Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О.

ТЕОРІЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Київ – 2017

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСІРСІВ І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ

Кафедра конструювання машин і обладнання

ТЕОРІЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 133 – «ГАЛУЗЕВЕ МАШИНОБУДУВАННЯ»

Київ - 2017

УДК 621.873

Рекомендовано Вченою радою Національного університетут біоресурсів і природокористування України (протокол № 9 від 22 березня 2017 р.).

УКЛАДАЧІ

Вячеслав Сергійович Ловейкін, Юрій Олександрович Ромасевич

РЕЦЕНЗЕНТИ

Войтюк Валерій Дмирович, доктор технічних наук, професор, директор НДІ техніки, енергетики та інформатизації АПК НУБіП України, член Польської академії наук, академік Академії інженерних наук України;

Гайдайчук Віктор Васильович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури;

Чабан Віталій Васильович, доктор технічних наук, професор, професор кафедри інженерної механіки Київського національного університету технологій та дизайну.

Ловейкін В.С.

Ло 68 Теорія технічних систем / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич. – К.: ЦП „КОМПРИНТ”, 2017. – 291 с.

ISBN

У запропонованому навчальному посібнику викладено основи теорії технічних систем. Значна увага приділена побудові фізичних і математичних моделей технічних систем. Розглянуті основні положення методів синтезу, аналізу і керування технічними системами. Методи ілюструються прикладами розв‘язування задач для конкретних технічних систем.

Навчальний посібник призначений для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальністю 133 – «Галузеве машинобудування», а також може бути корисним для аспірантів і слухачів факультетів підвищення кваліфікації.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ВСТУП

Підвищення соціально-економічного розвитку країни обумовлює інтенсифікацію промислового і сільськогосподарського виробництва на базі науково-технічного прогресу і впровадження ефективних методів керування. Це приводить до необхідності розглядати процеси промислового і сільськогосподарського виробництва як системи. Особливо це відноситься до процесів створення нових і модернізації існуючих технічних систем із забезпеченням їх ефективного функціонування.

Виходячи з основних положень теорії систем, будь-яка система представляється сукупністю елементів, які знаходяться у відношеннях і зв’язках між собою і утворюють певну цілісність, єдність з метою досягнення певної мети. При цьому вважається, що зв’язки між окремими елементами системи являють собою взаємодіючі в часі процеси, які певним чином об’єктивно організовані, тобто мають свій порядок. Цей порядок базується на причинно-наслідкових зв’язках між явищами. В теорії систем причинний процес називають входом, а процес-наслідок – виходом. Іншим фундаментальним поняттям теорії систем є поняття стану системи.

На базі цих понять теорії систем розв’язуються задачі моделювання, аналізу, синтезу і керування технічних систем різної фізичної природи.

Запропонований навчальний посібник складається з дев’яти розділів.

Перший розділ присвячений основним поняттям і визначенням теорії систем. Показано зв’язок цієї теорії з іншими системними дисциплінами: системний аналіз і системний підхід. Розглянуто проблеми розв’язування основних задач теорії систем. Наведено класифікацію систем, їх функції, будову і структуру, а також основи їх формального опису.

В другому розділі дано визначення технічної системи. Наведено приклади організаційно-виробничої системи, системи взаємодії "машина-навколишнє середовище", системи машин для виконання заданого технологічного процесу, а також системи робочої машини, яка складається з окремих підсистем. Показано, що при розв'язуванні задач моделювання, аналізу, синтезу і керування будь-яку з цих систем необхідно розглядати з позиції теорії систем.

В третьому, четвертому та п'ятому розділах розглянуто питання моделювання технічних систем. Наведено класифікацію моделей. Значна увага приділена питанням фізичного і математичного моделювання механічних систем. Наведено приклади моделювання конкретних технічних систем.

