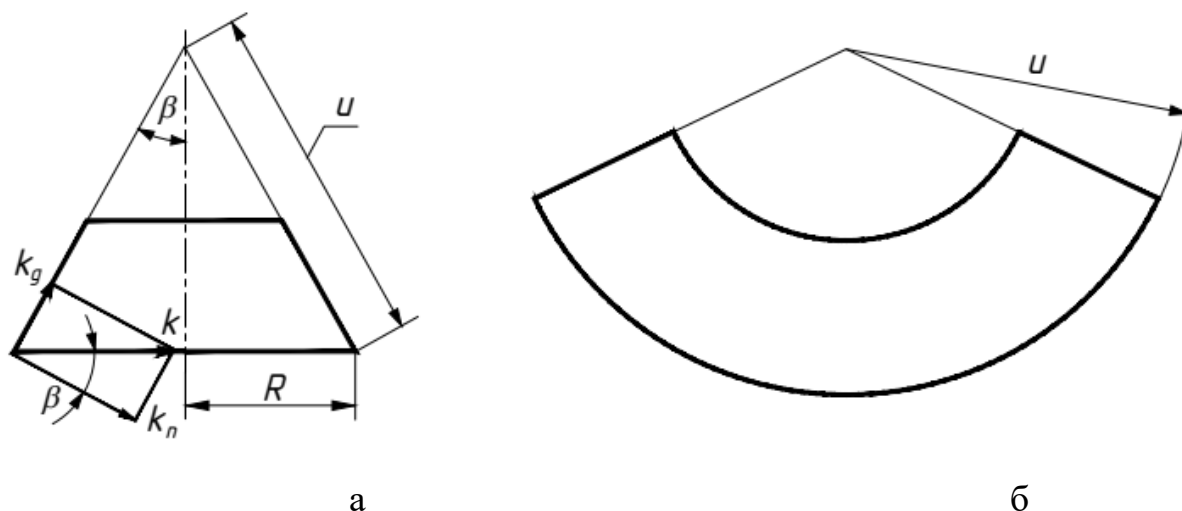


Рисунок 1.9 – Графічні ілюстрації до визначення геодезичної кривини основи конуса: а) конус із позначенням кривини k основи; б) кривина основи конуса на розгортці набула значення $1/u$

На цьому простому прикладі показано, що геодезична кривина основи конуса на його розгортці не змінилася. Вона залишається незмінною при неперервному згинанні конуса і описується виразом (1.15).

1.4. Неперервне згинання розгортних поверхонь

Неперервне згинання розгортних поверхонь продемонструємо на прикладі конуса. В попередньому підрозділі 1.3 було показано, що геодезична кривина основи конуса при згинанні залишається сталою і обчислюється за формулою (1.15). Згинання конуса будемо здійснювати зміною кута β . При поступовому збільшенні кута β конус буде згинатися, залишаючись конусом і при $\beta=90^\circ$ перетвориться у розгортку. Із зміною кута β , нове значення якого позначимо β_z , зміниться радіус основи конуса, якого позначимо R_z . На основі незмінності геодезичної кривини лінії при згинанні поверхні згідно залежності (1.15) запишемо:

$$\frac{\sin \beta}{R} = \frac{\sin \beta_z}{R_z} \quad \text{звідки} \quad R_z = \frac{R \sin \beta_z}{\sin \beta}. \quad (1.16)$$

При зменшенні висоти конуса, тобто при збільшенні кута β_z , радіус його основи R_z змінюватиметься згідно залежності (1.16). Запишемо параметричні рівняння кола при його трансформації:

$$x = \frac{R \sin \beta_z}{\sin \beta} \cos \alpha_z; \quad y = \frac{R \sin \beta_z}{\sin \beta} \sin \alpha_z, \quad (1.17)$$

де α_z – незалежна змінна – кут повороту точки кола навколо його центру.

При згинанні конуса потрібно врахувати незмінність довжини дуги основи конуса. Прирівняємо їх довжини до і після згинання:

$$R\alpha = \frac{R \sin \beta_z}{\sin \beta} \alpha_z, \quad \text{звідки} \quad \alpha_z = \frac{\sin \beta}{\sin \beta_z} \alpha. \quad (1.18)$$

Після цього можемо остаточно записати параметричні рівняння основи конуса при його згинанні змінною кута β_z :

$$x = \frac{R \sin \beta_z}{\sin \beta} \cos \frac{\sin \beta}{\sin \beta_z} \alpha; \quad y = \frac{R \sin \beta_z}{\sin \beta} \sin \frac{\sin \beta}{\sin \beta_z} \alpha. \quad (1.19)$$

Через дугу кола (1.19) проходить прямолінійна твірна трансформованого конуса до його вершини і складає кут β_z з його віссю. З урахуванням цього параметричні рівняння конуса в процесі його згинання запишуться:

$$\begin{aligned}
X &= \frac{R \sin \beta_z}{\sin \beta} \cos \left(\frac{\sin \beta}{\sin \beta_z} \alpha \right) + u \sin \beta_z \cos \left(\frac{\sin \beta}{\sin \beta_z} \alpha \right); \\
Y &= \frac{R \sin \beta_z}{\sin \beta} \sin \left(\frac{\sin \beta}{\sin \beta_z} \alpha \right) + u \sin \beta_z \sin \left(\frac{\sin \beta}{\sin \beta_z} \alpha \right); \\
Z &= u \cos \beta_z,
\end{aligned} \tag{1.20}$$

де u – друга незалежна змінна – довжина прямолінійної твірної поверхні.

Знаходимо частинні похідні рівнянь (1.20):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial \alpha} &= -(R + u \sin \beta) \sin \left(\frac{\sin \beta}{\sin \beta_z} \alpha \right); \\
\frac{\partial Y}{\partial \alpha} &= (R + u \sin \beta) \cos \left(\frac{\sin \beta}{\sin \beta_z} \alpha \right); \quad \frac{\partial Z}{\partial \alpha} = 0; \\
\frac{\partial X}{\partial u} &= \sin \beta_z \cos \left(\frac{\sin \beta}{\sin \beta_z} \alpha \right); \\
\frac{\partial Y}{\partial u} &= \sin \beta_z \sin \left(\frac{\sin \beta}{\sin \beta_z} \alpha \right); \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = \cos \beta_z.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Коефіцієнти першої квадратичної форми згідно (1.14) запишуться:

$$E = 1; \quad F = 0; \quad G = (R + u \sin \beta)^2. \tag{1.22}$$

До виразу коефіцієнтів (1.22) не входить кут β_z , який входить до рівнянь (1.20) і впливає на форму поверхні. Конкретному значенню кута β_z відповідає конус із зазначеним кутом при його вершині, при цьому перша квадратична форма поверхні не змінюється. Це означає, що зміною кута β_z здійснюється згинання поверхні, тобто цей кут є параметром згинання. Рівність нулю

коефіцієнта F свідчить про те, що сітка координатних ліній поверхні є ортогональною. На рис. 1.10 побудовано окремі положення конуса при його згинанні з початковим значенням $\beta=20^\circ$.

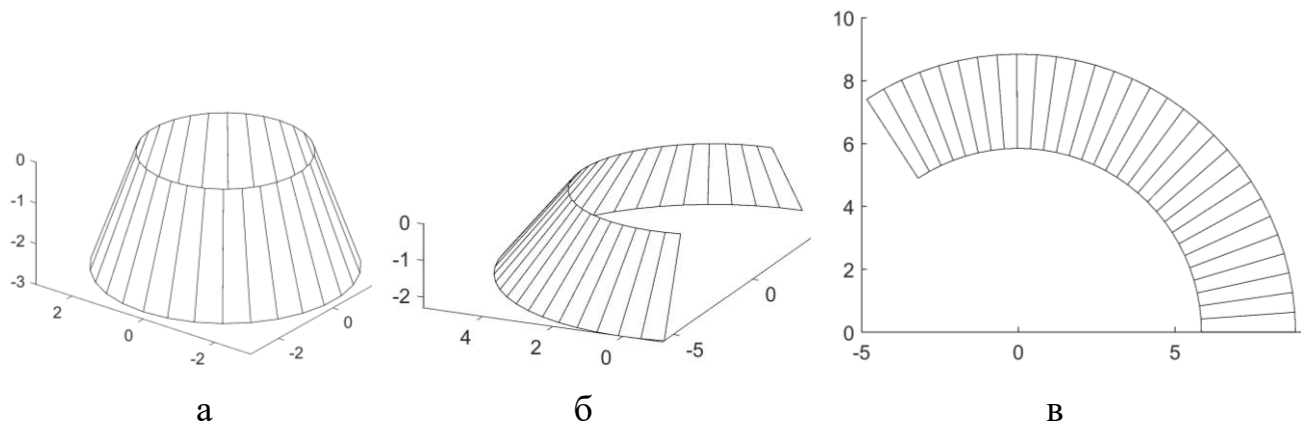


Рисунок 1.10 – Окремі положення конуса при його згинанні:

а) $\beta_z=\beta=20^\circ$; б) $\beta_z=40^\circ$; в) $\beta_z=90^\circ$ (розгортка)

В праці [34] розглянуто конус, який віднесений до ортогональної сітки координатних ліній, якими є геодезичні лінії. Дослідженню взаємозв'язку між кривиною і нормальною кривиною кривої на торсі при його згинанні присвячені праці [35, 36]. Взаємозв'язок між поверхнею ґрунтообробного котка із торсегелікоїда і розгорткою окремого витка розглянуто в працях [37, 38]. Така практика відшукування розгорток є поширеною, оскільки не вимагає рівнянь неперервного згинання поверхні. Для цього достатньо показати, що перші квадратичні форми поверхні і її розгортки збігаються без аналітичного опису проміжних поверхонь, що показано в працях [39, 40]. Для того, щоб знайти розгортку, а тим більше, неперервне згинання поверхні для отримання розгортки, необхідно мати параметричні рівняння торса. Їх конструювання і аналітичний опис розглянуто в працях [41, 42, 43, 44, 45]. Програмне забезпечення згинання плоского відсіку у поверхню циліндра або конуса здійснено в праці [46]. Відомо, що поверхня може котитися по своєму згинанню. Прикладом можуть служити два будь-яких проміжних конуси, вибраних із ряду їх неперервного згинання (рис. 1.0). При їх взаємному коченні відповідні твірні попарно вступають у контакт. Умовою для цього є суміщення їх вершин. Для

поверхонь із ребром звороту таке суміщення повинне відбуватися у відповідних точках на них. Приклад такого кочення розглянуто в праці [47] для торсів-гелікоїдів.

1.5. Неперервне згинання нерозгортних поверхонь

Нерозгортні поверхні теж можуть згинатися, подібно до розгортних, однак їх не можна зігнути на площину. Класичними прикладами є згинання гвинтових нерозгортних поверхонь. Існує теорема, згідно якої гвинтову поверхню можна зігнути на поверхню обертання поступовим зменшенням її кроку. Відомими прикладами є згинання гвинтового коноїда на катеноїд [48], а також косого закритого гелікоїда на гіперболоїд обертання [49]. В працях [50, 51, 52, 53] гвинтові поверхні розглядаються в ролі гравітаційних спусків, тобто по них здійснюється ковзання частинок під дією сили власної ваги. В диференціальних рівняннях руху частинки закладено характеристики поверхні, до яких входить крок поверхні. Однак крок поверхні може бути параметром згинання і тоді диференціальні рівняння опишуть рух частинки не по конкретно взятій поверхні, а по цілому класу поверхонь, що входять до множини її згинань.

Геометричну суть згинання деяких нерозгортних поверхонь розглянуто в працях [54, 55, 56]. Окрім перерахованих груп поверхонь неперервне згинання допускають також мінімальні поверхні [57, 58, 59, 60]. У зв'язку із цим у низці праць розглядаються способи їх конструювання [61, 72]. Згинаються також нерозгортні поверхні обертання. В праці [73] наведено аналітичний опис неперервного згинання однопорожнинного гіперболоїда обертання зміною радіуса горлової лінії. При такому згинанні меридіан, який у початковому положенні є гіперболою, трансформується у іншу плоску криву, яка будується чисельними методами. Якщо у початковому положенні поверхня є лінійчатою, то множина її згинань є поверхні нелінійчаті. Такими також є згинання гвинтового коноїда зменшенням його кроку. Тільки в початковому положенні він є поверхнею лінійчатою, всі інші проміжні положення аж до його згинання

на поверхню обертання – катеноїд – є поверхні нелінійчаті. При подібному згинанні косого гелікоїда всі проміжні положення аж до поверхні обертання – однопорожнинного гіперболоїда – теж є лінійчатими поверхнями. Це дає можливість розглядати їх взаємне кочення із лінійним контактом вздовж відповідних прямолінійних твірних. Таке кочення розглянуто в праці [74]. В праці [75] наведено найбільш простий випадок неперервного згинання нерозгортної лінійчатої поверхні, яка в процесі згинання залишається лінійчатою. Це стосується поверхні бінормалей просторової кривої. При згинанні такої поверхні скрут просторової кривої, яка є напрямною для поверхні, залишається незмінним, а змінюється тільки кривина. Для прикладу в статті взято гвинтову лінію із кутом підйому β на циліндрі радіуса r . Її параметричні рівняння у функції довжини власної дуги s мають вигляд:

$$x = r \cos\left(\frac{\cos \beta}{r} s\right); \quad y = r \sin\left(\frac{\cos \beta}{r} s\right); \quad z = s \sin \beta. \quad (1.23)$$

Лінію (1.23) можна так трансформувати, щоб вона залишалася гвинтовою сталого скруту, при цьому кут її підйому і радіус циліндра буде змінюватися. Таку трансформацію можна записати введенням коефіцієнта p [75]:

$$\begin{aligned} x &= \frac{r \sin 2p\beta}{\sin 2\beta} \cos\left(\frac{\sin \beta \cos \beta}{r \sin p\beta} s\right); \\ y &= \frac{r \sin 2p\beta}{\sin 2\beta} \sin\left(\frac{\sin \beta \cos \beta}{r \sin p\beta} s\right); \\ z &= s \sin \beta. \end{aligned} \quad (1.24)$$

При $p=1$ рівняння (1.24) перетворюються у рівняння (1.23). Через кожну точку кривої (1.24) потрібно провести прямолінійну твірну, яка збігається із бінормаллю. За відомими формулами в праці [75] знайдено напрямні косинуси

бінормалі, після чого наведено параметричні рівняння множини поверхонь – згинання вихідної:

$$\begin{aligned} X &= \frac{r \sin 2p\beta}{\sin 2\beta} \cos\left(\frac{\sin \beta \cos \beta}{r \sin p\beta} s\right) + u \sin p\beta \sin\left(\frac{\sin \beta \cos \beta}{r \sin p\beta} s\right); \\ Y &= \frac{r \sin 2p\beta}{\sin 2\beta} \sin\left(\frac{\sin \beta \cos \beta}{r \sin p\beta} s\right) - \sin p\beta \cos\left(\frac{\sin \beta \cos \beta}{r \sin p\beta} s\right); \\ Z &= s \sin \beta + u \cos p\beta. \end{aligned} \quad (1.25)$$

де u – друга незалежна змінна поверхні – довжина прямолінійної твірної, відлік якої починається від точки на гвинтовій лінії.

Коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (1.25) мають вигляд:

$$E = 1; \quad F = 0; \quad G = 1 + u^2 \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \beta}{r^2}. \quad (1.26)$$

Сталий коефіцієнт p не входить до виразів (1.26), але він впливає на форму поверхні, тобто він є параметром згинання. При $p=1$ маємо вихідну поверхню, при інших значеннях – зігнуту. Для плоскої кривої бінормалі утворюють циліндричну поверхню. При її згинанні так, щоб вона залишалася циліндричною, напрямна крива залишається плоскою, тобто скрут не змінюється, оскільки для плоских кривих він дорівнює нулю. Таким чином для просторових напрямних кривих відбувається згинання нерозгортних лінійчатих поверхонь, а для плоских – розгортних, тобто циліндричних поверхонь. В даному конкретному випадку показано спосіб, як знайти однопараметричну множину згинань нерозгортної поверхні. Але всі способи об'єднує одна спільна властивість згинання поверхонь – геодезична кривина лінії на поверхні в процесі її згинання залишається незмінною. Це стосується всіх поверхонь – як розгортних, так і нерозгортних.

В праці [75] наведено приклади згинання поверхні бінормалей за рівняннями (1.25), які представлені на рис. 1.11.

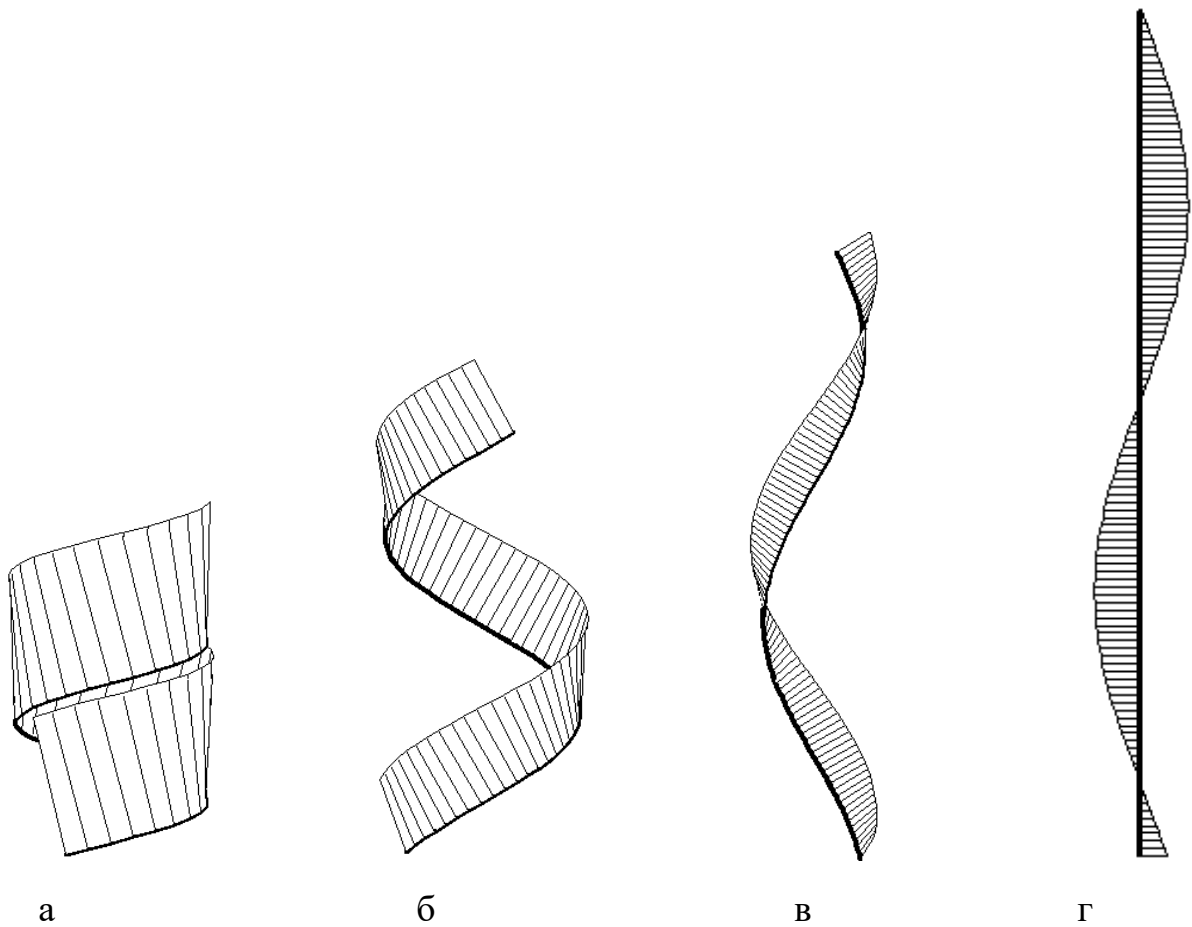


Рисунок 1.11 – Згинання поверхні бінормалей гвинтової лінії
за рівняннями (1.25):

а) $p=1$;

б) $p=2$;

в) $p=4$;

г) $p=6$

Потовщеною лінією позначено напрямну криву – вихідну гвинтову лінію. При $p=6$ (кут підйому гвинтової лінії зростає від $\beta=15^\circ$ до $\beta=90^\circ$ гвинтова лінія перетворилася у пряму, а поверхня бінормалей – у гвинтовий коноїд.

Висновки до першого розділу

1. Аналіз літературних джерел із згинання металевих заготовок у готовий виріб можна класифікувати за наступними показниками:

- пластична деформація заготовки у готовий виріб. Вона здійснюється з нагріванням або без нагрівання заготовки, при цьому об'єм виробу вважається незмінним;
- при незмінності об'єму деталі згинання може бути пружне або абсолютно пружне. В цьому випадку важливою характеристикою для визначення форми деталі під дією прикладених сил є кривина її пружної осі;
- важливою в практичному значенні є теорія згинання поверхонь диференціальної геометрії. Вона описує абсолютно точне згинання як розгортних, так і нерозгортних поверхонь без врахування їх товщини. Для деталей із листового матеріалу методи цієї геометрії можуть бути використані для знаходження плоскої заготовки для отримання готового виробу.

2. Для розв'язування перерахованих задач використовуються різні теорії: конструкційних матеріалів, оброблення матеріалів тиском, опору матеріалів. У всіх цих випадках неможливо обійтися без термінів прикладної геометрії: об'єм, кривина пружної осі, форма, площа поверхні, контури плоскої заготовки. Це послужило орієнтиром при виборі теми досліджень.

3. В багатьох випадках, особливо при пластичній деформації металу не існує абсолютно точних рішень, які б цей процес описували. Існуючі рішення дають наближений результат, який може бути уточнено в результаті експерименту. Однак при пружному і абсолютно пружному згинанні деталей та при виготовленні деталей згинанням листового металу у розгортну поверхню застосування методів диференціальної геометрії можна дати досить точний результат.

4. Результати досліджень першого розділу частково опубліковано в працях [76, 77].

РОЗДІЛ 2

ПЛАСТИЧНА ДЕФОРМАЦІЯ МАТЕРІАЛУ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ЙОГО ВЛАСТИВОСТЕЙ, ФОРМИ І ОБ'ЄМУ

2.1. Формування смуги із трапецеїдальним поперечним перерізом у кільце прокаткою між конічними валками

Формувати кільце із прямолінійної смуги можна за допомогою її прокатки між конічними валками. При цьому відбувається пластична деформація смуги внаслідок якої одна сторона її подовжується і смуга набуває форми кільця. Якщо прямолінійна смуга має прямокутний поперечний переріз, то після такої деформації сформоване кільце матиме трапецеїдальну форму поперечного перерізу. Очевидно, що для отримання кільця із прямокутним поперечним перерізом потрібно деформувати прямолінійну смугу із трапецеїдальним поперечним перерізом.

Прокатка між конічними валками вимагає правильного їх розташування. Відомо, що при коченні зрізаного конуса по площині він описує на ній кільце. При цьому вісь конуса при коченні перетинає площину у центрі кільця. Цей факт взято до уваги при взаємному розташуванні конічних валків. Вісь одного валка проходить через центр кільця однієї його площини після деформації трапецеїдального перерізу смуги у прямокутний, а вісь другого – через центр кільця протилежної площини.

Деформацією кільця із прямокутним поперечним перерізом можна сформувати гвинтову поверхню. Є різні технології виготовлення гвинтових поверхонь, в тому числі і зварюванням окремих витків. При формуванні плоского кільця прокаткою є можливість виготовлення цільних гвинтових поверхонь потрібної довжини. Існують технології навивки гвинтових поверхонь із прямолінійної смуги прямокутного поперечного перерізу, однак це потребує великих зусиль для деформації смуги. Крім того, при такому способі

виготовлення процес деформації є нестійкий, можуть бути розриви металу зовнішньої кромки і гофроутворення на внутрішній кромці. Тому виготовлення гвинтових поверхонь із кільця, яке є наближеною розгорткою поверхні, є більш простим і точним.

Спочатку розглянемо прокатку прямолінійної смуги прямокутного поперечного перерізу між циліндричними валками (рис. 2.1). Її початкова товщина H_0 після прокатки зменшується до значення H_1 .

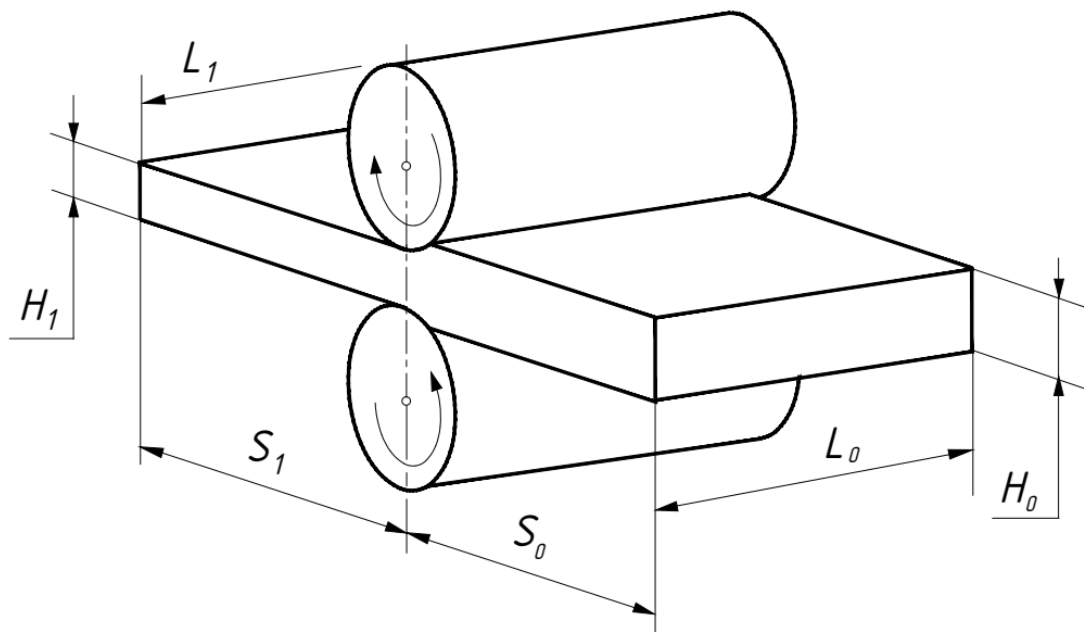


Рисунок 2.1 – Схема прокатки прямолінійної смуги прямокутного поперечного перерізу між циліндричними валками

Будемо вважати, що об'єм смуги після прокатки не змінюється. Другою умовою є те, що матеріал смуги ізотропний, отже подовження у всіх напрямках відбувається однаково. Введемо коефіцієнт подовження p , як відношення відповідних сторін елемента смуги після і до деформації. В такому випадку розміри елемента смуги після деформації можна записати з урахуванням коефіцієнта p : $L_1 = p \cdot L_0$, $S_1 = p \cdot S_0$. Товщина смуги до деформації H_0 і після деформації H_1 є заданими величинами. Прирівняємо об'єми елемента смуги до і після прокатки і отримаємо:

$$L_0 H_0 S_0 = p^2 L_0 S_0 H_1, \quad \text{звідки} \quad p = \sqrt{\frac{H_0}{H_1}}. \quad (2.1)$$

При відомому коефіцієнті p можна знайти поздовжнє і поперечне подовження смуги. Перейдемо до прокатки прямолінійної смуги трапецеїдального поперечного перерізу між конічними валками (рис. 2.2). Валки налаштовуємо таким чином, щоб товщина кільця після прокатки смуги дорівнювала меншій стороні трапеції, тобто $h_1 = h_0$. Це означає, що інтенсивність деформації смуги в поперечному напрямі зростатиме від меншої сторони трапеції до більшої. На основі цього зробимо припущення, що в процесі прокатки подовження матеріалу теж відбуватиметься в цьому напрямі. Звідси виходить, що довжина дуги внутрішнього радіуса кільця дорівнює довжині відповідного прямолінійного відрізка смуги до деформації. Це означає, що у поздовжньому напрямі подовжується зовнішня дуга кільця, а внутрішня не подовжується і перетворюється в коло радіуса r (рис. 2.2).

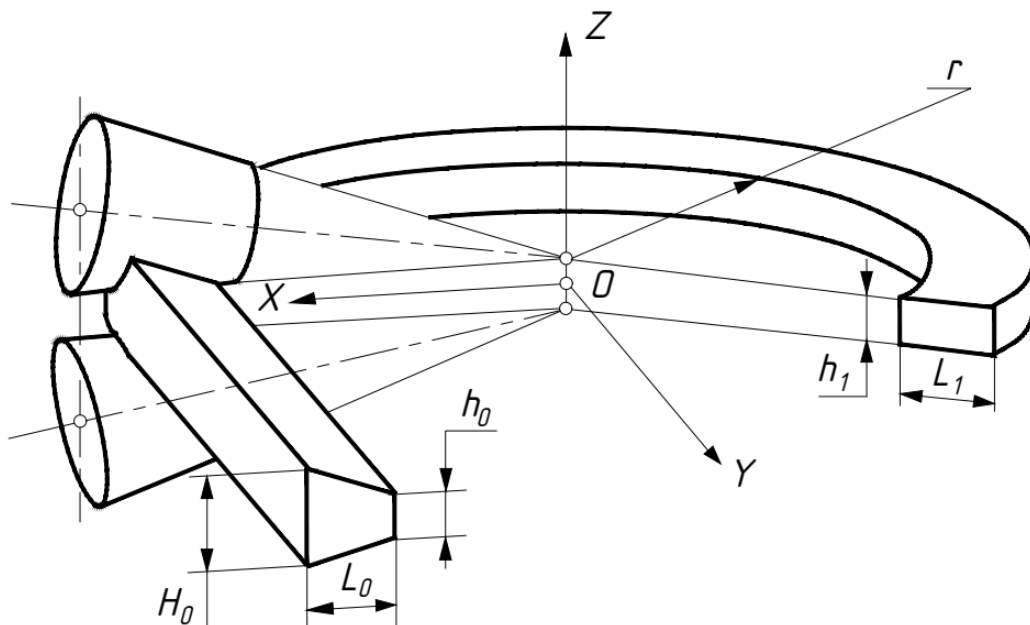


Рисунок 2.2 – Схема прокатки прямолінійної смуги трапецеїдального поперечного перерізу у плоске кільце

Візьмемо елемент прямолінійної смуги трапецеїдального поперечного перерізу довжиною s_0 . Його об'єм V_0 визначиться наступною формулою:

$$V_0 = \frac{H_0 + h_0}{2} L_0 s_0. \quad (2.2)$$

Після деформації елемент прямолінійної смуги перетвориться у відповідний елемент плоского кільця. Щоб знайти його об'єм, розглянемо рис. 2.3.

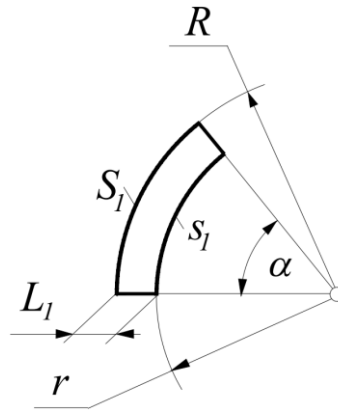


Рисунок 2.3 – Проекція елемента плоского кільця із позначенням його розмірів

Зважаючи на те, що товщина кільця $h_1 = h_0$, його об'єм знаходимо за формулою:

$$V_1 = \frac{R^2 - r^2}{2} h_0 \alpha. \quad (2.3)$$

За нашим припущенням довжина внутрішньої дуги s_1 під час деформації не змінилася і дорівнює довжині елемента прямолінійної смуги, тобто $s_1 = s_0$. Звідси знаходимо вираз для кута α : $\alpha = s_0 / r$. Довжина зовнішньої дуги S_1 подовжилася, а також подовжилася ширина смуги. Подовження ширини смуги

можна записати через коефіцієнт подовження p : $L_1=p \cdot L_0$. В такому випадку для радіуса R зовнішньої дуги можна записати: $R=r+p \cdot L_0$. Довжину дуги S_1 в межах центрального кута α знаходимо за відомою формулою: $S_1=R \cdot \alpha=(r+p \cdot L_0) \alpha=(r+p \cdot L_0) s_0/r$. З іншої сторони довжина дуги S_1 є результатом видовження розміру прямолінійної смуги, тобто $S_1=p \cdot s_0$. Прирівняємо цих два вирази, а також об'єм (2.2) до деформування і об'єм (2.3) після деформування і отримаємо систему двох рівнянь із двома невідомими величинами p і r :

$$\begin{cases} \frac{H_0 + h_0}{2} L_0 s_0 = \frac{h_0 s_0}{2r} [(r + pL_0)^2 - r^2]; \\ ps_0 = (r + pL_0) \frac{s_0}{r}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Після скорочення рівнянь (2.4) на s_0 і розв'язування відносно r і p отримаємо:

$$p = \frac{-h_0 + \sqrt{h_0(5h_0 + 4H_0)}}{2h_0}. \quad (2.5)$$

$$r = L_0 \frac{h_0 + 2H_0 + \sqrt{h_0(5h_0 + 4H_0)}}{2(H_0 - h_0)}. \quad (2.6)$$

У випадку, коли $H_0=h_0$, тобто за відсутності пластичної деформації, із (2.5) отримуємо $p=1$, а із (2.6) $r=\infty$, тобто подовження відсутнє і смуга залишається прямолінійною. Отримані вирази дають можливість розв'язувати обернену задачу, тобто знаходити розміри поперечного перерізу прямолінійної смуги для отримання кільця заданого радіуса. Із рівняння (2.6) знаходимо вираз для H_0 :

$$H_0 = h_0 \frac{L_0 r - L_0^2 + r^2}{(L_0 - r)^2}. \quad (2.7)$$

Можна розробити модель поетапної прокатки смуги, тобто поступово зменшувати більшу сторону трапеції поперечного перерізу. Тоді смуга перетворюється у кільце, поперечним перерізом якого буде теж трапеція, але з меншою різницею між довшою і коротшою сторонами (рис. 2.4). При цьому залишаються такі ж самі умови деформування, як і в попередньому випадку, тобто $h_1 = h_0$.

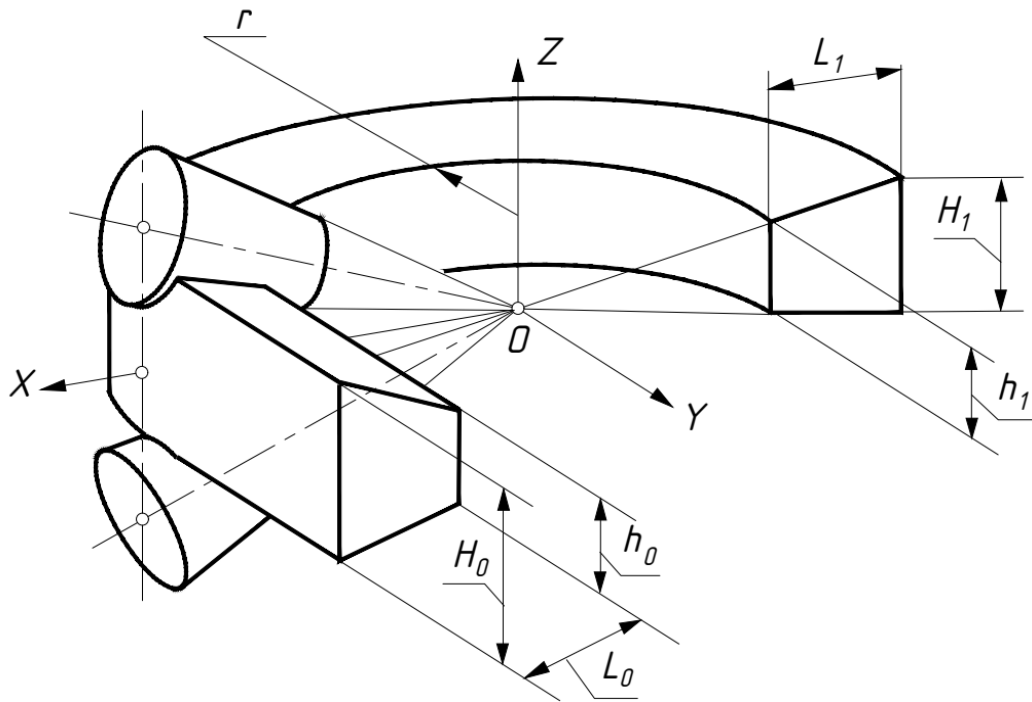


Рисунок 2.4 – Схема прокатки прямолінійної смуги трапецеїдального поперечного перерізу у кільце із меншим співвідношенням протилежних сторін трапеції

Об'єм кільця знаходимо засобами інтегрального числення як тіла, утвореного обертанням трапеції. Аналогічно було отримано систему двох рівнянь, розв'язок яких дав наступні результати:

$$p = \frac{-2h_0 - H_1 + \sqrt{16h_0^2 + 28H_1h_0 + H_1^2 + 12H_0(h_0 + 2H_1)}}{2(h_0 + 2H_1)}. \quad (2.8)$$

$$r = L_0 \frac{4h_0 - H_1 + 6H_0 + \sqrt{16h_0^2 + 28H_1h_0 + H_1^2 + 12H_0(h_0 + 2H_1)}}{6(H_0 - H_1)}. \quad (2.9)$$

При $H_0=H$ деформація відсутня і значення p і r аналогічні попередньому випадку. Якщо у виразах (2.8) і (2.9) задати значення $H_1=h_0$, то ми отримаємо нові вирази, які точно збігаються із (2.5) і (2.6). Отже вирази (2.8) і (2.9) є узагальненими, які описують процес поступового формування плоского кільця зменшенням співвідношення більшої і меншої основ рівнобічної трапеції до одиниці, тобто до прямокутного перерізу. При цьому одночасно збільшується висота трапеції, яка в кінцевому підсумку перетворюється в ширину кільця.

Розглянемо приклад. Нехай прямолінійна поперечний переріз смуги має розміри в міліметрах: $H_0=15$; $h_0=5$; $L_0=40$. Знаходимо коефіцієнт подовження p згідно (5): $p=1,56$. Згідно (2.6) внутрішній радіус плоского кільця $r=111$. Ширина кільця $L_0=p \cdot L_0=62$. Розміри поперечного перерізу кільця 5×62 . Якщо нам потрібно, щоб кільце було замкненим, внутрішня дуга s повинна мати довжину $2 \cdot \pi \cdot r=697$. Такої ж довжини має бути прямолінійна смуга, оскільки за умовою довжина внутрішньої дуги кільця рівна довжині смуги. Якщо у формулу (2.7) підставити $r=111$, то ми отримаємо $H_0=15$.

В практиці обробки металів тиском розповсюджений спосіб деформування заготовок прокаткою між валків. Точних результатів їх взаємного розташування для отримання бажаного результату знайти не вдається із-за складності процесу деформації. Налаштування валків певною мірою здійснюється із врахуванням накопиченого досвіду і експериментів. Однак для початку потрібно знати хоча б наближене значення радіуса r (рис. 2.2) для того, щоб правильно налаштувати валки. В подальшому в результаті експерименту налаштування валків може бути уточнене.

Запропонована модель спирається на дві властивості пластичної деформації металу: незмінність об'єму і ізотропність. Незважно замітити, що для трьох випадків прокатки (рис. 2.1, рис. 2.2 і рис. 2.4) коефіцієнти подовження p (2.1), (2.5) і (2.8) не залежать від ширини смуги L_0 , а тільки від співвідношення сторін H_0 і H_1 . Це дозволяє розраховувати розміри поперечного трапецеїдального перерізу прямолінійної смуги, щоб в результаті прокатки отримати плоскі кільця однакового поперечного перерізу, але із різним радіусом r . Наприклад, змінимо розміри прямолінійного поперечного перерізу смуги: $H_0=20$; $h_0=5$; $L_0=35$. Після її деформації величина прямокутного перерізу кільця практично не зміниться (5×62), але буде іншим радіус r : $r=79$.

Вирази (2.8), (2.9) є узагальненими, які описують процес деформації прямолінійної смуги, поперечним перерізом якої є рівнобічна трапеція. Вони описують поетапне деформування смуги зменшенням більшої сторони основи трапеції до тих пір, коли основи стануть рівними, тобто трапеція перетвориться у прямокутник. При цьому слід мати на увазі, що на проміжних етапах деформації вершини конічних валків розташовані в центрі кільця (рис. 2.4), а на останньому етапі вони розташовані на осі кільця і між ними існує відстань, рівна товщині кільця (рис. 2.2).

Слід зазначити, що на рис. 2.2 і рис. 2.4 показано схеми прокатки. Очевидно, що бічні сторони кільця не будуть окреслені по прямій лінії, як показано на схемах, а матимуть криволінійний обрис. Цього можна уникнути, створивши валки із профілем потрібної форми, який відповідає профілю поперечного перерізу кільця після прокатки прямолінійної смуги.

2.2. Врахування товщини листового матеріалу при згинанні плоского кільця у конічну поверхню

При виготовленні деталей із листового матеріалу відбувається його деформація. Наприклад, ґрунтообробний диск конічної та сферичної форми мають різні робочі поверхні. У першому випадку поверхня є розгортною, у

другому – нерозгортною. Згинання листового матеріалу у розгортну поверхню можна описати аналітично, як це було продемонстровано у першому розділі. Такий підхід дає досить точні результати при згинанні листового матеріалу малої товщини, наприклад, листа паперу. Робочі органи, які несуть певне функціональне навантаження, повинні мати відповідну товщину матеріалу. Їх можна розглядати, як оболонку, обмежену внутрішньою та зовнішньою поверхнями. При згинанні такої оболонки теорія надає лише наближені результати. Задачу згинання плоскої заготовки у конічний диск потрібно розглядати з урахуванням її товщини. Зовнішній край кільця можна попередньо загострити. Очевидно, що після згинання кільця у готовий виріб кут загострення зміниться. Потрібно знайти кут загострення заготовки, щоб після її згинання конічний диск набув заданого кута загострення. Запропонована модель згинання базується на тому, що довжина загостреної крайки (леза) не змінюється під час згинання, а дві поверхні, що проходять через цю крайку, не змінюють своєї площі, тобто згинаються як поверхні нульової товщини.

Плоске кільце із листового матеріалу товщиною a , у якого по зовнішньому колу радіуса R знято фаску під кутом ε (рис. 2.5,а), потрібно зігнути у конічний диск, прямолінійні твірні якого нахилені під заданим кутом β_0 до основи (рис. 2.5,б).

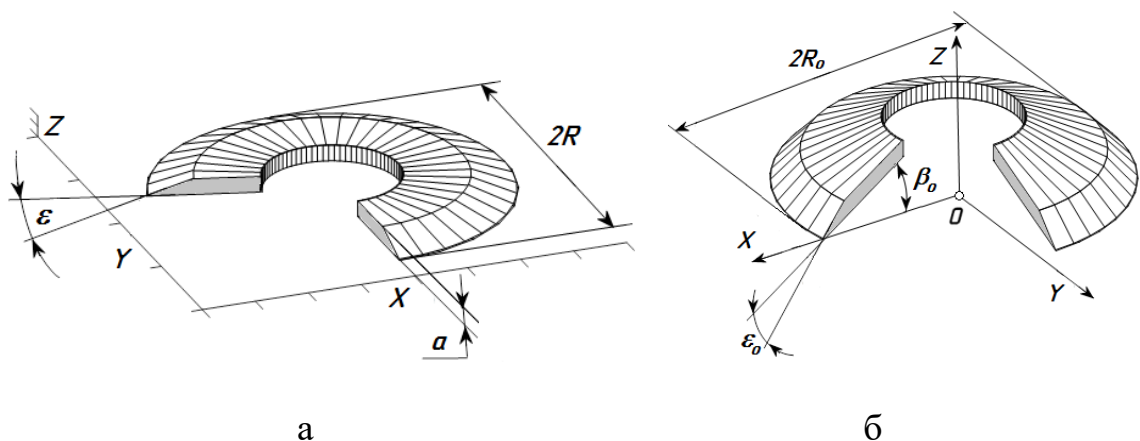


Рисунок 2.5 – Плоске кільце до і після згинання: а) плоске кільце із знятою фаскою – заготовка для виготовлення диска; б) конічний диск після згинання заготовки (умовно показаний незамкненим)

Потрібно знайти такий радіус R кільця і кут ε фаски (або кут загострення), щоб після згинання вони набули заданих величин R_o і ε_o . На рис. 2.5,б для наочності конічний диск зображено незамкненим.

Загострена крайка диска (рис. 2.5,б) є лінією перетину двох конусів: у одного твірні нахилені до основи під кутом β_o , у другого – під кутом $\varphi_o = \beta_o + \varepsilon_o$. Будемо виходити із припущення, що при згинанні заготовки площа поверхні цих двох конусів не змінюються і довжина лінії перетину (кола), теж не змінюється. Тепер розглянемо поступове згинання поверхні конуса нульової товщини з допомогою апарату диференціальної геометрії. Нехай буде задано конус, в який потрібно зігнути плоску заготовку (його розгортку) радіусом основи R_o і кутом нахилу твірних β_o (рис. 2.6,а).

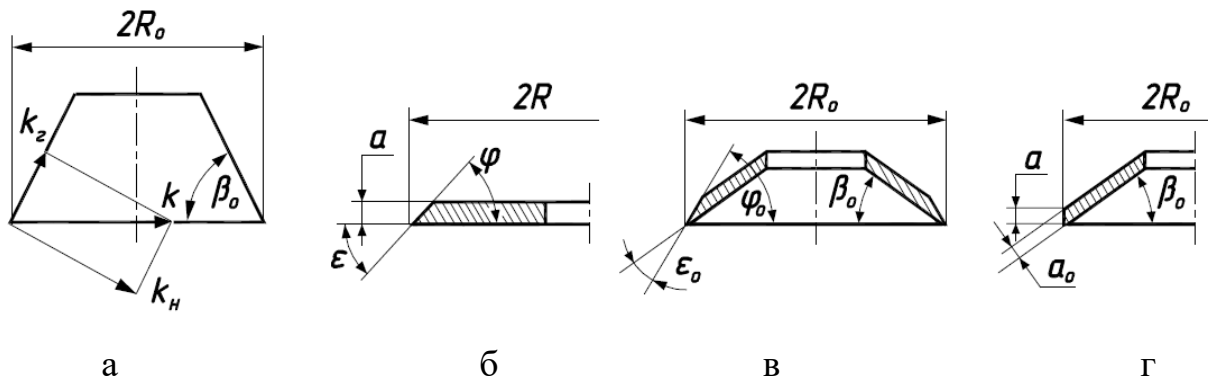


Рисунок 2.6 – Графічні ілюстрації до згинання конуса із врахуванням товщини листового матеріалу: а) розкладання кривини основи на геодезичну і нормальну складові; б) геометричні параметри плоскої заготовки; в) геометричні параметри готового виробу; г) готовий виріб, зігнутий із заготовки без фаски

В кожній точці кривої на поверхні є певне значення кривини – величини, оберненої до радіуса кривини. За таку криву візьмемо основу конуса – коло радіуса R_o . Тоді кривина в усіх його точках буде сталою і рівною $k = 1/R_o$. Кривину розглядають, як векторну величину, яка спрямована до центру кривини (в нашому випадку – до центра кола). Розкладемо її в двох перпендикулярних напрямках – на дотичну площину і на нормаль до поверхні. Одна складова носить назву геодезичної кривини $k_z = k \cdot \cos \beta_o$, (на рис. 1.9,а використано кут при

вершині конуса, а в даному випадку – при основі, тому вирази відрізняються між собою, однак це є одним і тим же результатом), а друга – нормальної кривини $k_n = k \cdot \sin \beta_o$. Із диференціальної геометрії відомо, що при згинанні поверхні закономірність розподілу геодезичної кривини вздовж кривої не змінюється, а для нашого випадку буде сталою: $k_z = k \cdot \cos \beta_o = \cos \beta_o / R_o = \text{const}$. В процесі згинання конуса величина його радіуса основи і кута нахилу твірних змінюватимуться, але в цілому їх добуток залишиться сталим. Поточні значення цих величин при згинанні позначимо без індексів, отже можна записати: $\cos \beta_o / R_o = \cos \beta / R$. Зокрема, при згинанні конуса на площину (знаходженні його розгортки) кут $\beta = 0$, звідки знаходимо радіус зовнішнього кола розгортки: $R = R_o / \cos \beta_o$.

Запишемо параметричні рівняння конуса з радіусом основи R_o і кутом нахилу твірних β_o :

$$\begin{aligned} X &= (R_o - u \cos \beta_o) \cos \alpha_o; \\ Y &= (R_o - u \cos \beta_o) \sin \alpha_o; \\ Z &= u \sin \beta_o, \end{aligned} \quad (2.10)$$

де α_o , u – незалежні змінні поверхні, причому α_o – кутова координата, яка відраховується від осі OX , u – лінійна координата (довжина прямолінійної твірної, відлік якої починається від основи).

Із рівності $\cos \beta_o / R_o = \cos \beta / R$ визначаємо, як змінюється радіус основи R в залежності від зміни кута β : $R = R_o \cos \beta / \cos \beta_o$. Із рівності довжини дуги $s_o = R_o \alpha_o$ до згинання і $s = R \alpha$ після згинання знаходимо: $\alpha = R_o \alpha_o / R = \alpha_o \cos \beta_o / \cos \beta$. Підставимо в рівняння (2.10) замість початкових величин R_o і α_o нові знайдені вирази R і α , а також замість β_o – нове значення β і отримаємо рівняння множини згинань вихідного конуса:

$$\begin{aligned}
X &= \left(R \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0} - u \cos \beta \right) \cos \left(\frac{\cos \beta_0}{\cos \beta} \alpha_0 \right); \\
Y &= \left(R \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0} - u \cos \beta \right) \sin \left(\frac{\cos \beta_0}{\cos \beta} \alpha_0 \right); \\
Z &= u \sin \beta.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Рівняння (2.11) по суті збігаються із рівняннями (1.20), відмінність полягає у позначенні кута β (при вершині і при основі конуса) і знаком перед незалежною змінною u , що не є суттєвим, оскільки вказує на протилежний напрям відліку прямолінійної твірної. Вираз першої квадратичної форми рівнянь (2.11) не залежить від кута β , який є параметром згинання. Це підтверджує те, що рівняння (2.11) справді є рівняннями згинання конуса. При $\beta = \beta_0$ рівняння (2.11) перетворюються в рівняння (2.10), тобто описують вихідний конус, а при $\beta = 0$ – описують розгортку.

Тепер будемо згинати два конуси із спільною лінією перетину – ріжучою крайкою. Згинання вихідного конуса описуються рівняннями (2.11). При зменшенні кута β поверхня конуса наближатиметься до розгортки і стане нею при $\beta = 0$. Кут φ_0 теж зменшиться до поточного значення φ . Оскільки два конуси будуть згинатися і при цьому лінія їх перетину буде спільною, то конкретному значенню кута β буде відповідати певне значення кута φ , тобто $\varphi = \varphi(\beta)$. Наприклад, при $\beta = 0$ кут φ набуде значення, під яким потрібно зняти фаску на плоскій заготовці (рис. 2.6,б). Знайдемо залежність $\varphi = \varphi(\beta)$.

Раніше нами отримана залежність між кутом нахилу твірних β і радіусом ріжучої крайки R : $\cos \beta_0 / R_0 = \cos \beta / R$. Ця залежність лежить в основі згинання конуса. Очевидно, що аналогічна залежність описує згинання другого конуса, утвореного фаскою, але при цьому в ролі кутів β_0 і β виступають кути φ_0 і φ . Зважаючи на те, що радіуси R_0 і R спільні, для другого конуса запишемо: $\cos \varphi_0 / R_0 = \cos \varphi / R$. Але $\varphi_0 = \beta_0 + \varepsilon_0$. Із врахуванням цього знайдемо значення $R = R_0 \cos \beta / \cos \beta_0$ із першого виразу, підставимо в другий і розв'яжемо відносно $\cos \varphi$:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \beta \cos(\beta_0 + \varepsilon_0)}{\cos \beta_0} \quad (2.12)$$

При $\beta=0$ із (2.12) можна знайти величину кута φ , під яким потрібно зняти фаску на плоскому кільці (рис. 2.6,б). Наприклад, на готовому диску із кутом нахилу твірних $\beta_0=20^\circ$ потрібно забезпечити кут загострення $\varepsilon_0=20^\circ$. При $\beta=0$ із (2.12) знаходимо: $\varphi=35^\circ$. Отже, згідно запропонованої моделі, при згинанні плоскої заготовки у готовий виріб кут загострення зменшуватиметься від 35° до 20° . Проміжні положення кута загострення можна знайти із залежності (2.12) при зміні кута β від нуля до β_0 . Проміжні положення конуса фаски можна побудувати за рівняннями (2.11), підставивши в них замість кута β перед змінною u кут φ із (2.12). Після цього отримаємо рівняння множини положень конуса фаски при його згинанні:

$$\begin{aligned} X &= \left(R \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0} - u \frac{\cos \beta \cos(\beta_0 + \varepsilon_0)}{\cos \beta_0} \right) \cos \left(\frac{\cos \beta_0}{\cos \beta} \alpha_0 \right); \\ Y &= \left(R \frac{\cos \beta}{\cos \beta_0} - u \frac{\cos \beta \cos(\beta_0 + \varepsilon_0)}{\cos \beta_0} \right) \sin \left(\frac{\cos \beta_0}{\cos \beta} \alpha_0 \right); \\ Z &= u \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \beta \cos^2(\beta_0 + \varepsilon_0)}{\cos^2 \beta_0}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Окремі положення конуса фаски при згинанні заготовки отримаємо із (2.13) при значеннях кута β в межах $\beta=\beta_0 \dots \beta$. При $\beta=\beta_0$ отримаємо поверхню фаски на готовому виробі (диску), а при $\beta=0$ – поверхню фаски на плоскій заготовці. При інших значеннях кута β будемо отримувати проміжні значення поверхні фаски.

На рис. 2.7 побудовані окремі положення обох конусів за рівняннями (2.11) і (2.13) для проміжних значень кута β нахилу твірних. Для більшої наочності поверхні диска і фаски на готовому виробі (рис. 2.7,а) побудовано на

три четверті, тобто при $\alpha_o = 0 \dots 1,5\pi$. При згинанні основного конуса на площину цей кут дещо зменшується, а радіус спільного кола обох поверхонь зростає (рис. 2.7,б,в).

Якщо згинати плоску заготовку без фаски, тобто при $\varphi = 90^\circ$ (рис. 2.6,б), то згідно формули (2.12) отримаємо: $\varepsilon_o = 90^\circ - \beta_o$. Отже, якщо зігнути плоску заготовку без фаски у конус із кутом нахилу твірних $\beta_o = 20^\circ$, то на готовому виробі з'явиться кут загострення $\varepsilon_o = 70^\circ$.

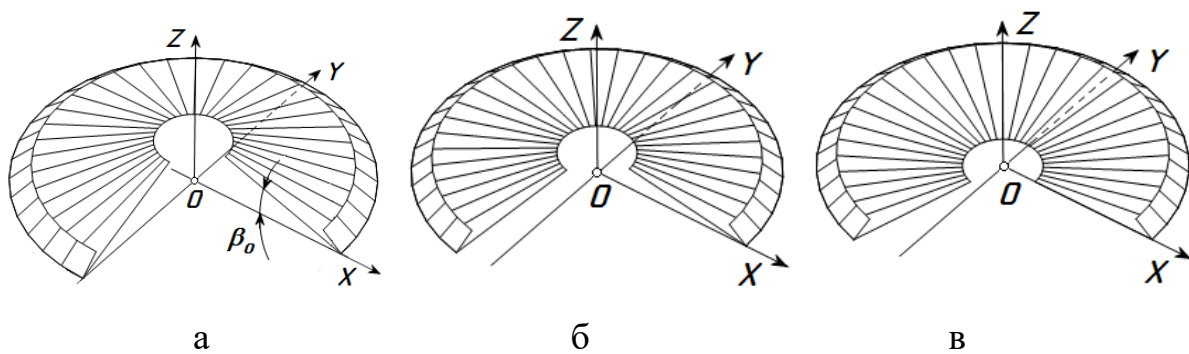


Рисунок 2.7 – Сумісне згинання двох конусів із спільною лінією перетину при

$$R = 0,6 \text{ м}, \beta_o = 20^\circ, \varepsilon_o = 20^\circ:$$

$$\text{а) } \beta_o = \beta = 20^\circ; \quad \text{б) } \beta = 10^\circ; \quad \text{в) } \beta = 0^\circ$$

У розробленій моделі згинання плоскої заготовки у конічний диск висунуто припущення, що площа конічних поверхонь диска і фаски не змінюється. Але при цьому змінюється кут загострення заготовки, з якої формується виріб.

2.3. Знаходження наближеної розгортки нерозгортної поверхні з мінімізацією пластичних деформацій

Якщо потрібно виготовити деталь із листового матеріалу певної товщини, серединна поверхня якої є нерозгортною, виникає задача знаходження наближеної розгортки. Ця розгортка має відповідати мінімальним пластичним деформаціям. Навіть якщо серединна поверхня деталі є розгортною, але листовий матеріал має певну товщину, то уникнути пластичних деформацій

навіть при побудові точної розгортки неможливо. В цьому випадку потрібно шукати таку плоску заготовку, яка б була найбільш прийнятною серед можливих з точки зору якісних показників деформації. В попередньому підрозділі ця задача вирішувалася на допущенні, що при деформації плоскої заготовки у готовий виріб (конічний диск), довжина спільної лінії перетину поверхонь, які є оболонками тіла деталі, не змінюється в процесі деформування плоскої заготовки у готовий виріб. Крім того, не змінюється їх площа. Однак це не є єдиним варіантом розв'язання задачі. В даному підрозділі розглядається ще одна задача формування нерозгортної поверхні гвинтоподібного ножа подрібнювального апарата кормозбирального комбайна.

Для подрібнення скошеної рослинної маси в кормозбиральних комбайнах застосовуються барабанні пристрої із закріпленими на них ножами [78]. На барабані може бути закріплена різна кількість ножів. Від їх кількості і діаметра барабана залежить довжина окремих частинок подрібненої маси. Барабанні подрібнювальні апарати можуть комплектуватися ножами різної конфігурації. Найпростіший у виготовленні ніж – плоский. Однак він має недоліки при виконанні технологічного процесу. Якщо його встановити паралельно до осі обертання барабана, то перерізання рослинної маси буде відбуватися одночасно по всій довжині леза, що спричинить нерівномірність навантаження на барабан внаслідок періодичної ударної дії. На практиці плоскі ножі кріплять до барабана під певним кутом до протирізальної пластини, але тоді для забезпечення сталого зазору між лезом ножа і протирізальною пластиною лезо ножа має бути окреслене по еліпсу. Крім того, неможливо витримати потрібний кут заточки по довжині всього леза. Щоб певною мірою уникнути цих недоліків, довжину ножа скорочують до мінімуму. Тоді при прямолінійному лезі зазор між ним і протирізальною пластиною буде змінний, але знаходитиметься в допустимих межах. При цьому барабан виконують секційним з таким розташуванням ножів, щоб звести до мінімуму ударні навантаження.

Гвинтоподібні ножі, ріжуча крайка яких окреслена по гвинтовій лінії, усувають ці недоліки. Вони забезпечують сталий кут різання, рівномірне

навантаження на подрібнювальний барабан, однак вони складніші у виготовленні. Ріжуча крайка гвинтоподібного ножа є гвинтовою лінією, яка умовно лежить на поверхні циліндра радіуса R і має сталий кут τ нахилу по відношенні до горизонтально розташованої протиріжучої пластини (рис. 2.8,б). Поперечний переріз ножа є прямолінійним відрізком, нахиленим під кутом φ до радіального напрямку (рис. 2.8,в). Зменшення кута φ веде до погіршення процесу різання, але його збільшення теж має обмеження. При надмірній величині кута φ відбуватиметься зминання рослинної маси.

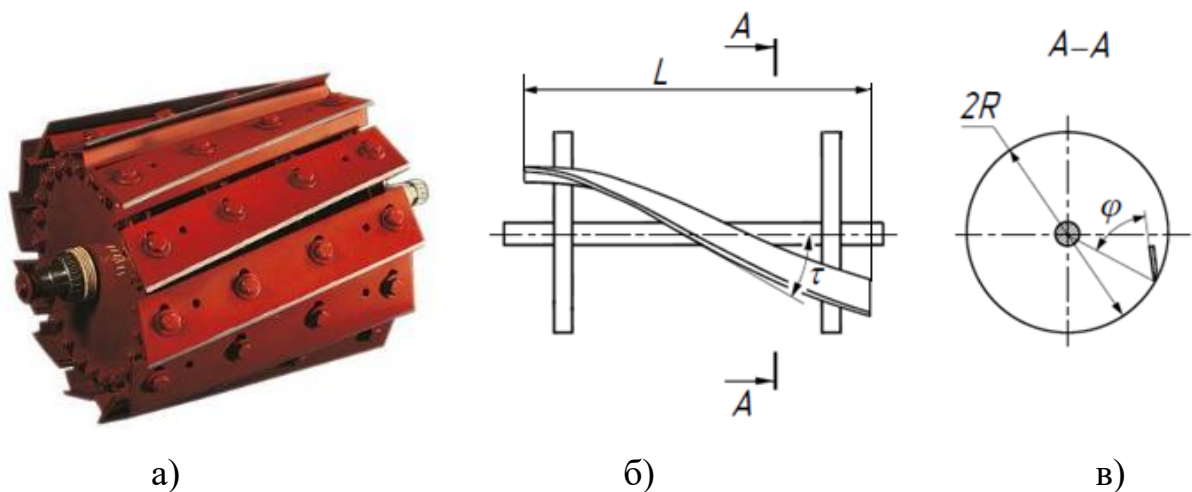


Рисунок 2.8 – Подрібнювальний барабан та конструктивні параметри окремого ножа: а) подрібнювальний барабан із ножами; б) окремий ніж на барабані; в) поперечний переріз ножа

З геометричної точки зору поверхнею ножа є прямий відкритий гелікоїд. Це лінійчата поверхня, для якої напрямною кривою є гвинтова лінія – кромка леза. Через кожну точку леза проходить прямолінійна твірна, яка є мимобіжною до осі гвинтової лінії, складає із нею прямий кут і сталий кут φ із радіальним напрямком, як показано на рис. 2.8,в. Запишемо параметричні рівняння гвинтової лінії, якою є кромка леза і яка описує циліндр радіуса R при обертанні барабана:

$$x = b\alpha; \quad y = R \cos \alpha; \quad z = R \sin \alpha, \quad (2.14)$$

де b – гвинтовий параметр – стала величина, від якої залежить значення кута τ (рис. 2.8,б);

α – незалежна змінна, яка має фізичний зміст – це кут повороту точки, що рухається по гвинтовій лінії, навколо її осі.

Гвинтовий параметр b визначається із відомої формули:

$$b = R \operatorname{ctg} \tau, \quad (2.15)$$

Підстановкою (2.15) у (2.14) ми отримаємо параметричні рівняння гвинтової лінії із заданими величинами R і τ . При зміні кута α від 0 до 360° ми отримаємо один крок гвинтової лінії. Для нашого випадку граничне значення кута α_0 буде менше, оскільки гвинтова лінія обмежена довжиною L барабана (рис. 2.8,б). Його ми знайдемо, якщо у перше рівняння (2.14) замість x підставимо L з урахуванням виразу b із (2.15):

$$\alpha_0 = \frac{L}{R} \operatorname{tg} \tau. \quad (2.16)$$

Напрямні косинуси прямолінійної твірної гелікоїда, яка утворює кут φ із радіальним напрямом (рис. 2.8,в), запишуться:

$$\{0; \quad -\cos(\alpha + \varphi); \quad -\sin(\alpha + \varphi)\}. \quad (2.17)$$

Параметричні рівняння поверхні гелікоїда із врахуванням виразів (2.15), (2.14) і (2.17) набувають вигляду:

$$\begin{aligned}
 X &= R\alpha \operatorname{ctg} \tau; \\
 Y &= R \cos \alpha - u \cos (\alpha + \varphi); \\
 Z &= R \sin \alpha - u \sin (\alpha + \varphi),
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

де u – друга незалежна змінні поверхні – довжина прямолінійної твірної, відлік якої починається від точки на гвинтовій лінії. Вона змінюється в межах $u=0 \dots u_o$, де u_o – ширина гвинтоподібного ножа.

Для того, щоб навантаження на різальний барабан було сталим, потрібно забезпечити безперервність різання. Після закінчення різання одним ножом, тобто після повороту барабана на кут α_o (2.16), відразу починається різання наступним ножом. Виходячи із цього, можна знайти кількість ножів n : $n=2\pi/\alpha_o$. При заданих радіусу R барабана і кутові τ , значення яких входить у вираз (2.16), а також виходячи із прийнятого числа n ножів, знаходимо довжину L барабана:

$$L = \frac{2\pi R}{n} \operatorname{tg} \tau . \tag{2.19}$$

Наприклад, при $R=0,25$ м, $\tau=20^\circ$, $n=6$ довжина барабана L буде становити 0,72 м. За рівняннями (2.18) на рис. 2.9 побудовані гвинтоподібні ножі за заданими параметрами без врахування їх товщини. Незалежні змінні набували значень у межах: $\alpha=0 \dots \alpha_o$, $u=0 \dots u_o$.

Для виготовлення окремого ножа потрібно мати плоску заготовку. Її контури мають бути такими, щоб при деформуванні заготовки у готовий виріб пластичні деформації були мінімальними. Для її знаходження будемо виходити із припущення, що довжина S зовнішньої крайки ножа (довжина леза) і довжина внутрішньої крайки s , а також ширина ножа u_o на плоскій заготовці мають бути рівними відповідним розмірам на гвинтоподібному ножі. Знайдемо довжини S і s зовнішньої і внутрішньої кромки гвинтоподібного ножа. Ці кромки є гвинтовими циліндричними лініями радіусів R і r (рис. 2.10,а). Зовнішня кромка

(лезо) описується параметричними рівняннями (2.14). Її довжину знаходимо за відомою формулою:

$$S = \int_0^{\alpha_0} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} d\alpha = \frac{R\alpha_0}{\sin \tau} = \frac{L}{\cos \tau}. \quad (2.20)$$

При знаходженні похідних рівнянь (2.14) брали до уваги вираз сталої b (2.15).

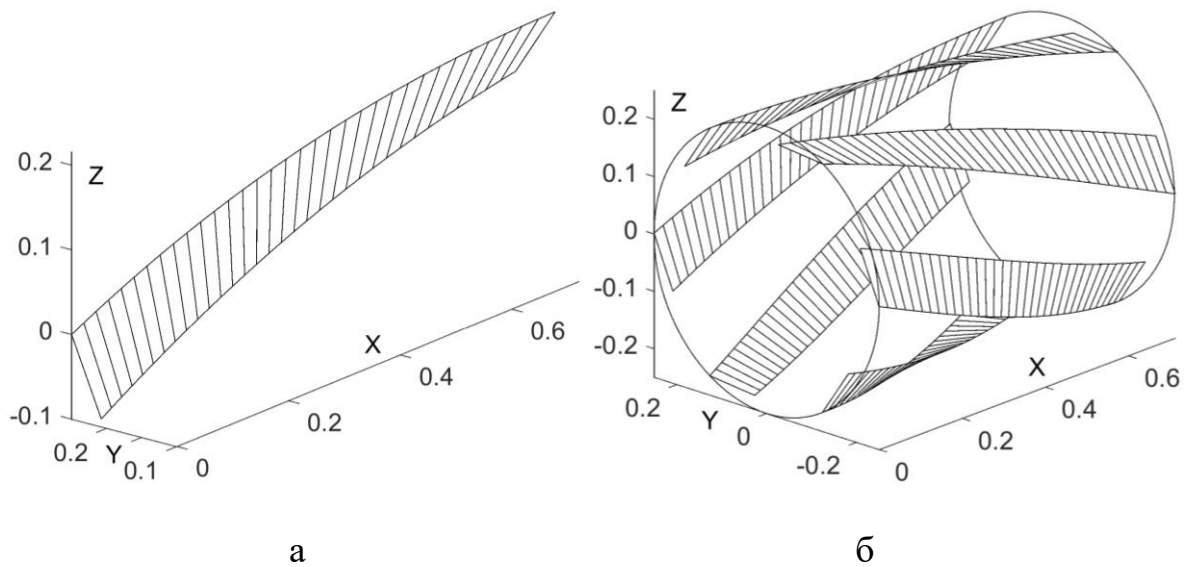


Рисунок 2.9 – Гвинтоподібні ножі нульової товщини, побудовані за рівняннями (2.18) при $\tau=20^\circ$, $\varphi=65^\circ$, $R=0,25$ м, $L=0,72$ м, $u_o=0,1$ м:
а) зображення окремого ножа; б) ножі рівномірно повернуті навколо осі барабана

Довжину внутрішньої кромки ножа теж можна знайти, якщо знати радіус r внутрішнього кола (рис. 2.10,а). Радіус r є стороною косокутного трикутника, яка визначається за двома іншими відомими сторонами R і u_o і відомим кутом φ між ними (рис. 2.10,а):

$$r = \sqrt{R^2 + u_o^2 - 2Ru_o \cos \varphi}. \quad (2.21)$$

Довжину дуги кола, яка відповідає внутрішній кромці ножа, знайдемо множенням радіуса r (2.21) на відповідну дугу α_o (2.16). Довжину гвинтової лінії можна знайти як гіпотенузу прямокутного трикутника, одним катетом якого є довжина дуги кола на циліндрі радіуса r , а другим – її довжина L . Після відповідних операцій і перетворень знаходимо довжину s внутрішньої кромки гвинтоподібного ножа:

$$s = \frac{L}{R \cos \tau} \sqrt{R^2 + (u_0^2 - 2Ru_0 \cos \varphi) \sin^2 \tau}. \quad (2.22)$$

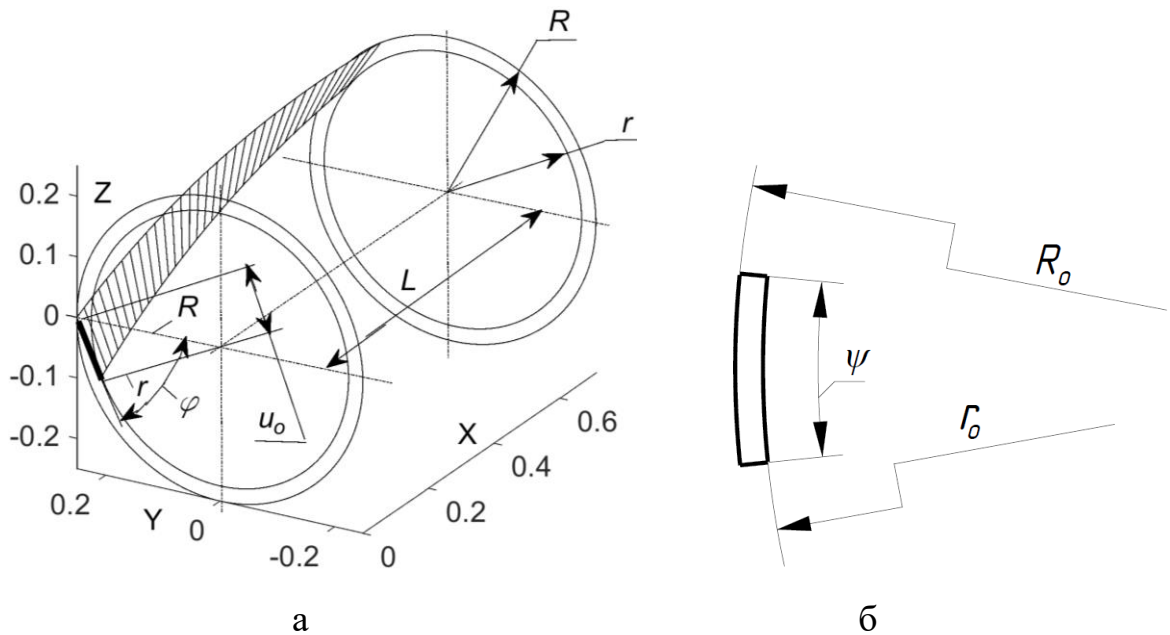


Рисунок 2.10 – Графічні ілюстрації до розрахунку плоскої заготовки гвинтоподібного ножа: а) схема ножа на барабані із зазначенням його параметрів; б) плоска заготовка ножа із зазначенням необхідних розмірів

При $\tau=0$ довжина обох кромek згідно (2.20) і (2.22) буде рівною довжині L барабана, що і зрозуміло, оскільки гвинтові лінії перетворюються у прямі, а гвинтоподібний ніж – у плоский з прямолінійним лезом.

Вираз (2.22) можна отримати і за допомогою лівої частини формули (2.20). Якщо у рівняннях (2.18) замість змінної u підставити стале значення ширини ножа u_0 , то вони опишуть гвинтову лінію – внутрішню крайку ножа. Її довжину можна знайти інтегруванням виразу (2.20), підставивши в нього похідні отриманих рівнянь внутрішньої крайки. Результат буде аналогічний формулі (2.22).

Довжини кромки S і s гвинтоподібного ножа є різними за величиною, оскільки вони розташовані на циліндрах різних радіусів. В зв'язку із цим, ці кромки на плоскій заготовці перетворюються у дуги кіл радіусів R_0 і r_0 відповідно (рис. 2.10,б). Довжину S_0 дуги зовнішньої крайки плоского кільця, яка відповідає довжині леза гвинтоподібного ножа, знаходимо за відомою формулою:

$$S_0 = R_0 \psi, \quad (2.23)$$

де R_0 – радіус кола (зовнішньої крайки кільця);

ψ – центральний кут (рис. 2.10,б).

Враховуючи те, що радіус кола r_0 (внутрішньої крайки кільця) $r_0 = R_0 - u_0$, запишемо вираз для визначення довжини s_0 відповідної дуги:

$$s_0 = (R_0 - u_0) \psi, \quad (2.24)$$

Прирівнявши між собою довжини (2.20) і (2.23) та (2.22) і (2.24), ми отримаємо систему двох рівнянь з невідомими величинами R_0 і ψ . Розв'язавши її відносно наведених невідомих, отримаємо:

$$R_0 = \frac{Ru_0}{R - \sqrt{R^2 + (u_0^2 - 2Ru_0 \cos \varphi) \sin^2 \tau}}. \quad (2.25)$$

$$\psi = L \frac{R - \sqrt{R^2 + (u_0^2 - 2Ru_0 \cos \varphi) \sin^2 \tau}}{Ru_0 \cos \tau}. \quad (2.26)$$

Для заданих параметрів $\tau=20^\circ$, $\varphi=65^\circ$, $R=0,25$ м, $L=0,72$ м, $u_0=0,1$ м згідно формул (2.25) і (2.26) отримаємо: $R_o=9,55$ м, $\psi=0,08$ рад. Після цього знаходимо: $r_o=R_o-u_0=9,45$ м.

Кільце за отриманими розмірами можна виготовити прокаткою прямолінійної смуги трапецеїдального поперечного перерізу між конічними валками. Цей спосіб розглядався в підрозділі 2.1. Нехай товщина ножа буде 10 мм. Ця величина буде меншою основою рівнобічної трапеції, тобто згідно формули (2.7) $h_o=10$ мм. Висота трапеції $L_o=h_o=100$ мм. Радіус $r_o=r=9450$ мм. За формулою (2.7) знаходимо більшу основу трапеції: $H_o=10,3$ мм. Таким чином, різниця між більшою і меншою сторонами несуттєва. Очевидно, що буде несуттєвим подовження смуги у поперечному напрямі. За формулою (2.5) знаходимо коефіцієнт подовження p : $p=1,01$. Як і передбачалося, подовження смуги в поперечному напрямі теж незначне. Поперечним перерізом кільця буде прямокутник 10×101 мм, тобто висота трапеції 100 мм перетворилася у ширину прямокутника розміром 101 мм.

Висновки до другого розділу

1. Пластична деформація металу при виготовленні виробів відбувається у всіх випадках його згинання. Якщо серединна поверхня виробу є розгортною, пластичні деформації є мінімальними і залежать від товщини листового матеріалу. Теоретично вони відсутні при нульовій товщині, що суперечить реальній практиці виготовлення деталей згинанням. Однак при малій товщині листа (як аналог – лист паперу), можна досягти практично точних результатів. Якщо поверхня нерозгортна, то обов'язково відбувається перерозподіл металу по об'єму деталі. При цьому виникає задача знаходження такої форми плоскої заготовки, щоб пластичні деформації були мінімальними.

2. Одним із способів формування виробу є прокатка прямолінійної смуги між циліндричними або конічними валками. Точного аналітичного опису такого перерозподілу не існує в зв'язку із складністю процесу. В роботі запропонована модель, яка спирається на дві властивості пластичної деформації металу: незмінність об'єму і ізотропність. Для того, щоб отримати плоске кільце прямокутного поперечного перерізу, пропонується спосіб прокатки прямолінійної смуги між конічними валками, у якої поперечний переріз є рівнобічною трапецією. Отримано формули, які встановлюють зв'язок між розмірами трапеції і внутрішнім радіусом плоского кільця та його розмірами прямокутного перерізу.

3. Запропонована ще одна модель пластичної деформації плоскої заготовки у конічний диск із врахуванням товщини заготовки. Зовнішня кромка диска, тобто готового виробу, загострена під заданим кутом. Розв'язана задача знаходження кута загострення на заготовці з таким розрахунком, щоб в процесі згинання заготовки і деформації кута загострення він набув потрібного розміру на готовому виробі. Розрахунки ґрунтуються на припущенні, що довжина зовнішньої кромки, яка є лезом, не змінюється в процесі згинання, а також не змінюється площа поверхонь, які утворюють кут загострення вздовж леза.

4. На основі незмінності геометричних параметрів зроблено розрахунок плоскої заготовки для формування із неї гвинтоподібного ножа, поверхня якого є нерозгортною. Для цього було взято за основу припущення, що незмінними параметрами є довжина гвинтових ліній, які обмежують ніж зовнішнім і внутрішнім чином і відповідних ліній на плоскій заготовці. Також незмінною залишається ширина ножа.

5. Результати досліджень другого розділу опубліковано в працях [79, 80, 81].

РОЗДІЛ 3

ПРУЖНЕ І АБСОЛЮТНО ПРУЖНЕ ЗГИНАННЯ МЕТАЛЕВИХ ВИРОБІВ

3.1. Пружне згинання листового металу за допомогою валків у конічну поверхню

Виготовлення деталей із листового матеріалу відбувається шляхом його деформування. Поширеним способом є його згинання. При згинанні абсолютно пружного листа він повністю відновлює свою початкову форму після припинення деформації. При згинанні пружного листа відновлення форми відбувається частково. Популярним способом виготовлення циліндричних і конічних деталей є вальцювання металу на листозгинальній машині. Потрібної форми лист набуває за допомогою його пропускання через валки вальцювальних машин. При цьому враховується властивість матеріалу і товщина листа: чим щільніший і товщий метал, тим менш він пластичний, тому при вальцюванні товстих листів металу потрібно враховувати часткове розгинання, тобто пружинення.

3.1.1. Складання параметричних рівнянь конуса, до яких входить коефіцієнт пружинення

В підрозділі 1.1.2 наведено спосіб визначення коефіцієнта пружинення експериментальним шляхом за допомогою виразу (1.1). Подальше налаштування циліндричних валків здійснюється згідно рис. 1.7,б з використанням виразу (1.3). Для виготовлення конічної деталі є свої особливості. По-перше, плоска заготовка є не прямолінійною смугою, а частиною плоского кільця. Концентричні кола, що обмежують це кільце, перетворюються на конічній деталі на верхню і нижню основи. Виникає питання, як виготовити конічну деталь, для якої радіуси обох основ задані. Для циліндричної деталі таке питання

не виникає, оскільки валки налаштовані на заданий сталий радіус. Для конічної деталі заготовку у вигляді плоского кільця потрібно пропускати між конічними котками, причому вершини всіх трьох валків повинні збігатися, що частково продемонстровано на рис. 2.4. Місце пропускання і розміри кільця мають бути узгоджені між собою. Таке узгодження здійснюється завдяки відстані від спільної вершини конусів. Ця відстань є спільною як для конічних поверхонь формуючих валків, так і для заготовки.

Як було показано в підрозділі 1.3 на прикладі конуса, при згинанні розгортної поверхні геодезична кривина лінії на ній не змінюється, а змінюється тільки нормальна складова. Згідно рис. 1.9 геодезична і нормальна кривина визначаються через кут β при вершині конуса: $k_g = k \cdot \sin \beta$; $k_n = k \cdot \cos \beta$.

Для того, щоб отримати конус із дійсними значеннями кривини k основи і кута β , потрібно здійснити упереджене згинання, тобто помножити нормальну кривину на показник p пружинення. Після цього ми отримаємо фіктивну нормальну кривину основи: $k_{nf} = p \cdot k_n = p \cdot k \cdot \cos \beta$. Кут β теж зміниться, тобто набуде фіктивного значення β_f . Нормальну кривину для фіктивного конуса можемо записати, враховуючи нове значення його нормальної кривини k_{nf} : $k_{nf} = k_f \cos \beta_f$. Прирівняємо два вирази нормальної кривини фіктивного конуса:

$$p \cdot k \cdot \cos \beta = k_f \cdot \cos \beta_f. \quad (3.1)$$

До виразу (3.1) входять дві невідомі величини: k_f і β_f . Для їх знаходження скористаємося рівністю геодезичної кривини до і після згинання:

$$k \sin \beta = k_f \sin \beta_f. \quad (3.2)$$

Два рівняння (3.1) і (3.2) утворює систему двох рівнянь із двома невідомими k_f і β_f . Розв'язком цієї системи є наступні вирази:

$$k_f = k \sqrt{\sin^2 \beta + p^2 \cos^2 \beta}. \quad (3.3)$$

$$\beta_f = \text{Arc cos} \frac{p \cos \beta}{\sqrt{\sin^2 \beta + p^2 \cos^2 \beta}}. \quad (3.4)$$

Запишемо рівняння конуса, вершина якого розташована в початку координат і всі твірні якого нахилені під кутом β до його осі:

$$X = u \sin \beta \cos v; \quad Y = u \sin \beta \sin v; \quad Z = u \cos \beta, \quad (3.5)$$

де u і v – незалежні змінні, причому u – довжина прямолінійної твірної, відлік якої починається від вершини, тобто від початку координат, v – кут повороту твірної конуса навколо його осі.

Із врахуванням (3.4) параметричні рівняння (3.5) для фіктивного конуса запишуться:

$$\begin{aligned} X_f &= u \frac{\sin \beta}{\sqrt{\sin^2 \beta + p^2 \cos^2 \beta}} \cos v; \\ Y_f &= u \frac{\sin \beta}{\sqrt{\sin^2 \beta + p^2 \cos^2 \beta}} \sin v; \\ Z_f &= u \frac{p \cos \beta}{\sqrt{\sin^2 \beta + p^2 \cos^2 \beta}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для $p=1$ рівняння (3.5) і (3.6) стають ідентичними, тобто за відсутності пружинення дійсний і фіктивний конуси збігаються.

3.1.2. Налаштування валків для виготовлення конічних деталей із врахуванням пружинення заготовки

На відміну від валків для виготовлення циліндричних деталей, при налаштуванні конічних валків зручно оперувати не лінійними, а кутовими розмірами. Поверхні конусів формуючих валків, а також поверхню фіктивного конуса із суміщеними вершинами помістимо в центр сфери (рис. 3.1,а).

Кола – основи всіх конусів – будуть розташовані на поверхні сфери. Радіус основи кожного конуса визначається із добутку довжини його твірної, тобто радіуса сфери, на синус кута β при вершині. Якщо сфера одиничного радіуса, то радіус основи буде рівний синусу кута, тобто відбувається перехід від лінійних до кутових розмірів. Аналогом відстані L для циліндричних котків (рис. 1.7,б) буде кут γ для конічних котків (рис. 3.1,б). Кутові γ відповідають дуги $C_A E$ і $C_C E$. Розмір конічних котків задано кутом β_r при їх вершині, що відповідає дугам CC_C , BC_B і AC_A . Кут при вершині фіктивного конуса β_f , що відповідає дузі BC_f , розраховується за формулою (3.4). Необхідно знайти положення верхнього формуючого валка, тобто кут, якому відповідає дуга EC_B .