Шостий та сьомий розділи присвячено аналізу і синтезу технічних систем. Показана суть задач аналізу і синтезу систем і наведена структура їх розв'язування. Дано визначення понять оптимального і неоптимального синтезу технічних систем. Розглянуто деякі проблеми, що виникають при практичному розв'язуванні задач оптимального синтезу. Розглянуто метод морфологічного аналізу і синтезу технічних систем. Наведено конкретні приклади.

У восьмому та девятому розділах наведено сутність та класифікацію задач керування технічними системами. Значна увага приділена задачам оптимального керування: викладено їх постановку, проаналізовано критерії оптимізації, вказані методи розв'язування задач та їх особливості.

Головна мета, яку поставили автори при написанні цієї книги, полягала в тому, щоб виробити у читача здатність системного розгляду задач технічних систем і дати конструктивні методи їх розв'язування. Для цього необхідно розглядати технічну систему як процес взаємодії її елементів в часі і чітко представляти предмет теорії і її основні задачі.

Всі розділи написані авторами сумісно. Деякі результати розділів 1-7 отримані за сприяння професорів Назаренка І.І. та Онищенка О.Г. Розділ 9 написаний сумісно Ловейкіним В.С., Ловейкіним А.В. та Ромасевичем Ю.О.

1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ СИСТЕМ

1.1. Основні поняття і визначення в теорії систем

Поняття "система" походить від грецького слова sistema, що означає ціле, яке складене з частин, або з’єднання (сполучення). Сучасне поняття системи сформульовано в рамках загальної теорії систем. Під ним розуміють множину елементів, які знаходяться у відношеннях і зв’язках між собою і утворюють деяку цілісність, єдність для досягнення поставленої мети. В цьому випадку мета являє собою сукупність результатів, які визначаються призначенням системи. Наявність мети заставляє зв’язувати елементи в систему, тобто виникає потреба цілісності - найбільш важливої властвості системи. Елемент належить системі тому, що він зв’язаний з іншими її елементами, так що множину елементів, які складають систему, неможливо розділити на деяку підмножину. Усунення з системи елемента або сукупності елементів призводить до зміни її властивості в напрямку, відмінному від мети.

Термін "система" з’явився в науковій літературі давно. Найбільш широко цей термін використовувався в механіці, де позначав матеріальну систему, тобто сукупність матеріальних точок, які підпорядковані деяким зв’язкам. Основний інтерес для цих систем представляють задачі динаміки, які виявляють причинно-наслідковий механізм їх руху. Закони динаміки (або по сучасній термінології – закони функціонування механічних систем) були отримані довгим індуктивним шляхом. Висунуті гіпотези перевірялись на багаточисельних дослідах. Деякі з цих дослідів стали класичними. Перевірялись також багаточисельні наслідки висунутих гіпотез. Все це було реалізовано завдяки існуючій в механіці, а також в більшості інших розділів фізики можливості ставити "чисті досліди", тобто усувати шкідливі фактори. Крім того, умови могли бути відтворені з досить високою точністю в інший час і в іншому місці.

Останнім часом в літературі досить широко використовується три "системних" поняття: "системний аналіз", "системний підхід" і "теорія систем". Між ними досить часто ставлять знак тотожності, що призводить до деякої плутанини. Оскільки в подальшому ми будемо говорити про теорію систем, то нам необхідно чітко визначити всі ці терміни.

Слово "система" і пов'язані з ним терміни отримали останнім часом широке розповсюдження. Це виникло тому, що все більше і більше виникає потреба вивчення складних комплексів (систем). Така необхідність визначається різким ускладненням створюваних технічних конструкцій, пристроїв, технологій і всієї сукупності господарських зв'язків, з якими доводиться мати справу економістам і господарським керівникам. Потреба вивчення біологічних об'єктів і проблем екології, які з кожним роком стають все більш і більш актуальними, також приводить до дослідження складних систем.