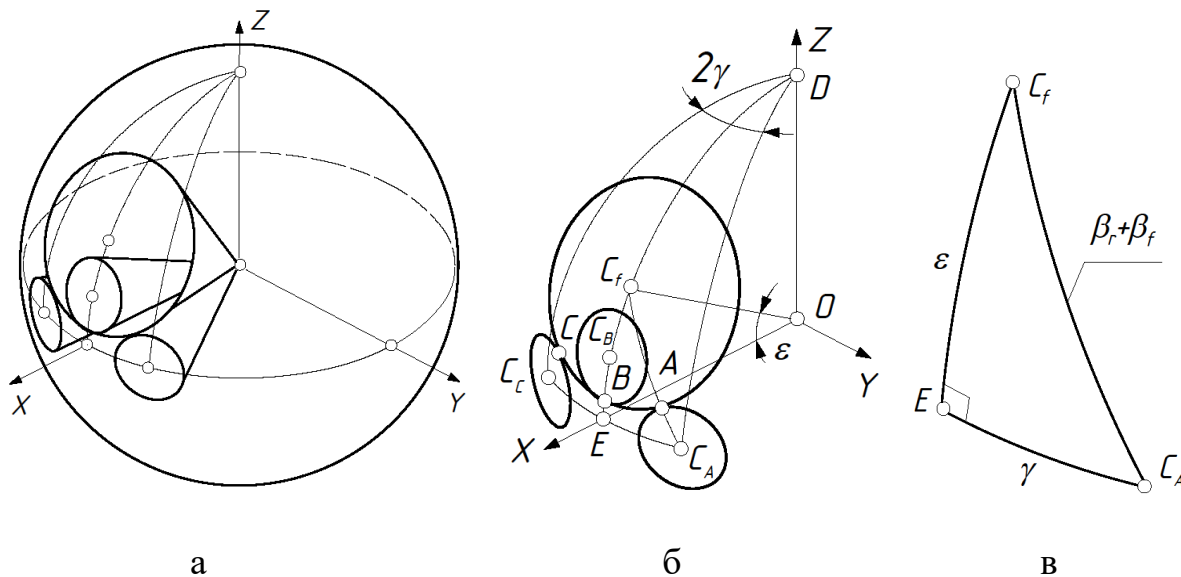


Рисунок 3.1 – Застосування сфери одиничного радіуса для розрахунку параметрів налаштування конічних валків: а) схема розташування поверхонь формуючих і фіктивного конусів по відношенню до сфери; б) зв'язок між кутовими розмірами кіл (основ конуса) та їх центрів на поверхні сфери; в) сферичний прямокутний трикутник для визначення кута ε розташування центра C_f фіктивного конуса

За аналогією із рис. 1.7.б розглянемо прямокутний трикутник $EC_A C_f$, який для нашого випадку є сферичним. Катет $EC_A = \gamma$, гіпотенуза $C_f C_A = \beta_r + \beta_f$,

катет EC_f , якому відповідає кут ε , невідомий (рис. 3.1,в). Використовуючи формули сферичної тригонометрії, знаходимо:

$$\varepsilon = \text{Arc cos} \frac{\cos(\beta_r + \beta_f)}{\cos \gamma}. \quad (3.7)$$

Дуга EC_B є частиною сферичного катета EC_f . Згідно рис. 3.1,б можна записати:

$$EC_B = EC_f - BC_f + BC_B. \quad (3.8)$$

Позначимо кут, якому відповідає дуга EC_B через ε_r . В рівнянні (3.8) перейдемо від дуг до позначення відповідних кутів:

$$\varepsilon_r = \varepsilon - \beta_f + \beta_r. \quad (3.9)$$

Після знаходження кута ε_r стає відоме положення середнього котка: його вісь потрібно повернути на кут ε_r навколо осі OY вгору, починаючи від точки E .

Зігнути плоску заготовку в одну і ту ж конічну деталь можна при різному розташуванні валків, тобто валки можуть мати незмінний кут β_r при вершині, але інший кут γ . Можливий варіант, коли міняються обидва кути: γ і β_r . Для підтвердження сказаного наведемо приклади.

Приклад 1. Потрібно налаштувати валки на виготовлення конічної деталі із кутом $\beta=12^\circ$ при вершині. Коефіцієнт пружинення відомий – $p=1,2$. Формуючі валки мають кут при вершині $\beta_r=5^\circ$. Кут $\gamma=\pm 10^\circ$. Знайти кут ε_r .

За формулою (3.4) знаходимо кут β_f при вершині фіктивного конуса: $\beta_f=10^\circ$. За формулою (3.7) знаходимо кут ε : $\varepsilon=11,24^\circ$. Кут повороту ε_r осі середнього котка знаходимо за формулою (3.9): $\varepsilon_r=6,24^\circ$. Згідно знайдених кутів на рис. 3.2,а побудовано відсіки формуючих і фіктивного конусів.

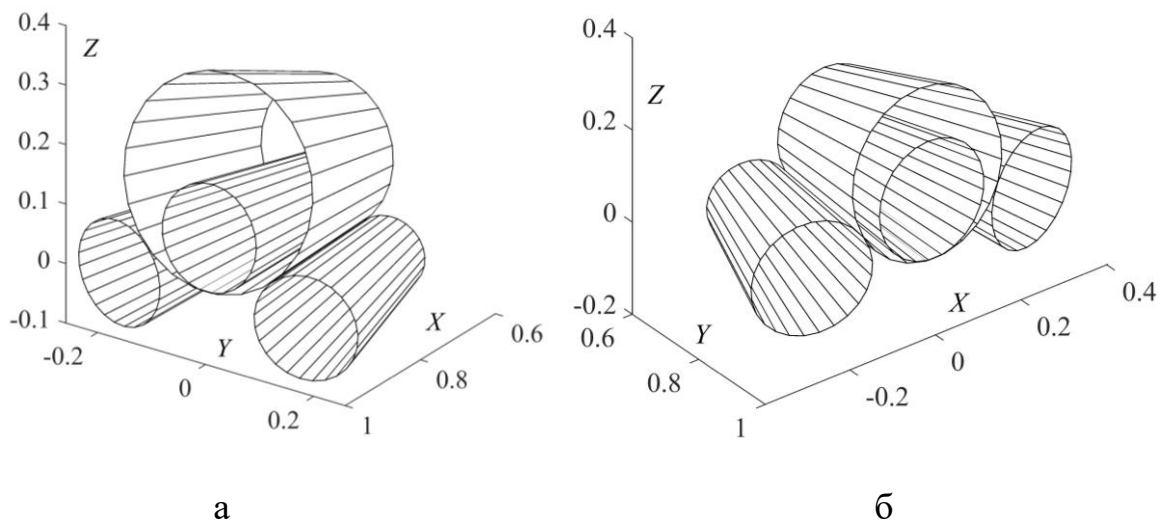


Рисунок 3.2 – Поверхні формуючих валків і фіктивного конуса при відомому коефіцієнті пружинення $p=1,2$ і заданому дійсному куту $\beta=12^\circ$:

а) $\beta_r=5^\circ$, $\gamma=\pm 10^\circ$, $\beta_f=10^\circ$, $\varepsilon_r=6,24^\circ$; б) $\beta_r=7^\circ$, $\gamma=\pm 15^\circ$, $\beta_f=10^\circ$, $\varepsilon_r=5,09^\circ$

Для виготовлення цієї ж деталі можна взяти валки із іншими кутами β_r і γ . На рис. 3.2,б за рівняннями (3.5) побудовані поверхні формуючих валків і за рівняннями (3.6) – фіктивного конуса. Кути налаштування наведені в підписі до рисунка.

Як уже зазначалося, при згинанні поверхні геодезична кривина лінії на ній не змінюється. Вона визначається добутком кривини основи конічної деталі (нижньої або верхньої) на синус кута при вершині. Такою ж буде і кривина дуги кола (зовнішнього або внутрішнього), що обмежує плоске кільце. Радіуси цих кіл є оберненими величинами до геодезичних кривин. Звідси не виникає труднощів для визначення відстані u при заданих радіусах нижньої і верхньої основ конічної деталі. Ще один розмір для плоского кільця – центральний кут, який обмежує його величину. Він визначається із умови того, що довжина дуги кільця і відповідного кола основи конічної деталі мають бути рівними. Таким чином, наведених залежностей достатньо для визначення розмірів плоскої заготовки та місця її пропускання між валками.

3.2. Абсолютно пружне згинання консольно закріплених прямолінійних стержнів і смуг

В підрозділі 1.1.3 наведено формулу (1.4) з опору матеріалів для консольно закріпленого стержня в загальному випадку дії прикладеного до нього моменту. Момент може виникати як від зосередженої сили, так і від розподілених сил в залежності від довжини s пружної осі стержня. Зокрема, для найпростішого випадку (сила є зосередженою) наведено залежність (1.7) для визначення кута $\alpha = \alpha(s)$ відхилення пружної осі від початкового прямолінійного положення в залежності від довжини дуги осі, відлік якої починається від точки прикладення сили в напрямку до точки защемлення (закріплення) стержня. Форма пружної осі визначається інтегруванням рівнянь (1.6), до яких входить залежність $\alpha = \alpha(s)$. В статті [76] розглянуто побудову пружної осі консольно защемленої прямолінійної смуги під дією прикладеної зосередженої сили і моменту. Крім того, розглянуто деформацію смуги під дією сили власної ваги. В такому випадку розподіленою силою буде вага одиниці довжини смуги q :

$$q = pg, \quad (3.10)$$

де p – маса погонного метра смуги; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Поперечну силу знаходимо інтегруванням виразу (3.10):

$$Q = \int q ds = \int pg ds = pgs. \quad (3.11)$$

Згинання смуги спричинює момент сили від складової q , яка розташована перпендикулярно до її осі (рис. 3.3,а, точка B). Інша складова, що розташована в напрямі дотичної, спричинює розтяг смуги. Очевидно, що цей розтяг буде незначний, тому цією складовою сили нехтуємо. Елементарний момент від складової сили, перпендикулярної до осі, запишеться:

$$dM = -pgs \cos \alpha ds, \quad (3.12)$$

де $\alpha = \alpha(s)$ – кут між дотичною до пружної осі смуги в поточній точці B і віссю Ox (рис. 3.3,а).

Знак «мінус» відповідає положенню пружної осі в системі координат.

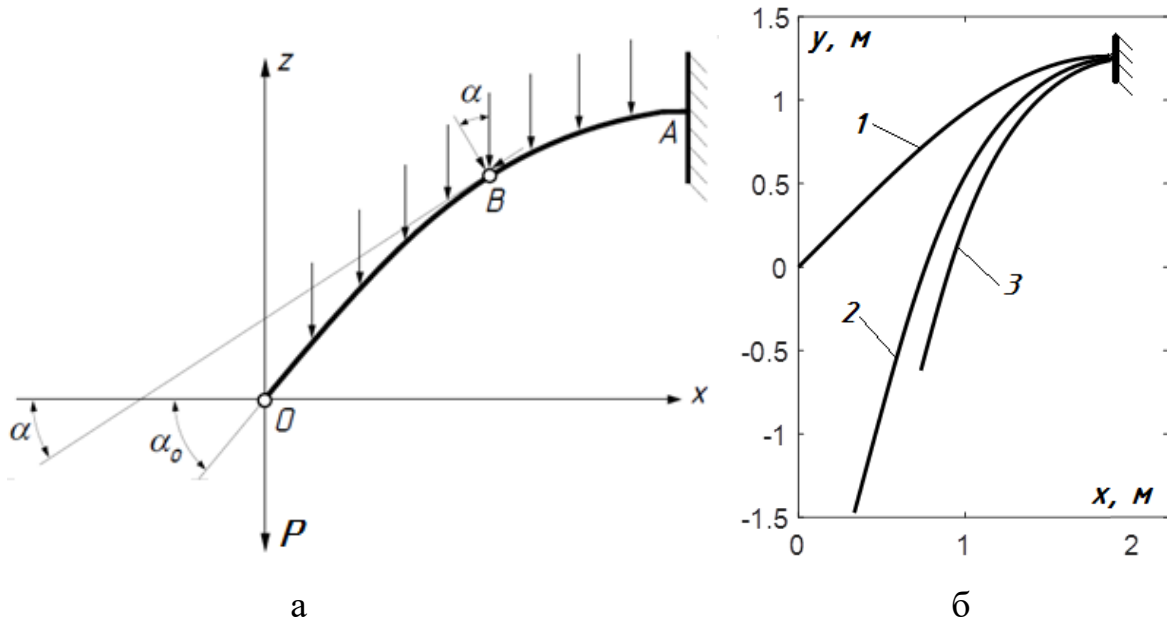


Рисунок 3.3 – Графічні ілюстрації до визначення пружної осі смуги: а) схема дії розподіленої ваги q ваги смуги; б) деформація смуги внаслідок дії розподіленої q , зосередженої P сил та при їх поєднанні

Прикладемо в кінці стержня ще і зосереджену силу P , яка теж не змінює свого напрямку під час деформації смуги. Фізичною моделлю такої сили може бути вантаж, прикріплений до смуги в точці O (рис. 3.3,а). Плечем цієї сили є координата x поточної точки (наприклад, точки B). Але координата x визначається із першого виразу (1.6), тому елементарний момент від сили P запишеться:

$$dM = -Pdx = -P \cos \alpha ds. \quad (3.13)$$

Таким чином, сумарний елементарний момент запишеться:

$$dM = -(P + pqs)\cos\alpha ds. \quad (3.14)$$

Про диференціюємо рівність (1.5) по змінній s і після підстановки в неї виразу (3.14) отримаємо диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = -\frac{P + pgs}{EJ}\cos\alpha. \quad (3.15)$$

Рівняння (3.15) потрібно розв'язувати за допомогою чисельних методів. Для побудови кривої – пружної осі смуги – потрібно знайдену залежність $\alpha=\alpha(s)$ підставити у параметричні рівняння (1.6), обчислення яких відбувається теж за допомогою чисельних методів. На рис. 3.3,б представлено результати обчислень для окремих випадків. Початковими умовами інтегрування є точка, звідки починається крива, і кут α_0 (рис. 3.3,а). Крива, позначена цифрою 1 (рис. 3.3,б), побудована при $P=0$ і $p=0,71$ кг/м, тобто її форма обумовлена тільки дією сили власної ваги. Крива починається із початку координат. Для того, щоб забезпечити заданий кут $\alpha_0=45^\circ$, довжина смуги L повинна складати $L=2,3$ м. Довжину смуги при чисельному інтегруванні визначали підбором такого максимального значення $s=L$, при якому кут α ставав рівним нулеві ($\alpha=0$). Цифрою 2 позначено пружну вісь для заданого значення $\alpha_0=75^\circ$, при цьому довжина смуги $L=3,33$ м. Для наочності криву перенесено так, щоб її точка защемлення збігалася із точкою защемлення попередньої кривої. Те ж саме стосується і кривої 3, яка побудована при одночасній дії двох сил: розподіленої q і зосередженої P . При її побудові було поставлено умову: яку силу P потрібно прикласти до смуги 1 довжиною $L=2,3$ м, щоб кут α_0 зріс від 45° до 75° . Було знайдено, що це відбувається при $P=10$ Н, при цьому вага самої смуги становить 16 Н.

Багато абсолютно пружних стержнів у вільному стані мають початкову кривину (ресори, пружини, інші машинобудівні деталі). В результаті прикладеного моменту їх кривина може зменшуватися або зростати. Розгляду цього питання присвячено наступний підрозділ.

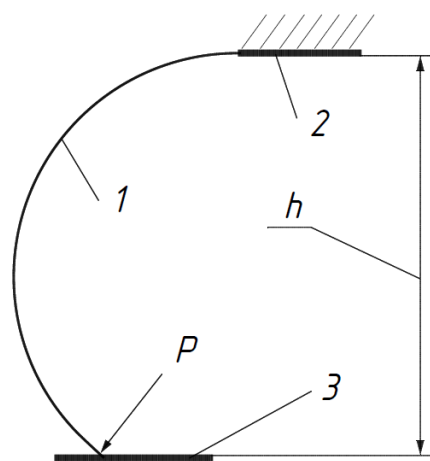
3.3. Абсолютно пружне згинання консольно закріплених криволінійних стержнів і смуг

3.3.1. Абсолютно пружне згинання криволінійної смуги із сталою кривиною пружної осі

Кривою сталої кривини є дуга кола, яку приймаємо за пружну вісь смуги. Прикладом такої смуги може служити стояк, до якого кріпиться лапа культиватора (рис. 3.4,а). В результаті роботи культиватора на лапу, яка підрізає коріння бур'янів і рихлить ґрунт, діють сили опору змінної величини. В результаті цього, на стояки, до яких вони кріпляться, передаються пульсуючі динамічні навантаження. Це призводить до їх періодичної зміни пружної осі. В таких умовах лапа частково змінює своє положення, що впливає на кут входження леза у ґрунт та порушення стійкості її ходу за заданою глибиною [82]. Під дією пульсуючого динамічного навантаження стояк може змінювати форму пружної осі, відповідно положення лапи теж змінюватиметься.



а



б

Рисунок 3.4 – Графічні ілюстрації до згинання стояка культиваторної лапи в процесі рихлення ґрунту: а) вихідне положення стояка із лапою до початку роботи; б) схема пружної осі стояка з лапою: 1 – стояк; 2 – місце кріплення стояка до рами; 3 – лапа

За пружну вісь стояка візьмемо дугу кола, радіус $r=1/k$ якого вибирають із врахуванням висоти h від лапи до місця кріплення стояка (рис. 3.4,б). До початку роботи кривина осі стояка $k=1/r$ є сталою. Під час роботи виникає сила опору, складова P якої прикладена в кінці стояка перпендикулярно до нього (рис. 3.4,б). Вона створює момент $M=P \cdot s$, де s – довжина пружної осі стояка. Цей момент намагається розігнути стояк.

Від величини жорсткості EI смуги залежить величина прогину її пружної осі. Під дією однієї і тієї ж сили P смуга із меншою жорсткістю матиме більший прогин і навпаки. В даному випадку не ставиться задача до визначення чисельних значень жорсткості, а до закономірностей прогину стояка в залежності від форми його пружної осі. При роботі культиватора виникає сила, яка розгинає стояк, і ця сила має певні межі: від мінімальної величини, близької до нуля, до максимального значення (до уваги не приймається непередбачувана перешкода, що веде до виникнення неспіврозмірно великої сили і для уникнення дії якої передбачено захисні пристрої). При одній і тій же жорсткості стояка його кінець у місці з'єднання із лапою може мати різну амплітуду коливань при одних і тих же межах зміни сили P в залежності від форми пружної осі в початковому стані. В зв'язку із цим для спрощення розрахунків умовно приймемо жорсткість рівною одиниці: $EI=1$. Після цього формула (1.4) набуває спрощеного вигляду: $k(s)=M(s)$. Ця залежність характеризує зміну кривини смуги від прикладеного моменту при умові, що початкова її кривина дорівнює нулю, тобто смуга до згинання є прямолінійною. В нашому випадку смуга до прикладення згинаючого моменту має початкову кривину k_0 . В залежності від напрямку дії прикладеної сили смуга може або збільшувати свою кривину (згинатися), або зменшувати (розгинатися). В нашому випадку відбувається розгинання смуги, що відповідає виразу $k_0(s)-k(s)=M(s)$. Прикладений момент носить лінійний характер: $M(s)=P \cdot s$. В зв'язку із цим можна записати: $k(s)=k_0(s)-P \cdot s$. У нас стояк окреслений по дузі кола, отже $k_0=const$. Із диференціальної геометрії відомо, що кривина є границею відношення кута α між дотичними на

кінцях елемента дуги s до довжини цього елемента. В зв'язку із цим можна записати:

$$\frac{d\alpha}{ds} = k_0 - Ps. \quad (3.16)$$

По суті, рівняння (3.16) є натуральним рівнянням пружної осі смуги. Перехід від нього до координатної форми запису відбувається за формулами (1.6). При відсутності прикладеної сили P ($P=0$) із рівняння (3.16) отримуємо: $\alpha=k_0 \cdot s$. При подальшій підстановці цього виразу у (1.6), після інтегрування отримуємо параметричні рівняння кола радіуса $r=1/k_0$, тобто стояк матиме форму дуги кола. Прикладемо силу P , яка розгинає стояк. Інтегрування виразу (3.16) дає:

$$\alpha = k_0 s - \frac{P}{2} s^2. \quad (3.17)$$

Підстановка виразу (3.17) у (1.6) не дозволяє виконати інтегрування, тому форму пружної осі стояка визначаємо методами чисельного інтегрування. На рис. 3.5 представлено форму пружної осі стояка при різних значеннях прикладеної сили P .

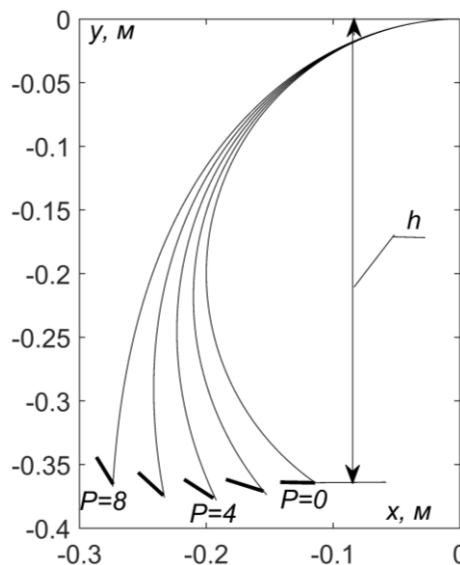


Рисунок 3.5 – Зміна форми пружної осі стояка із початковою кривиною $k_0=5$ під дією прикладеної сили P

Як видно із рис. 3.5, висота h становить 0,35 м. При цьому кут в точці примикання стояка до лапи рівний 35° . Довжина s пружної осі (дуги кола при $P=0$) становить 0,5 м. На рис. 3.5 показані окремі положення пружної осі стояка через 2 одиниці збільшення сили P .

3.3.2. Абсолютно пружне згинання криволінійної смуги, пружна вісь якої поєднує прямолінійний відрізок і дугу кола

Прикладом абсолютно пружної деталі, у якій пружна вісь поєднує прямолінійний відрізок і дугу кола, є пружинний зуб сільськогосподарського знаряддя. Він складається із двох ділянок: прямолінійної і криволінійної у вигляді пружини і може виготовлятися як спареним, так і не спареним (рис. 3.6).



Рисунок 3.6 – Варіанти пружинного зуба

Кривина пружної осі вказаних ділянок у точці з'єднання стрибкоподібно змінюється від нульового до сталого значення. Ця обставина не дозволяє розглядати зуб, як єдине ціле, у математичному відношенні. Зуб умовно розбиваємо на дві частини: прямолінійну і криволінійну у вигляді пружини. Зважаючи на те, що крок пружини є величиною малою в порівнянні із іншими розмірами, прийнято спрощення, згідно якого він рівний нулю. З конструкції зубів видно, що кінець криволінійної частини зуба жорстко кріпиться до валу, на якому розташована граблина, тобто він є консольно закріпленим.

Спочатку розглянемо консольно закріплену прямолінійну частину зуба. Під дією прикладеної сили P , якою може бути реакція ґрунту, він набуде криволінійної форми. Момент сили M_1 визначається із залежності $M_1 = Ps_1$, де s_1 –

довжина пружної осі, відлік якої починається від точки прикладення сили P в кінці зуба і закінчується в точці з'єднання із криволінійною частиною. Кут α , яким оцінюється згинання, визначається за формулою (1.7). Чисельне інтегрування виразів (1.6) із відомим виразом кута α дає можливість побудови пружної осі прямолінійної частини зуба після його згинання.

Другою частиною зуба є консольно закріплена пружина. У вільному стані вона має початкову сталу кривину k_0 , що є оберненою величиною до радіуса r_0 кола – осі пружини. До неї буде прикладена та ж сама сила P , яку називають слідкуючою, оскільки при деформації пружної осі вона залишається перпендикулярною до неї. Момент сили M_2 може збільшувати або зменшувати кривину пружної осі пружини в залежності від того, як спрямована сила P – на «закручування» або на «розкручування» пружини. В нашому випадку вона «закручує» пружину, тому, на відміну від (3.16), момент має додатній напрям:

$$\frac{d\alpha}{ds} = k_0 + \frac{M_2(s_2)}{EI} = k_0 + \frac{Ps_2}{EI} \quad (3.18)$$

де s_2 – довжина пружної осі пружини.

Рівняння (3.18) описує форму пружної осі пружини за умови, що сила P прикладена на протилежному кінці від защемлення, тобто без врахування додаткової дії від прямолінійної частини зуба. Ця дія зумовлюється чисельним значенням моменту M_1 , яке може бути знайдено за формулою $M_1 = Ps_1$, де s_1 – довжина прямолінійної ділянки зуба. Отже, рівняння пружної осі криволінійної частини зуба з урахуванням передачі зусилля від прямолінійної ділянки запишеться:

$$\frac{d\alpha}{ds} = k_0 + \frac{Ps_2 + M_1}{EI} \quad (3.19)$$

Під передачею зусилля від прямолінійної ділянки зуба слід розуміти, що ця ділянка такою була до деформації. Після прикладеного моменту вона теж стає криволінійною. Після інтегрування виразу (3.19) отримуємо:

$$\alpha = k_0 s_2 + \frac{P s_2^2 + 2 M_1 s_2}{2EI} \quad (3.20)$$

Подальша побудова пружної осі пружини після деформації потребує чисельного інтегрування виразів (1.6).

Для розгляду було прийнято пружний зуб із наведеними розмірами із рекламної інтернет-сторінки компанії «Дім пружин» (Spring house) [83]. На рис. 3.7 представлено спарений зуб для важкої борони в двох проекціях із необхідними розмірами.

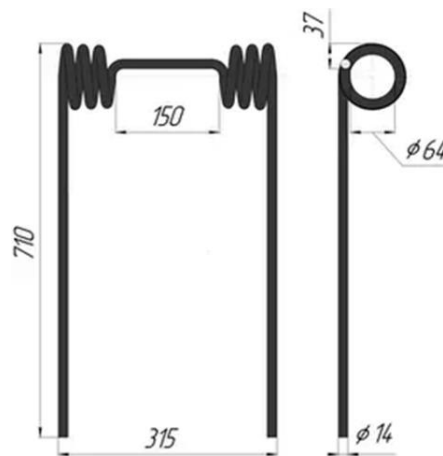


Рисунок 3.7 – Зуб пружинний із нанесеними розмірами

По заданому внутрішньому діаметру пружини може бути знайдено радіус її пружної осі: $r_o = 0,039$ м. Величину k_o може бути визначено, як обернену до r_o : $k_o = 25,64$ м⁻¹. Поперечним перерізом зуба є круг. Його момент інерції I відомий: $I = \pi r^4 / 4$, де $r = 0,007$ м згідно рис. 3.7. Матеріал зуба – пружинна сталь. Її модуль Юнга теж відомий: $E = 2,2 \cdot 10^{11}$ Н/м². Звідси жорсткість зуба становить: $EI = 414,9$ Н·м².

Спочатку треба розглянути деформацію прямолінійної частини зуба під дією прикладеної сили P . Довжина її осі згідно рис. 3.7 становить $s_1 = 0,664$ м. Було прийнято силу $P = 200$ Н. За формулою (1.7) визначається кут α між дотичними в початковій і кінцевій точках пружної осі: $\alpha = 0,11$ рад = 6,3°. Подальша побудова пружної осі здійснювалася чисельним інтегруванням

рівнянь (1.6) при зміні s_1 в межах $s_1=0...0,664$. Результат інтегрування представлено на рис. 3.8,а. Із нього видно, що по мірі підйому вгору, тобто по мірі зростання відстані s_1 кривина осі зростає, оскільки зростає момент M_1 .

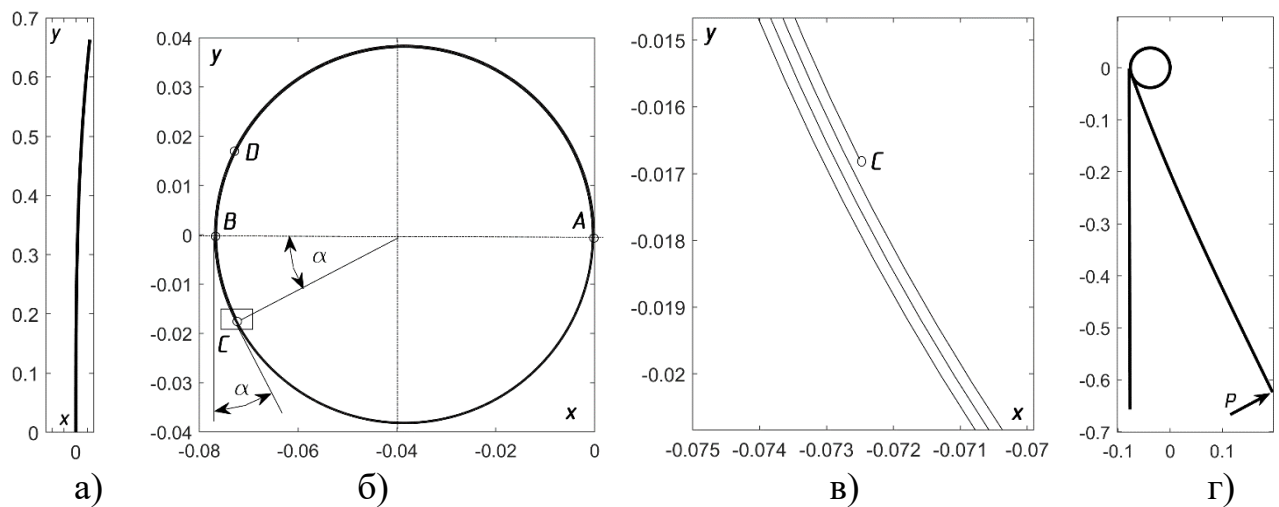


Рисунок 3.8 – Графічні ілюстрації до знаходження форми пружної осі окремих частин зуба та зуба в цілому після прикладеної сили $P=200\text{ Н}$: а) пружна вісь прямолінійної ділянки зуба після деформації; б) пружна вісь криволінійної ділянки зуба після деформації; в) збільшений фрагмент в околі точки C ; г) пружна вісь зуба в цілому.

Наступним кроком треба розглянути деформацію криволінійної частини зуба у вигляді пружини. Довжина пружної осі 3,5 витків у вільному стані при $r_o=0,039$ становить $s_2=0,858$. Кут повороту дотичної, що відповідає 3,5 виткам, становить 22 рад . Після «закручування» пружини нове значення кута становить: $22,45\text{ рад}$. Різниця цих значень: $\alpha=0,45\text{ рад}=25,8^\circ$. Після чисельного інтегрування рівнянь (1.6) після підстановки в них залежності (3.20) можна отримати форму пружної осі пружини після «закручування» внаслідок дії прикладеної сили P (рис. 3.8,б). На перший погляд може здатися, що ніяких змін не відбулося. Однак кут закручування збільшився на величину α , тобто вільний кінець пружини перемістився із точки B в точку C . Точка A є точкою консольного закріплення пружини до корпусу борони. На рис. 3.8,в показано багатократно збільшений фрагмент, який в околі точки C виділений прямокутником. Із нього видно, що пружна вісь пружини із кола перетворилася

у спіраль з дуже великою щільністю витків, яку приблизно можна визначити із масштабу збільшеного фрагмента. Щоб отримати зображення пружної осі зуба в цілому після деформації його силою $P=200\text{ Н}$, необхідно об'єднати дві частини, зображені на рис. 3.8,а і 3.8,б. Це з'єднання має відбутися верхньою точкою першого елемента зуба (рис. 3.8,а) із другим елементом (рис. 3.8,б) в точці C по першому порядку гладкості, тобто із спільною дотичною до обох кривих в цій точці. На основі відомих координат і кутів α обох частин таке з'єднання виконане на рис. 3.8,г. На ньому показано пружинний зуб до початку і після деформації. Із отриманих зображень можна зробити висновок, що відхилення зуба від початкового положення у вільному стані значною мірою залежить саме від криволінійної частини, тобто від пружини і числа її витків. Сумарне відхилення для наведеного прикладу у кутовому вимірі становить $25,8^\circ + 6,3^\circ = 32,1^\circ$.

Зважаючи на те, що роль криволінійної частини зуба у сумарному куті відхилення кінця зуба від початкового положення є визначальною, можна модифікувати зуб для досягнення аналогічного результату. Наприклад, можна зменшити довжину криволінійної пружини і одночасно зменшити діаметр поперечного перерізу зуба. В результаті зменшиться жорсткість зуба, що призводить до збільшення кута відхилення, але зменшенням довжини криволінійної частини можна отримати попередній результат.

Позначивши через α_1 приріст кута α для прямолінійної частини зуба і через α_2 – для криволінійної, можна записати:

$$\alpha_1 = \frac{s_1^2}{2EI} P; \quad \alpha_2 = \frac{s_2^2 + 2s_1s_2}{2EI} P. \quad (3.21)$$

Зменшимо довжину пружини на один виток. Тоді її довжина становитиме $s_2=0,61\text{ м}$. Підставимо в друге рівняння (3.21) вираз моменту інерції $I=\pi r^4/4$ і розв'яжемо відносно r :

$$r = \sqrt[4]{\frac{2Ps_2(2s_1 + s_2)}{\pi\alpha_2 E}}. \quad (3.22)$$

Беремо всі попередні значення величин, що входять до виразу (3.22), і нове значення $s_2=0,61$ м. Після підстановки в (3.22) і обчислень отримаємо: $r=0,0062$ м. Замість попереднього діаметра дроту 14 мм для виготовлення зуба потрібно взяти 12,4 мм. Після цього за першою формулою (3.21) знаходимо значення кута α_1 при новому значенні жорсткості: $\alpha_1=9,9^\circ$. Таким чином деформація прямолінійної частини зуба збільшилася незначно – зросла від $\alpha_1=6,3^\circ$ до $\alpha_1=9,9^\circ$.

Надалі розрахунки пружної осі проводимо за попереднім алгоритмом при нових значеннях $s_2=0,61$ м і $EI=255,3$ Н·м². На рис. 3.9 побудовано ті ж само зображення, що і на рис. 3.8, але вже за новими даними, тобто діаметр зуба становить 12,4 мм і пружина має не 3,5, а 2,5 витки.

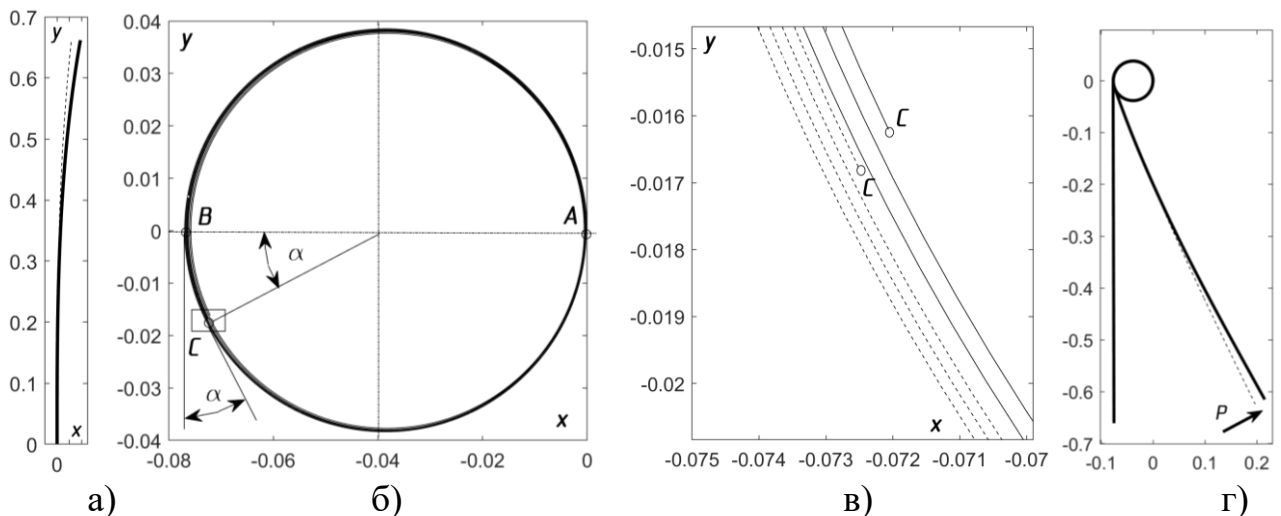


Рисунок 3.9 – Порівняльні зображення пружних осей двох варіантів зуба після прикладеної сили $P=200$ Н: а) пружна вісь прямолінійної ділянки зуба після деформації; б) пружна вісь криволінійної ділянки зуба після деформації; в) збільшений фрагмент в околі точки С, виділений прямокутником; г) пружна вісь зуба в цілому

Для наочності поруч штриховими лініями показано зображення зуба і його елементів при попередніх даних. В обох випадках прикладена сила однакова:

$P=200\text{ Н}$. Із рисунків видно, що відмінності між формою зуба для першого і другого випадку не суттєві. Із рис. 3.9,в видно, що при меншій кількості витків відстань між ними зростає, а діаметр валу, на якому вони мають бути закріплені, має бути меншим. Проте цю відмінність можна побачити при багатократному збільшенні. Однак це потрібно враховувати, тому що відсутність зазору між валом і пружиною у вільному стані призведе до того, що пружина не буде працювати на скручування.

Дане дослідження показало, що при незначному зменшенні довжини криволінійної частини (пружины) і відповідному зменшенню товщини зуба можна досягнути практично однакових силових характеристик роботи зуба, а саме величини переміщення його вільного кінця під дією заданої сили. Розрахунки показали, що викривлення пружної осі прямолінійної ділянки зуба після його модифікації є несуттєвим. При цьому зменшується витрата матеріалу для його виготовлення і вага готового виробу.

3.3.3. Абсолютно пружне згинання криволінійної смуги, пружна вісь якої поєднує дві дуги кола із різним знаком кривини

В підрозділі 3.3.1 розглянуто стояк лапи, пружна вісь якого є дугою кола. Існують стояки які мають S-подібну форму (рис. 3.10).



Рисунок 3.10 – Стояк лапи S-подібної форми на рамі культиватора

Ще один стояк із розмірами (рис. 3.11) взято із реклами за посиланням [84].

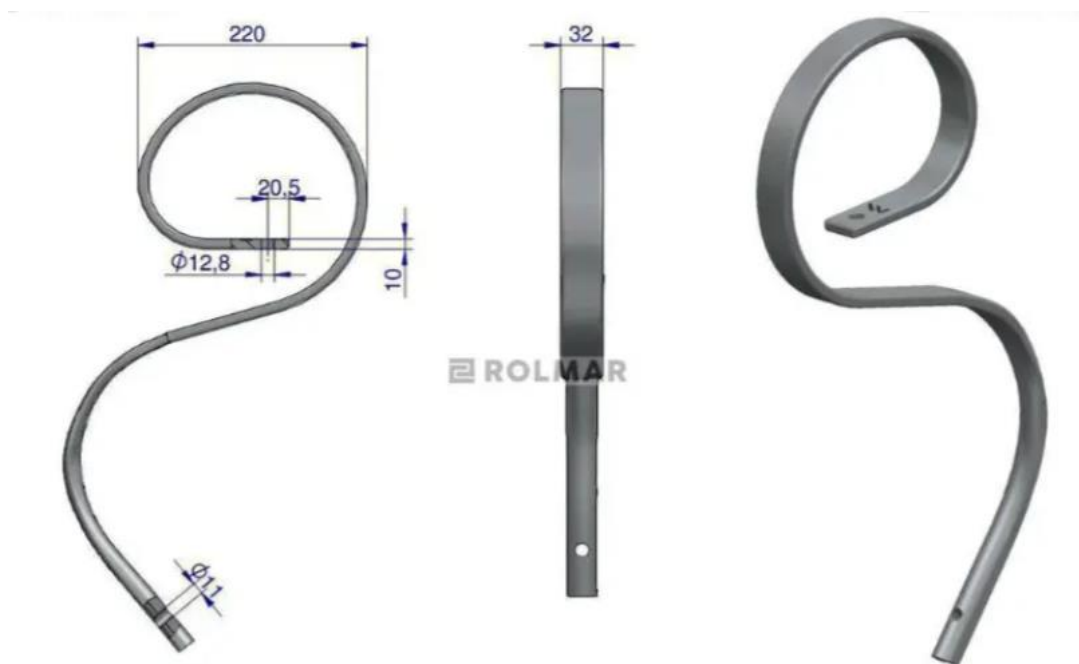


Рисунок 3.11 – Проекції та наочне зображення S-подібного стояка із нанесеними розмірами

Судячи з обох зображень стояків (рис. 3.10, 3.11), пружна вісь їх верхньої частини подібна до дуги кола, нижня – до частини параболи. Для спрощення розрахунків обидві частини замінимо дугами кіл. Це не звужує загального підходу і може бути застосовано і для дуг інших кривих.

Розглянемо пружну вісь S-подібного стояка з орієнтовними розмірами, що відповідають рис. 3.11. При цьому можуть бути різні варіанти. На рис. 3.12 наведено два можливі варіанти із деякими спільними параметрами. Частини 2 стояка обох варіантів є дугами кіл однакового радіуса, а частини 1 – різних радіусів. Також однаковими є висота $H=0,5$ м і кут входження у ґрунт $\beta=45^\circ$. Точка B є межею між дугами 1 і 2.

Розглянемо спочатку деформацію пружної осі нижньої частини стояка, тобто дуги AB (рис. 3.12). Будемо вважати, що вона консольно закріплена в точці B і під дією сил опору ґрунту розгинається, тобто її кривина зменшується. В

такому випадку потрібно скористатися рівнянням (3.16), яке із врахуванням жорсткості запишеться:

$$\frac{d\alpha}{ds} = k_0 - \frac{Ps}{EI}. \quad (3.23)$$

Жорсткість EI можна визначити, виходячи із форми поперечного перерізу стояка і його матеріалу, якою є пружинна сталь. Згідно рис. 3.11 верхня частина стояка (дуга BC) має прямокутний переріз $0,01 \times 0,032$ м. Модуль Юнга пружинної сталі $E = 2,2 \cdot 10^{11}$ Н/м². Момент інерції прямокутного перерізу визначається за формулою $I = a^3 \cdot b / 12$, де a і b – сторони прямокутника, причому для нашого випадку меншою стороною є $a = 0,01$ м. Після множення знаходимо: $EI = 586,67$ Н·м².