На потребу вивчення складних систем виникла дисципліна – "системний аналіз", яка є продовженням дослідження операцій [1] в умовах невизначеності. Бувають випадки, коли взагалі не вдається поставити цілі, або ті цілі які ми бажаємо поставити, нереальні. Приклади подібних ситуацій дає нам економіка, коли плануються одні показники, а в дійсності маємо зовсім інші. В цьому випадку необхідно мати систему моделей, створити такий математичний апарат їх аналізу, який дозволив би реально прогнозувати ті чи інші наслідки наших рішень, оцінити наші можливості при різних альтернативах і, тільки на основі такого системного аналізу, сформулювати цілі. Складність систем, що вивчаються або проектуються, приводить до необхідності створення спеціальної, якісно нової техніки дослідження, яка називається системами імітації – спеціально організованими системами математичних моделей. Ці моделі за допомогою ЕОМ відображають функціонування комплексу, що проектується або вивчається.

Дослідження динаміки того чи іншого процесу, яке дозволяє побачити перспективи і намітити цілі, – це лише один з аспектів системного аналізу. В рамках системного аналізу вивчаються проблеми проектування ієрархічної організації. Будь-які більш-менш складні системи завжди організовані по ієрархічному принципу, бо централізовані обробка інформації і прийняття рішень досить часто бувають неможливими завдяки великому об'єму інформації, яку треба збирати і переробляти. В проектуванні технічних систем задача системного аналізу (задача проектувальника) полягає, перш за все, в розробці самої функціональної схеми (яка може бути реалізована не єдиним способом) і у визначенні окремих цілей системи.

По відношенню до технічних систем значно складнішими системами є народногосподарські комплекси, функціональні елементи яких залежать від того, як керують ними люди. На відміну від машини людина завжди має власні цілі і інтереси, і проектувальнику системи вже не достатньо тільки формулювати цілі для нижніх ланок. Необхідно ще бути впевненим, що ці цілі будуть досягнуті, тобто що нижні ланки виконають вимоги верхніх ланок. А для цього, в свою чергу, повинна бути запроектована спеціальна система.

Теорія ієрархічних систем, яка займається деякими аспектами цієї проблеми, є однією з найважливіших частин системного аналізу.

Таким чином, системний аналіз – це технічна дисципліна, яка розвиває методи проектування складних технічних і народногосподарських систем, організаційних структур і т.д.

Поряд з терміном "системний аналіз" значне розповсюдження отримав інший термін "теорія систем". Виникнення "теорії систем" пов'язують з іменем відомого біолога Людвига фон Бертеланфі [2], який у п'ятдесятих роках в Канаді організував центр системних досліджень і опублікував велику кількість робіт, в тому числі і книг, в яких намагався знайти те загальне, яке притаманне будь-яким досить складним організаціям матерії, як біологічної, так і суспільної природи. Однак значно раніше російський вчений А.А. Богданов створив теорію організації [3]. В цій роботі А. А. Богданов ввів поняття організації як одне з початкових понять. Матерія існує в часі і в просторі. Вона завжди має ту або іншу організацію. В той же час і організацію неможливо уявити без матеріального носія. Основу для побудови теорії А. А. Богданов бачив в тому, що, незважаючи на фантастичну різноманітність матеріала, який існує в природі, кількість архітектурних або організаційних форм відносно невелика. Виходячи з цього, теорію систем можна трактувати як методологію науки, яка є загальною теорією.

Крім того, існує поняття "системний підхід", яке відображає деякі тенденції в створенні систем. В розвитку науки завжди пролягають дві лінії - аналіз і синтез. Ми завжди бачимо прагнення до аналізу – вивченню конкретних фактів, проникненню в глибину явища, яке вивчається, розкриттю структури того чи іншого явища і т.д. Поряд з цим завжди існує прагнення створити синтезуючі теорії, які дозволяють об'єднати різні факти, побачити перспективи того чи іншого процесу, його зв'язки з іншими явищами і т.д.