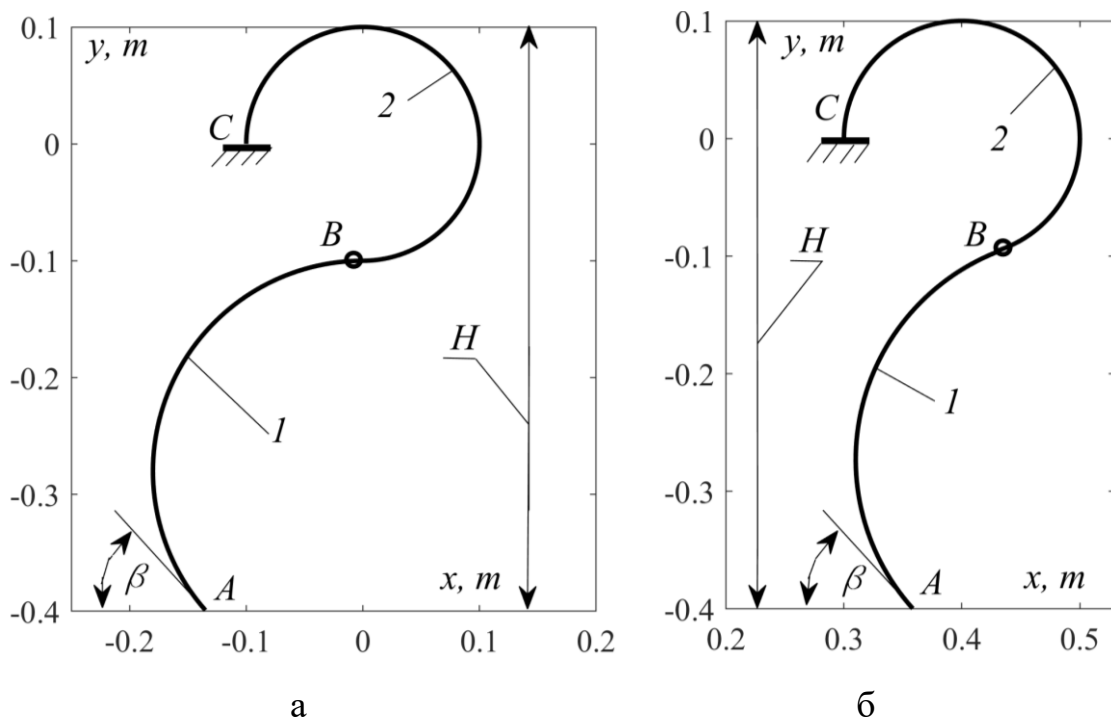


Рисунок 3.12 – Два різних варіанти пружної осі S-подібного стояка із деякими спільними параметрами: а) радіус дуги AB $r_1 = 0,18$ м, її довжина $s_1 = 0,415$ м; радіус дуги BC $r_2 = 0,1$ м, її довжина $s_2 = 0,471$ м; б) радіус дуги AB $r_1 = 0,19$ м, її довжина $s_1 = 0,365$ м; радіус дуги BC $r_2 = 0,1$ м, її довжина $s_2 = 0,443$ м

Нижня частина стояка (дуга AB) має іншу форму перерізу, яка, очевидно, збільшує жорсткість. В нашому дослідженні будемо вважати, що жорсткість однакова для обох частин стояка. Інтегруванням виразу (3.23) знаходимо:

$$\alpha = k_0 s - \frac{Ps^2}{2EI} \quad (3.24)$$

Будемо вважати, що сила опору ґрунту в певний момент часу становить $P=500 \text{ Н}$. Інші дані ($k_0=1/r_1=1/0,18=5,556$, $s=0,415$) беремо із підпису до рис. 3.12. Підстановкою цих даних у формулу (3.24) знаходимо: $\alpha=2,3-0,073=2,227 \text{ рад}$. Кут $2,3 \text{ рад}$. або 132° утворений між дотичними до кривої AB в крайніх точках A і B , а на кут $0,073 \text{ рад}$. або на $4,2^\circ$ розгинається пружна вісь під дією прикладеної сили $P=500 \text{ Н}$ в точці A .

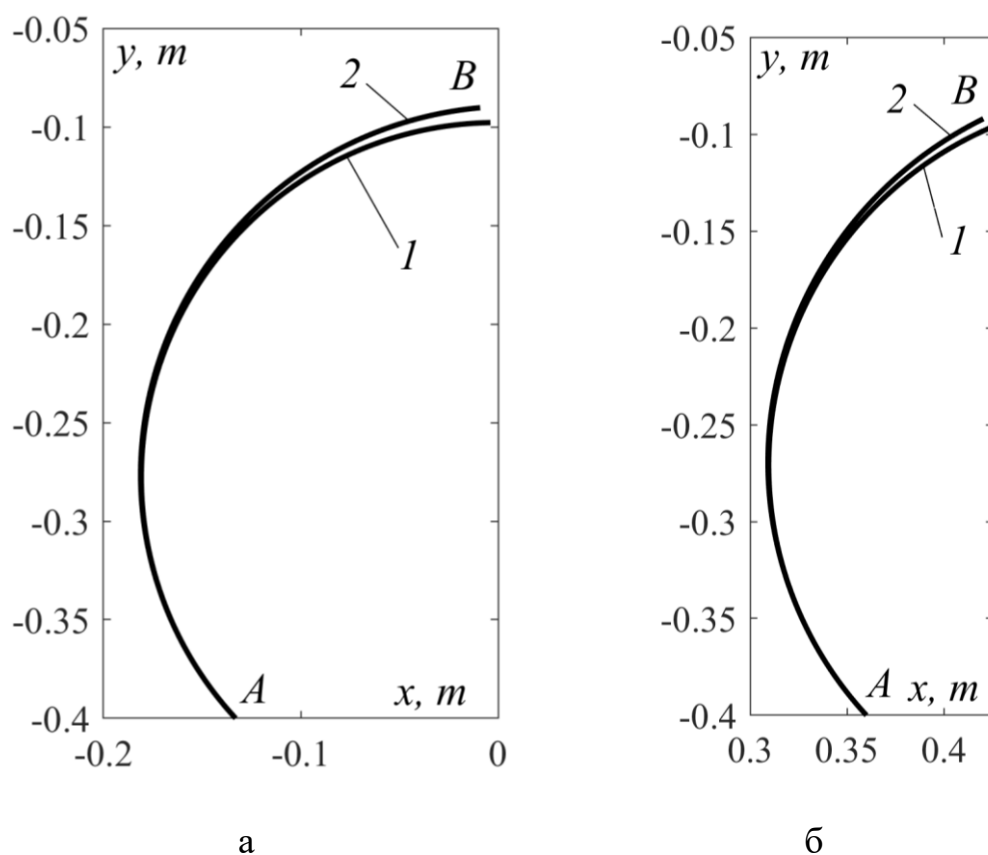


Рисунок 3.13 – Пружна вісь нижньої частини стояка (дуга AB) до деформації – 1 і після деформації – 2: а) дуга стояка, яка відповідає рис. 3.12,а; б) дуга стояка, яка відповідає рис. 3.12,б

Для побудови пружної осі нижньої частини стояка (дуги AB) після деформації застосовується чисельне інтегрування рівнянь (1.6), у які підставляється вираз (3.24). Результат інтегрування представлено на рис. 3.13,а (крива 2). Аналогічно будується пружна вісь нижньої частини стояка для його другого варіанту (рис. 3.12,б).

За таким же самим алгоритмом визначається форма верхньої частини стояка, з тією різницею, що пружна вісь BC (рис. 3.12) скручується, тобто кривина її зростає. Крім того, потрібно враховувати дію моменту від нижньої частини стояка. Отже в цьому випадку для визначення кута α потрібно застосовувати формулу (3.24) із знаком «+». Вона справедлива для випадку, коли сила P прикладена в точці B . Оскільки вона прикладена в точці A , то від нижньої частини стояка до верхньої частини передається момент сили $M_1 = P_1 \cdot s_1$, де s_1 є довжиною пружної осі нижньої частини AB стояка, тобто $s_1 = 0,415$ м. Сила P_1 та ж сама, що діє на нижню частину стояка, тобто $P_1 = 500$ Н. Отже додатково прикладений момент становить $M_1 = 500 \cdot 0,415 = 207,5$ Н·м. З урахуванням додатково прикладеного моменту M_1 знайдемо кут α за формулою (3.20):

$$\alpha = \int \left(k_0 + \frac{P_1 s + M_1}{2EI} \right) ds = k_0 s + \frac{P_1 s^2 + 2M_1 s}{2EI}. \quad (3.25)$$

Кривина $k_0 = 1/0,1 = 10$, довжина дуги BC $s = 0,471$ м. Отже за формулою (3.23) знаходимо: $\alpha = 270^\circ + 9,6^\circ = 279,6^\circ$. Поворот пружної осі верхньої частини стояка відбувся під дією сумарного моменту на $9,6^\circ$. На рис. 3.14,а чисельним інтегруванням рівнянь (1.6) із врахуванням залежності (3.25) побудовано пружну вісь верхньої частини стояка після деформації. Аналогічним чином така ж вісь побудована і для другого варіанту стояка, зображеного на рис. 3.14,б. Суміщення пружної осі після деформації із початковою віссю до деформації відбувається за рахунок введення відповідних сталих під час чисельного інтегрування, які задають кут повороту і значення переміщення вздовж осей.

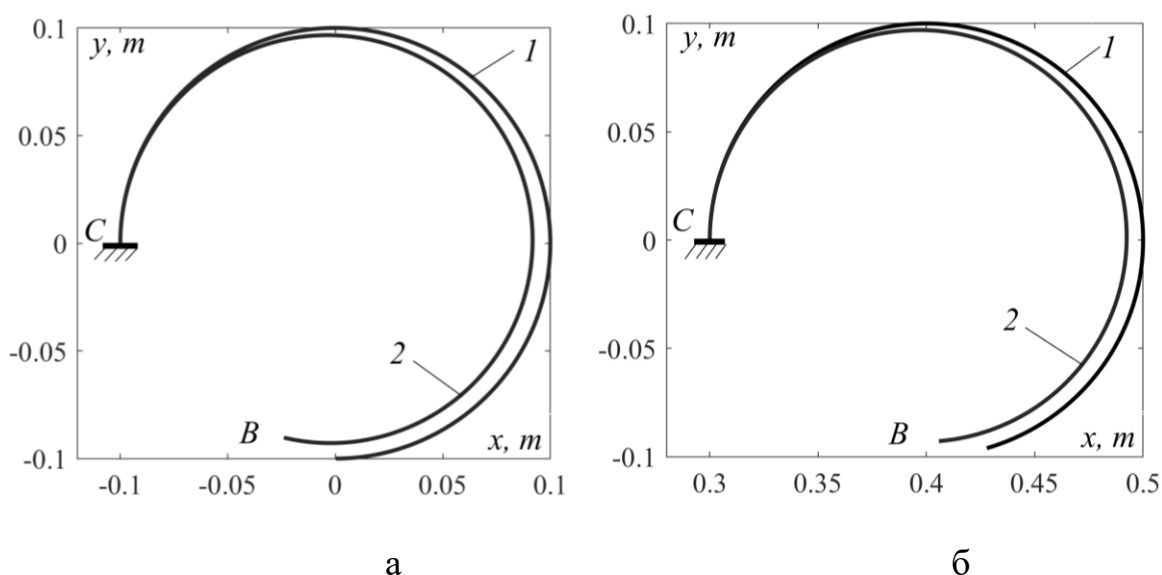


Рисунок 3.14 – Пружна вісь верхньої частини стояка (дуга BC) до деформації – 1 і після деформації – 2: а) дуга стояка, яка відповідає рис. 3.12,а; б) дуга стояка, яка відповідає рис. 3.12,б

На рис. 3.13 і 3.14 побудовано пружні осі стояка, який умовно був розбитий на дві частини. Для їх з'єднання в єдине ціле потрібно належним чином перемістити нижню частину до верхньої, щоб точки B збіглися і в ній була спільна дотична до обох частин пружної осі. Для цього здійснюється переміщення пружної осі нижньої частини стояка вздовж осей і її поворот на потрібний кут. Кут повороту визначається із формул (3.24) і (3.25), як додатковий кут, отриманий внаслідок деформації пружної осі із-за дії прикладеного моменту. Він є сумою кута «розгинання» величиною $4,2^\circ$ і кута «згинання» величиною $9,6^\circ$. Отже сумарний кут повороту становить $13,8^\circ$. Попереднє (у вільному стані) і нове положення пружної осі побудовано на рис. 3.15. Відповідно змінюється кут входження β лапи культиватора в ґрунт: якщо у вільному стані він становив 45° (рис. 3.12), то після деформації він становить $45^\circ + 13,8^\circ = 58,8^\circ$.

Для другого варіанту (рис.3.15,б) за аналогічними підрахунками отримуємо: $45^\circ + 13,0^\circ = 58^\circ$. При цьому є різниця у відхиленні стояка в напруженому стані по висоті: у першому випадку (рис. 3.15,а) це відхилення становить $0,04$ м, а у другому (рис. 3.15,б) – вдвічі менше, тобто $0,02$ м.

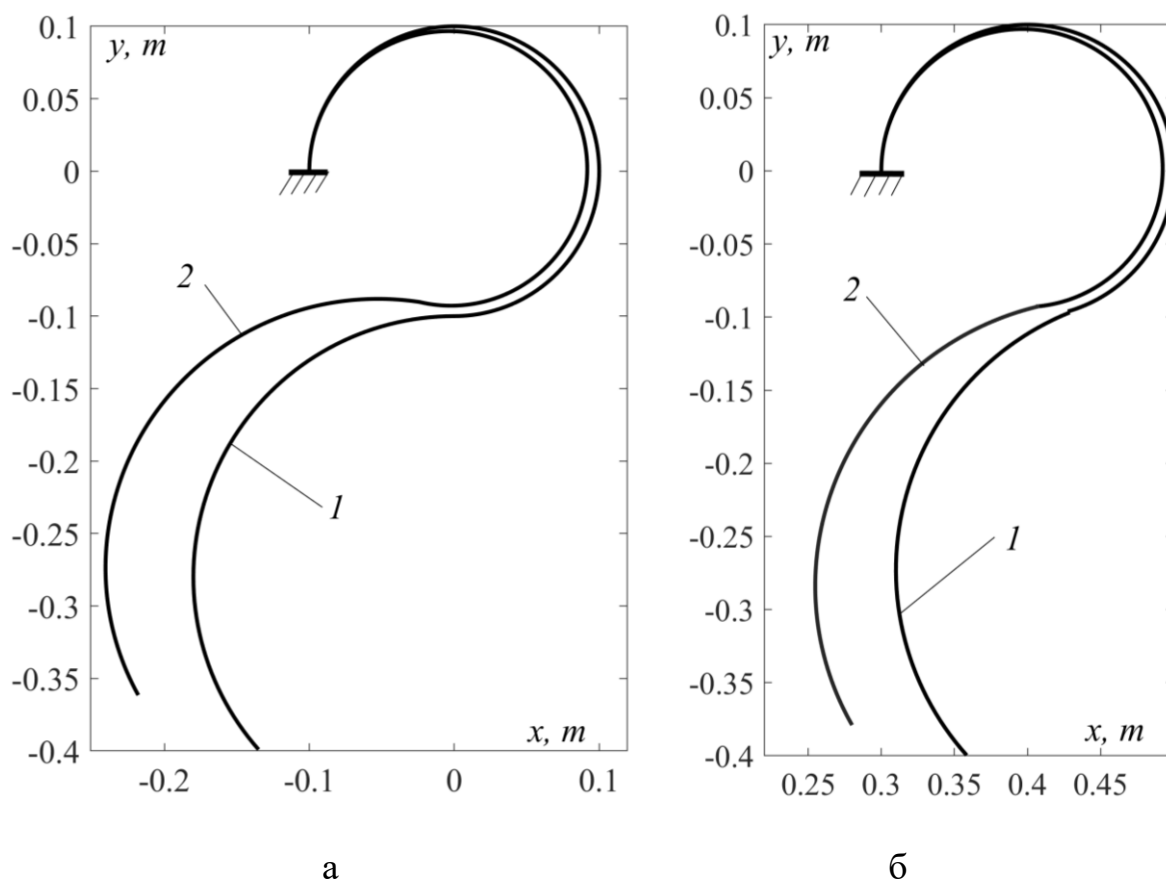


Рисунок 3.15. Порівняння пружних осей стояків до і після деформації внаслідок прикладеної сили $P=500\text{ Н}$: а) сумарна довжина пружної осі стояка становить $0,886\text{ м}$; б) сумарна довжина пружної осі стояка становить $0,808\text{ м}$

Здійснене таким чином моделювання стояка дозволяє отримати форму його пружної після деформації і порівняти із формою пружної осі у вільному стані (рис. 3.15). Якщо кут входження у ґрунт для обох випадків практично не змінився (58° і $58,8^\circ$), то відхилення по висоті відрізняється у два рази (2 см і 4 см). Це дає можливість задавати допустиму межу відхилення лапи від потрібного заглиблення при максимально можливій дії ґрунту на неї. Якщо прийняту силу $P=500\text{ Н}$ вважати максимально можливою, то нерівномірність ходу кінця стояка складе 4 см в одному випадку (рис. 3.15,а) і 2 см – в другому (рис. 3.15,б). Це пояснюється не тільки формою стояка у вільному стані, а і довжиною його пружної осі. В другому випадку вона менша, отже менший і момент, що деформує стояка.

3.4. Обернена задача знаходження пружної осі смуги після припинення дії прикладеного моменту

Обернена задача знаходження пружної осі смуги у вільному стані виникає тоді, коли відомий прикладений момент і форма пружної осі внаслідок дії моменту. Якщо дія моменту припиняється, пружна вісь смуги змінює свою форму. Ця форма є заготовкою для виготовлення деталі, яка потребує певної технології її обробки, щоб надати їй властивості абсолютної пружності.

3.4.1. Знаходження форми заготовки для виготовлення спіральної пружини

Не дивлячись на уявну простоту пружини, технологія її виготовлення повинна забезпечити певні вимоги до її функціональності. Потрібно знайти таку форму її пружної осі у вільному стані, щоб вона була компактною. Але головна задача полягає в тому, щоб при її накручуванні до кінцевого стану уникнути або зменшити тертя між сусідніми витками. Якщо така форма пружної осі у вільному стані буде знайдена, то далі металеву смугу примусово деформують у відповідності до знайденої осі, наприклад, за допомогою криволінійної щілини у оправці. Термообробкою з наступним відпуском знімають внутрішні напруження, щоб після зняття із оправки смуга залишалася такою ж, тобто із певною початковою кривиною.

Візьмемо металеву смугу з поперечним перерізом $a=3$ см, $b=0,3$ см, і довжиною 1 м. Матеріал смуги взяли із модулем Юнга $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Па. Момент інерції прямокутного перерізу знаходили за відомою формулою $I=ab^3/12$ в м^4 . Жорсткість смуги є сталою величиною, яку знайшли після переходу розмірів поперечного перерізу від см до м: $EI=14,175$ Н·м². Стала слідкуюча сила P залишається перпендикулярною до пружної осі смуги при її згинанні. За формулою (1.7) можна знайти значення кута α в поточній точці M пружної осі для будь-якого значення дуги s . Наприклад, при $P=40$ Н і $s=0,5$ м кут $\alpha=20,2^\circ$, а

при $s=1$ м кут $\alpha=80,8^\circ$ (рис. 3.16,а). При сталих значеннях сили P і жорсткості EI кут α згідно (1.7) росте прямо пропорційного квадрату довжини пружної осі. На рис. 3.16,б побудована пружна вісь смуги після прикладення до неї сили $P=800$ Н. При цьому кут $\alpha=1616,2^\circ$, тобто кінець смуги здійснив 4,5 оберти.

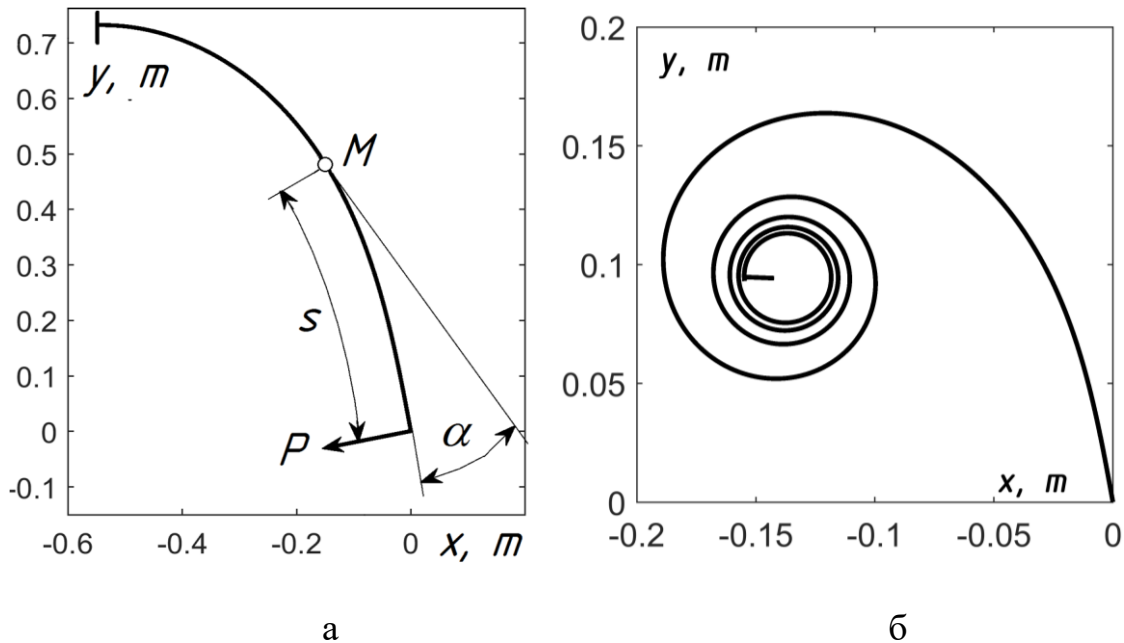


Рисунок 3.16 – Форма пружної осі консольно закріпленої смуги внаслідок дії зосередженої сили P :

а) $P=40$ Н;

б) $P=800$ Н

Із рис. 3.16,б видно, що прямолінійна смуга довжиною 1 м набула форми спіралі, яка поміщається у квадрат із стороною 20 см. Однак щільність витків такої спіралі дуже нерівномірна: відстань між ними стрімко зменшується по мірі наближення до осі, навколо якої відбувається закручування.

Візьмемо смугу у вигляді спіралі, у якої щільність витків однакова. Такій умові відповідає спіраль Архімеда, однак у неї відсутнє натуральне рівняння $k=k(s)$. Існує інша крива, яка може задовільнити дану умову – евольвента кола радіуса a . Її натуральне рівняння має вигляд $k = 1/\sqrt{2as}$, де від сталої a залежить щільність прилягання витків один до одного. Проте згідно цього рівняння при зростанні довжини дуги s точка рухається по спіралі від осі закручування, а нам потрібно навпаки. Для цього його запишемо наступним чином:

$$k = \frac{1}{\sqrt{2a(s_0 - s)}}, \quad (3.26)$$

де s_0 – вся довжина спіралі.

Інтегруванням виразу (3.26) можна знайти залежність $\alpha = \alpha(s)$. Після підстановки знайденої залежності у (1.6) ми отримаємо параметричні рівняння спіралі. Її побудовано на рис. 3.17,а при $a=0,0001$ м, $s_0=1$ м.

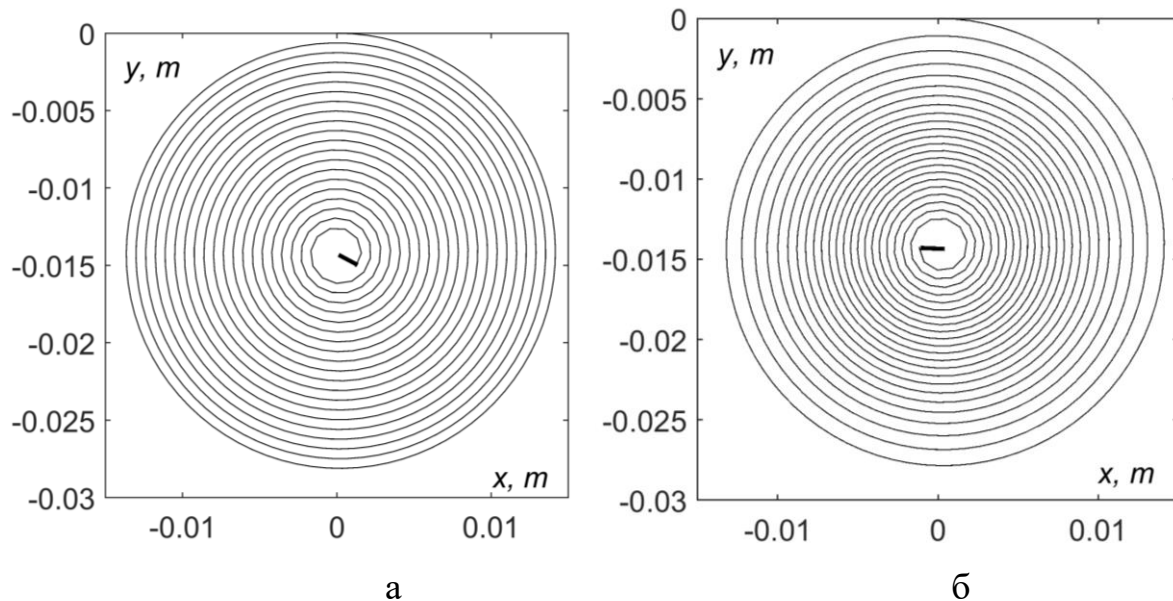


Рисунок 3.17 – Форма пружної осі спіральної пружини: а) у вільному стані пружною віссю є евольвента кола; б) пружна вісь пружини після прикладення сили $P=0,15$ Н

При прийнятому значенні $a=0,0001$ м, тобто $a=0,1$ мм, відстань між сусідніми витками становить 0,6 мм. Візьмемо металеву стрічку для виготовлення пружини шириною 1 см і товщиною 0,3 мм ($a=0,01$ м, $b=0,003$ м). Якщо вона під дією прикладеної сили P (тобто у заведеному стані) набуде форми евольвенти (рис. 3.17,а), то між витками стрічки буде зазор, рівний 0,3 мм.

Спочатку розглянемо, якої форми набуде пружна вісь пружини, якщо її кривина у вільному стані має форму евольвенти кола (рис. 3.17,а). Внаслідок прикладення моменту $M=Ps$ її кривина зросте. Відповідно до (3.18) можна записати:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2a(s_0 - s)}} + \frac{Ps}{EI}. \quad (3.27)$$

Інтегрування виразу (3.27) дає залежність $\alpha = \alpha(s)$:

$$\alpha = \int \left[\frac{1}{\sqrt{2a(s_0 - s)}} + \frac{Ps}{EI} \right] ds = -\sqrt{\frac{2(s_0 - s)}{a}} + \frac{Ps^2}{2EI}. \quad (3.28)$$

Підстановка залежності $\alpha = \alpha(s)$ (3.28) у (1.6) дає параметричні рівняння пружної осі пружини після прикладеного моменту $M = Ps$ до пружини, форма якої у вільному стані є евольвентою кола (рис. 3.17,а). Чисельним інтегруванням рівнянь отримано форму пружної осі пружини після прикладеної сили $P = 0,15 \text{ Н}$ (рис. 3.17,б). Як видно із рисунка, щільність прилягання витків один до одного зростає по мірі зростання довжини s пружини, тобто по мірі наближення до центру закручування.

Із залежності (3.28) знаходимо величину кута $\alpha = 141 \text{ рад}$ у вільному стані (при $P = 0$) і $\alpha = 156 \text{ рад}$ після прикладеної сили $P = 0,15 \text{ Н}$. Різниця становить 15 рад , що відповідає 2,4 повних оберти накручування пружини.

Тепер розв'яжемо обернену задачу: знайдемо таку форму пружної осі пружини у вільному стані, яка після прикладеної сили P набуде форми евольвенти (рис. 3.17,а). Для цього потрібно до пружної осі у формі евольвенти кола прикласти момент із протилежним знаком, тобто «розкрутити» пружину, яка має у вільному стані форму евольвенти кола. Це означає взяти у виразах (3.27) і (3.28) знак « $\rightarrow$ » перед другим доданком. Повторивши всі дії, як і в першому випадку, ми знайдемо форму кривої (рис. 3.18,а). Із нього видно, що щільність прилягання витків збільшується у протилежному до центра напрямі.

Кут α для пружини у вільному стані (рис. 3.18,а) згідно (3.28) з урахуванням знаку « $\rightarrow$ » становить $\alpha = 126 \text{ рад}$, а після прикладеної сили $P = 0,15 \text{ Н}$ – 141 рад (це стосується евольвенти кола і було знайдено раніше). Таким чином, різниця теж складає 15 рад . Якщо пружна вісь пружини у вільному стані має форму, показану на рис. (3.18,а), то після прикладеної сили

$P=0,15\text{ Н}$ вона набуде форми евольвенти (рис. 3.17,а). Якщо до неї додатково ще прикласти силу $P=0,15\text{ Н}$, то вона набуде форми, показаної на рис. 3.17,б.

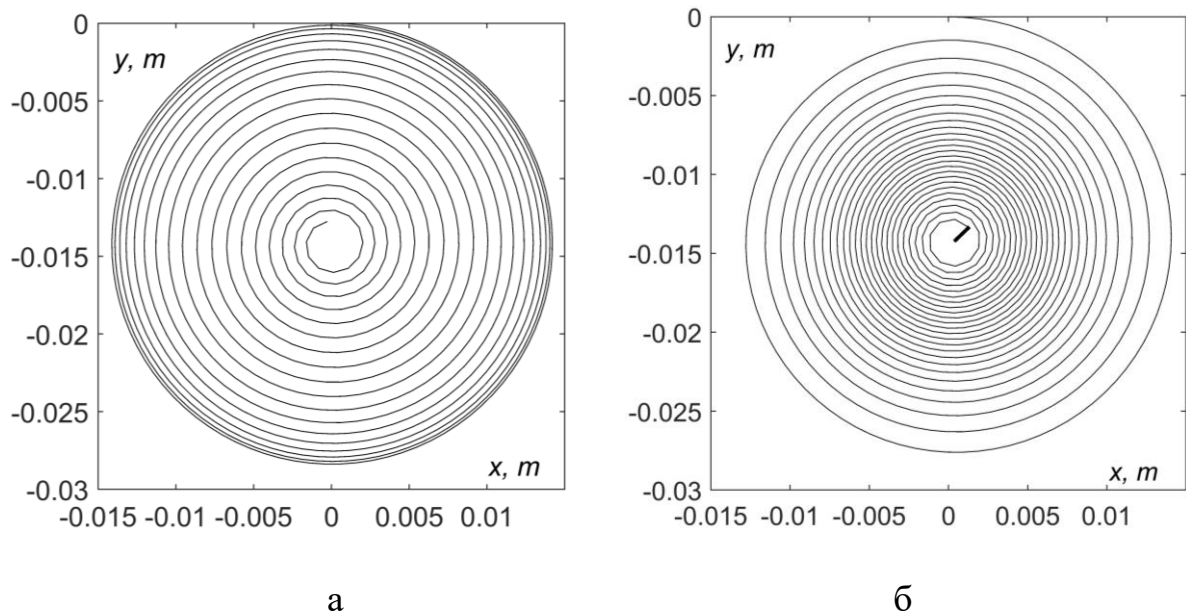


Рисунок 3.18 – Форма пружної осі спіральної пружини: а) у вільному стані; б) після прикладення сили $P=0,3\text{ Н}$

Отже в цілому приклавши силу $P=0,3\text{ Н}$ до пружини у вільному стані (рис. 3.18,а), ми отримаємо «закручену пружину», зображену на рис. 3.17,б. Якщо ж силу $P=0,3\text{ Н}$ прикласти до пружини у вільному стані (рис. 3.17,а), то ми отримаємо «закручену пружину», зображену на рис. 3.17,б. Однак у такому випадку щільність витків біля центру закручування пружини може бути такою, що між сусідніми витками виникне контакт, який спричинить тертя під час роботи пружини. Для обох випадків кут закручування буде однаковий і становитиме 30 рад .

3.4.2. Знаходження форми заготовки для виготовлення поршневого кільця

Незважаючи на уявну простоту, технологія виготовлення поршневих кілець є однією з найскладніших задач машинобудування. Кільце повинне бездоганно прилягати до стінки циліндра і тиснути на неї з однаковим зусиллям.

Дослідження показали, що для збільшення терміну служби епюра тиску повинна бути не сталою, а мати грушовидну форму з найбільшим тиском біля зазору кільця. Якщо таке кільце вийняти із циліндра, то у вільному стані його пружна вісь не буде колом, а матиме певну овальну форму. Таким чином, виникає задача знаходження пружної осі кільця у вільному стані. При виготовленні кілець застосовують різні технології. Одна із них – нарізання кілець із циліндричної заготовки, розрізання, розгинання з одіванням на спеціальну оправку, яка має форму кільця у вільному стані, і термофіксацією їх у печі при високій температурі. Термофіксація повинна зняти внутрішні напруження. Більш широко розповсюджений спосіб виготовлення кілець із заготовок некруглої форми на копіювальних верстатах. В цьому контексті теоретичне визначення форми пружної осі кільця у вільному стані за заданою епурою тиску в робочому стані має важливе значення.

У вільному стані кривина пружної осі поршневого кільця буде меншою від k_0 – кривини відповідного кола поперечного перерізу циліндра. Вона збільшується від примусового згинання кільця при його попаданні у циліндр. Сила тиску стінки гільзи циліндра на кільце вздовж його осі має бути сталою, що відповідає розподіленому навантаженню q . Отже кривина пружної осі кільця k_0 у робочому стані буде визначатися сумою кривини k у вільному стані і кривиною, отриманою від дії розподіленої сили q .

Розглянемо згинання смуги під дією розподіленої сили q (рис. 3.19,а). Будемо вважати, що ця сила слідкуюча, тобто при згинанні пружної осі вона весь час залишається перпендикулярною до неї. Така сила діє на поршневе кільце зі сторони стінки циліндра, якщо воно має відповідну форму, яку нам потрібно буде знайти. Поперечну силу Q знайдемо інтегруванням розподіленої сили вздовж осі смуги:

$$Q = \int q ds = qs. \quad (3.29)$$

Момент M знайдемо інтегруванням поперечної сили:

$$M = \int q s ds = \frac{q}{2} s^2. \quad (3.30)$$

Згідно формули (2) за умови, що $EI=1$, отримаємо:

$$\alpha = \int \frac{q}{2} s^2 ds = \frac{q}{6} s^3. \quad (3.31)$$

Отримані залежності (3.29), (3.30) і (3.31) можуть бути застосовані як до прямолінійної смуги, так і до криволінійної. У випадку криволінійної смуги початкова кривина її пружної осі у вільному стані буде збільшена під дією прикладеного моменту.

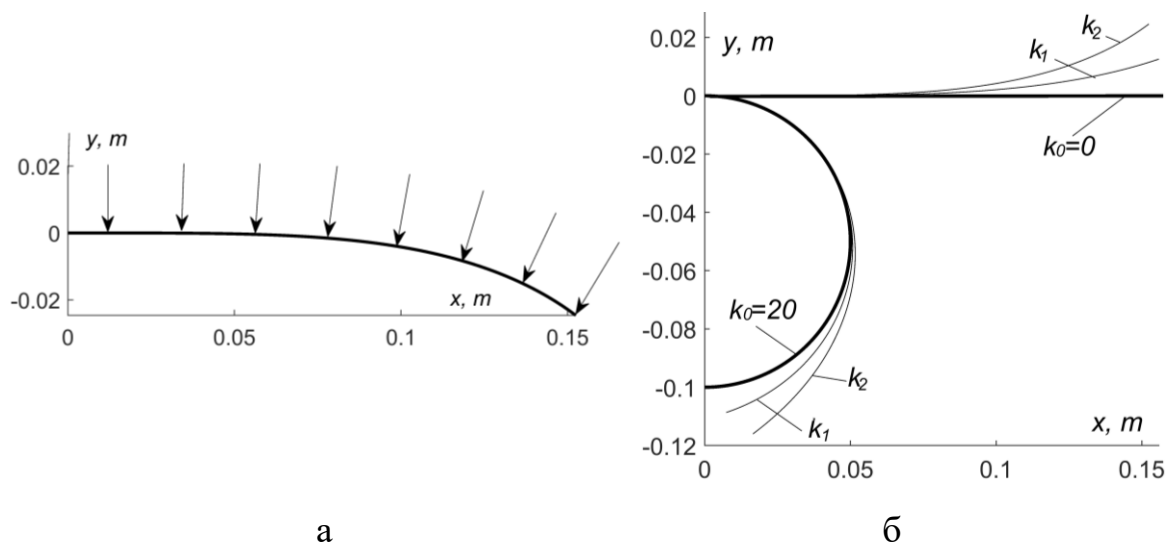


Рисунок 3.19 – До визначення пружної осі консольно закріпленої смуги під дією розподіленої слідкуючої сили: а) вихідна смуга у вільному стані прямолінійна; б) вихідна смуга у вільному стані має криволінійну форму

Підстановкою виразу (3.31) у рівняння (1.6) з наступним їх чисельним інтегруванням отримуємо форму пружної осі, яка зображена на рис. 3.19,а. У вільному стані смуга є прямолінійною. Довжина осі змінювалася в межах $s=0...0,157$ м що відповідає довжині півкола поршневого кільця радіуса пружної осі $r=0,05$ м ($k_0=20$) у робочому стані. Наступні розрахунки були спрямовані на згинання криволінійних смуг із заданою початковою кривиною. Ця задача стосується виготовлення поршневих кілець, у яких кривина k_0 у робочому стані

відома. Вона дорівнює кривині відповідного кола гільзи циліндра двигуна внутрішнього згоряння.

У вільному стані кривина пружної осі поршневого кільця буде меншою від k_0 . Вона збільшується від примусового згинання кільця при його попаданні у циліндр. Сила тиску стінки гільзи циліндра на кільце вздовж його осі має бути сталою, що відповідає розподіленому навантаженню q . Отже кривина пружної осі кільця k_0 у робочому стані буде визначатися сумою кривини k у вільному стані і кривиною, отриманою від дії розподіленої сили q . Оскільки кривина k прямо пропорційна прикладеному моменту M , то із врахуванням (3.30) при коефіцієнті пропорційності, рівному одиниці, можемо записати:

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = k_0 - \frac{q}{2}s^2. \quad (3.32)$$

Із рівності (3.32) знаходимо вираз для кута α :

$$\alpha = \int \left(k_0 - \frac{q}{2}s^2 \right) ds = k_0 s - \frac{q}{6}s^3. \quad (3.33)$$

Підстановкою (3.33) у (1.6) і наступним чисельним інтегруванням було отримано пружну вісь смуги під дією розподіленої сили q . На рис. 3.19,б показано кривину пружної осі k_0 після дії розподіленої сили і k_1 , k_2 – у вільному стані. Кривини k_1 і k_2 відповідають зростанню розподіленої сили у два рази. Чисельні значення розподіленої сили q не наводимо, оскільки вона орієнтована на жорсткість смуги $EI=1$. Тут важливо отримати форму пружної осі, яка залежить від співвідношення жорсткості EI і розподіленої сили q . При $k_0=0$ (рис. 3.19,б, вгорі праворуч) ми отримуємо криволінійну пружну вісь (k_1 і k_2), яка після дії розподіленої сили q набуває прямолінійної форми.

Як уже зазначалося, рекомендується розподілену силу q для поршневого кільця робити не сталою, а змінною, причому вона повинна зростати в області

зазору кільця. На більшій частині довжини пружної осі s кільця вона має бути сталою. Епюра розподіленої сили q має грушовидну форму (рис. 3.20,а). Для її розподілу вздовж пружної осі кільця можна використати функцію на основі натурального логарифма $q=b \cdot \exp(-as^2)$. Для того, щоб розподілена сила q після сталої величини зростала при наближенні до кінця півкола радіуса $r=1/k_0$, вказана функція буде мати наступний вигляд:

$$q = b \exp \left[-a(\pi - s)^2 \right] + q_0, \quad (3.34)$$

де s – змінна величина – довжина пружної осі ($s=0 \dots \pi \cdot r$);

q_0 – стале значення величини розподіленої сили;

a, b – коефіцієнти, що впливають на форму графіка.

На рис. 3.20,б за рівнянням (3.34) побудовано графік розподіленої сили, яка відповідає епюрі, зображеної на рис 3.20,а.

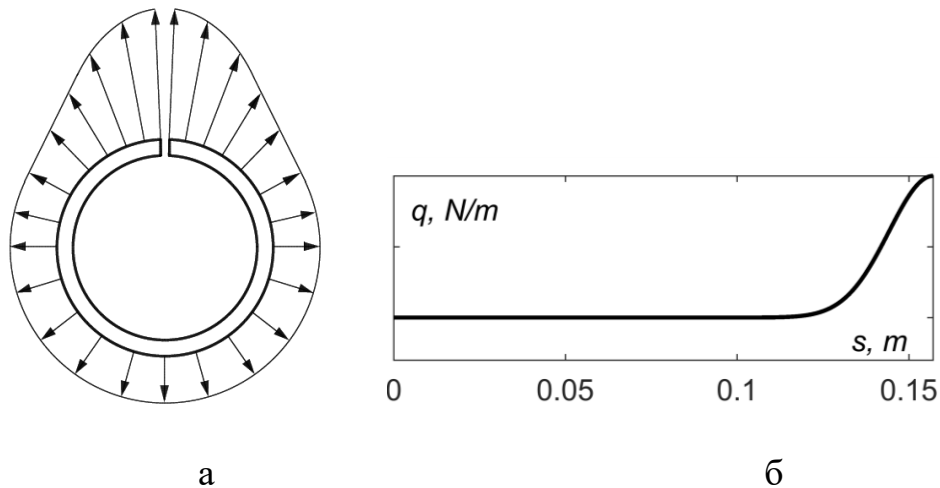


Рисунок 3.20 – Графічні ілюстрації до форми розподіленої сили q вздовж пружної осі поршневого кільця: а) епюра розподіленої сили q ; б) графік розподіленої сили q вздовж пружної осі половини кільця

Підбором коефіцієнтів a і b у залежності (3.34) можна змінювати форму кривої (рис. 3.20,б). Зокрема, при $b=0$ розподілена сила буде сталою.

Збільшенням величини коефіцієнта b досягається зростання пікового значення розподіленої сили q , а коефіцієнтом a регулюється межа між сталою і змінною розподіленими силами q в межах пружної осі половини кільця.

Чисельним інтегруванням було побудовано пружну вісь поршневого кільця у вільному стані при сталій величині розподіленої сили q . Для цього інтегруванням виразу (3.34) згідно (3.29) було знайдено поперечну силу і наступним інтегруванням її виразу згідно (3.30) – прикладений момент. За аналогією пружної лінійки було побудовано дві симетричні вітки (рис. 3.21). Радіус пружної осі кільця у робочому стані було прийнято $r=0,05$ м. Пружна вісь (рис. 3.21,а) відповідає кривій k_1 (рис. 3.19,б). На рис. 3.21,б побудовано дві пружні осі поршневого кільця: крива 1 відповідає кривій k_2 (рис. 3.19,б), а крива 2 – змінній розподіленій силі, графік якої зображено на рис. 3.20,б.