В різні періоди часу значення підходів було різним. Останнім часом, коли на людство навалилась лавина нових фактів, увага до синтезуючих побудов стала особливо важливою. Потреба не просто вивчати явище або факт, а встановлювати його зв'язок з іншими фактами і привела до появи спеціального терміну "системний підхід". Дослідник завжди прагнув по можливості системно підходити до вичення того або іншого явища. Однак він не завжди міг мати в своєму розпорядженні необхідний інструмент. Тепер у вік ЕОМ ці можливості різко зросли. Звідси, як наслідок, і прагнення до вивчення явища у всій його повноті, у зв'язку з іншими явищами. Системний підхід безперервно стимулюється потребами практики, яка висуває все більш складні проекти, що вимагають аналізу міжгалузевих і міждисциплінарних проблем.

З розглянутих системних понять можна зробити висновок, що найбільш загальним теоретичним терміном є теорія систем, яка є основою для більш практичних понять: системний аналіз і системний підхід. Тому теорію систем можна вважати базовою теоретичною дисципліною, яка свої основні положення реалізує в більш практичних дисциплінах: "системний аналіз" і "системний підхід". В зв’язку з цим далі ми будемо мати справу тільки з теорією систем.

1.2. Класифікація систем

Класифікацію систем можна проводити за різними ознаками. На сьогоднішній день дати чітку завершену класифікацію систем неможливо, бо науки, що займаються дослідженням систем, знаходяться в стадії розвитку. До цих наук належить і теорія систем, яка направлена на розробку загальних теоретичних положень моделювання систем, їх дослідження з метою визначення властивостей і можливих варіантів поведінки, створення систем для виконання необхідних функцій з заданими властивостями і керування з метою забезпечення необхідної поведінки систем.

Виходячи із загального розгляду систем, останні можна розділити на два великих класи: матеріальні і абстрактні.

Матеріальні системи поділяються на системи неорганічної природи (фізичні, хімічні, геологічні, технічні і т.д.) та живі системи (найпростіші біологічні системи, організми, популяції, види, екосистеми). Особливий клас матеріальних живих систем – соціальні системи (від найпростіших соціальних об’єднань до соціально-економічної структури суспільства).

Абстрактні системи – це поняття, гіпотези, теорії, наукові знання про системи, лінгвістичні, логічні та інші системи.

Крім розглянутої класифікації, системи можуть бути розділені за функціональними і просторовими ознаками, типу складності системи, виду моделювання і т.д.

Систему виділяють із зовнішнього світу або за просторовими, або за функціональними ознаками. Система, як правило, має просторову або функціональну замкненість. Це означає, що можна провести межу або в просторі компонентів цієї системи, або в просторі її функцій, з однієї сторони від якої знаходиться система, а з іншої – зовнішнє середовище. При цьому властивості системи відмінні від властивостей зовнішнього середовища.

Наведемо декілька прикладів систем: 1) Сонячна система; 2) живий організм; 3) обчислювальний центр; 4) промислове підприємство; 5) гідравлічна схема; 6) карний кодекс держави; 7) система лінійних рівнянь; 8) галузь промисловості; 9) система соціального забезпечення; 10) операційна система ЕОМ; 11) автоматизована система керування технологічним процесом; 12) система планування народним господарством; 13) серцево-судинна система. Системи 1 - 7 складаються з матеріальних і абстрактних об'єктів і сформовані за просторовими ознаками. Системи 8 - 13 – за функціональними ознаками. Деякі з перерахованих систем допускають двоякий опис. Так, операційна система може задаватись як своїми функціями (керування процесом проходження задач і розподілення ресурсів даної ЕОМ), так і набором програм, які реалізують ці функції.

В тих випадках, коли система задається просторовими ознаками, дослідник однозначно проводить структуризацію системи. Під структуризацією розуміють виділення в системі двох типів об'єктів – множини елементів і множини зв'язків – і встановлення співвідношень цих множин між собою. Так, основними елементами Сонячної системи є Сонце і планети, а зв'язками – гравітаційна взаємодія між ними. В промисловому підприємстві елементами можуть бути окремі цехи, а зв'язками – матеріальні, енергетичні і інформаційні потоки між ними. В системі лінійних рівнянь елементи – окремі рівняння, а зв'язки – участь одних і тих же змінних в різних рівняннях.