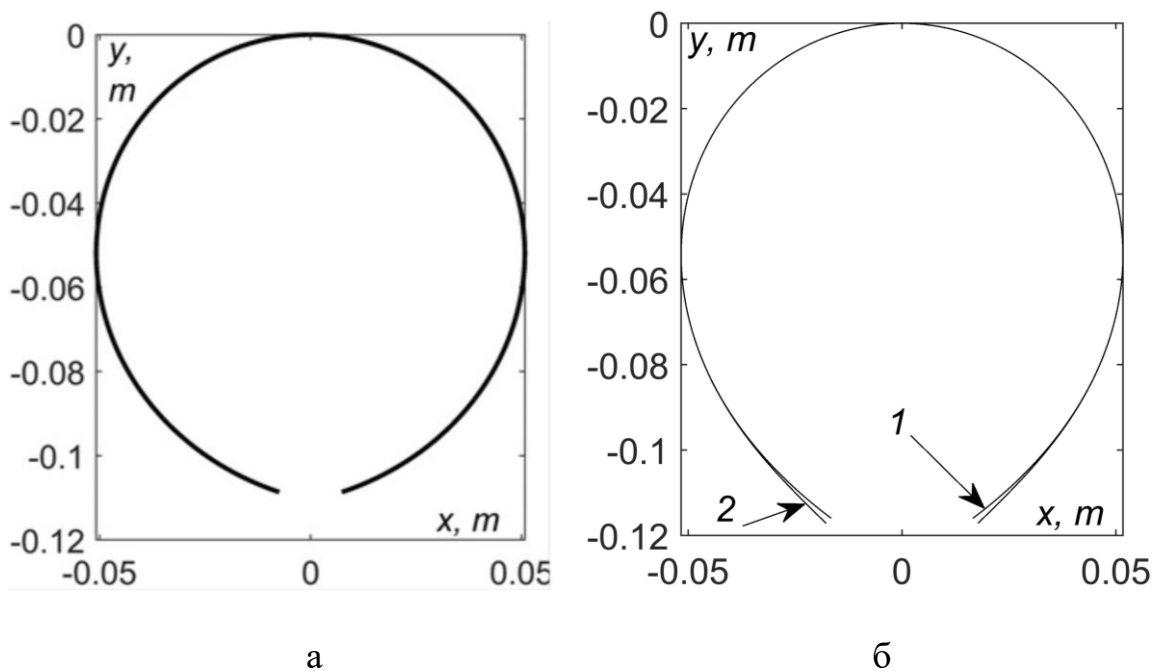


Рисунок 3.21 – Форма пружної осі поршневого кільця у вільному стані: а) при сталому значенні розподіленої сили q ; б) при сталому значенні вдвічі більшої розподіленої сили q (позначено цифрою 1) і при зростанні розподіленої сили q біля зазору кільця (позначено цифрою 2)

При цьому стала складова цього графіка відповідала сталому значенню q розподіленої сили, яка діє по всій довжині осі кривої k_2 . В зв'язку із цим форма пружної осі кільця у вільному стані для обох випадків збігається, і тільки біля зазору існує незначне відхилення. Це відхилення можна побачити при співвідношенні сталого і пікового значень розподіленої сили, яке рівне двом і більше. При меншому співвідношенні криві практично збігаються.

Висновки до третього розділу

1. При пружному згинанні листового матеріалу прокаткою між валками відбувається часткове відновлення його форми. Величина відновлення оцінюється коефіцієнтом пружинення, який встановлюється для окремої партії листового матеріалу експериментальним шляхом. При виготовленні конічних деталей запропоновано кривину кола – основи конуса – розкласти на дві складові: нормальну і геодезичну кривину. Для визначення форми фіктивного конуса, який після прокатки повинен стати реальним, використано положення із диференціальної геометрії поверхонь. Згідно нього при згинанні змінюється тільки нормальна складова кривини лінії, а геодезична залишається незмінною. На основі цього складено параметричні рівняння фіктивного конуса і виконано розрахунки для налаштування конічних валків.

2. При абсолютно пружному згинанні смуг або стержнів відбувається повне відновлення їх форми після дії деформуючих зусиль. В роботі розглянуто деформацію абсолютно пружного стержня на прикладі криволінійної деталі сільськогосподарського призначення:

- стояка культиваторної лапи, пружна вісь якого є дугою кола;
- пружинного зуба борони, який поєднує прямолінійну і криволінійну частини;
- стояка культиваторної лапи, пружна вісь якого є поєднанням дуг кіл із протилежним знаком кривини.

Виконано аналітичний опис згинання цих деталей внаслідок дії сил опору ґрунту під час його обробітку для аналізу відхилення робочого органу по глибині обробітку.

3. Розв'язана обернена задача знаходження пружної осі смуги після припинення дії прикладеного моменту. Вона виникає тоді, коли відомий прикладений момент і форма пружної осі внаслідок дії моменту. Якщо дія моменту припиняється, пружна вісь смуги змінює свою форму. Ця форма є заготовкою для виготовлення деталі, яка потребує певної технології її обробки, щоб надати їй властивості абсолютної пружності. Розглянуто приклади:

- розрахунок заготовки спіральної пружини для надання їй раціональної форми;
- розрахунок заготовки поршневого кільця, яке у робочому положенні має забезпечувати сталий тиск на стінки циліндра.

4. Результати досліджень третього розділу опубліковано в працях [76, 77, 79 – 92].

РОЗДІЛ 4

ЗГИНАННЯ ЛІНІЙЧАТИХ ПОВЕРХОНЬ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ ЇХ ВНУТРІШНЬОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Внутрішня геометрія поверхонь — це розділ диференціальної геометрії, що вивчає властивості поверхонь які залежать лише від метрики самої поверхні. Термінами внутрішньої геометрії поверхонь є ті властивості, які не змінюються при повороті або згинанні поверхонь. Це довжини ліній, кути між ними, площа куска поверхні, геодезична кривина лінії на поверхні. В розділі розглянуто згинання розгортних і нерозгортних лінійчатих поверхонь, зокрема, гвинтових. Гвинтові поверхні широко застосовуються в задачах транспортування технологічного матеріалу. Вони можуть бути як нерухомі у гравітаційних спусках [50, 93, 94], так і обертатися навколо своєї осі у різного роду гвинтових конвеєрах [95 – 97]. Дуже поширені вони у сільськогосподарському виробництві [98 – 101]. Тому значна частина робіт присвячена удосконаленню конструкцій гвинтових пристроїв та технології виготовлення витків спіралей [102 – 106]. Прикладом застосування гвинтових поверхонь може служити зміцнений шнек жатки зернозбирального комбайна. На рис. 4.1,а показано фрагмент шнека, а на рис. 4.1,б – фрагмент витка, побудований з допомогою комп'ютера за рівняннями цих поверхонь. Робочий виток, позначений цифрою 1, є нерозгортним і представляє собою поверхню гвинтового коноїда. Виток 2 служить для зміцнення основного і є розгортною поверхнею – торсом-гелікоїдом.

Виготовлення цих поверхонь суттєво відрізняється між собою. При формуванні плоскої заготовки у поверхню гвинтового коноїда відбуваються значні пластичні деформації розтягнення внутрішньої частини поверхні, яка прилягає до вала, і стиснення зовнішньої частини. При формуванні торса-гелікоїда відбувається згинання вздовж прямолінійних твірних, причому пластичні деформації мінімальні і зумовлені вони товщиною листового

матеріалу заготовки. Якщо для нерозгортної поверхні умовну розгортку можна побудувати тільки наближено, то для розгортної вона будується точно.

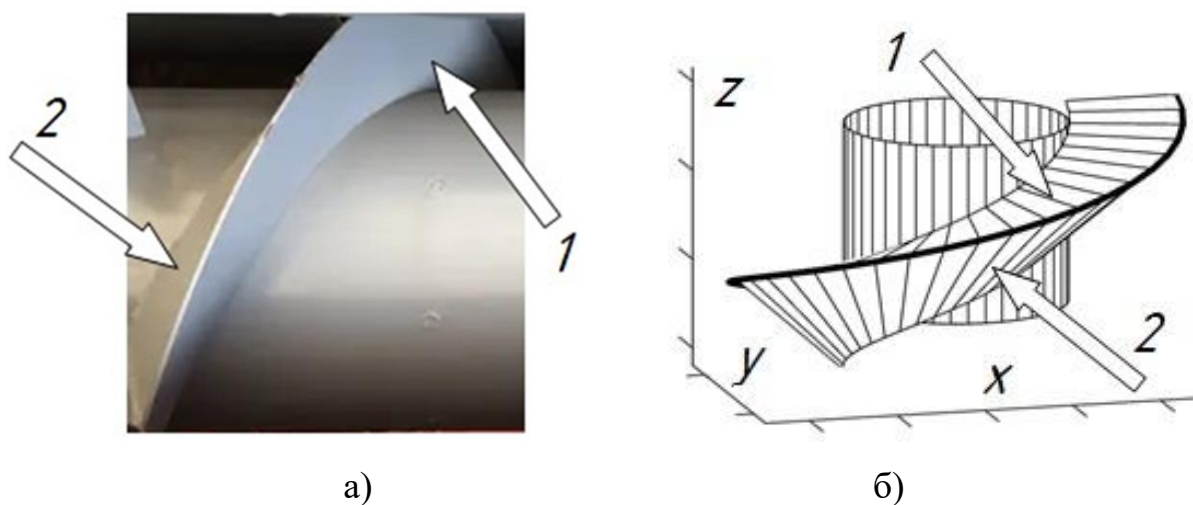


Рисунок 4.1 – Графічні ілюстрації до будови шнека жатки зернозбирального комбайна: а) фрагмент шнека натурального виробу; б) фрагмент шнека, поверхні якого побудовані з допомогою комп'ютерних програм

4.1. Аналітичний опис неперервного згинання відсіку розгортної поверхні

З використанням термінів внутрішньої геометрії можна по різному описувати неперервне згинання розгортної поверхні. В підрозділі розглянуто деякі випадки згинання та їх практичного застосування.

4.1.1. Неперервне згинання розгортного гелікоїда зміною радіуса циліндра, на якому розташоване ребро звороту

Плоску заготовку у вигляді кільця із вирізом можна згинати по різному. Якщо прямі лінії, вздовж яких відбувається згинання, розташовані радіально, тобто до центру кільця, то при поступовому згинанні вздовж них кільце перетвориться у зрізаний конус (рис. 4.2). Фактично згинання зводиться до скручування кільця навколо вертикальної осі, що проходить через його центр, до

моменту, коли крайні обмежувальні прямі збіжаться. Скручування можна продовжити і далі. Тоді поверхня конуса буде перекриватися, а кут нахилу його прямолінійних твірних до основи зростатиме. Однак плоске кільце можна згинати і по іншому, коли прямі лінії згину будуть розташовані під певним кутом до радіального напрямку (рис. 4.3,а).

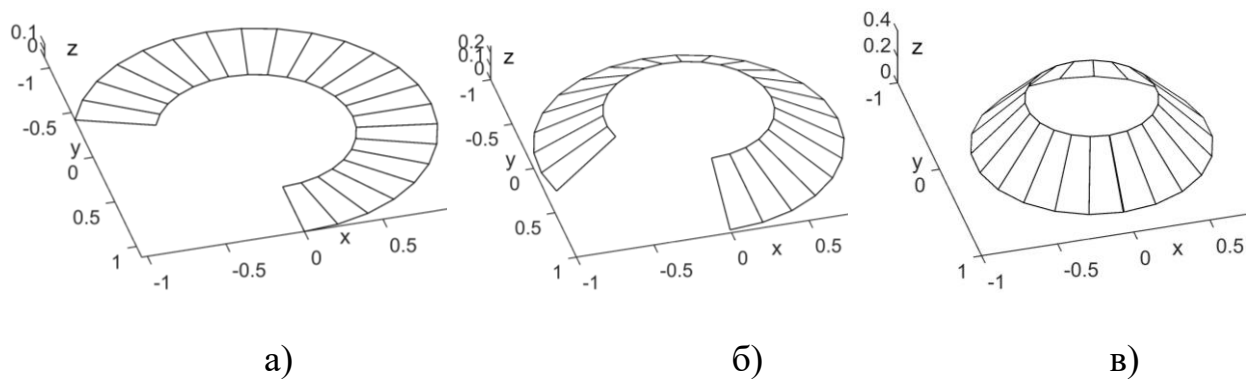


Рисунок 4.2 – Графічні ілюстрації до поступового згинання плоского кільця у зрізаний конус: а) плоске кільце із вирізом; б) проміжний етап при згинанні; в) зрізаний конус

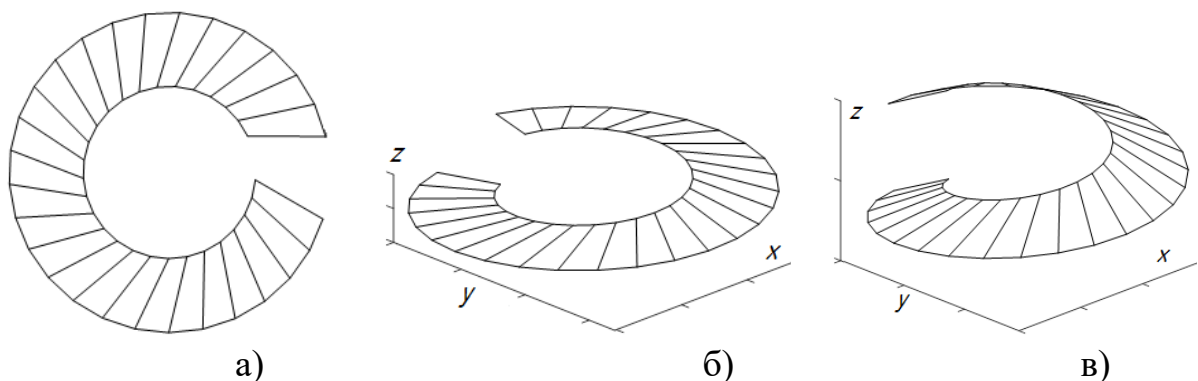


Рисунок 4.3 – Графічні ілюстрації до поступового згинання плоского кільця у розгортний гелікоїд: а) плоске кільце із вирізом; б) проміжний етап при згинанні; в) виток торса-гелікоїда

При рівномірному згинанні плоского кільця вздовж таких ліній відбувається не тільки скручування його навколо вертикальної осі, а і розтягування вздовж неї (рис. 4.3,б,в). На рис. 4.4 показані фронтальна і горизонтальна проекції одного витка торса-гелікоїда. Обмежувальні кола кільця

перетворилися у гвинтові лінії, розташовані на циліндрах радіуса r і R . Величина H , на яку розтягнули кільце, є кроком торса-гелікоїда.

Окрім розмірів r , R і H є ще один розмір ρ , від якого залежить напрям прямих, вдовж яких відбувається згинання. Це розмір радіуса циліндра, на якому розташована гвинтова лінія кроку H . Якщо продовжити лінії згину, то всі вони будуть дотичними до цієї гвинтової лінії, яка носить назву ребра звороту. При зворотній деформації витка торса-гелікоїда у плоске кільце ребро звороту теж деформується – його крок зменшується і на розгортці перетворюється у дугу кола.

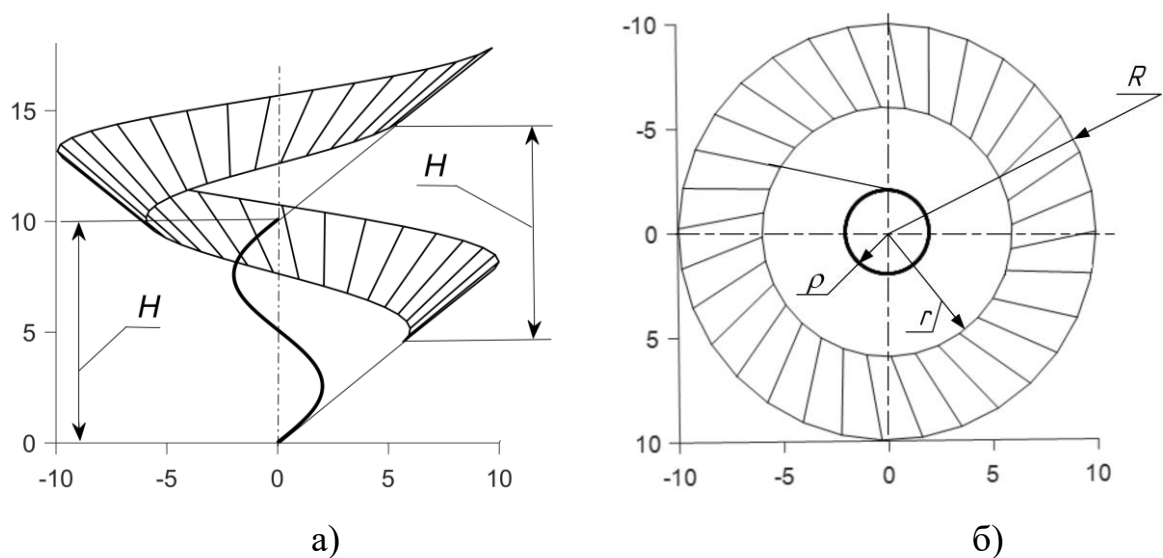


Рисунок 4.4 – Виток розгортного гелікоїда, в який перетворилося плоске кільце:

а) фронтальна проекція; б) горизонтальна проекція

Із диференціальної геометрії відомо, що при згинанні розгортної поверхні довжина ребра звороту і його кривина не змінюються, хоча форма самого ребра звороту змінюється і воно на розгортці стає плоскою кривою. В нашому випадку при деформації ребра звороту розтягуванням дуга кола буде перетворюватися у гвинтову лінію із зростанням її кроку H_i . Оскільки довжина деформованої гвинтової лінії не змінюється, то зрозуміло, що і радіус ρ_i в процесі такої деформації буде зменшуватися. Керувати згинанням торса-гелікоїда будемо через деформацію його ребра звороту (гвинтової лінії) описаним способом. Параметричні рівняння гвинтової лінії у функції довжини s її дуги мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 x &= \rho \cos \frac{s}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}; \\
 y &= \rho \sin \frac{s}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}; \\
 z &= \frac{hs}{\sqrt{\rho^2 + h^2}},
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

де h – гвинтовий параметр, який зв’язаний із кроком H залежністю $H=2\pi h$,
 ρ – радіус циліндра, на якому розташована гвинтова лінія (ребро звороту).

Кривина гвинтової лінії є сталою і залежить від двох параметрів: ρ і h . Після деформації гвинтова лінія залишиться гвинтовою, але з іншими параметрами ρ_i і h_i . На основі відомого виразу кривини гвинтової лінії прирівняємо її вирази між собою до і після деформації:

$$\frac{\rho}{\rho^2 + h^2} = \frac{\rho_i}{\rho_i^2 + h_i^2}
 \tag{4.2}$$

Рівність (4.2) можна розв’язати відносно ρ_i або h_i . Розв’яжемо відносно h_i , оскільки в цьому випадку розв’язок буде простішим:

$$h_i = \sqrt{\frac{\rho_i}{\rho}(\rho^2 + h^2 - \rho\rho_i)}.
 \tag{4.3}$$

Підставимо у рівняння (4.1) замість ρ нове позначення ρ_i (нове значення радіуса) і замість h_i – вираз (4.3), тобто нове значення гвинтового параметра, і отримаємо наступні параметричні рівняння:

$$\begin{aligned}
 x_i &= \rho_i \cos \sqrt{\frac{\rho}{\rho_i(\rho^2 + h^2)}} s; \\
 y_i &= \rho_i \sin \sqrt{\frac{\rho}{\rho_i(\rho^2 + h^2)}} s; \\
 z_i &= \sqrt{1 - \frac{\rho \rho_i}{\rho^2 + h^2}} s.
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Отримані параметричні рівняння (4.4) описують множину гвинтових ліній однакової кривини. Їх параметри (крок і радіус) залежать від значення сталої ρ_i . При $\rho_i = \rho$ рівняння (4.4) перетворюються у рівняння (4.1), тобто описують вихідну гвинтову лінію. В частковому випадку гвинтова лінія перетворюється у плоску – коло. Це відбувається тоді, коли $h_i = 0$. Прирівняємо вираз (4.3) до нуля і розв'яжемо відносно ρ_i :

$$\rho_i = \frac{\rho^2 + h^2}{\rho}.
 \tag{4.5}$$

Значення радіуса ρ_i є максимально можливим, інакше підкореневий вираз в останньому рівнянні (4.4) набуде від'ємного значення. При зменшенні ρ_i від максимального значення (4.5) до ρ , лінія (4.4) трансформуватиметься збільшенням кроку від кола до вихідної гвинтової лінії. При подальшому зменшенні ρ_i крок гвинтової лінії зростатиме, проте при $\rho_i = 0$ лінію за рівняннями (4.4) отримати неможливо, оскільки підкореневі вирази в перших двох рівняннях (4.4) стають невизначеними. Це пояснюється тим, що при $\rho_i = 0$ гвинтова лінія мала б перетворитися у вертикальну пряму, що за умовою заданої сталої кривини неможливо, оскільки кривина прямої дорівнює нулю, а за нашою умовою вона має певне стає значення.

Гвинтова лінія (4.4) є напрямною для утворення торса-гелікоїда. Його поверхня утворюється множиною прямолінійних твірних, дотичних до гвинтової лінії. Напрямним вектором цих твірних є вирази перших похідних рівнянь (4.4). Оскільки гвинтова лінія (4.4) задана рівняннями у функції довжини s її дуги, то

похідні рівнянь (4.4) представлятимуть проекції одиничного напрямного вектора. Параметричні рівняння поверхні запишуться, як множина дотичних прямих до гвинтової лінії (4.4), напрям яких задається цим одиничним вектором:

$$\begin{aligned} X_i &= \rho_i \cos \sqrt{\frac{\rho}{\rho_i \sqrt{(\rho^2 + h^2)}}} s - u \rho_i \sqrt{\frac{\rho}{\rho_i \sqrt{(\rho^2 + h^2)}}} \sin \sqrt{\frac{\rho}{\rho_i \sqrt{(\rho^2 + h^2)}}} s; \\ Y_i &= \rho_i \sin \sqrt{\frac{\rho}{\rho_i \sqrt{(\rho^2 + h^2)}}} s + u \rho_i \sqrt{\frac{\rho}{\rho_i \sqrt{(\rho^2 + h^2)}}} \cos \sqrt{\frac{\rho}{\rho_i \sqrt{(\rho^2 + h^2)}}} s; \\ Z_i &= \sqrt{1 - \frac{\rho \rho_i}{\rho^2 + h^2}} s + u \sqrt{1 - \frac{\rho \rho_i}{\rho^2 + h^2}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

де u – друга змінна поверхні – довжина прямолінійної твірної, відлік якої починається від точки дотику до гвинтової лінії ребра звороту.

Коефіцієнти першої квадратичної форми торса-гелікоїда (4.6) мають вигляд:

$$\begin{aligned} G &= \left(\frac{\partial X_i}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z_i}{\partial s} \right)^2 = \frac{h^4 + \rho^4 + \rho^2(2h^2 + \rho^2)}{(h^2 + \rho^2)^2}; \\ F &= \frac{\partial X_i}{\partial s} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial u} + \frac{\partial Y_i}{\partial s} \cdot \frac{\partial Y_i}{\partial u} + \frac{\partial Z_i}{\partial s} \cdot \frac{\partial Z_i}{\partial u} = 1; \\ E &= \left(\frac{\partial X_i}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z_i}{\partial u} \right)^2 = 1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Таким чином, квадратична форма поверхні (4.6) запишеться:

$$\begin{aligned} dS^2 &= Gds^2 + 2dsdu + Edu^2 = \\ &= \frac{h^4 + \rho^4 + \rho^2(2h^2 + \rho^2)}{(h^2 + \rho^2)^2} ds^2 + 2dsdu + du^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

До квадратичної форми (4.8) не входить параметр ρ_i . Його значення впливає на форму поверхні (4.6), але не впливає на вираз самої квадратичної форми. Це свідчить про те, що рівняння (4.6) є рівняннями неперервного

згинання торса-гелікоїда рівномірним зменшенням його кроку від початкового значення до нуля, коли торс-гелікоїд перетворюється у розгортку і навпаки – від розгортки до готової поверхні. При $\rho_i = \rho$ рівняння (4.6) описують початкову поверхню торса-гелікоїда, а при ρ_i , рівному значенню, наведеному в (4.5) – його розгортку. Для побудови необхідного відсіку поверхні необхідно знати межі зміни параметрів s і u . Один виток поверхні відповідає повороту точки ребра звороту (4.1) кутові в 360° . Прирівняємо до 360° вираз, за яким визначається поточне значення кута, і розв'яжемо відносно s :

$$\frac{s}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} = 2\pi, \quad \text{звідки} \quad s = 2\pi\sqrt{\rho^2 + h^2} \quad (4.9)$$

Отже, параметр s (незалежна змінна) повинен змінюватися в межах від нуля до значення (4.9). Друга незалежна змінна u є відстанню точки на прямолінійній твірній від ребра звороту. Отже вона повинна змінюватися від u_r , що відповідає внутрішній обмежувальній гвинтовій лінії радіуса r (рис. 4.4,б) до u_R , що відповідає зовнішній обмежувальній гвинтовій лінії радіуса R . Ці гвинтові лінії на горизонтальній проекції проєкціюються колами радіуса r і R . Знайдемо відстань L від осі торса-гелікоїда до довільної точки вихідної поверхні за відомою формулою:

$$L = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} = \rho \sqrt{\rho_i \left(\rho_i + \frac{\rho u^2}{\rho^2 + h^2} \right)}. \quad (4.10)$$

Вихідну поверхню задаємо при $\rho_i = \rho$. Підставимо це значення у (4.10) і розв'яжемо відносно u :

$$u = \frac{1}{\rho} \sqrt{(L^2 - \rho^2)(\rho^2 + h^2)}. \quad (4.11)$$

Якщо у формулу (4.11) підставити значення ρ і h , а замість L – значення радіуса r , то ми отримаємо значення u_r . Відповідно заміною L на R знайдемо значення u_R . Різниця цих значень $u_R - u_r$ є довжиною прямолінійних твірних в межах плоского кільця, вздовж яких здійснюється його згинання, тому вони є незмінними в процесі згинання. Підставимо (4.11) у (4.10) і після спрощень отримаємо:

$$L_i = \sqrt{\rho_i \left(\frac{L^2}{\rho^2} + \rho_i - \rho \right)}. \quad (4.12)$$

Формула (4.12) дає можливість відстежувати зміну радіусів ρ , r і R в процесі згинання поверхні в залежності від значення ρ_i . Наприклад, при $\rho_i = \rho$ (вихідна поверхня) маємо: $L_i = L$. Це означає, що при підстановці замість L радіусів ρ , r і R ми отримуємо ці ж самі значення. Для отримання значень ρ_o , r_o і R_o на розгортці (тобто L_o) ми повинні у формулу (4.12) підставити відповідне значення ρ_i із (4.5). Після підстановки отримуємо:

$$L_o = \frac{1}{\rho} \sqrt{(L^2 + h^2)(\rho^2 + h^2)}. \quad (4.13)$$

Розглянемо приклад. Здійснимо згинання торса-гелікоїда із заданими розмірами $H=10$ ($h=1,6$), $\rho=2$, $r=6$, $R=10$. Знайдемо, в яких межах будуть змінюватися незалежні змінні s і u . Із виразу (4.9) знаходимо: $s=16,09$. Отже, $s=0 \dots 16,09$. Почергова підстановка r і R замість L у формулу (4.12) дає межі зміни відстані u : $u=7,2 \dots 12,5$. За формулою (4.5) знаходимо максимально можливе значення ρ_i , яке відповідає розгортці витка торса-гелікоїда: $\rho_i=3,28$. Отже, ρ_i може набувати значень в межах $\rho_i=2 \dots 3,28$. При $\rho_i=2$ маємо вихідну поверхню, проекції якої показано на рис. 4.4. Будемо поступово збільшувати значення ρ_i . На рис. 4.5 за рівняннями (4.6) побудовано проекції поверхні при різних значеннях сталої ρ_i . Слід зауважити, що в рівняннях (4.6) змінюємо тільки ρ_i , інші параметри, в тому числі і межі зміни незалежних змінних s і u

залишаються попередніми. При підстановці в (4.13) замість L почергово $L=r=6$ і $L=R=10$ знаходимо значення радіусів обмежувачих кіл на розгортці: $r_o=7,95$ і $R_o=12,97$, а також $\rho_o=3,28$ тобто початкові значення відповідних радіусів r , R і ρ зросли від 6, 10 і 2 до 8, 13 і 3,3 відповідно.

Аналізуючи проекції торсів-гелікоїдів в результаті згинання вихідного (рис. 4.4) і закінчуючи розгорткою (рис. 4.5,в), можна зробити певні висновки, а саме: при зменшенні кроку витка з'являється кут φ , якого не було на вихідній поверхні і який набув максимального значення на розгортці. Крім того, збільшуються радіуси ρ , r і R , які на розгортці теж досягають максимального значення ρ_o , r_o і R_o . Розміри φ_o , r_o і R_o задають контури розгортки витка, а за допомогою ρ_o можна визначити напрям прямих, вздовж яких відбувається згинання.

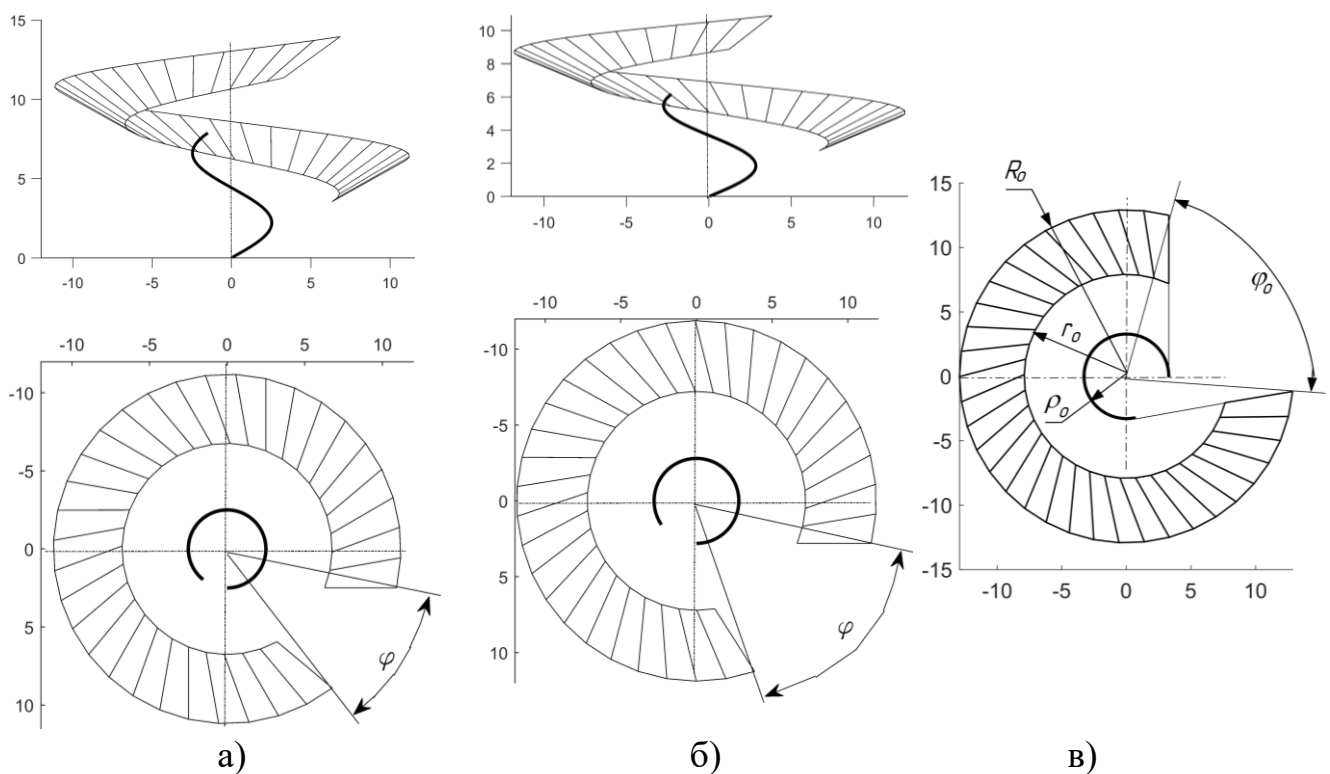


Рисунок 4.5 – Проекції торса-гелікоїда, побудовані за рівняннями (4.6) при різних значеннях ρ_i : а) $\rho_i=2,5$; б) $\rho_i=2,8$; в) $\rho_i=3,28$ (розгортка)

Знайдемо вираз для кута φ . При зміні довжини дуги s від нуля до значення (4.9) рівняння (4.1) описують один виток гвинтової лінії, тобто кут α в цьому

випадку буде рівним 2π . Те ж саме буде для гвинтової лінії (4.4) при умові, що $\rho_i = \rho$. В інших випадках, коли $\rho_i \neq \rho$ кут α буде меншим 2π , тобто з'явиться кут, як різниця $2\pi - \alpha_i$. З урахуванням цього і значення s із (4.9) можемо записати:

$$\varphi_i = 2\pi - s \sqrt{\frac{\rho}{\rho_i(\rho^2 + h^2)}} = 2\pi \left(1 - \sqrt{\frac{\rho}{\rho_i}} \right) \quad (4.14)$$

При $\rho_i = \rho$, тобто у вихідній поверхні, кут $\varphi = 0$. Збільшуючи ρ_i ми будемо отримувати певні значення кута φ_i . При максимально можливому значенні ρ_i згідно (4.5) ми отримаємо кут φ_0 на розгортці. Підставимо ρ_i із (4.5) у (4.14) і отримаємо:

$$\varphi_0 = 2\pi \left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right). \quad (4.15)$$

Для заданих $h=1,6$, $\rho=2$ за формулою (4.15) знаходимо: $\varphi_0 = 79^\circ$. Знайдених значень ρ_0 , r_0 , R_0 і φ_0 достатньо для побудови плоского кільця – розгортки одного витка торса-гелікоїда і визначення напрямку прямих ліній, вздовж яких відбувається згинання. Отже при згинанні плоского кільця у поверхню торса-гелікоїда відбувається деформація з одночасним його розтягуванням вздовж осі і скручуванням навколо осі. Знайдемо аналітичну залежність між цими двома рухами.

Крок H_i знайдемо, якщо гвинтовий параметр h_i (4.3) помножимо на кут α_i . Його також можна знайти, як координату z_i , в рівняннях (4.4) при значенні s із (4.8). В обох випадках отримаємо:

$$H_i = 2\pi \sqrt{\rho^2 + h^2 - \rho\rho_i}. \quad (4.16)$$

При розтягуванні кільця воно одночасно має скручуватися навколо осі від кута $2\pi - \varphi_o$ (рис. 4.5,в) до кута 2π (рис. 4.4,б). В цих межах змінюється кут α_i , вираз якого згідно (4.14) запишеться:

$$\alpha_i = 2\pi \sqrt{\frac{\rho}{\rho_i}}. \quad (4.17)$$

Виключаючи ρ_i із виразів (4.16) і (3.17), ми знайдемо залежності $\alpha_i = \alpha_i(H_i)$ або $H_i = H_i(\alpha_i)$:

$$\alpha_i = \frac{4\rho\pi^2}{\sqrt{4\pi^2(\rho^2 + h^2) - H_i^2}}, \quad H_i = \frac{2\pi}{\alpha_i} \sqrt{\alpha_i^2(\rho^2 + h^2) - 4\pi^2\rho^2}. \quad (4.18)$$

На рис. 4.6,а побудовано графік залежності $\alpha_i = \alpha_i(H_i)$ за заданими параметрами витка. Крок H_i змінюється від нуля до кінцевого значення $H=10$. При цьому кут α_i змінюється від початкового значення 281° до кінцевого значення 360° . Різниця між цими значеннями дає кут φ_o , тобто по суті це є графік залежності $\varphi = \varphi(H_i)$. З нього видно, що при рівномірному розтягуванні заготовки її скручування відбувається нерівномірно: спочатку кут зростає повільно, а далі його ріст пришвидшується по залежності, близькій до квадратичної. Заготовку можна було б розтягувати і далі із одночасним скручуванням. При цьому зростає кут підйому гвинтової лінії (ребра звороту), який є кутом нахилу прямолінійних твірних до горизонтальної площини.

На рис. 4.6,б побудовано графік залежності $H = H(\varphi)$, який дає уявлення про закономірність зміни кроку H при рівномірному скручуванні заготовки. При лінійному зростанні кута φ розтягування заготовки відбувається не рівномірно: на початковому етапі крок стрімко зростає і згодом це зростання сповільнюється.

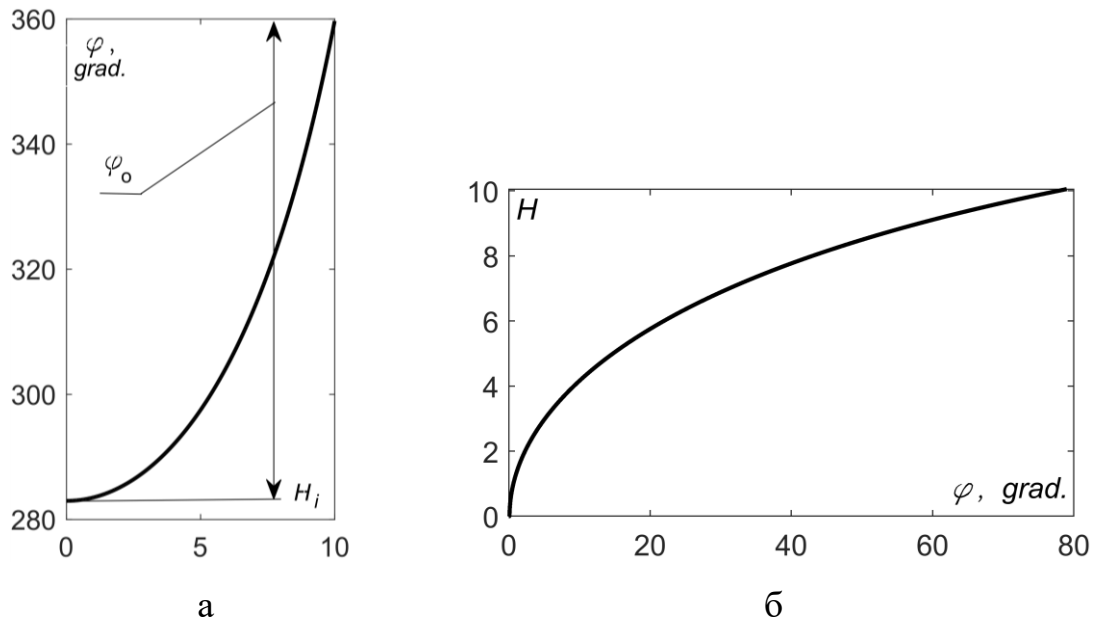


Рисунок 4.6 – Графіки, які характеризують співвідношення між двома рухами при згинанні заготовки у виток торса-гелікоїда: а) залежність кута повороту φ при лінійному зростанні кроку H ; б) залежність кроку H при лінійному зростанні кута повороту φ

4.1.2. Неперервне згинання розгортної поверхні зміною закономірності кута підйому ребра звороту

В попередньому підрозділі розглянуто неперервне згинання розгортного гелікоїда (торса-гелікоїда) на основі незмінності кривини ребра звороту. Ребро звороту (гвинтова лінія) деформувалася, залишаючись гвинтовою із сталою кривиною, при цьому змінювався радіус циліндра гвинтової лінії, а також її крок. В цілому це означає зміну скруту кривої. При цьому бажано, щоб ребро звороту було задане параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги. Конструювання просторових кривих за таких умов розглянуто в працях [107 – 109]. В праці [110] запропоновано замінити залежність скруту від довжини дуги ребра звороту залежністю кута підйому теж від довжини дуги кривої. Саме таку параметризацію ребра звороту використаємо для неперервного згинання розгортної поверхні, частковим випадком якої є торс-гелікоїд. В цій праці просторова крива задається наступними рівняннями:

$$\begin{aligned}
x &= \int \cos \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right) \cos \beta ds; \\
y &= \int \sin \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right) \cos \beta ds; \\
z &= \int \sin \beta ds,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

де $k=k(s)$ – кривина кривої і $\beta=\beta(s)$ – кут підйому кривої.

При $\beta=const$ параметричні рівняння (4.19) опишуть криву укосу із сталим кутом підйому. Крива укосу із сталою кривиною $k=const$ є гвинтовою лінією сталого кроку. Розглянемо побудову кривої із сталою кривиною і лінійною залежністю зростання кута підйому $\beta=a \cdot s$, де a – стала величина. Після підстановки цих залежностей у (4.19) і часткового інтегрування отримаємо:

$$\begin{aligned}
x &= \int \cos as \cos \left(\frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{a} \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} s \right) \right] \right) ds; \\
y &= \int \cos as \sin \left(\frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{a} \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} s \right) \right] \right) ds; \\
z &= -\frac{\cos as}{a}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

В результаті чисельного інтегрування рівнянь (4.20) було побудовано криву для $k=1$ і $a=0,04$ при зміні дуги s в межах $s=0 \dots 15$ (рис. 4.7).

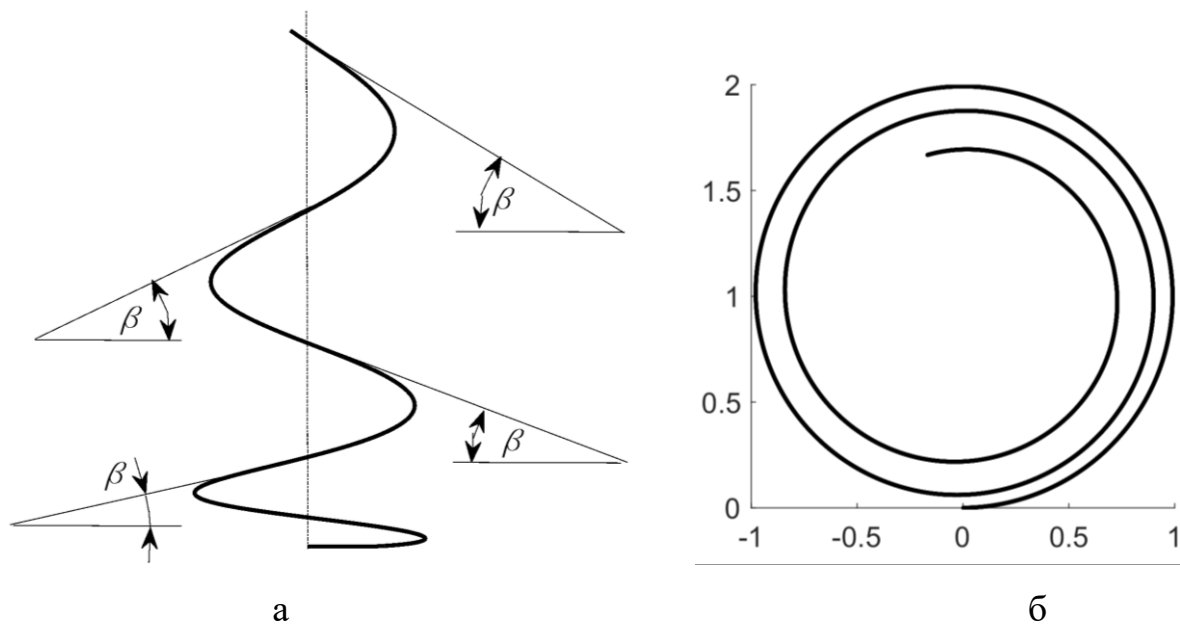


Рисунок 4.7 – Проекції кривої сталої кривини і з лінійним законом зростання кута підйому: а) фронтальна проекція; б) горизонтальна проекція

На рис. 4.7,а видно, що кут підйому кривої β зростає по мірі збільшення її висоти. Візьмемо просторову криву (4.19) в ролі ребра звороту і складемо параметричні рівняння торса в загальному вигляді. Напрямні косинуси прямолінійної твірної знайдемо диференціюванням рівнянь (4.19). Отриманий таким чином вектор є одиничним, оскільки крива описана у функції довжини дуги s . Параметричні рівняння торса запишуться:

$$\begin{aligned}
 X &= \int \cos \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right) \cos \beta ds + u \cos \beta \cos \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right); \\
 Y &= \int \sin \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right) \cos \beta ds + u \cos \beta \sin \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right); \\
 Z &= \int \sin \beta ds + u \sin \beta,
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

де u – друга змінна поверхні – довжина прямолінійної твірної, відлік якої починається від точки на ребрі звороту.

Знайдемо першу квадратичну форму поверхні. Частинні похідні поверхні (4.21) будуть:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial s} &= (\cos \beta - u\beta' \sin \beta) \cos \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right) - u\sqrt{k^2 - \beta'^2} \sin \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right); \\ \frac{\partial Y}{\partial s} &= (\cos \beta - u\beta' \sin \beta) \sin \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right) + u\sqrt{k^2 - \beta'^2} \cos \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right); \\ \frac{\partial Z}{\partial s} &= \sin \beta + u\beta' \cos \beta.\end{aligned}\quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u} &= \cos \beta \cos \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right); \\ \frac{\partial Y}{\partial u} &= \cos \beta \sin \left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos \beta} ds \right); \\ \frac{\partial Z}{\partial u} &= \sin \beta.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Знаходимо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$\begin{aligned}E &= \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u} \right)^2 = 1; \\ F &= \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial s} + \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} + \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial Z}{\partial s} = 1; \\ G &= \left(\frac{\partial X}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial s} \right)^2 = 1 + u^2 k^2.\end{aligned}\quad (4.34)$$

Перша квадратична форма запишеться:

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fduds + Gds^2 = du^2 + 2duds + (1 + u^2 k^2) ds^2. \quad (4.35)$$

До квадратичної форми (4.35) не входить залежність $\beta = \beta(s)$. Це означає, що при будь-якій залежності $\beta = \beta(s)$ рівняння (4.21) описують згинання одного і того ж торса. При цьому залежність $k = k(s)$ залишається незмінною, тобто незмінною залишається кривина ребра звороту в залежності від довжини дуги.

Розглянемо приклади на побудову неперервного згинання деяких розгортних поверхонь (торсів).

Приклад 1. Розглянемо найпростіший випадок – $k=const$ і $\beta=const$. Згідно рівнянь (4.21) після інтегрування отримуємо параметричні рівняння торса-гелікоїда в кінцевому вигляді:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\cos \beta}{k} \sin \frac{ks}{\cos \beta} + u \cos \frac{ks}{\cos \beta}; \\ Y &= -\frac{\cos \beta}{k} \cos \frac{ks}{\cos \beta} + u \sin \frac{ks}{\cos \beta}; \\ Z &= s \sin \beta + u \sin \beta. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Зважаючи на те, що кривина гвинтової лінії стала, як і кривої на рис. 4.7, то ці криві можуть бути ребром звороту двох торсів, які згинаються один на одного при умові, що кривини рівні. На рис. 4.8 побудовані торси-гелікоїди за рівняннями (4.36) для різних кутів підйому ребра звороту при його довжині 15 лінійних одиниць. При $\beta=0$ рівняння (4.36) описують розгортку.

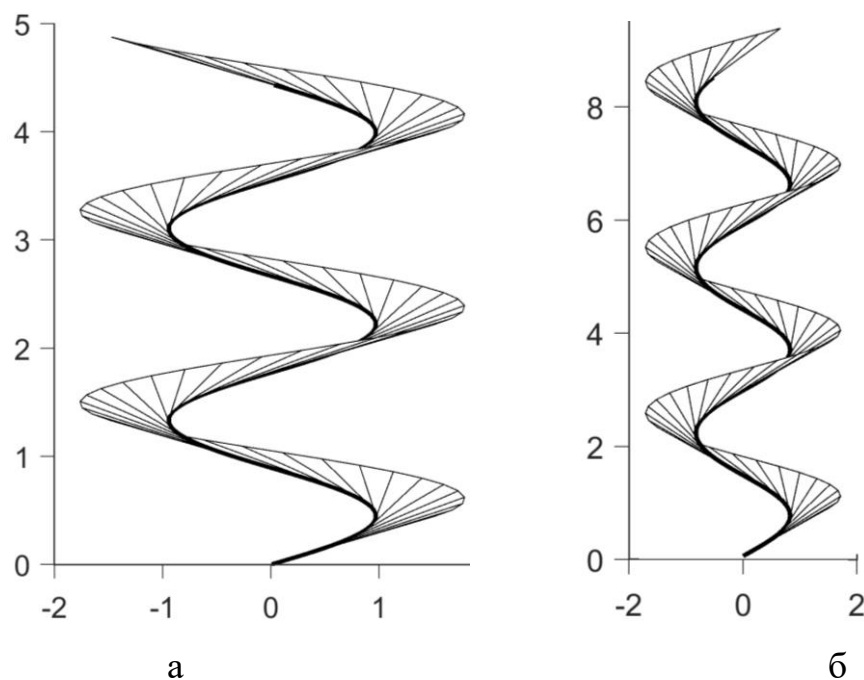


Рисунок 4.8 – Фронтальні проекції торсів гелікоїдів, які згинаються один на одного, при зміні кута підйому ребра звороту: а) кут підйому $\beta=17^\circ$;
б) кут підйому $\beta=34^\circ$

Приклад 2. Побудуємо торс, для якого ребром звороту є крива сталої кривини із лінійним законом зростання кута підйому (рис. 4.7). Для його побудови необхідно застосовувати чисельні методи, з допомогою яких за рівняннями (4.20) будується ребро звороту. На рис. 4.9 побудовані торси для різних значень сталої a , яка впливає на інтенсивність зміни кута β .

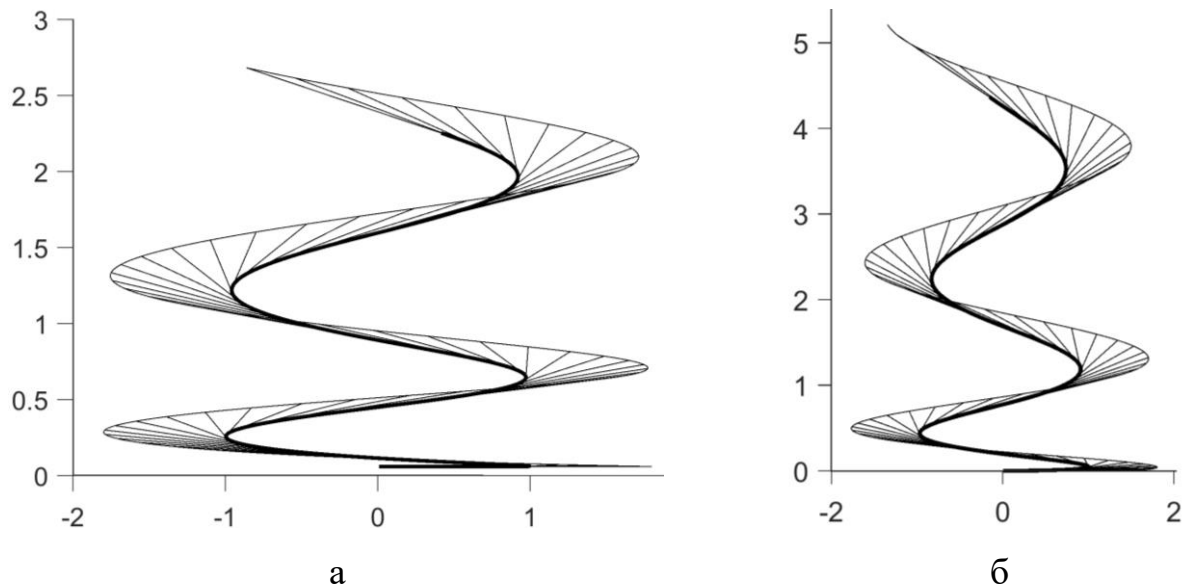


Рисунок 4.9 – Фронтальні проекції торсів, які згинаються один на одного, із лінійним зростанням кута підйому ребра звороту: а) $\beta=0,02s$; б) $\beta=0,04s$

При довжині ребра звороту 15 лінійних одиниць кут підйому β у верхній точці становить 0,3 рад. (рис. 4.9,а) і 0,6 рад. (рис. 4.9,б), тобто 17° і 34° . Всі зображені торси можуть бути зігнуті один на одного, оскільки кривина їх ребер звороту стала і рівна. Процес згинання в першому випадку (рис. 4.8) і в другому (рис. 4.9) носить різний характер. Для першого випадку згинання торса відбувається одночасно по всій поверхні з однаковою інтенсивністю, а в другому – поступово. Торс, зображений на рис. 4.8,а, може бути продовженням торса, зображеного на рис. 4.9,а. Кут підйому, який зростає від нуля до 17° (рис. 4.9,а), далі буде сталий (рис. 4.8,а). Те ж само стосується торсів на рис. 4.8,б і 4.9,б.

Приклад 3. Розглянемо приклад, коли кривина і кут підйому ребра звороту є змінними величинами. Вони вибрані таким чином, щоб рівняння (4.21)

можна було повністю проінтегрувати. Залежності $k=k(s)$ і $\beta=\beta(s)$ мають наступний вигляд:

$$k = \frac{\sqrt{1+a^2}}{1+a^2s^2}; \quad \beta = \text{Arctg}(as). \quad (4.37)$$

Крива, задана натуральними рівняннями (4.37), розташована на циліндрі одиничного радіуса. Підстановка цих рівнянь з урахуванням похідної виразу кута β в рівняння (4.21) приводить до наступного результату:

$$\begin{aligned} X &= \sin\left(\frac{\text{Arc sinh } as}{a}\right) + \frac{u}{\sqrt{1+a^2s^2}} \cos\left(\frac{\text{Arc sinh } as}{a}\right); \\ Y &= \cos\left(\frac{\text{Arc sinh } as}{a}\right) - \frac{u}{\sqrt{1+a^2s^2}} \sin\left(\frac{\text{Arc sinh } as}{a}\right); \\ Z &= \frac{\sqrt{1+a^2s^2}}{a} + \frac{uas}{\sqrt{1+a^2s^2}}. \end{aligned} \quad \dots\dots(4.38)$$

На рис. 4.10 за рівняннями (4.38) побудовані торси при різних значеннях сталої a .

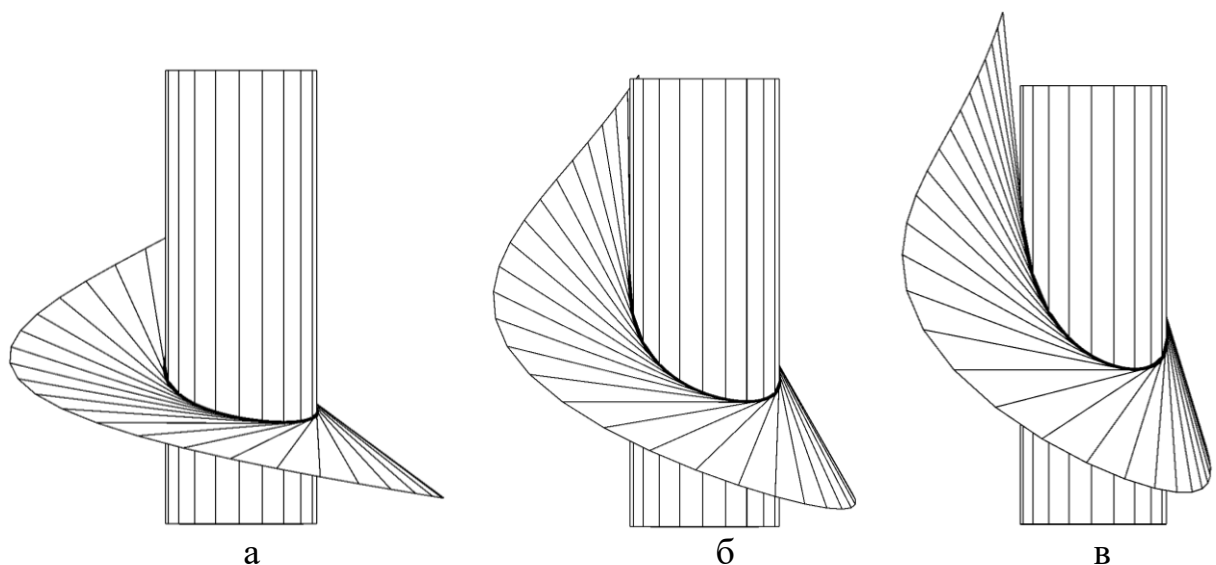


Рисунок 4.10 – Фронтальні проєкції торсів з ребром звороту на циліндрі, побудовані за параметричними рівняннями (4.38): а) $a=0,3$; б) $a=0,6$; в) $a=0,9$

При згинанні торса, ребро звороту якого задане натуральними рівняннями (4.37), деформується, залишаючись на поверхні циліндра. Якщо задати іншу закономірність зміни кута підйому, то воно буде деформуватися по іншому.

4.1.3. Вирізання гвинтоподібного ножа із поверхні торса-гелікоїда

В підрозділі 2.3 розглядався гвинтоподібний ніж із гвинтової нерозгортної поверхні і було зроблено розрахунок наближеної розгортки. Якщо гвинтоподібний ніж виготовляти із розгортної поверхні, то розгортку можна будувати точно. На рис. 4.4 виділена смуга торса-гелікоїда, яка при збільшенні кроку може бути прийнята за гвинтоподібний ніж. Прямолінійні твірні виділеної смуги за її межами дотикаються до гвинтової лінії на циліндрі радіуса ρ – ребра звороту (рис. 4.4,б). Поперечним перерізом ножа із нерозгортної гвинтової поверхні є відрізок прямої (рис. 2.8,в, рис. 2.10,а). Поперечним перерізом торса-гелікоїда є відома крива – евольвента кола. Рівняння торса-гелікоїда можуть бути різними. Наприклад, в (4.36) до них входить кривина k ребра звороту і однією із двох незалежних змінних є довжина s його дуги. Для нас кривина ребра звороту є невідомою величиною, яку потрібно знайти. Тому рівняння торса-гелікоїда запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} X &= a \cos \alpha + u \cos \beta \sin \alpha; \\ Y &= a \sin \alpha - u \cos \beta \cos \alpha; \\ Z &= a \alpha \operatorname{tg} \beta - u \sin \beta, \end{aligned} \quad (4.39)$$

де α і u – незалежні змінні поверхні, причому;

α – кут повороту точки навколо осі при її русі по ребрі звороту,

u – довжина прямолінійної твірної, відлік якої починається від точки на ребрі звороту;

a – радіус циліндра, на якому розташоване ребро звороту;

β – кут підйому ребра звороту.

На рис. 4.11 за рівняннями (4.39) побудовано відсік розгортного гелікоїда, який при належних параметрах буде гвинтоподібним ножем. При цьому прийнято спрощення, що його товщина дорівнює нулю. Також пропорції відсіку поверхні не відповідають пропорціям ножа, але при цьому зручно позначати необхідні параметри для знаходження їх зв'язку із конструктивними його параметрами.

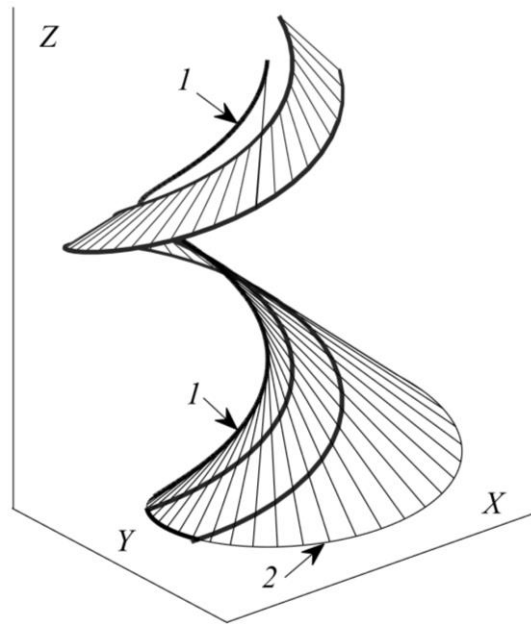


Рисунок 4.11 – Відсік торса-гелікоїда із виділеною смугою

На рис. 4.11 цифрою 1 позначено ребро звороту, а цифрою 2 – крива поперечного перерізу, тобто евольвенту кола. Щоб знайти її рівняння, потрібно задати стале значення координати $Z=Z_h$ в останньому рівнянні (4.39). Звідси знаходимо залежність $u=u(\alpha)$:

$$u = \frac{a\alpha \operatorname{tg}\beta - Z_h}{\sin \beta}. \quad (4.40)$$

При $Z_h=0$ і при підстановці (4.40) в параметричні рівняння (4.39) буде описана дуга евольвенти, що обмежує ніж по довжині внизу, а при $Z_h=L$ – вгорі. На рис. 4.11 побудовано торс-гелікоїд, у якого прямолінійні твірні дотичні до ребра звороту 1 і при зустрічі із горизонтальною площиною (тобто при $Z_h=0$) в перетині із нею дають евольвенту 2. Частина евольвенти, що стосується смуги торса (гвинтоподібного ножа), наведена потовщеною лінією. У наведених

залежностях (4.39), (4.40) радіус a і кут β стосуються ребра звороту. Їх потрібно виразити через параметри ножа.

На рис. 4.12,а показано вигляд зверху розгортного гелікоїда, який зображено на рис. 2,б. Результатом поперечного його перерізу є евольвента 2, яка в межах відсіку між радіусами R і r наведена потовщеною лінією.

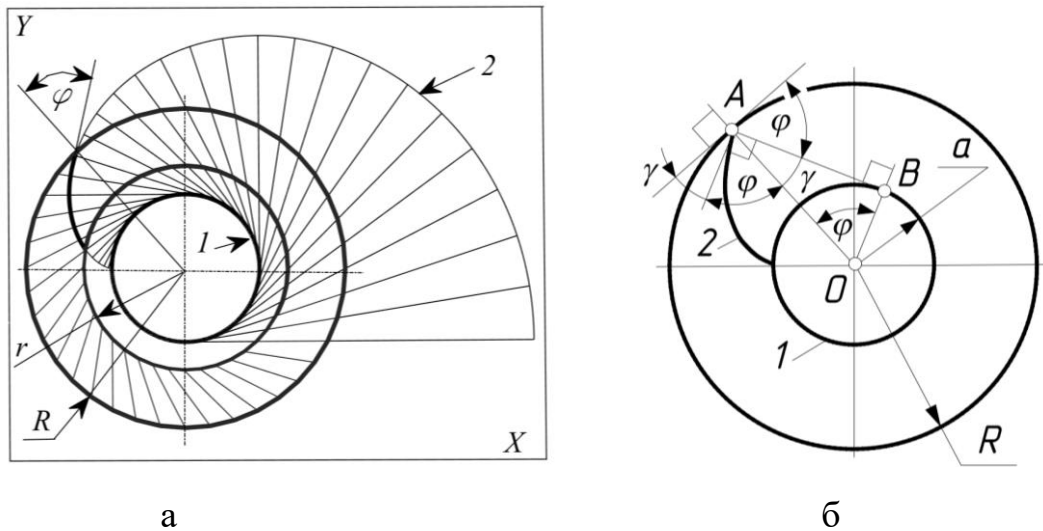


Рисунок 4.12. Вигляд зверху торса-гелікоїда, зображеного на рис. 4.11:

а) виділена смуга розгортного гелікоїда та його поперечний переріз, яким є наведена в межах смуги евольвента кола; б) позначення необхідних параметрів ножа на поперечному перерізі торса-гелікоїда

На рис. 4.12,а показано кут φ між радіальним напрямом і дотичною до евольвенти в точці леза. Він відповідає аналогічним кутам на рис. 2.8,в і 2.10,а. Оскільки у нас поперечний переріз ножа уже не прямолінійний, то нам важливо забезпечити наявність цього кута в точці леза. На рис. 4.12,б введено інші позначення, зокрема введено додатковий кут γ , щоб показати, що у прямокутному трикутнику OAB присутній кут φ . З нього знаходимо вираз радіуса a через параметри ножа:

$$a = R \cos \varphi. \quad (4.41)$$

Знайдемо вираз кута β через параметри ножа. Для цього визначимо довжину прямолінійної твірної u , яка відповідає гвинтовій лінії довільного радіуса ρ на поверхні. Відстань ρ від точки на цій гвинтовій лінії до осі гелікоїда визначається наступним чином:

$$\rho^2 = X^2 + Y^2 = a^2 + u^2 \cos^2 \beta, \quad \text{звідки} \quad u = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\cos \beta} \quad (4.42)$$

При $\rho=R$ із (4.42) отримаємо вираз u для гвинтової лінії – леза ножа. Підставимо значення a із (4.41) і значення u із (4.42) із врахуванням $\rho=R$ в параметричні рівняння (4.39) поверхні і отримаємо рівняння гвинтової лінії – леза ножа:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi \cos \alpha + R \sin \varphi \sin \alpha; \\ y &= R \cos \varphi \sin \alpha - R \sin \varphi \cos \alpha; \\ z &= R \alpha \cos \varphi \operatorname{tg} \beta - R \sin \varphi \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Дотична до гвинтової лінії (4.43) складає із віссю поверхні (тобто із віссю Z) кут τ (рис. 2.8,б). Його можна записати, як кут між вектором дотичної до гвинтової лінії (4.43) і віссю Z . Знайшовши похідні рівнянь (4.43), за відомою формулою отримуємо вираз цього кута:

$$\cos \tau = \frac{\cos \varphi \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \beta}}, \quad \text{звідки} \quad \beta = \operatorname{Arctg} \frac{\cos \tau}{\cos \varphi \sin \tau} \quad (4.44)$$

В рівняннях розгортного гелікоїда (4.39) сталі a і β мають вираження через конструктивні параметри ножа згідно (4.41) і (4.44). Проміжок, в яких набувають значень змінні α і u , буде розглянуто на конкретному прикладі.

Підставимо в другу формулу (4.42) вираз a із (4.41) і β із (4.44) і після перетворень отримаємо:

$$u = \frac{\sqrt{(\rho^2 - R^2 \cos^2 \varphi)(\cos^2 \varphi \sin^2 \tau + \cos^2 \tau)}}{\cos \varphi \sin \tau}. \quad (4.45)$$

Задамо параметри ножа такі ж, як і в підрозділі 2.3: $R=0,25$ м, $\tau=20^\circ$, $\varphi=65^\circ$. Підстановка наведених даних у формулу (4.45) дає можливість отримати значення u для заданого значення радіуса ρ . Наприклад, при $\rho=R$, що відповідає лезу ножа, маємо $u=1,49$ м. При $u=0$ рівняння (4.39) опишуть ще одну гвинтову лінію – ребро звороту. Цим значенням відповідатиме максимально можлива ширина ножа у вигляді довжини дуги евольвенти кола (поперечного перерізу ножа), яка розташована між відповідними колами (рис. 4.12,б). Обмежимо ширину ножа внутрішньою гвинтовою лінією, яка відповідає радіусу $\rho=r=0,2$ м. Якщо це значення підставити у формулу (4.45), то одержимо $u=1,12$ м. Отже параметр u буде змінюватися в межах $u=1,12\dots1,49$. Отриманий відсік розгортного гелікоїда буде розташовуватися між одновісними циліндрами радіусів 0,2 м і 0,25 м.

Межі зміни кута α залежать від довжини ножа, яка в свою чергу залежить від їх кількості на барабані. Як зазначалося в розділі 2.3, навантаження на барабан повинне бути збалансоване. Звідси було знайдено кут повороту α для одного ножа: $\alpha=2\pi/n$, де n – число ножів. Виходячи із цього, в розділі 2.3 при $n=6$ було отримано: $Z=L=0,72$ м.

При побудові відсіку поверхні (4.39), який відповідає контурам ножа, зміну параметрів u і α можна брати в більших межах і з отриманої поверхні вирізати потрібний відсік. На рис. 4.13 побудована поверхня розгортного гелікоїда із лініями, що вирізають на ній потрібний відсік. Цифрами 1 і 2 позначені евольвенти, що обмежують ніж по довжині. Вони побудовані при підстановці виразу (4.40) в рівняння поверхні (4.39).

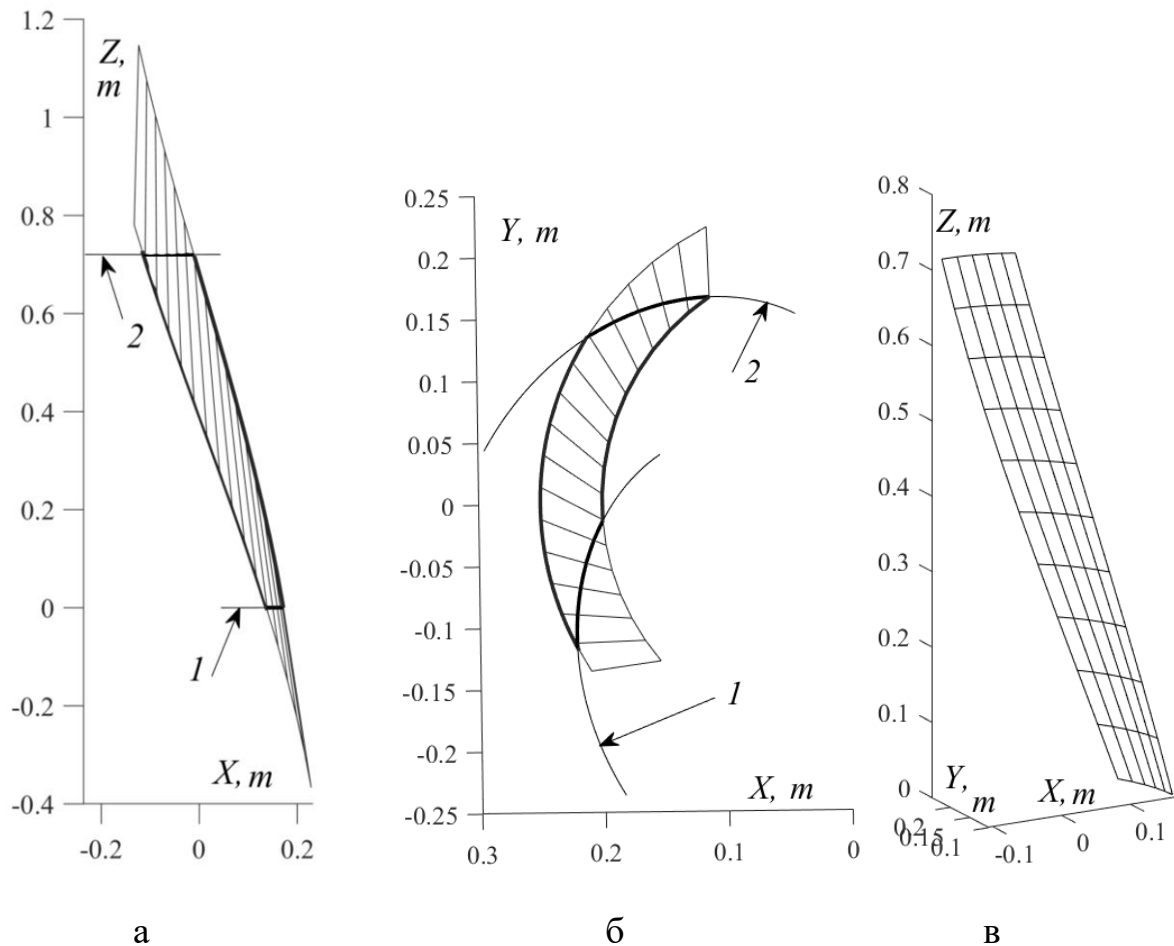


Рисунок 4.13 – Проекції відсіку розгортного гелікоїда (1 – дуга евольвенти кола при $Z=0$, 2 – при $Z=L$): а) фронтальна проекція; б) горизонтальна проекція; в) аксонометрія відсіку, у якого твірною кривою є дуга евольвенти кола

За аналогом із відсіком відкритого гелікоїда (рис. 2.10,а), який утворений гвинтовим рухом горизонтальної прямолінійної твірної, відсік розгортного гелікоїда теж можна так утворити. При цьому замість прямолінійної твірної має бути дуга евольвенти кола, площа якої при гвинтовому русі залишається паралельною до горизонтальної площини проєкцій. Смуга (відсік поверхні) при такому способі утворення побудований на рис. 4.13,в. При цьому обертальний рух дуги евольвенти навколо осі гелікоїда і поступальний її рух вздовж осі мають бути узгоджені.

На рис. 4.13,а на поверхні окреслені контури ножа двома евольвентами і двома гвинтовими лініями. Внутрішнє рівняння евольвенти задано залежністю

(4.40). При його підстановці у (4.39) отримуємо нижню (при $Z_h=0$) і верхню (при $Z_h=L$) евольвенти кола на поверхні торса-гелікоїда. Межі зміни незалежної змінної α беремо із запасом так, щоб евольвенти виходили за межі контурів ножа. Внутрішнім рівнянням гвинтових ліній є залежність (4.45), яка при $\rho=R$ описує зовнішню крайку (лезо), а при $\rho=r$ – внутрішню крайку (гвинтову лінію).

Для визначення контурів ножа на розгортці потрібно мати параметричні рівняння розгортки торса-гелікоїда. При підстановці у ці рівняння внутрішніх рівнянь (4.40) і (4.45) при тих же межах зміни незалежної α отримаємо відповідні криві на розгортці, які будуть окреслювати на ній контури ножа. При цьому параметричні рівняння розгортки не обов'язково шукати серед множини неперервного згинання поверхні, як це було зроблено в підрозділі 4.1.1. Достатньо відразу знайти їх на площині.

Розгортку доцільно знаходити, починаючи із деформованого ребра звороту після згинання торса на площину. Після такого згинання кривина ребра звороту торса-гелікоїда зменшується і на розгортці воно перетворюється в дугу кола радіуса ρ_o (рис. 4.5). На основі незмінності кривини ребра звороту згідно (4.2) запишемо:

$$\frac{\rho}{\rho^2 + h^2} = \frac{1}{\rho_o}, \quad (4.46)$$

де для нашого випадку $\rho=a$.

З іншої сторони, крок h зв'язаний із радіусом a і кутом β ребра звороту залежністю: $h=a \cdot \operatorname{tg} \beta$. Після підстановки цих значень у (4.46) знаходимо: $\rho_o=a/\cos^2 \beta$. Це і буде радіусом дуги кола – ребра звороту на розгортці. З іншої сторони довжина дуги ребра звороту в просторі і на площині не змінюється. В рівняннях (4.39) перші доданки – це параметричні рівняння ребра звороту. За відомою формулою знаходимо його довжину s : $s=a \cdot \alpha/\cos \beta$. На площині ребро звороту перетворюється у дугу кола радіуса $\rho_o=a/\cos^2 \beta$. Довжина дуги кола вимірюється добутком радіуса на центральний кут, який позначимо α_o . Отже,

$s_o = a \cdot \alpha_o / \cos^2 \beta$. Прирівнявши ці довжини між собою, знаходимо зв'язок між кутами α і α_o : $\alpha_o = \alpha \cdot \cos \beta$. Таким чином, рівняння ребра звороту на розгортці запишуться:

$$\begin{aligned} x_0 &= \rho_0 \cos \alpha_0 = \frac{a}{\cos^2 \beta} \cos(\alpha \cos \beta); \\ y_0 &= \rho_0 \sin \alpha_0 = \frac{a}{\cos^2 \beta} \sin(\alpha \cos \beta). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Розгортка торса-гелікоїда утворюється множиною прямолінійних твірних, дотичних до кола (4.47). Одиничний напрямний вектор дотичної знаходимо диференціюванням рівнянь (4.47) із наступним визначенням напрямних косинусів. Після цього параметричні рівняння розгортки торса-гелікоїда (4.39) запишуться:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{a}{\cos^2 \beta} \cos(\alpha \cos \beta) + u \sin(\alpha \cos \beta); \\ Y_0 &= \frac{a}{\cos^2 \beta} \sin(\alpha \cos \beta) - u \cos(\alpha \cos \beta). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Пересвідчитися, що параметричні рівняння (4.39) і (4.48) описують одну і ту ж гвинтову поверхню розгортного гелікоїда в просторі і на площині, можна знаходженням першої квадратичної форми цих рівнянь. Пара числових значень координат α і u визначає точку на поверхні в просторі за рівняннями (4.39) і відповідну точку на розгортці за рівняннями (4.48). Залежність $u = u(\alpha)$, яка є внутрішнім рівнянням лінії, при підстановці у параметричні рівняння (4.39) описує лінію на поверхні у просторі, а при підстановці у рівняння (4.48) – відповідну лінію на розгортці. Наприклад, при підстановці (4.40) у (4.48) при $Z_h = L$ отримаємо евольвенту 1 (рис. 4.14,а), а при $Z_h = 0$ – евольвенту 2. Відповідно при підстановці виразу (4.45) (в даному випадку це стала величина) у

(4.48) отримаємо криву леза ножа 3 при $\rho=R=0,25$ м і протилежну криву при $\rho=0,2$ м.

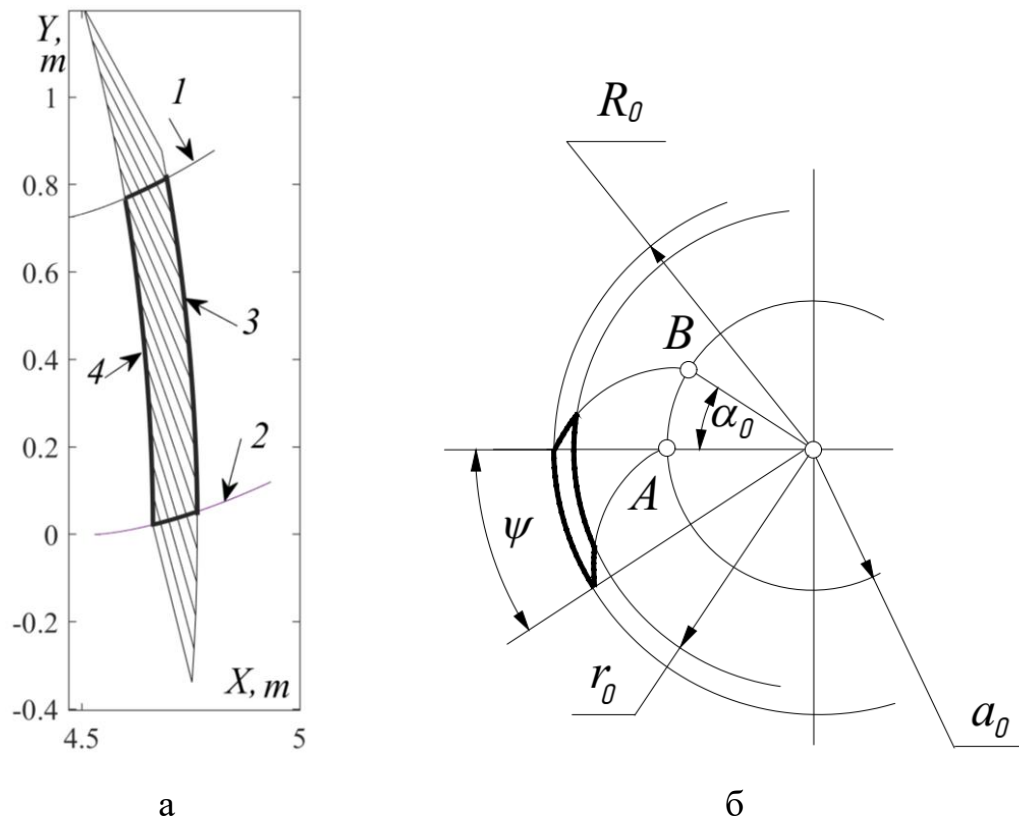


Рисунок 4.14 – Розгортка ножа: а) побудована за рівняннями (4.48) при підстановці в них внутрішніх рівнянь контурних ліній; б) побудована за рівнянням (4.50), як відсік між двома концентричними колами

Розгортку ножа можна побудувати простіше. Його лезо на розгортці і протилежна крива перетворюються в дуги кіл. Радіуси цих кіл можна знайти наступним чином. Знайдемо відстань від початку координат до довільної точки на розгортці (4.48) за формулою:

$$\rho_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} = \frac{\sqrt{a^2 + u^2 \cos^4 \beta}}{\cos^2 \beta}. \quad (4.49)$$

Всі величини, що входять до виразу (4.49), є сталими, отже відстань ρ_0 є сталою, тобто відповідною кривою буде коло. Підставимо у формулу (4.49)

вирази, що до неї входять, із (4.41), (4.44), (4.45) і отримаємо вираз для ρ_o через конструктивні параметри ножа:

$$\rho_o = \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{(\rho^2 + R^2 \operatorname{ctg}^2 \tau)(\cos^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 \tau)}. \quad (4.50)$$

При $\rho=R=0,25$ м формула (4.50) дає радіус R_o дуги кола, яким окреслено лезо на розгортці, а при $\rho=0,2$ м – радіус r_o (рис. 4.14,а). При заданих параметрах ножа отримуємо: $R_o=4,8$ м, $\rho_o=4,7$ м. За отриманими розмірами можна побудувати два концентричних кола (рис. 4.14,б).

Щоб знайти межі відсіку між концентричними колами, можна поступити наступним чином. При підстановці в (4.50) значення $\rho=a$ отримаємо радіус a_o кола, в яке перетворюється ребро звороту на розгортці. Його довжина s , в межах довжини ножа L , є однаковою в просторі і на розгортці. В просторі вона знаходиться через кут підйому β : $s=L/\sin \beta$. На розгортці вона відповідає дузі AB (рис. 4.14,б) і знаходиться через кут α_o : $s=a_o \cdot \alpha_o$. Звідси знаходимо центральний кут α_o для дуги AB : $\alpha_o=L/(a_o \cdot \sin \beta)$. Перейшовши до конструктивних параметрів ножа, отримуємо наступний вираз:

$$\alpha_o = \frac{L \cos \varphi \sin^2 \tau}{R \cos \tau \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^2 \tau + \cos^2 \tau}}. \quad (4.51)$$

За відомим значенням кута α_o згідно (4.51) можна відкласти дугу AB на колі радіуса a_o . З точок A і B проводимо евольвенти до цього кола, які в перетині із колами радіусів r_o і R_o вирізають із кільця розгортку ножа. Аналогічно до кута α_o можна знайти кут ψ : $\psi=L/(R_o \cdot \cos \tau)$. При переході до конструктивних параметрів ножа отримуємо формулу, яка точно збігається із формулою (4.51), тобто $\psi=\alpha_o$. Це означає, що лезо ножа спирається на такий же центральний кут, як і дуга AB . Для заданих конструктивних параметрів ножа цей кут становить $\psi=\alpha_o=0,16$ рад. або 9° . Отриманий результат суттєво відрізняється від розмірів наближеної розгортки, отриманої в підрозділі 2.3. Якщо радіус R_o леза на

розгортці для нерозгортної поверхні становить 9,55 м, то для розгортної – 4.8 м, тобто у два рази менше. Відповідно у два рази відрізняються кути: 0,08 рад. і 0,16 рад. У обох випадках довжина леза на розгортці однакова: 0,764 м і 0,768 м при довжині леза ножа 0,766 м.

4.2. Аналітичний опис неперервного згинання відсіку нерозгортної поверхні

Нерозгортні поверхні теж допускають неперервне згинання, причому згинання може відбуватися із збереженням прямолінійних твірних, подібно розгортним. Це стосується лінійчатих поверхонь, які при неперервному згинанні залишаються лінійчатыми. Застосування такого згинання прямого відкритого гелікоїда розглянуто в роботі для побудови наближеної розгортки. З такою ж метою розглянуто неперервне згинання гвинтового коноїда (шнека), який тільки у вихідному положенні є лінійчатою поверхнею, а у проміжних положеннях при згинанні – нелінійчатыми поверхнями.

4.2.1. Побудова наближеної розгортки витка прямого відкритого гелікоїда за допомогою його неперервного згинання

В техніці дуже поширеною гвинтовою поверхнею є прямий закритий гелікоїд, відомий під назвою шнек. Його утворення відбувається гвинтовим рухом горизонтального відрізка вгору таким чином, що один його кінець перетинає вертикальну пряму – вісь шнека. Для відкритого гелікоїда утворення його поверхні подібне. Відмінність полягає в тому, що відрізок є мимобіжним по відношенню до осі і знаходиться на сталій відстані від неї. Чим менша ця відстань, тим менша різниця між поверхнями. В обох випадках прямолінійні твірні перпендикулярні до осі. Найбільш точно отримати поверхню витка відкритого гелікоїда можна за допомогою штамповки плоскої заготовки. Малосерійне виготовлення гвинтової поверхні гелікоїда в умовах майстерні

практикується розтягуванням зварених між собою плоских кілець вздовж вала. Для цього потрібно мати розміри кільця в залежності від конструктивних параметрів поверхні.

Форма поверхні прямого відкритого гелікоїда дуже подібна до форми шнека. Проекції одного витка відкритого гелікоїда із циліндричним валом зображено на рис. 4.15. Відмінність полягає в тому, що прямолінійні твірні поверхні відкритого гелікоїда не перетинають його осі, як у поверхні шнека, а проходять біля неї на певній відстані a . На горизонтальній проекції ці твірні є дотичними до кола радіуса a (рис. 4.15,б). Всі три кола (радіусів a , r – внутрішньої крайки поверхні, тобто вала, R – зовнішньої крайки поверхні) є проекціями гвинтових ліній.