В рамках однієї і тієї ж системи структуризація може бути проведена по-різному. Так, структурною одиницею (елементом) підприємства може бути як цех, так і дільниця або робоче місце. Відповідно до прийнятої структуризації змінюються види зв'язків. Крім того, те, що в одних випадках виступає як вид зв'язку, в іншому може вважатись видом елемента. Наприклад , муфти привода будь-якого кранового механізма можуть розглядатись не як елементи, а як зв'язки між окремими елементами (двигуном і редуктором, редуктором і барабаном і т.д.).

Системи можна розділити на складні і прості. На сьогоднішній день не існує достатньо загального визначення складної системи. Тому, в залежності від типу об'єкта дослідження, використовується те або інше поняття складної системи, яке справедливе для одного об'єкта, але не завжди справедливе для іншого.

До характерних особливостей складних систем можна віднести [6]:

1) велика кількість взаємозв'язаних між собою елементів і підсистем;
2) складність функцій, що виконує система для досягнення мети її функціонування;
3) багатомірність системи, яка обумовлена наявністю великої кількості зв'язків між підсистемами;
4) взаємодія із зовнішнім середовищем і фуннкціонування в умовах дії випадкових факторів;
5) наявність великої кількості критеріїв оцінки якості функціонування системи і її підсистем;
6) багатоманітність структури складної системи, яка обумовлена як різноманітністю структур її підсистем, так і різноманітністю структур об'єднання підсистем в єдину систему;
7) наявність керування, яке має ієрархічну структуру, а також розгалуженої інформаційної мережі і інтенсивних інформаційних потоків;
8) багатоманітність фізичної природи підсистем, які характеризуються їх різною фізичною сутністю;
9) велика розмірність і складність моделі системи;
10) існування ознак, які притаманні системі в цілому, але не властиві кожному окремому елементу (наприклад, резервована система надійна, а її елементи можуть бути ненадійними; замкнена система, яка складається зі стійких елементів, може бути нестійкою);

11) відсутність можливості отримання достовірної інформації про властивості системи в цілому в результаті вивчення її окремих елементів.

Таким чином, складна система являє собою множину взаємозв'язаних і взаємодіючих між собою елементів і підсистем різної фізичної природи, які складають нероздільне ціле, що забезпечує виконання системою деякої складної функції (наприклад, забезпечення ритмічного виробництва автомобілів великим заводом).

Система вважається простою, якщо складається з малої кількості елементів однієї фізичної природи, які утворюють нероздільне ціле, що забезпечує виконання системою деякої простої функції (наприклад, перетворення обертального руху в поступальний, або навпаки).

1.3. Будова, функція і структура системи

Будова системи. Розчленуванння системи на елементи є одним з перших кроків при побудові її формального опису. При цьому елемент виступає як об'єкт, який при даному розгляді системи не підлягає подальшому розчленуванню на окремі частини. Таким чином, елемент – це мінімальний неподільний об'єкт.

Неподільність елемента – це поняття, але не фізична властивість. Оперуючи поняттям "елемент", дослідник залишає за собою право перейти на інший рівень розгляду питань і досліджувати самі елементи та їх склад, а це свідчить про фізичну роздрібленість елементів. Таким чином, об'єкти називаються елементами по домовленості, яка приймається з метою дати відповідь на конкретні питання, що стоять перед дослідниками. Зміна задач дослідження може вимагати розчленування елементів на основні частини або об'єднання декількох елементів в один. Так, при дослідженні надійності роботи вантажопідйомного крана елементами системи вважаються окремі агрегати механізмів: двигуни, гальма, редуктори, муфти, барабани і т.д., а для дослідження кінематики руху вантажу окремими елементами можуть бути механізми підйому і зміни вильоту вантажу, повороту і переміщення крана, в склад яких входять окремі агрегати. Тобто в другому випадку здійснено об’єднання декількох агрегатів в один механізм на функціональній основі і система крана представлена у вигляді чотирьох елементів (механізмів). В ряді випадків, наприклад при дослідженні міцнісних характеристик крана, агрегати останнього розчленовуються на окремі деталі. При цьому кількість елементів системи значно збільшується, зв’язки між елементами ускладнюються. Таку систему можна вже віднести до складної системи.