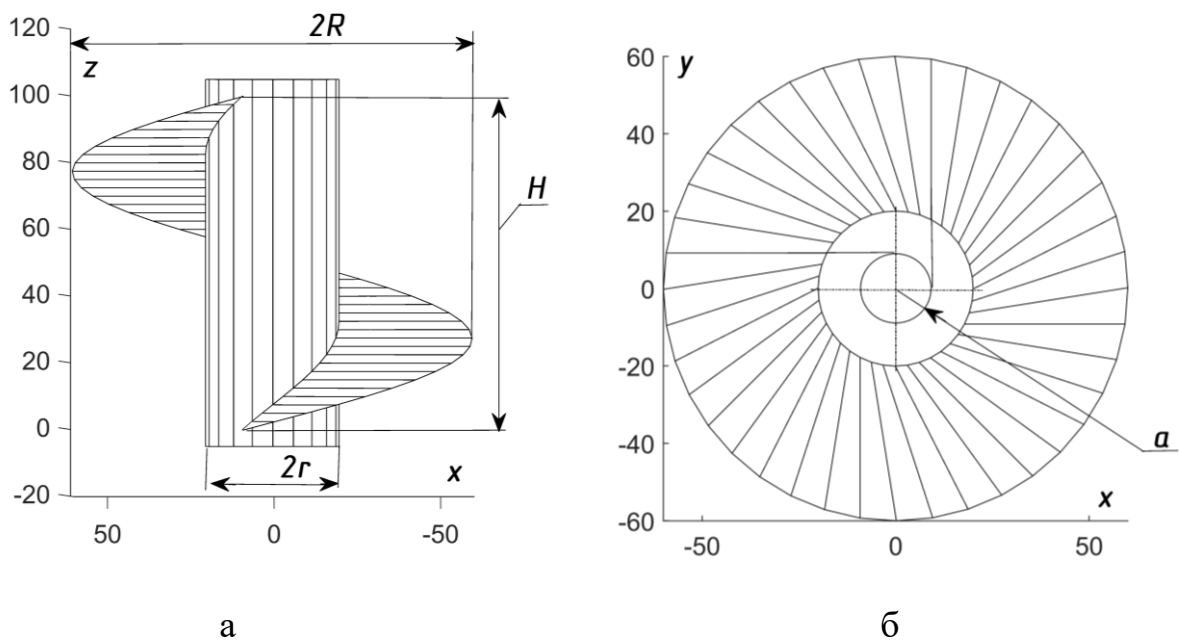


Рисунок 4.15 – Проекції витка прямого відкритого гелікоїда: а) фронтальна проекція; б) горизонтальна проекція

Для відкритого гелікоїда, на відміну від закритого, вал має обмеження по мінімальному значенню діаметра – його радіус не може бути меншим значення a , оскільки там поверхні не існує (рис. 4.15,б).

Для побудови розгортки шнека, як дуже поширеної поверхні у техніці, існує довідкова література. Для закритого гелікоїда такі дані відсутні, тому

побудову наближеної розгортки будемо здійснювати, спираючись на відомості із диференціальної геометрії, а саме на той факт, що будь-яку гвинтову поверхню можна зігнути в поверхню обертання. Отже, виток відкритого гелікоїда потрібно зігнути у відповідний відсік поверхні обертання, який можна буде апроксимувати конусом. Для конуса, як для розгортної поверхні, можна побудувати точну розгортку, яка для витка відкритого гелікоїда буде наближеною. В праці [74] здійснено неперервне згинання однопорожнинного гіперболоїда згинання в косий закритий гелікоїд. Серед множини проміжних згинань є прямий відкритий гелікоїд. Нижче наведені параметричні рівняння неперервного згинання поверхні із праці [74] для випадку, коли початковим станом є поверхня прямого відкритого гелікоїда, а кінцевим – поверхня однопорожнинного гіперболоїда обертання:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{a \cos p\gamma \cos(p\gamma - \gamma)}{\cos \gamma} \cos\left(\frac{\cos \gamma}{a \cos(p\gamma - \gamma)} s\right) - \\
 &\quad - u \cos(p\gamma - \gamma) \sin\left(\frac{\cos \gamma}{a \cos(p\gamma - \gamma)} s\right); \\
 Y &= \frac{a \cos p\gamma \cos(p\gamma - \gamma)}{\cos \gamma} \sin\left(\frac{\cos \gamma}{a \cos(p\gamma - \gamma)} s\right) + \\
 &\quad + u \cos(p\gamma - \gamma) \cos\left(\frac{\cos \gamma}{a \cos(p\gamma - \gamma)} s\right); \\
 Z &= s \sin p\gamma + u \sin(p\gamma - \gamma).
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

В рівняннях (4.52) незалежними змінними є s – довжина дуги гвинтової лінії, розташованої на циліндрі радіуса a і u – довжина прямолінійної твірної поверхні, відлік якої починається від цієї гвинтової лінії. Дві інших величини стали: γ – кут підйому зазначеної гвинтової лінії; p – параметр згинання, який може приймати значення в межах від 1 (початкове положення поверхні) до 0 (кінцеве положення поверхні). Для вибору потрібного відсіку для згинання потрібно задати значення постійних та межі зміни незалежних змінних s і u . При

$u=0$ рівняння (4.52) опишуть гвинтову лінію, яка в початковому положенні розташована на циліндрі радіуса a і яка є напрямною для утворення поверхні. Знайдемо межі зміни довжини дуги s . Щоб отримати один виток поверхні, точка на гвинтовій лінії повинна зробити один повний оберт, тобто 2π . Вираз у круглих дужках тригонометричних функцій $\frac{s \cos \gamma}{a \cos(p\gamma - \gamma)} = \alpha$ є значенням кута повороту. Прирівнявши його до 2π , отримаємо:

$$s = \frac{2\pi a}{\cos \gamma} \quad (4.53)$$

Отже, s має змінюватися в межах $s=0 \dots 2\pi a / \cos \gamma$. Знайдемо значення сталої a . При повороті точки гвинтової лінії на кут 2π , що відповідає значенню дуги s (4.53), її координата Z повинна бути рівною кроку H . З останнього рівняння (4.52) при $u=0$ і $p=1$, що відповідає гвинтовій лінії до початку згинання, запишемо:

$$H = s \sin \gamma = \frac{2\pi a}{\cos \gamma} \sin \gamma, \quad \text{звідки} \quad a = \frac{H \cos \gamma}{2\pi \sin \gamma} \quad (4.54)$$

Знайдемо межі зміни відстані u . При $u=0$ рівняння (4.52) описують напрямну гвинтову лінію на циліндрі радіуса a . При $u=\rho=\text{const}$, будуть описані інші гвинтові лінії, в тому числі і ті, що обмежують відсік, при $\rho=r$ і $\rho=R$ (рис. 4.15,а). Відстань ρ (тобто відстань від осі поверхні до точки на цій поверхні) можна знайти із виразу:

$$\rho^2 = X^2 + Y^2 = \frac{\cos^2(p\gamma - \gamma)}{\cos^2 \gamma} (a^2 \cos^2 p\gamma + u^2 \cos^2 \gamma). \quad (4.55)$$

Розв'язавши рівняння (4.55) відносно u , ми зможемо знайти його значення для заданої величини ρ . Радіуси r і R , які обмежують відсік гелікоїда, ми задаємо у початковому положенні, тобто до згинання поверхні. Цьому положенню відповідає значення $p=1$. Це значення p підставимо в (4.55) і розв'яжемо відносно u :

$$u = \sqrt{\rho^2 - a^2}. \quad (4.56)$$

Кут γ є єдиною сталою величиною, яку можна вибрати із певного проміжку допустимих значень. Нехай вихідною поверхнею буде прямий відкритий гелікоїд із кроком $H=100$ і радіусами $r=20$ і $R=60$. Приймаємо $\gamma=\pi/3$. За формулою (4.54) знаходимо: $a=9,19$. Знаходимо довжину напрямної гвинтової лінії із виразу (4.53): $s=115,5$. Отже дуга s змінюється в межах $s=0...115,5$. Нарешті із формули (4.56) знаходимо межі зміни параметра u , по чергово вставляючи у неї замість ρ радіуси r і R : $u=17,8...59,3$. За цими даними за допомогою рівнянь (4.52) було побудовано початкове ($p=1$), кінцеве ($p=0$) і деякі проміжні положення поверхні при її згинанні (рис. 4.16).

Із рис. 4.16 видно, що при згинанні прямолінійні твірні залишаються прямолінійними, тобто поверхня весь час залишається лінійчатою. Слід звернути увагу, що кут повороту точки по напрямній гвинтовій лінії змінюється від 0 до 2π , що відповідає одному витку гелікоїда. В цьому можна переконатися, якщо підставити вираз (4.53) у вираз кута α при $p=1$. Якщо при цьому прийняти $p=0$, що відповідає згинанню поверхні у однопорожнинний гіперболоїд обертання, то отримаємо $\alpha=2\pi/\cos\gamma$, що відповідає куту $\alpha=4\pi$. Це означає, що отриманий гіперболоїд (рис. 4.16,г) є подвійним, тобто при його утворенні зроблено два повних оберти.

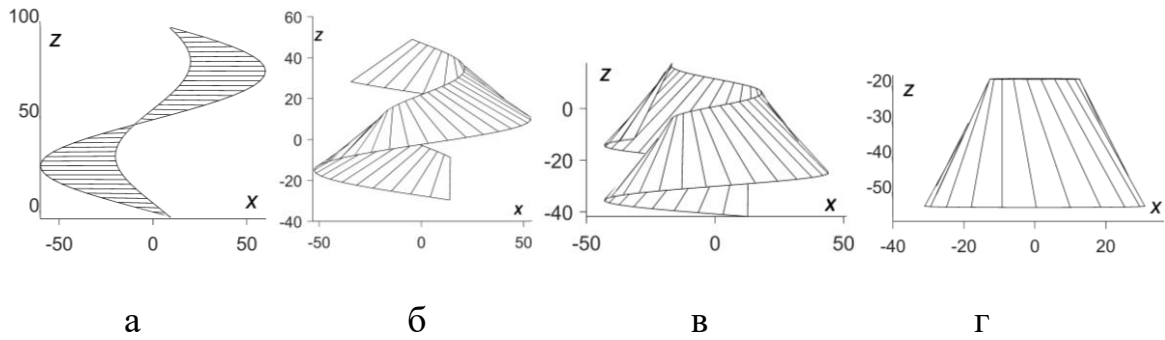


Рисунок 4.16. Фронтальні проєкції положень витка прямого відкритого гелікоїда при його згинанні в поверхню однопорожнинного гіперболоїда обертання:

а) $p=1$; б) $p=0,5$; в) $p=0,25$; г) $p=0$

Як видно із рис. 4.16,г, відсік гіперболоїда близький до поверхні зрізаного конуса. Замінімо відсік гіперболоїда зрізаним конусом і будемо шукати розгортку конуса, яку можна побудувати точно. Запишемо параметричні рівняння меридіана гіперболоїда, яким є гіпербола. Одне рівняння отримаємо із виразу (4.55) при $p=0$, а другим є останнє рівняння (4.52) теж при $p=0$. Отже параметричні рівняння меридіана гіперболоїда запишуться:

$$\rho_h = \sqrt{a^2 + u^2 \cos^2 \gamma}; \quad z_h = -u \sin \gamma. \quad (4.57)$$

На рис. 4.17,а побудовано частину меридіана, причому ділянку AB , яка побудована при знайдених межах зміни параметра u і відповідає відсіку гіперболоїда, виділено потовщеною лінією. Радіус верхньої основи відсіку гіперболоїда, отриманому при мінімальному значенні змінної u , позначено через ρ_{hA} , а нижньої, при максимальному значенні u – через ρ_{hB} . Дуга AB меридіана поверхні практично збігається із відрізком прямої, яку приймаємо за прямолінійну твірну конуса. Із рис. 4.17,а видно, що точність апроксимації гіперболоїда обертання конусом збільшується по мірі зростання радіуса ρ_{hA} , який відповідає радіусу вала r . Якщо взяти мінімальне значення радіуса вала $r=a=\rho_{hA}$, то точність апроксимації буде найгіршою.

Для побудови розгортки зрізаного конуса, який апроксимує отриману поверхню гіперболоїда обертання, необхідно мати його розміри. Для цього достатньо мати координати точок A і B (рис. 4.16,а). Відрізок AB приймаємо за прямолінійну твірну конуса. Координати точок A і B отримаємо із рівнянь (4.57), у яких для зручності перейдемо від змінної u до змінної ρ . Для цього врахуємо вирази (4.56) для u і (4.54) для a . Після їх підстановки у (4.57) отримаємо:

$$\begin{aligned}\rho_h &= \frac{\cos \gamma}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 \rho^2 + H^2}; \\ z_h &= -\frac{\cos \gamma}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 \rho^2 \operatorname{tg}^2 \gamma - H^2}.\end{aligned}\quad (4.58)$$

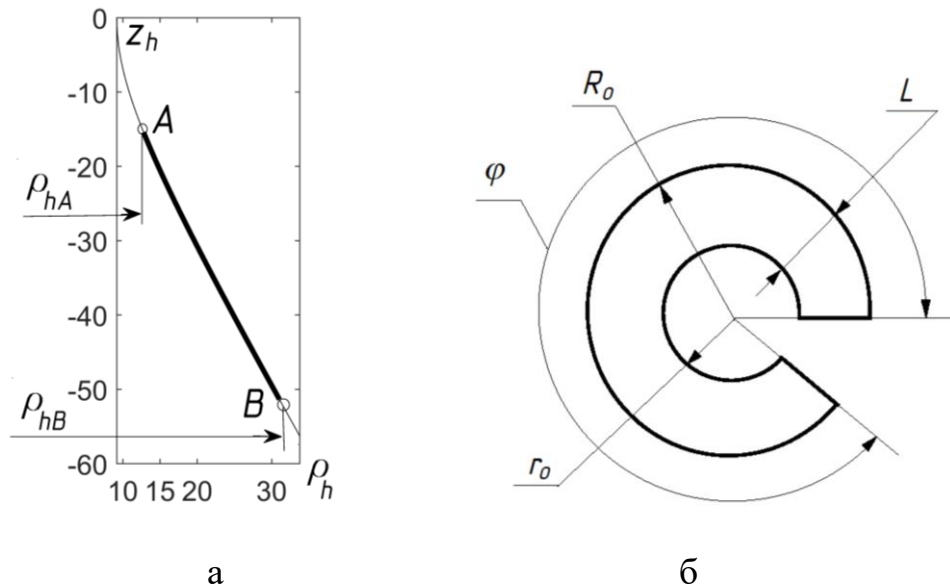


Рисунок 4.16 – Графічні ілюстрації до побудови розгортки зрізаного конуса, який апроксимує однопорожнинний гіперболоїд обертання: а) меридіан AB відсіку гіперболоїда обертання; б) розгортка зрізаного конуса, який апроксимує гіперболоїд

Вирази (4.58) дозволяють отримати координати точок A і B через задані конструктивні параметри гелікоїда. При підстановці в них $\rho=r$ отримаємо координати точки A , а при $\rho=R$ – координати точки B . Наприклад, для заданих параметрів $H=100$, $r=20$, $R=60$, $\gamma=\pi/3$ отримаємо:

- координати точки A : $\rho_{hA}=12,8$, $z_{hA}=15,4$;
- координати точки B : $\rho_{hB}=31,0$, $z_{hB}=51,4$.

За відомими координатами знаходимо довжину відрізка AB , тобто довжину прямолінійної твірної зрізаного конуса, яку позначимо через L : $AB=L=40,3$.

Відомо, що розгорткою зрізаного конуса є кільце із вирізаним сектором. Довжина прямолінійної твірної конуса L є різницею між радіусами R_0 зовнішнього і r_0 внутрішнього кіл (рис. 4.16,б). При побудові розгортки будемо виходити із того, що довжина дуги кола визначається добутком радіуса на величину центрального кута. Наприклад, довжина дуги внутрішнього кола радіуса r_0 запишеться, як добуток $\varphi \cdot r_0$ (рис. 4.16,б). З іншої сторони, на конусі ця дуга є подвійною довжиною кола радіуса ρ_{hA} , оскільки конус, відповідно до гіперболоїда, є подвійним. Відповідно, довжина дуги на подвійному конусі буде рівною $4\pi \cdot \rho_{hA}$. Аналогічно міркуємо відносно дуги зовнішнього кола, беручи до уваги, що його радіус R_0 рівний $R_0=r_0+L$. На основі цього запишемо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi r_0 = 4\pi \rho_{hA}; \\ \varphi (r_0 + L) = 4\pi \rho_{hB}. \end{cases} \quad (4.59)$$

До системи (4.59) входить дві невідомі величини: кут φ і радіус r_0 . Розв'яжемо систему (4.59) відносно вказаних величин і отримаємо:

$$r_0 = \frac{L \rho_{hA}}{\rho_{hB} - \rho_{hA}}; \quad \varphi = \frac{4\pi}{L} (\rho_{hB} - \rho_{hA}). \quad (4.60)$$

Згідно виразам (4.60) знайдемо розміри плоскої заготовки для виготовлення витка гелікоїда (наближеної розгортки): $r_0=28,3$, $\varphi=5,68$ (325°), $R_0=r_0+L=68,6$.

На вибір величини кута γ існує обмеження. Згідно другого виразу (4.54) він не може бути рівним нулю, що і так зрозуміло із його фізичної суті, оскільки він є кутом підйому гвинтової лінії. Як раніше зазначалося, $a \leq r$ (рис. 4.15,б). При

$a=r$ величина кута γ буде мінімальною. Щоб її знайти, замінимо у другому рівнянні (4.54) a на r і розв'яжемо відносно γ : $\gamma = \text{Arctg}(H/2\pi r)$. Для нашого випадку $\gamma = 38,5^\circ$. При цьому точка A (рис. 4.16,а) зміститься по кривій вгору і збігатиметься із точкою нуль, тобто при цьому дещо погіршується апроксимація конусом гіперболоїда обертання. При збільшенні кута γ зменшується радіус a , тобто відкритий гелікоїд прямує до закритого.

4.2.2. Побудова наближеної розгортки витка гвинтового коноїда за допомогою його неперервного згинання

В довідковій літературі і в мережі Інтернет можна знайти відомості, як розрахувати плоску заготовку для виготовлення із неї витка гвинтового коноїда (шнека). Там в основному наводяться розрахункові формули. Розглянемо їх отримання теоретичним шляхом. На рис. 4.17,а наведена фронтальна проекція одного витка гвинтового коноїда із кроком H і обмеженого зовнішньою і внутрішньою гвинтовими лініями, що розташовані на циліндрах радіусів R і r відповідно. На перший погляд вона подібна до проекції 4.15,а прямого відкритого гелікоїда. Однак є суттєва відмінність. У прямого відкритого гелікоїда прямолінійні твірні не перетинають вісь гвинтової поверхні, а є дотичними до співвісного циліндра (рис. 4.15,б), тоді як у гвинтового коноїда вони перетинають його вісь.

Умовна або наближена розгортка теж буде мати вигляд плоского кільця із вирізом певного сектору (рис. 4.17,б). Для її побудови будемо виходити із тих же міркувань, що і в підрозділі 2.3, тобто довжини обмежуючих гвинтових ліній на витку і довжини обмежуючих дуг кіл на розгортці мають бути рівними. Крім того, різниця радіусів $R-r$ на витку і R_o-r_o на розгортці мають бути рівними: $R-r=R_o-r_o$.

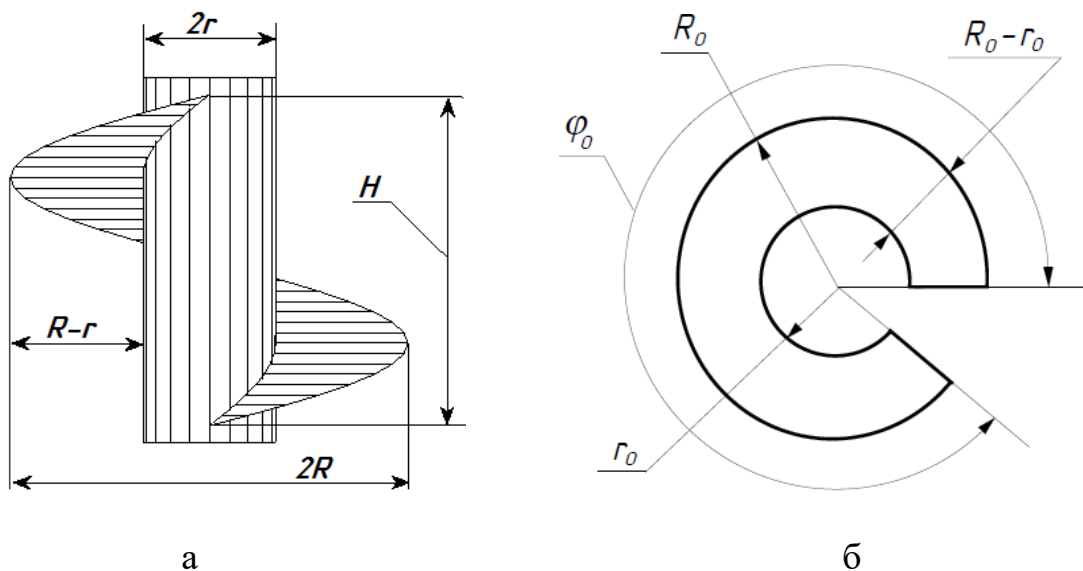


Рисунок 4.17 – Графічні ілюстрації до побудови умовної розгортки витка шнека:

а) фронтальна проекція витка із зазначеними розмірами;

б) умовна розгортка витка

Довжину гвинтової лінії зручно знаходити на розгортці циліндра, на якому вона розташована. Вона перетворюється у гіпотенузу прямокутного трикутника, одним катетом якого є крок H , а іншим – довжина кола – основи циліндра. Зважаючи на те, що $H=2\pi h$, де h – гвинтовий параметр, знайдемо довжини зовнішньої L і внутрішньої l гвинтових ліній за теоремою Піфагора:

$$L = 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}; \quad l = 2\pi\sqrt{r^2 + h^2}. \quad (4.61)$$

Довжина внутрішньої дуги l_0 обмежуючого кола кільця (рис. 4.17,б) запишеться через величину кута φ_0 :

$$l_0 = \varphi_0 r_0. \quad (4.62)$$

Аналогічно запишеться довжина зовнішньої дуги L_0 обмежуючого кола кільця плоскої заготовки, при цьому маємо на увазі, що $R_0 = r_0 + (R_0 - r_0) = r_0 + R - r$:

$$L_0 = \varphi_0 (r_0 + R - r). \quad (4.63)$$

Прирівняємо довжини дуг гвинтових ліній витка шнека і відповідних дуг кіл на його розгортці і отримаємо систему двох рівнянь із двома невідомими величинами r_o і φ_o :

$$\begin{cases} \varphi_o r_o = 2\pi\sqrt{r^2 + h^2}; \\ \varphi_o(r_o + R - r) = 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}. \end{cases} \quad (4.64)$$

Розв'язавши систему (4.64), отримаємо:

$$\begin{aligned} r_o &= \frac{r^2 + h^2 + \sqrt{(R^2 + h^2)(r^2 + h^2)}}{R + r}; \\ \varphi_o &= \frac{2\pi}{R - r} \left(\sqrt{R^2 + h^2} - \sqrt{r^2 + h^2} \right). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Розглянемо приклад. Виток шнека задано радіусами $r=20$, $R=60$, кроком $H=100$ ($h=15,9$). Згідно формул (4.65) знаходимо: $r_o=27$, $\varphi_o=5,74$ рад $=328,7^\circ$, $R_o=r_o+R-r=67$.

Тепер побудову умовної розгортки розглянемо, виходячи із теорії неперервного згинання поверхні гвинтового коноїда. Із диференціальної геометрії відомо, що гвинтовий коноїд згинається на поверхню обертання, якою є катеноїд. Це класичний приклад згинання нерозгортних поверхонь. У праці [48] наведені параметричні рівняння неперервного згинання гвинтового коноїда у катеноїд зменшенням параметра p , який представляє собою проміжний гвинтовий параметр поверхні. При $p=h$ ми маємо вихідну поверхню (гвинтовий коноїд), а при $p=0$ – поверхню обертання, якою є катеноїд. При значенні параметра p в межах $h \leq p \leq 0$ можна побудувати скільки завгодно проміжних положень поверхні при її згинанні. Параметричні рівняння неперервного згинання поверхні мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
 X &= \sqrt{u^2 + h^2 - p^2} \cos \left[\varphi - \operatorname{arctg} \frac{pu}{\sqrt{(h^2 - p^2)(u^2 + h^2)}} \right]; \\
 Y &= \sqrt{u^2 + h^2 - p^2} \sin \left[\varphi - \operatorname{arctg} \frac{pu}{\sqrt{(h^2 - p^2)(u^2 + h^2)}} \right]; \\
 Z &= \frac{\sqrt{h^2 - p^2}}{2} \ln \frac{\sqrt{u^2 + h^2} + u}{\sqrt{u^2 + h^2} - u} + p\varphi,
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

де u , φ – незалежні змінні поверхні, причому u – довжина прямолінійної твірної коноїда, відлік якої починається від його осі; φ – кут повороту, який для одного витка коноїда змінюється в межах $\varphi=0 \dots 2\pi$.

На рис. 4.16 за параметричними рівняннями (4.66) побудовані проекції гвинтового коноїда при його згинанні в катеноїд для різних значень параметра p . Змінна u набувала значень в межах $u=20 \dots 60$, що відповідає $r=20$, $R=60$ вихідної поверхні. Крок $H=100$, тобто виток вихідної поверхні відповідає тим розмірам, для яких ми перед цим розраховували умовну розгортку.

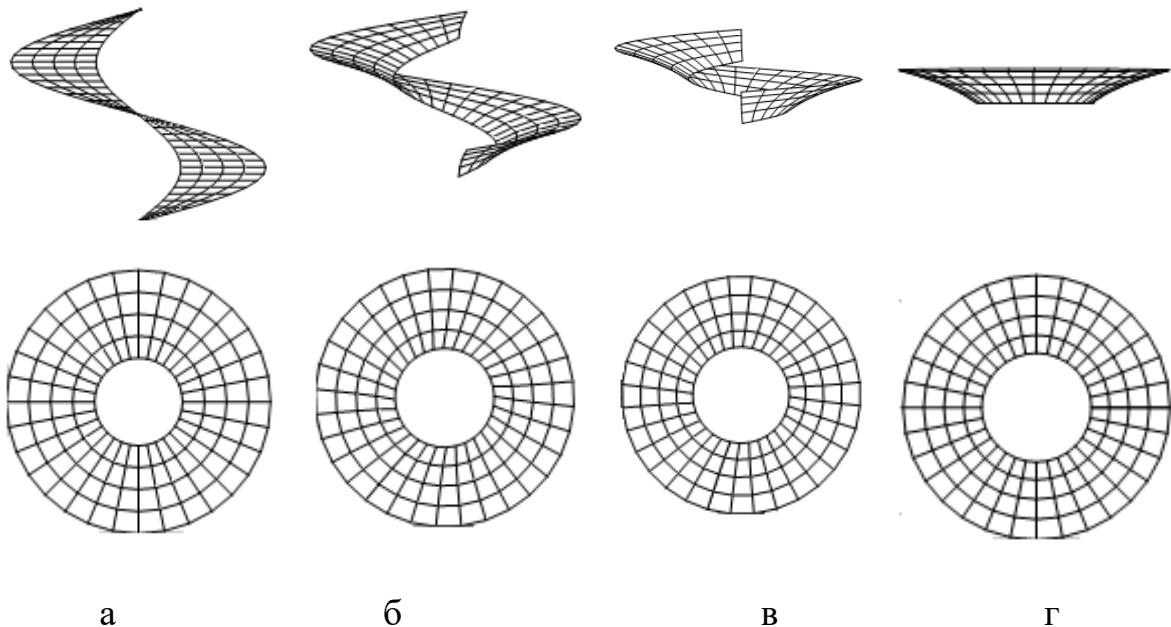


Рисунок 4.18 – Проекції окремих положень неперервного згинання гвинтового коноїда за параметричними рівняннями (4.66):

а) $p=15,9$; б) $p=10$; в) $p=5$; г) $p=0$

При поступовому (неперервному) згинанні коноїда згідно рівнянь (4.66) і зображень на рис. 4.18 можна зробити певні висновки. Гвинтовий коноїд тільки у вихідному положенні є лінійчатою поверхнею. При згинанні на поверхню обертання (катеноїд) ці прямолінійні твірні трансформуються у криві, тобто при подальшому згинанні поверхня стає нелінійчатою. І головне, що при такому згинанні кут φ залишається незмінним – він дорівнює 360° . Отже, поверхнею обертання, яку потрібно деформувати у гвинтовий коноїд, є відсік катеноїда. Для його отримання потрібно застосовувати штамповку, однак простіше штампувати відразу готовий виток гвинтового коноїда. Але відсік катеноїда можна із певною точністю замінити відсіком зрізаного конуса, що зробити набагато простіше. Виходячи із цього, можна знайти розміри цього зрізаного конуса і далі його розгортку, яка буде наближеною розгорткою витка коноїда.

На рис. 4.19 побудовано меридіан катеноїда, на який згинається гвинтовий коноїд із вказаними вище розмірами. Частина меридіана, яка відповідає відсіку гвинтового коноїда ($r=20$, $R=60$) виділено потовщеною лінією. Крайні точки цієї ділянки меридіана (ланцюгової лінії) сполучено відрізком прямої. Цей відрізок, що нахилений під кутом β до осі $O\rho$, є твірною апроксимованого конуса.

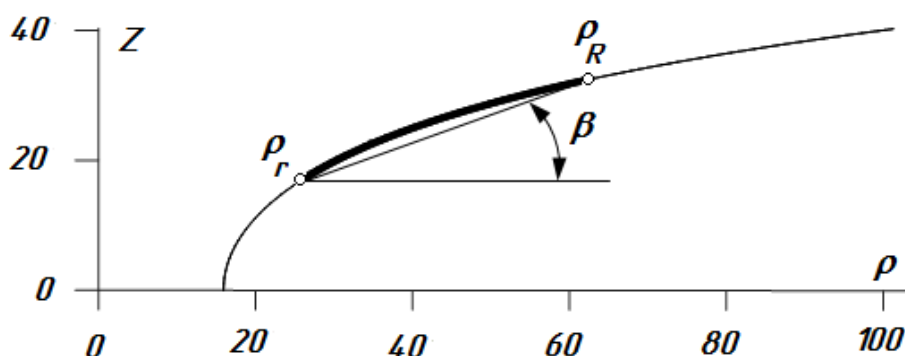


Рисунок 4.19 Частина меридіана катеноїда, апроксимована відрізком прямої

Із отриманої апроксимації можна зробити важливий висновок, а саме: чим далі від осі обертання апроксимується дуга меридіана (ланцюгова лінія), тим точніше зрізаний конус апроксимує відповідний відсік катеноїда. Найгірша апроксимація відбувається при $r=0$, тобто при нульовій товщині валу, що на рис.

4.19 відповідає значенню $\rho_r \approx 17$. Вал нульового діаметра не може бути, але із збільшенням його величини покращується апроксимація катеноїда зрізаним конусом.

Знайдемо розміри зрізаного конуса, який апроксимує відповідний відсік катеноїда. Для цього достатньо визначити координати точок ρ_r і ρ_R . Рівняння меридіана катеноїда отримаємо із (4.66) при $p=0$ і $\varphi=0$:

$$\rho = \sqrt{u^2 + h^2}; \quad z = \frac{h}{2} \ln \frac{\sqrt{u^2 + h^2} + u}{\sqrt{u^2 + h^2} - u}. \quad (4.67)$$

Підставимо у (4.67) по чергово значення $u=r$ і $u=R$ і отримаємо координати точок ρ_r і ρ_R (рис. 4.19):

$$\rho_r \left\{ \sqrt{r^2 + h^2}; \quad z = \frac{h}{2} \ln \frac{\sqrt{r^2 + h^2} + r}{\sqrt{r^2 + h^2} - r} \right\}. \quad (4.68)$$

$$\rho_R \left\{ \sqrt{R^2 + h^2}; \quad z = \frac{h}{2} \ln \frac{\sqrt{R^2 + h^2} + R}{\sqrt{R^2 + h^2} - R} \right\}. \quad (4.69)$$

Знаючи координати точок ρ_r (4.68) і ρ_R (4.69), можна визначити відстань між ними, тобто довжину твірної конуса. При заданих розмірах $r=20$, $R=60$, $h=15,9$ вона становить 39,74 лін. од. Інтегруванням можна знайти довжину відповідної дуги меридіана (4.67). Він зводиться до виразу $R-r$, тобто довжина дуги ланцюгової лінії між точками ρ_r і ρ_R становить 40 лін. од. Різниця в довжині відрізка і дуги несуттєва, однак саме на цю різницю має розтягнутися метал заготовки.

За координатами точок (4.68) і (4.69) знаходимо кут β :

$$\beta = \text{Arctg} \frac{\frac{h}{2} \ln \frac{(A-r)(B+R)^2}{h^2(A+r)}}{B-A}, \quad (4.70)$$

де $A = \sqrt{r^2 + h^2}$, $B = \sqrt{R^2 + h^2}$.

Для нашого випадку (рис. 4.19) $\beta=23^\circ$. Радіус меншої основи конуса дорівнює координаті ρ точки ρ_r , тобто значенню A , а радіус більшої основи – відповідно значенню B . Висоту зрізаного конуса теж можна визначити – вона дорівнює різниці координат Z точок ρ_R і ρ_r . Знаючи всі розміри зрізаного конуса, можна знайти його розгортку у вигляді плоского кільця. Наводимо формули для визначення внутрішнього радіуса r_o кільця і кута φ_o :

$$r_o = \frac{A}{2(B-A)} \sqrt{4(B-A)^2 + h^2 \ln^2 \frac{h^2 + 2r(r+A)}{h^2 + 2R(R+B)}};$$

$$\varphi_o = \frac{4(B-A)}{\sqrt{4(B-A)^2 + h^2 \ln^2 \frac{h^2 + 2r(r+A)}{h^2 + 2R(R+B)}}}. \quad (4.71)$$

Згідно отриманих формул (4.71) для заданих значень $r=20$, $R=60$, $h=15,9$ знаходимо: $r_o=27,8$, $\varphi_o=326,6^\circ$, $R_o=r_o+R-r=67,8$. Таким чином, отримані формули (4.71) дають практично однакові результати в порівнянні із формулами (4.65). Наближена розгортка прямого відкритого гелікоїда такого ж кроку і таких же обмежувальних гвинтових ліній, отримана в попередньому підрозділі, незначно відрізняється від наближеної розгортки гвинтового коноїда. Характерною відмінністю є те, що внутрішній r_o і зовнішній R_o радіуси є дещо більшими, а кут φ_o – дещо меншим.

Отримані теоретичні результати можуть бути використані для вдосконалення способу виготовлення шнеків із плоских кілець. Один із способів малосерійного виготовлення шнеків в умовах ремонтних майстерень полягає у зварюванні плоских кілець (рис. 4.20,а) з наступним їх розтягуванням. Для цього зварені кільця надівають на вал, один кінець прикріплюють до валу, а другий тягнуть з допомогою лебідки (рис.4.20,б). Кільця розтягуються у гвинтову поверхню, але при цьому не враховується поворот кільця навколо його осі на кут $360^\circ-\varphi_o$. Для усунення цієї невідповідності застосовується підгонка гвинтової поверхні підгинанням за допомогою молотка. Згідно теорії неперервного

згинання зварювати між собою потрібно не плоскі кільця, а зігнуті із них зрізані конуси. Якщо кільце зігнути так, щоб прямі краї, які його обмежують, збіглися, то кут β визначиться автоматично.



а



б

Рисунок 4.20 – До виготовлення витків шнека в умовах ремонтної майстерні:
а) зварені між собою плоскі кільця; б) розтягування кілець на валу з допомогою лебідки

Згідно нашої пропозиції плоске кільце потрібно розрізати в радіальному напрямі без вирізу сектора. Такі кільця потрібно зігнути у конуси, але при цьому частина поверхні конуса буде взаємно перекриватися на величину вирізу. В такого конуса можна проконтролювати кут β нахилу твірних за допомогою формули (4.70) або знайти кут перекриття. Після цього зварені конуси можна розтягувати на валу. При такому способі кількість кілець, з яких зігнуті конуси, не відповідатиме кількості витків шнека. При їх великій кількості буде економія зварного шва в порівнянні із кільцями із вирізаним сектором. Можна також розтягувати зварені кільця, але при цьому чергувати розтяг із скручуванням, при

цьому ці дві операції мають бути узгоджені між собою. Загальний кут повороту має відповідати кількості витків. Для одного витка він визначається в градусах: $180 \cdot (2\pi - \varphi_0) / \pi$, де φ_0 розраховується за другою формулою (4.65).

Висновки до четвертого розділу

1. Всі гвинтові поверхні згинаються на поверхні обертання поступовим зменшенням їх кроку до нуля. Якщо гвинтова поверхня нерозгортна, то і поверхня обертання теж є нерозгортною. В роботі здійснено апроксимацію отриманої нерозгортної поверхні обертання зрізаним конусом. Точна розгортка зрізаного конуса є наближеною розгорткою гвинтової нерозгортної поверхні.

2. При неперервному згинанні прямого відкритого гелікоїда зменшенням кроку його поверхня залишається лінійчатою і при нульовому кроці перетворюється у однопорожнинний гіперболоїд обертання. При цьому один виток прямого відкритого гелікоїда після згинання перетворюється у зазначений гіперболоїд, який є подвійним, тобто він двічі сам себе обгортає, що відповідає куту скручування поверхні обертання на кут 4π . З урахуванням цього на основі апроксимації гіперболоїда конусом знайдено наближену розгортку у вигляді плоского кільця.

3. При неперервному згинанні гвинтового коноїда зменшенням кроку всі його проміжні положення, окрім початкового, є нелінійчатими поверхнями. При нульовому кроці поверхня коноїда перетворюється у катеноїд, причому одному витку коноїда відповідає одинарна поверхня катеноїда.

4. Виконано розрахунки для побудови наближеної розгортки витка гвинтового коноїда двома способами. При першому способі прийнято допущення, що незмінними є довжини гвинтових ліній, які обмежують відсік коноїда зовнішнім і внутрішнім чином і відповідних ліній на плоскій заготовці. Другий спосіб розроблений на апроксимації катеноїда, на який згинається виток коноїда, зрізаним конусом з наступною побудовою розгортки конуса. Отримані результати для двох способів практично збігаються.

5. В результаті досліджень запропоновано вдосконалений спосіб виготовлення витків шнеків за допомогою примусового розтягування зварених між собою зрізаних конусів або чергування розтягу плоских заготовок із їх скручуванням. Такі способи відповідають теорії неперервного згинання. При існуючих способах малосерійного виготовлення витків шнеків в умовах майстерень не враховується скручування плоского кільця, а тільки його розтяг. При заміні плоского кільця відповідним зрізаним конусом або комбінацією розтягу і скручування плоского кільця ця невідповідність усувається, що сприяє точності виготовлення витка гвинтового коноїда. Наприклад, для заданих значень радіуса вала $r=20$ мм, радіуса обмежувального кожуха (периферії витка) $R=60$ мм, кроку $H=100$ мм, згідно отриманих результатів неперервного згинання заготовка у вигляді плоского кільця має наступні розміри: внутрішній радіус плоского кільця $r_o=27,8$ мм, його зовнішній радіус $R_o=67,8$ мм, центральний кут кільця $\varphi_o=326,6^\circ$, кут, що відповідає вирізу сектора на кільці і є кутом скручування $\varphi_c=360^\circ-326,6^\circ=33,4^\circ$.

6. Результати досліджень четвертого розділу опубліковано в працях [81, 111 – 119].

ВИСНОВКИ

В роботі розв'язана актуальна науково-прикладна задача щодо деформації металевих виробів із врахуванням їх геометричних характеристик, форми, об'єму, властивостей матеріалу. За результатами досліджень отримано наступні висновки.

1. Одним із способів деформації металевих виробів є їх згинання. Коли листовий метал має малу товщину і з нього формується розгортна поверхня, то згідно теорії згинання поверхонь диференціальної геометрії можна з високою точністю описати процес неперервного згинання. При значній товщині заготовки виникають пластичні деформації і процес згинання описується наближено, при цьому об'єм виробу вважається незмінним. Для нерозгортних поверхонь точних контурів плоскої заготовки не існує, але наближену заготовку можна знайти за умови мінімізації пластичних деформацій.

2. При пружному і абсолютно пружному згинанні деталей потрібно враховувати їх кривину. Це стосується кривини пружної осі абсолютно пружних стержнів або кривини лінії на поверхні пружного листа. Поєднання теорії диференціальної геометрії і опору матеріалів дозволяє ефективно описувати пружне і абсолютно пружне згинання виробів.

3. Розроблено аналітичний опис формування виробу прокаткою прямолінійної смуги між циліндричними або конічними валками. В роботі запропонована модель, яка спирається на дві властивості пластичної деформації металу: незмінність об'єму і ізотропність. Отримано формули, які встановлюють зв'язок між розмірами поперечного перерізу прямолінійної смуги і внутрішнім радіусом плоского кільця, в яке деформується смуга.

4. На основі незмінності геометричних параметрів зроблено розрахунок плоскої заготовки для формування із неї гвинтоподібного ножа, поверхня якого є нерозгортною. Для цього було взято за основу припущення, що незмінними параметрами є довжини гвинтових ліній, які обмежують ніж зовнішнім і внутрішнім чином і відповідних ліній на плоскій заготовці. Також незмінною залишається ширина ножа.

5. Показано відмінність між формуванням циліндричних і конічних деталей прокаткою між валками в результаті пружного згинання. Часткове відновлення попередньої форми виробу у них відбувається по різному. В основі такого відновлення лежить положення диференціальної геометрії про незмінність геодезичної кривини лінії на поверхні при її згинанні. Із врахуванням цього положення отримано формули для розрахунку фіктивних розмірів конічної деталі, яка після проходження між валками набуде необхідної форми. Виконано розрахунки для налаштування конічних валків на фіктивну форму деталі.

6. При абсолютно пружному згинанні смуг або стержнів відбувається повне відновлення їх форми після дії деформуючих зусиль. В роботі розглянуто деформацію абсолютно пружного стержня на прикладі криволінійної деталі сільськогосподарського призначення:

- стояка культиваторної лапи, пружна вісь якого є дугою кола;
- пружинного зуба борони, який поєднує прямолінійну і криволінійну частини;
- стояка культиваторної лапи, пружна вісь якого є поєднанням дуг кіл із протилежним знаком кривини.

7. Розв'язано обернену задачу знаходження пружної осі смуги, яку вона набуває після припинення дії прикладеного моменту. Ця форма є заготовкою, яка після певної технології її обробки набуває властивості абсолютної пружності. Розглянуто приклади:

- розрахунок заготовки спіральної пружини для надання їй раціональної форми;
- розрахунок заготовки поршневого кільця, яке у робочому положенні має забезпечувати сталий тиск на стінки циліндра.

8. В результаті досліджень запропоновано вдосконалений спосіб виготовлення витків шнеків за допомогою примусового розтягування зварених між собою зрізаних конусів або чергування розтягу плоских заготовок із їх скручуванням. Такі способи відповідають теорії неперервного згинання

нерозгортних гвинтових поверхонь. При існуючих способах малосерійного виготовлення витків шнеків в умовах майстерень не враховується скручування плоского кільця, а тільки його розтяг. При заміні плоского кільця відповідним зрізаним конусом або комбінацією розтягу і скручування плоского кільця ця невідповідність усувається, що сприяє точності виготовлення витка гвинтового коноїда. Наприклад, для заданих значень радіуса вала $r=20$ мм, радіуса обмежувального кожуха (периферії витка) $R=60$ мм, кроку $H=100$ мм, згідно отриманих результатів плоске кільце має наступні розміри: внутрішній радіус $r_o=27,8$ мм, зовнішній радіус $R_o=67,8$ мм, центральний кут кільця $\varphi_o=326,6^\circ$, кут, що відповідає вирізу сектора на кільці і є кутом скручування $\varphi_c=360^\circ-326,6^\circ=33,4^\circ$.

Список використаних джерел:

1. Грушко О.В., Молодецька Т.І. Холодне гнуття товстолистових заготовок: монографія. Вінниця, 2014. 143 с.
2. Швець С.В., Сєдінкін Л.М. Штампи та прес-форми, конструювання та технологія виготовлення: навчальний посібник. Суми, 2005. 110 с.
3. Електронний ресурс:
https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u231/prezentaciya_spotvorenniya.pdf
4. Драгобецькій В.В., Кузєв І.О., Молоштан Д.В., Наумова О.О., Долударєв В.М. Закономірності процесу згинання біметалевих дуг пасажирських вагонів. *Обробка матеріалів тиском*. 2020. Т. 50, № 1. С. 154-158. Режим доступу: [https://doi.org/10.37142/2076-2151/2020-1\(50\)154](https://doi.org/10.37142/2076-2151/2020-1(50)154)
5. Алтухов О.В., Тарасов О.Ф. (2022). Розробка програмних компонентів для моделювання інтенсивного пластичного деформування на основі параметричної моделі оснащення. *Обробка матеріалів тиском*. Т. 51 № 1, С. 214–223. Режим доступу: [https://doi.org/10.37142/2076-2151/2022-1\(51\)214](https://doi.org/10.37142/2076-2151/2022-1(51)214)
6. Тараненко М.Є. Сучасний підхід до оцінки технології обробки листових деталей тиском. *Обробка матеріалів тиском*. 2020. Т. 50, № 1. С. 165 – 172. Режим доступу: [https://doi.org/10.37142/2076-2151/2020-1\(50\)165](https://doi.org/10.37142/2076-2151/2020-1(50)165)
7. Грибков Е.П., Добронос Ю.К., Коваленко А.К. Експериментальне дослідження процесу правки прокату на багатороликових правильних машинах. *Обробка матеріалів тиском*. 2023 Т. 52, № 1. С. 138-144. Режим доступу: [https://doi.org/10.37142/2076-2151/2023-1\(52\)138](https://doi.org/10.37142/2076-2151/2023-1(52)138)
8. Артюх Г.В., Кухар В.В., Грушко О.В., Молодецька Т.І. Адаптація технології гнуття товстолистової заготовки з важкодеформівного матеріалу до параметрів пресового устаткування. *Захист металургійних машин від поломок*: Зб. наук. пр. 2012. № 14. С. 110 – 116.
9. Грушко О.В., Молодецька Т.І. Деформовність товстолистових заготовок в умовах поперечного згину. *Проблеми трибології*. 2015. № 1. С. 31 – 36.

10. Калюжний О.В., Запорожченко А.С. Моделювання процесу холодного гнуття заготовки і подальшого витягування. *Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»*. 2011. № 61. С. 96 – 99. Режим доступу: <https://core.ac.uk/download/pdf/47219272.pdf>
11. Власенко А.М. Матеріалознавство та технологія металів: підручник. Київ: 2019. 224 с.
12. Атаманюк В.В. Технологія конструкційних матеріалів: навч. посіб. Вінниця: ДОВ «Вінниця», 2003. 371 с.
13. Пахолюк А. П. Основи матеріалознавства і конструкційні матеріали: навч. посіб. Львів: Світ, 2005. 172 с.
14. Попович В.В. Технологія конструкційних матеріалів і матеріалознавство: навч. посіб. Львів: Світ, 2006. 624 с.
15. Олексин В.І., Рагулін В.М. Моделювання деталей із листової сталі з урахуванням технології виготовлення. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2023. № 105. С. 200 – 212. Режим доступу: <http://ageg.knuba.edu.ua/article/view/297896>
16. Розуміння К-фактора, надбавки на вигин і вирахування вигину. URL: <https://www.adhmt.com/k-factor-bend-allowance-and-bend-deduction>
17. Аніщенко О.С., Гущин А.В., Кухар В.В., Присяжний А.Г. Врахування пружинення при художньому куванні волютоподібних елементів. *Вісник приазовського державного технічного університету*. 2021 № 42. С. 66 – 74. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vpdy_2021_42_11
18. Parsa M.H., Al-ahkami S.N., Pishbin H., Kazemi M. Investigating spring back phenomena in double curved sheet metals forming. *Materials and Design*. 2012. Vol. 41. P. 326-337. URL: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2012.05.009>
19. Sajan M., Amirthalingam M., Chakkingal U. A novel method for the spring-back analysis of a hot stamping steel. *Journal of Materials Research and Technology*. 2021. Vol. 11. P. 227-234. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2021.01.017>

20. Kukhar V., Nahnibeda M., Radushev O. Spring-back effect during multi-pass bending of sheet blanks. *E3S Web of Conferences*. 2019. Vol. 135. P. 1-9. URL: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/201913501066>

21. Пилипака С.Ф., Несвідомін В.М., Пилипака Т.С. Визначення фіктивного контуру деталі при згинанні листового матеріалу в циліндричну поверхню заданої форми із врахуванням пружинення металу. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії*. 2005. Т. 30, № 4. С. 67 - 73.

22. Пилипака С.Ф., Несвідомін В.М., Пилипака Т.С. Пружне згинання стержнів при значних їх прогинах. *Електротехніка і механіка*. 2007. № 1. С. 52-56.

23. Вербило Д.Г. Особливості дослідження деформаційної поведінки матеріалів при випробуваннях на згин. *Успіхи матеріалознавства*. 2023, № 6. С. 75-85. Режим доступу: <https://doi.org/10.15407/materials2023.06.075>

24. Лізунов П.П., Недін В.О. Чисельне диференціювання форм вигину пружних стержнів значної довжини. *Управління розвитком складних систем*. 2021 № 46. С. 70-75. Режим доступу: <http://mdcs.knuba.edu.ua/article/view/244933>

25. Харченко В.Є., Корсак В.І. Аналітичне розв'язання нелінійної задачі згину пружного стрижня. *Видавництво Львівської політехніки*. 2015. № 820. С. 105 - 115.

26. Gulyayev V.I., Borsch O.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2011. Vol. 78. P. 759 – 764. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2011.09.001>

27. Гайдайчук В.В., Левківська Л.В., Ковальчик Я.Л. Математичне моделювання пружного згинання бурильної колони у каналі криволінійної нафтогазової свердловини. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2016. № 97. С. 43 - 58. Режим доступу: http://opir.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-97/04-97_gayd_levk_kov.pdf

28. Андрусенко О.М. Нелінійне згинання бурильних колон в циліндричних порожнинах вертикальних свердловин. *Науково-технічний збірник «Вісник*

Національного транспортного університету». 2017. Т. 37, № 1. С. 3 - 12. Режим доступу: <http://publications.ntu.edu.ua/visnyk/37/003.pdf>

29. Худолій С.М., Гловач Л.В. Прямі та обернені задачі деформування пружних стержнів у криволінійних каналах. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2009. № 83. С. 147 - 155. Режим доступу: <https://repository.knuba.edu.ua/server/api/core/bitstreams/4863c118-d683-4659-a7c3-3397f5f70f0c/content>

30. Горик О.В., Піскунов В.Г., Чередніков В.М. Механіка деформування композитних брусів. монографія. Полтава-Київ: АСМІ, 2008. 402 с.

31. Ковальчук С.Б., Горик О.В. Аналітичне моделювання зосереджених та локалізованих навантажень брусів із криволінійною плоскою віссю. *Частина 1. Моделювання зосереджених у точці навантажень*. 2018. Вип. 73. С. 31 - 40.

32. Ковальчук С.Б., Горик О.В. Інтегральні та диференціальні співвідношення для внутрішніх силових факторів при згині бруса з криволінійною плоскою віссю довільної форми. *Частина 1. Моделювання зосереджених у точці навантажень*. 2018. Вип. 70. С. 40 - 48.

33. Сяський А.О., Шевцова Н.В. Застосування методу сил для статичного розрахунку замкнених криволінійних стрижнів. *Механіка та матеріалознавство*. 2015. Т. 79, №3. С. 24 - 30.

34. Пилипака С.Ф. Рівняння конуса, віднесеного до ортогональної сітки із сімей координатних геодезичних ліній. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії*. 2003. Т. 18. № 4. С. 16 - 19.

35. Пилипака Т.С. Дослідження взаємозв'язку між кривиною і нормальною кривиною плоских перерізів торса однакового нахилу твірних при його згинанні. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. 2008. Т. 40. № 4. С. 145 - 151.

36. Несвідомін В.М., Пилипака Т.С. Дослідження взаємозв'язку між повною та нормальною кривиною ліній кривини торса при його згинанні. *Прикл. геометрія та інж. графіка*. 2009. Вип. 81. С. 82 - 87.

37. Пилипака Т.С. Розрахунок робочих елементів котка з відсіків торсегелікоїда. *Науково-виробничий журнал «Техніка і технології АПК»* 2015. № 5. С. 15 - 17.

38. Пилипака С.Ф., Несвідомін В.М., Пилипака Т.С. Розрахунок заготовки для виготовлення гвинтової поверхні котка. *Електротехніка і механіка*. 2008. № 1. С. 71 - 77.

39. Пилипака С.Ф., Грищенко І.Ю. Побудова розгортки циліндричних відсіків довільної конфігурації аналітичним способом. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. 2009. Вип. 22. С. 53 —57.

40. Пилипака С.Ф., Грищенко І.Ю. Конструювання полярного торса кривої укусу та побудова його розгортки. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2010. Вип. 85. С. 93 - 101.

41. Кресан Т.А. Конструювання торсів, що проходять через задану плоску криву. *Збірник тез доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції «Обуховські читання»*. матеріали наук.-практ. конф. з міжнар. участю (м. Київ, 29 березня 2019 р.). Київ: 2019. С. 11 - 13. Режим доступу: https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u132/obuhovski_chitannya_2019_tezi_0.pdf#page=11

42. Пилипака С.Ф., Дзюба В.В. Побудова розгортних поверхонь і перетворення їх методом інверсії. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії*. 2004. Т. 24, № 4. С. 32 - 36.

43. Пилипака С.Ф., Білоног Г.В. Конструювання торсів однакового нахилу твірних як обвідної поверхні однопараметричної множини площин. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2007. Вип. 77. С. 47 - 53.

44. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Торс, як обвідна поверхня множини положень площини, закріпленої в системі супровідного тригранника плоскої кривої. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. 2008. Т. 41, № 4. С. 26 - 36.

45. Пилипака С.Ф., Грищенко І.Ю., Кресан Т.А. Моделювання смуг розгортних поверхонь, дотичних до поверхні кулі. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2018. Вип. 1. С. 81 - 88.
46. Несвідомін В.М. Згинання плоских відсіків на циліндричні та конічні поверхні. *“Механізація с. г. виробництва”*. 2001. Том 10. С. 210 - 214.
47. Кресан Т.А., Пилипака С.Ф., Грищенко І.Ю., Кременець Я.С. Кочення розгортного гелікоїда по своєму згинанню. *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research*. 2020. Vol.11, No. 3, P. 13 - 20.
48. Пилипака С.Ф. Неперервне згинання катеноїда в гвинтовий коноїд. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1998. Вип. 63. С. 80 - 83.
49. Пилипака С.Ф. Неперервне згинання косого гелікоїда в однопорожнинний гіперболоїд обертання. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1996. Вип. 61. С. 140 - 144.
50. Кресан Т.А. Розрахунок гравітаційного спуску, утвореного поверхнею косого закритого гелікоїда. *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research*. 2020. Vol. 11, No. 2, P. 49-57
51. Войтюк Д.Г., Лінник М.К., Пилипака С.Ф. Дослідження руху матеріальної частинки по поверхні косого гелікоїда під дією сили власної ваги. *Техніка АПК*. 2006. № 12. С 17 - 22.
52. Пилипака С.Ф., Клендій М.М., Кресан Т.А. Рух частинки по гвинтовому коноїду, обмеженому вертикальним шорстким циліндром. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2018. Т. 67 № 4 С. 20 - 30.
53. Пилипака С.Ф., Бриндак Є.В., Кресан Т.А., Костюченко А.А. Рух частинки по гвинтовому спуску, утвореному гвинтовим коноїдом і обмежуючим вертикальним співвісним циліндром. *VI Міжнародної науково-технічної конференції «Крамаровські читання»: матеріали наук.-практ. конф. з міжнар. Учасстю (м. Київ 21-22 лютого 2019 р.)*. Київ, 2019. С. 66 - 67.
54. Пилипака С.Ф. Геометрична суть згинання поверхонь обертання у гвинтові. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Т.6. №4. 1999. С.85-88.

55. Пилипака С.Ф. Геометрична суть згинання поверхонь переносу. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1999. Вип. 65. С. 148 - 152.

56. Пилипака С.Ф. Геометрична суть згинання різьблених поверхонь Монжа. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1999. Вип. 66. С. 92 - 95.

57. Аушева Н.М., Демчишин А.А. Згинання мінімальних поверхонь в комплексному просторі деформацією прямої кривої Без'є. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2012. Вип. 90. С. 15-19. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/prgeoig_2012_90_6

58. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Неперервне згинання мінімальних поверхонь, утворених за допомогою логарифмічної спіралі, заданої функціями натурального параметра. Режим доступу: <https://journals.indexcopernicus.com/api/file/viewByFileId/440652.pdf>

59. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Неперервне згинання мінімальних поверхонь, утворених за допомогою евольвенти кола, заданої функціями натурального параметра. *Техніка та енергетика АПК*. 2017. № 261. С. 120 - 128.

60. Pylypa, S., Mukvich M. Continuous bending of minimal surfaces, formed by means of plane curves of complex curvature. *Machinery & Energetics*. 2020. Vol. 11, No 1. P. 39 - 46.

61. Муквич М.М. Аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізоотропних ліній, які лежать на поверхні обертання логарифмічної спіралі параметра. *Сучасні проблеми моделювання*. 2016. № 6. С. 97 - 102.

62. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Конструювання мінімальних поверхонь за допомогою ізоотропних кривих, які лежать на поверхні тора, найменша паралель якого вироджується в точку. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2015. №93. С.91 - 96.

63. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Конструювання мінімальних поверхонь за допомогою ізоотропної кривої, яка лежить на поверхні катеноїда. *Техніка та енергетика АПК*. 2016. №241. С. 197 - 203.

64. Муквич М.М. Конструювання мінімальних поверхонь за допомогою ізотропної кривої, яка лежить на конусі. *Міжвузівський збірник "Наукові нотатки"*. 2015. № 48. С. 155 - 158.

65. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Утворення мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання астроїди. *Сучасні проблеми моделювання*. 2016. №6. С. 91 - 95.

66. Муквич М.М. Аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання циклоїди. *Сучасні проблеми моделювання*. 2016. Т. 58, №3 С. 519 - 523.

67. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Аналітичний опис ізотропних ліній на поверхні псевдосфери та побудова мінімальних поверхонь. *Техніка та енергетика АПК*. 2016. №254. С. 202 - 210.

68. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Утворення ізотропних ліній та мінімальних поверхонь за допомогою плоских кривих, заданих функціями натурального параметра. *Наукові доповіді НУБіП України*. 2016. Т. 64, №7.

69. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Конструювання мінімальних поверхонь на основі просторових ізотропних ліній. *Техніка та енергетика АПК*. 2017. Вип. 258. С. 313 - 323.

70. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на поверхні цикліди Дюпена. *Сучасні проблеми моделювання*. 2017. №8. С. 115 - 121.

71. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Утворення мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на поверхні уявного конуса. *Сучасні проблеми моделювання*. 2017. №9. С. 114 -118.

72. Пилипака С.Ф., Муквич М.М. Утворення мінімальних поверхонь за допомогою уявної циклоїди, заданої комплексним натуральним рівнянням. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2017. Т. 62, №3. С. 312 - 316.

73. Кресан Т.А., Пилипака С.Ф., Несвідомін А.В., Бабка В.М., Кременець Я.С. Згинання однопорожнинного гіперболоїда обертання зміною радіуса горлової лінії. *Сучасні проблеми моделювання*. 2020. № 17. С. 36 - 46.

74. Kresan T., Pylypaka, S., Ruzhylo, Z., Rogovskii, I., Trokhaniak, O. (2021) Rolling of a single-cavity hyperboloid of rotation on a helicoid on which it bends. *Engineering Review*, 41(3). P. 106 - 114.

75. Пилипака С.Ф., Кресан Т.А., Грищенко І.Ю., Бабка В.М. Кочення поверхні бінормалей гвинтової лінії по своєму згинанню. *Управління розвитком складних систем*. 2020. № 41. С. 88 - 94.

76. Пилипака С.Ф., Кресан Т.А., Хропост В.І., Бабка В.М. Пружне згинання смуги із значним прогином під дією прикладених сил та моменту. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2021. № 101. С. 137-147. Режим доступу: <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.101.137-147>

77. Pylypaka, S., Hropost, V., Volina, T., Kresan, T., Borodai, S. (2024). Analytical description of adjustment of rolls for manufacturing parts from elastic sheet material. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 1 (7 (127), 60–65. URL: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.298427>

78. Кузьменко В.Ф. Стан та тенденції зміни основних робочих органів кормозбиральних комбайнів. *ННЦ «Інститут механізації та електрифікації сільського господарства»*. 2011. Режим доступу: http://kntu.kr.ua/doc/zb_41_1/stat_41_1/54.pdf

79. Пилипака С.Ф., Хропост В.І. Прокатка конічними котками прямолінійного профілю трапецеїдального перерізу в плоске кільце. *Збірник тез доповідей XVIII міжнародної науково-практичної конференції "Обуховські читання"*: матеріали наук.-практ. конф. з міжнар. участю (м. Київ, 28 березня 2024 р.). Київ, 2024. С. 5. Режим доступу: https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u349/obuhovski_chitannya_2024_tezi_0.pdf

80. Пилипака, С.Ф., Кресан, Т.А., Федорина Т.П., Хропост В.І. Врахування товщини листового матеріалу при виготовленні конічного диска згинанням

плоского кільця. *Науковий журнал «Інженерія природокористування»*. 2020 № 2 (16), С. 78-83. Режим доступу: [https://doi.org/10.37700/enm.2020.2\(16\).78-83](https://doi.org/10.37700/enm.2020.2(16).78-83)

81. Пилипака С.Ф., Кресан Т.А., Хропост В.І. Конструювання гвинтоподібних ножів подрібнювального барабана із розгортної і нерозгортної поверхонь. *Збірник доповідей XIII Всеукраїнської науково-практичної конференції «Прикладна геометрія, інженерна графіка та об'єкти інтелектуальної власності»*: матеріали наук.-практ. конф. з міжнар. участю (м. Київ, 12 червня 2024 р.). Київ, 2024. С. 30–34. Режим доступу: <https://jagegip.kpi.ua/article/view/309778>

82. Арендаренко В.М. Ларенко В.В. Особливості розрахунку пружинного елементу регулятора кута атаки культиваторної лапи. *Вісник Полтавської державної аграрної академії*. 2017. № 3. С. 122 - 125. Режим доступу: <https://www.pdau.edu.ua/sites/default/files/visnyk/2017/03/30.pdf>

83. Spring house. Retrieved from <https://domprugin.com/ua/g94802025-pruzhiny-borony>

84. Рекламна інтернет-сторінка компанії «Техновік». URL: <https://prom.ua/ua/p867775419-stojka-kultivatora-14170000301.html>

85. Хропост В.І., Пилипака С.Ф., Кресан Т.А. Математичне моделювання згинання стояка культиваторної лапи. *PROGRESSIVE RESEARCH IN THE MODERN WORLD*: матеріали наук.-практ. конф. з міжнар. участю (м. Бостон, 28-30 грудня 2022р.). Бостон, 2022. С. 270-277. Режим доступу: <https://sci-conf.com.ua/wp-content/uploads/2022/12/PROGRESSIVE-RESEARCH-IN-THE-MODERN-WORLD-28-30.12.22.pdf>

86. Хропост В.І., Кресан Т.А. Форма пружної осі спіральної стрічкової пружини у вільному стані. *X Міжнародної науково-технічної конференції з нагоди 116-ї річниці від дня народження «КРАМАРОВСЬКІ ЧИТАННЯ»*: матеріали наук.-техн. конф. з міжнар. участю (м. Київ, 23-24 лютого 2023 року). Київ, 2023. С. 371 - 373. Режим доступу: https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u349/zbirnik_tez_kch2023.pdf

87. Хропост В.І., Демчук І.О. Пружне згинання криволінійної смуги із заданою початковою кривино її пружної осі. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2023. № 104. С. 183-189. Режим доступу: <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2023.104.183-189>

88. Пилипака С.Ф., Хропост В.І. Моделювання форми пружної осі стояка лапи культиватора. *Збірник тез доповідей XVII Міжнародної науково-практичної конференції «ОБУХОВСЬКІ ЧИТАННЯ»*: матеріали наук.-практ. конф. з міжнар. участю (м. Київ, 30 березня 2023р.). Київ, 2023. С. 11-12. Режим доступу:

https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u349/obuhovski_chitannya_2023_new.pdf

89. Volina, T., Pylypaka, S., Hropost, V., Kresan, T., & Vasyliuk V. (2023). The Form of a Spiral Spring in a Free State. *Advanced Manufacturing Processes V*, 509–517. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-42778-7_47

90. Pylypaka, S., Volina, T., Hropost, V., Babka, V., & Hryshchenko, I. (2023). Determination of the form of a spiral spring in a free state. *ScienceRise*, (3), 3-9. <https://doi.org/10.21303/2313-8416.2023.003213>

91. Pylypak, S., Volina, T., Hropost, V., Kozlova, O., & Tatsenko, O. (2024). Investigation of deformation of the spring tooth of agricultural implements from the action of the force applied to it. *Machinery & Energetics*, 15(1), 23-32. URL: <https://doi.org/10.31548/machinery/1.2024.23>

92. Ahmed, A.K., Pylypaka, S., Volina, T., Hropost, V., Kresan, T. (2024). Elastic Bending of a Strip Under the Action of Applied Forces. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 121–130. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-63720-9_11

93. Воліна Т.М. Гвинтовий спуск, до аналітичного опису якого входить рівняння руху частинки по похилій площині. *Прикладна геометрія, інженерна графіка*. 2021. Вип. 100. С. 89 - 98.

94. Воліна Т.М. Дослідження руху частинки по шорсткій поверхні, яка утворена гвинтовим рухом синусоїди, під дією сили власної ваги. *Machinery &*

Energetics. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2020, Vol. 11, No. 3, P. 187-194.

95. Pankiv, V.R., Tokarchuk, O.A. (2017) Investigation of constructive geometrical and filling coefficients of combined grinding screw conveyor. *INMATEH–Agricultural engineering.* 51(1). P. 59 - 68.

96. Гевко І. Б., Лещук Р. Я., Гудь В. З., Дмитрів О. Р., Дубиняк Т. С., Навроцька Т. Д., Круглик О. А. Гнучкі гвинтові конвеєри: проектування, технологія виготовлення, експериментальні дослідження: монографія. Тернопіль: ФОП Паляниця В. А., 2019. 208 с.

97. Дубиняк Т.С. Обґрунтування конструкцій та параметрів захисних механізмів гнучких гвинтових конвеєрів: автореф. дис. «Піднімально-транспортні машини» канд. техн. наук : 05.05.05 Тернопіль, 2018. 24 с.

98. Куликівський В.Л. Вплив шнекових транспортувальних пристроїв на показники якості насіння зернових культур. *Інженерія природокористування.* 2018. № 2(10) С.108 – 114.

99. Драган А.П., Клендій М.Б. Обґрунтування конструкції робочого органа гвинтової секції комбінованого ґрунтообробного знаряддя. *Перспективні технології та прилади.* 2021. №18. С.66 - 73.

100. Ванін В.В., Грубич М.В., Юрчук В.П. Геометричне моделювання гвинтових поверхонь змінного (аксіального) кроку при конструюванні вилкових копачів. *Вісник Херсонського національного технічного університету.* 2017. Т. 2, № 3(62). С. 256 - 259.

101. Кресан Т.А. Рух частинки ґрунту по поверхні розгорнутого гелікоїда з горизонтальною віссю обертання і заданим кутом атаки. *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research.* 2021, Vol. 12, No 2. P. 67 - 75.

102. Гевко Б.М., Слободян Л.М., Маруніч О.П., Гупка В.В. Особливості конструкцій гвинтових завантажувачів машин. *Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів.* 2018. № 12. С. 125 - 129.

103. Гевко І.Б., Гудзь В.З., Круглик О.А. Синтез способів навивання спіралей шнеків. *Міжвузівський збірник «Перспективні технології та прилади»*. 2018. Вип. 12. С. 39 - 47.

104. Ляшук О.Л., Дячун А. Є., Клендій В. М., Тесля В. О., Навроцька Т. Д., Радик М. Д. Дослідження динаміки процесу калібрування витка конічної гвинтової заготовки на крок. *«Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів»*. 2018. № 12. С.74 - 82.

105. Ляшук О.Л., Дячун А.Є., Третяков О.Л., Навроцька Т.Д., Круглик О.А. Техніко-економічне обґрунтування процесу виготовлення гвинтових робочих органів. *Механізація сільськогосподарського виробництва*. 2019. Вип. 198. С. 244 - 251.

106. Ляшук О.Л., Гупка А.Б., Пиндус Ю.І., Гупка В.В. Розробка конструкції та дослідження гвинтових робочих поверхонь шнекових механізмів сільськогосподарських машин. *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research*. 2019. Vol. 10, No 4. P. 71 - 78.

107. Устенко С.А. Геометричне моделювання просторових кривих ліній, заданих кривиною та скрутом. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. 2011. Вип. 29. С. 86 - 90.

108. Захарова Т. М. Конструювання просторових кривих, що описуються рівняннями у функції довжини дуги, за допомогою супровідного тригранника вихідної кривої. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2013. Т. 57, № 4. С. 104 - 112.

109. Petroula Dospra. PH Curves with Non-Primitive Hodographs. *Journal for Geometry and Graphics*. 2018. Vol. 22, No. 2. P. 163 - 181.

110. Pylypaka, S., Kresan, T., Trokhaniak, O., Taras, I., Demchuk, I. Parametric Equations of a Spatlal Curve as a Function of Length of the Arc with Gleven Dependences of Curvature and Angleof Ascent. *Journal for Geometry and Graphics*. 2021. Vol. 25, No. 2. P. 163 – 170.

111. Volina, T., Pylypaka , S., Hropost, V., Kresan, T., & Zabolotnii, O. (2023). Construction of a flat workpiece for manufacturing a turn of the right helicoid.

Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2 (1 (122), 6-11. URL: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.275508>

112. Pylypaka, S., Hropost, V., Kresan, T., Hryshchenko, I., Babka, V. (2022). Calculation of the bending parameters of a flat workpiece into a twist of a helicoid torso. *Machinery & Energetics*, 13 (4) 81-88. URL: [https://doi.org/10.31548/machenergy.13\(4\).2022.81-88](https://doi.org/10.31548/machenergy.13(4).2022.81-88)

113. Pylypaka, S., Hropost, V., Nesvidomin, V., Volina, T., Kalenyk, M., Volokha, M., Zalevska, O., Shuliak, I., Dieniezhnikov, S., Motsak, S. (2024). Designing a helical knife for a shredding drum using a sweep surface. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4(1(130)), 37-44. URL: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.308195>

114. Пилипака С.Ф., Кресан Т.А., Хропост В.І., Бабка В.М. Особливості згинання заготовки у вигляді плоского кільця у гвинтовий коноїд. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2022. № 102. С. 157-164. Режим доступу: <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.102.157-164>

115. Хропост В.І., Кресан Т.А. Конструювання витка відкритого гелікоїда з плоскої заготовки. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2023. № 105. С. 213-221. Режим доступу: <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2023.105.213-221>

116. Пилипака С.Ф., Кресан Т.А., Хропост В.І., Грищенко І.Ю., Демчук І.О. Керування згинанням торсів зміною залежності кута підйому його ребра звороту. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2024. Т. 1. № 106. С. 201-209. Режим доступу: <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2024.106.201-209>

117. Пилипака С.Ф., Кресан Т.А., Хропост В.І. Особливості згинання плоскої заготовки із листового металу у поверхню торса-гелікоїда. *Прикладна геометрія, інженерна графіка та об'єкти інтелектуальної власності: матеріали наук.-практ. конф. з всеукраїнською участю (м. Київ, 23 червня 2022р.)*. Київ, 2022. С. 8–10. Режим доступу: <http://jagegip.kpi.ua/article/view/260582>

118. Пилипака С.Ф., Хропост В.І., Захарова І.О. Особливості формування витків шнеків із листових заготовок. *Збірник тез доповідей XXIII міжнародної*

наукової конференції "Сучасні проблеми землеробської механіки": матеріали наук.-практ. конф. з міжнар. участю (м. Київ – м. Житомир, 16–18 жовтня 2022р.). Київ - Житомир, 2022. С. 71-74. Режим доступу: https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u349/zbirnik_konf_vasilenko_2022.pdf

119. Хропост В.І., Пилипака С.Ф. Згинання торса, у якого ребро звороту задане рівняннями кривини і кута його підйому. *Прикладна геометрія, інженерна графіка та об'єкти інтелектуальної власності*: матеріали наук.-практ. конф. з всеукраїнською участю (м. Київ, 14 червня 2023р.). Київ, 2023. С. 40–43. Режим доступу: <http://jagegip.kpi.ua/article/view/281801>

ДОДАТКИ

Додаток А

ФЕРМЕРСЬКЕ ГОСПОДАРСТВО

«ВІТЧИЗНА - ТИНИЦЯ»

ЄДРПОУ 32654676

16560, Чернігівська область, Бахмацький р-н, с.Тиниця, вул. Гагаріна, 39

АКТ

про впровадження/використання результатів
дисертаційної роботи доктора філософії

Даним актом стверджується, що результати наукових досліджень аспіранта Національного університету біоресурсів і природокористування України Хропост Вячеслава Івановича, присвячених дослідженню нерозгортних гвинтових поверхонь, впроваджені у ФГ «ВІТЧИЗНА - ТИНИЦЯ».

1. Вид впроваджених результатів. Запропоновано вдосконалений спосіб виготовлення витків шнеків із плоских листових заготовок.

2. Новизна результатів полягає в тому, що згідно теорії неперервного згинання гвинтових нерозгортних поверхонь отримано поверхню обертання, на яку згинається виток гвинтового коноїда, тобто виток шнека. Апроксимація поверхні обертання зрізаним конусом дозволяє знайти точну його розгортку, яка є наближеною для витка шнека.

3. Практичне впровадження використання результатів. Для крупносерійного виготовлення витків шнеків використовуються дороговартісні верстати, в яких передбачено примусове формування поверхні із врахуванням пластичних деформацій плоскої заготовки. Для умов малосерійного виробництва використовується спрощений спосіб розтягування з допомогою лебідки плоских кілець (наближених розгорток витка), зварених між собою і надітих на циліндричний вал. Такий спосіб не враховує додаткове скручування заготовки навколо осі вала. Завдяки отриманим теоретичним результатам знайдено вираз для визначення кута, на який потрібно «скрутити» заготовку при розтягуванні її на один крок. Це означає, що розтягування заготовок повинне чергуватися із їх скручуванням навколо осі вала і при цьому числові значення розтягу і скручування розраховуються згідно отриманих виразів. Цей спосіб передбачається для впровадження у ФГ «ВІТЧИЗНА-ТИНИЦЯ».

3. Значущість отриманих результатів. Використання запропонованого способу виготовлення витків шнека із плоских листових заготовок в умовах малосерійного виробництва дозволяє підвищити точність їх виготовлення.

Від Національного університету
біоресурсів і природокористування
України

Наукові керівники

Сергій ПИЛИПАКА
Тетяна КРЕСАН
Здобувач Вячеслав ХРОПОСТ

Від господарства:
ФГ «ВІТЧИЗНА-ТИНИЦЯ»



Сергій РИЖЕНКО

Додаток Б



УКРАЇНА

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ

ВІДОКРЕМЛЕНИЙ ПІДРОЗДІЛ НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
БІОРЕСУРСІВ І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ
«НІЖИНСЬКИЙ АГРОТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

16600, Чернігівська обл., м. Ніжин, вул. Шевченка, 10, тел. (04631) 2-52-70, факс (04631) 2-32-61, E-mail: natinai@ukr.net,
Код ЄДРПОУ 34492238

15.11.2024 № 01-Н/1039/1

На № _____ від _____

ДОВІДКА

про впровадження результатів наукового дослідження

Хропостя Вячеслава Івановича

Наукові та науково-практичні результати й рекомендації щодо досліджень і напрацювання Вячеслав ХРОПОСТ в частині, пов'язаній з оптимізацією геометричних параметрів деталей для зменшення деформацій, підвищення міцності, використовуються в освітньому процесі денної та заочної форми навчання здобувачів факультету інженерії та енергетики ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут».

Апробація результатів дослідження підтверджує їх наукову і практичну значущість, доводить доцільність подальшого їх упровадження в освітній процес з метою підвищення ефективності підготовки здобувачів освітнього ступеня «Бакалавр» спеціальності 208 «Агроінженерія».

Т.в.о. директора інституту



Ірина ДЕМЧУК

Додаток В

Застосування програмного продукту “Mathematica” для символьних обчислень і перетворень

Параметричні рівняння торса (4.21):

$$\begin{aligned}
 X &= \int \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}} \left[\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'[s]^2}}{\text{Cos}[\beta[s]]} ds \right] \star \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] ds + u \star \int \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}} \left[\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'[s]^2}}{\text{Cos}[\beta[s]]} ds \right] \star \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] \\
 Y &= \int \underset{\text{синус}}{\text{Sin}} \left[\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'[s]^2}}{\text{Cos}[\beta[s]]} ds \right] \star \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] ds + u \star \int \underset{\text{синус}}{\text{Sin}} \left[\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'[s]^2}}{\text{Cos}[\beta[s]]} ds \right] \star \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] \\
 Z &= \int \underset{\text{синус}}{\text{Sin}}[\beta[s]] ds + u \star \int \underset{\text{синус}}{\text{Sin}}[\beta[s]]
 \end{aligned}$$

Для знаходження першої квадратичної форми поверхні потрібно знайти частинні похідні цих рівнянь. Команда для знаходження частинної похідної по змінній s для першого рівняння (для двох інших команди аналогічні):

$$\partial_s \left(\int \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}} \left[\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'[s]^2}}{\text{Cos}[\beta[s]]} ds \right] \star \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] ds + u \star \int \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}} \left[\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'[s]^2}}{\text{Cos}[\beta[s]]} ds \right] \star \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] \right)$$

Знайдені частинні похідні:

$$\begin{aligned}
 X'_s &= \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}} \left[\int \underset{\text{секанс}}{\text{Sec}}[\beta[s]] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} ds \right] (\underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] - u \underset{\text{синус}}{\text{Sin}}[\beta[s]] \beta'[s]) - \\
 &\quad u \underset{\text{синус}}{\text{Sin}} \left[\int \underset{\text{секанс}}{\text{Sec}}[\beta[s]] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} ds \right] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} \\
 Y'_s &= \underset{\text{синус}}{\text{Sin}} \left[\int \underset{\text{секанс}}{\text{Sec}}[\beta[s]] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} ds \right] (\underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] - u \underset{\text{синус}}{\text{Sin}}[\beta[s]] \beta'[s]) + \\
 &\quad u \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}} \left[\int \underset{\text{секанс}}{\text{Sec}}[\beta[s]] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} ds \right] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} \\
 Z'_s &= \underset{\text{синус}}{\text{Sin}}[\beta[s]] + u \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] \beta'[s]
 \end{aligned}$$

Для отримання коефіцієнта G першої квадратичної форми знаходимо суму квадратів знайдених частинних похідних згідно (4.34):

$$\begin{aligned}
& \left(\underset{\text{косинус}}{\text{Cos}} \left[\underset{\text{секанс}}{\int \text{Sec}[\beta[s]] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} ds} \right] (\underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] - \underset{\text{синус}}{u \text{Sin}[\beta[s]]} \beta'[s]) - \right. \\
& \quad \left. \underset{\text{синус}}{u \text{Sin}} \left[\underset{\text{секанс}}{\int \text{Sec}[\beta[s]] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} ds} \right] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} \right)^2 + \\
& \left(\underset{\text{синус}}{\text{Sin}} \left[\underset{\text{секанс}}{\int \text{Sec}[\beta[s]] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} ds} \right] (\underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] - \underset{\text{синус}}{u \text{Sin}[\beta[s]]} \beta'[s]) + \right. \\
& \quad \left. \underset{\text{косинус}}{u \text{Cos}} \left[\underset{\text{секанс}}{\int \text{Sec}[\beta[s]] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} ds} \right] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} \right)^2 + (\underset{\text{синус}}{\text{Sin}}[\beta[s]] + \underset{\text{косинус}}{u \text{Cos}}[\beta[s]] \beta'[s])^2 = 1 + k^2 u^2
\end{aligned}$$

Частинні похідні по змінній u знаходяться аналогічно (наводимо готовий результат):

$$X' u = \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}} \left[\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'[s]^2}}{\underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]]} ds \right] \star \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]]$$

$$Y' u = \underset{\text{синус}}{\text{Sin}} \left[\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'[s]^2}}{\underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]]} ds \right] \star \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]]$$

$$Z' u = \underset{\text{синус}}{\text{Sin}}[\beta[s]]$$

Сума квадратів частинних похідних по змінній u є виразом коефіцієнта E згідно (4.34). Він дорівнює одиниці:

$$\left(\underset{\text{косинус}}{\text{Cos}} \left[\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'[s]^2}}{\underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]]} ds \right] \star \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] \right)^2 + \left(\underset{\text{синус}}{\text{Sin}} \left[\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'[s]^2}}{\underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]]} ds \right] \star \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] \right)^2 + (\underset{\text{синус}}{\text{Sin}}[\beta[s]])^2 = 1$$

Визначаємо вираз середнього коефіцієнта першої квадратичної форми згідно середнього виразу (4.34):

$$\begin{aligned}
& \left(\underset{\text{косинус}}{\text{Cos}} \left[\underset{\text{секанс}}{\int \text{Sec}[\beta[s]] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} ds} \right] (\underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] - \underset{\text{синус}}{u \text{Sin}[\beta[s]]} \beta'[s]) - \right. \\
& \quad \left. \underset{\text{синус}}{u \text{Sin}} \left[\underset{\text{секанс}}{\int \text{Sec}[\beta[s]] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} ds} \right] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} \right) * \left(\underset{\text{косинус}}{\text{Cos}} \left[\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'[s]^2}}{\text{Cos}[\beta[s]]} ds \right] * \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] \right) + \\
& \left(\underset{\text{синус}}{\text{Sin}} \left[\underset{\text{секанс}}{\int \text{Sec}[\beta[s]] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} ds} \right] (\underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] - \underset{\text{синус}}{u \text{Sin}[\beta[s]]} \beta'[s]) + \right. \\
& \quad \left. \underset{\text{косинус}}{u \text{Cos}} \left[\underset{\text{секанс}}{\int \text{Sec}[\beta[s]] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} ds} \right] \sqrt{k^2 - \beta'[s]^2} \right) * \left(\underset{\text{синус}}{\text{Sin}} \left[\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'[s]^2}}{\text{Cos}[\beta[s]]} ds \right] * \underset{\text{косинус}}{\text{Cos}}[\beta[s]] \right) + \\
& (\underset{\text{синус}}{\text{Sin}}[\beta[s]] + \underset{\text{косинус}}{u \text{Cos}}[\beta[s]] \beta'[s]) * (\underset{\text{синус}}{\text{Sin}}[\beta[s]]) = 1
\end{aligned}$$

Згідно знайдених коефіцієнтів перша квадратична форма поверхні має вигляд (4.35).

Додаток Г

Застосування програмного продукту “MatLab” для побудови схеми розташування гвинтоподібних ножів на подрібнювальному барабані (рис. 2.9,б).

Введення вихідних даних – конструктивних параметрів ножа:

```
L=0.72;R=0.25;tau=70*pi/180;fi=65*pi/180;alo=L/(R*tan(tau));psi=alo;
```

Введення меж зміни незалежних змінних u і α поверхні гвинтоподібного ножа:

```
[u,al]=meshgrid(0:0.1:0.1,0:pi/100:alo);
```

Тіло програми, яка в циклі шість раз буде поверхню окремого ножа з поворотом його навколо осі барабана на 60° :

```
hold on;
b=R*tan(tau);
for n=0:1:5
zz=R*sin(al)-u.*sin(al+fi);
yy=R*cos(al)-u.*cos(al+fi);
x=b*al;
y=yy*cos(n*psi)-zz*sin(n*psi);
z=yy*sin(n*psi)+zz*cos(n*psi);
daspect([1 1 1])

mesh(x,y,z,'EdgeColor','k')
end
```

Дві окремі програми, які будують коло діаметром подрібнювального барабана на його торцях:

```
s=[0:pi/1000:2*pi];
```

```
z=R*sin(s);
y=R*cos(s);
x=0*s;
hold on
plot3(x,y,z,'k-')
daspect([1 1 1])
```

```
s=[0:pi/1000:2*pi];
```

```
z=R*sin(s);
y=R*cos(s);
x=0*s+L;
hold on
plot3(x,y,z,'k-')
daspect([1 1 1])
```

Скрін програми із середовища “MatLab”:

```

L=0.72;R=0.25;tau=70*pi/180;fi=65*pi/180;alo=L/(R*tan(tau));psi=alo;
[u,al]=meshgrid(0:0.1:0.1,0:pi/100:alo);

hold on;
b=R*tan(tau);|
for n=0:1:5
zz=R*sin(al)-u.*sin(al+fi);
yy=R*cos(al)-u.*cos(al+fi);
x=b*al;
y=yy*cos(n*psi)-zz*sin(n*psi);
z=yy*sin(n*psi)+zz*cos(n*psi);
daspect([1 1 1])

mesh(x,y,z, 'EdgeColor', 'k')
end

s=[0:pi/1000:2*pi];

z=R*sin(s);
y=R*cos(s);
x=0*s;
hold on
plot3(x,y,z, 'k-')
daspect([1 1 1])

s=[0:pi/1000:2*pi];

z=R*sin(s);
y=R*cos(s);
x=0*s+L;
hold on
plot3(x,y,z, 'k-')
```