Для кожного елемента тієї чи іншої системи характерні такі властивості, які визначають його взаємодію з іншими елементами або впливають на властивості системи в цілому.

В ряді випадків складні системи розділяються за просторовими або функціональними ознаками ієрархічно на підсистеми. Такі підсистеми являють собою сукупність елементів. Формально будь-яку сукупність елементів системи з їх зв’язками можна розглядати як підсистему. Однак використання цього поняття найбільш ефективне, якщо підсистема є достатньо самостійною частиною складної системи, але мета її функціонування підпорядкована загальній меті функціонування системи. Розчленування складних систем на підсистеми називається декомпозицією систем. Цей процес поки що не формалізовано і він має евристичний характер. Правильне виділення підсистем дозволяє спростити і полегшити процеси моделювання, аналізу, синтезу і керування систем.

Розглянемо приклад. Нехай система складається з n = 20 елементів, між якими існує $n(n-1)=380$ зв’язків. Розчленуємо (якщо це можливо) систему на 4 підсистеми по 5 елементів в кожній ($n_1=5$). Тоді число зв’язків між елементами однієї підсистеми $n_1(n_1-1)=5\cdot4=20$, а в чотирьох підсистемах буде 20 · 4 = 80 міжелементних (внутрішніх) зв’язків. Підсистеми мають між собою 4 · 3 = 12 зв’язків. Таким чином, в розчленованій системі можна розглядати всього 80 + 12 = 92 зв’язки, що значно менше ніж в нерозчленованій системі. Тому створення, дослідження, передбачення поведінки і т.д. таких систем значно спрощується.

Функція системи і її структура. Реальні системи описують шляхом визначення їх функцій і структур.

Функція системи – це правило отримання результатів, передбачених метою (призначенням) системи. Визначаючи функцію системи, її поведінку описують шляхом використання деякої системи понять: відношення між змінними параметрами, векторами, множинами. Функція встановлює, що робить система для досягнення поставленої мети безвідносно до фізичних засобів (елементів, зв'язків), які складають саму систему і не визначають, яким чином побудована система. Системи вивчають на різних рівнях абстракції, з використанням різних підходів, кожний з яких дає відповідь на ті чи інші питання. В зв'язку з цим, функції системи можуть описуватись з різною ступінню деталізації. Для опису функцій системи використовуються теорії множин, алгоритмів, випадкових процесів, інформації. Якщо система функціонує, то це значить, що вона отримує результати, передбачені призначенням системи.

Реальні складні системи функціонують в умовах дії великої кількості випадкових факторів, які можуть бути як зовнішніми, так і внутрішніми (наприклад, шуми, вібрація, зміна температури, радіація і т. д.). Ці фактори ускладнюють функціонування складних систем, а тому повинні враховуватись при їх створенні і досліджуватись в процесі експлуатації систем.

Структура системи – це фіксована сукупність елементів і зв'язків між ними. В загальній теорії систем під структурою прийнято вважати тільки множину зв'язків між елементами. Тобто під структурою розуміють деяку картину, яка відображає тільки конфігурацію системи безвідносно до складових її елементів. Таке тлумачення її поняття зручне при структурному підході при вивченні властивостей різних систем – систем з паралельними, послідовними, змінними, ієрархічними структурами і зворотніми зв'язками (рис. 1.1).

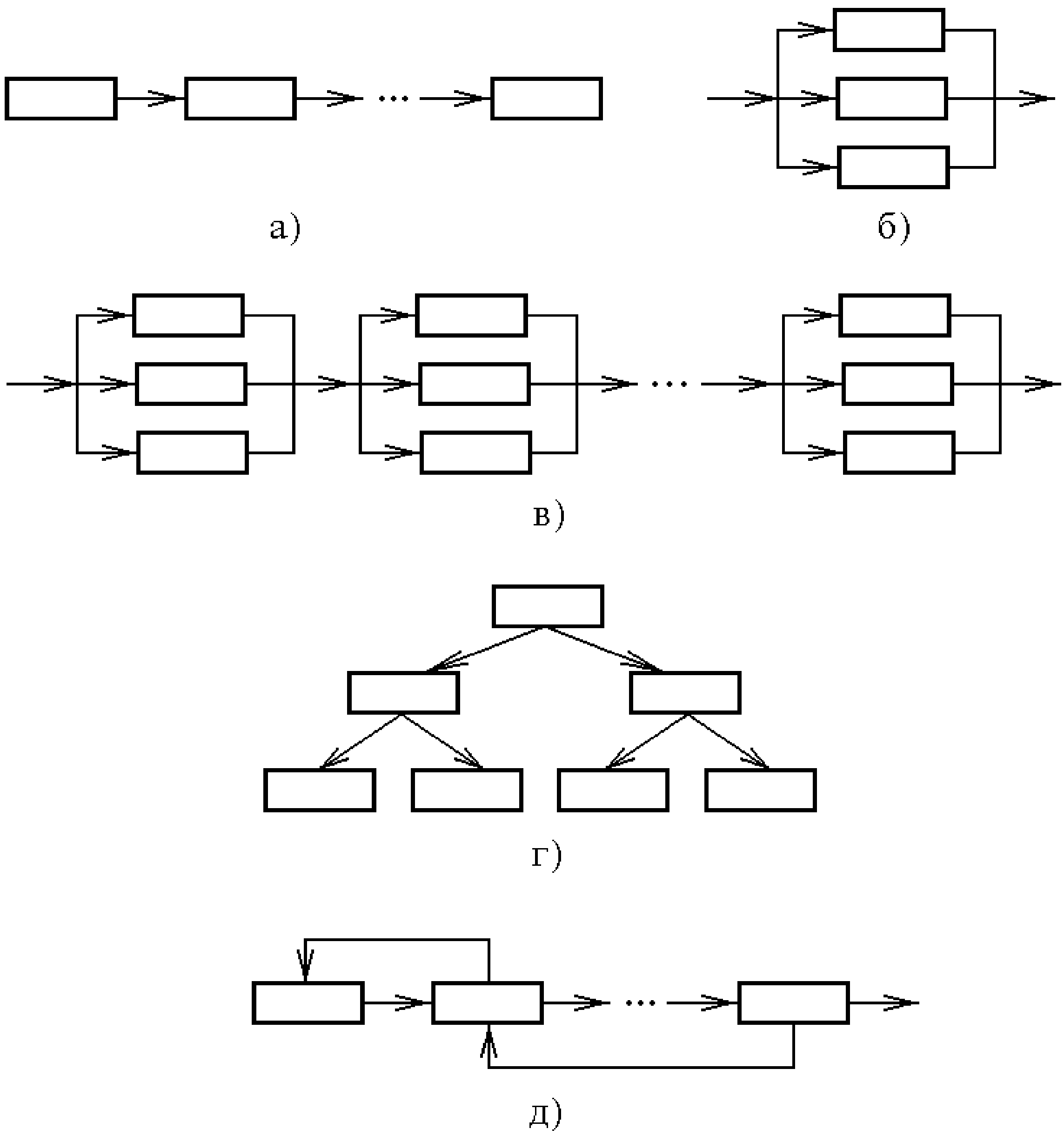


Рис. 1.1. Системи з послідовними (а), паралельними (б), змішаними (в), ієрархічними (г) і зворотніми (д) зв'язками елементів

На практиці поняття "структура" включає в себе не тільки множину зв'язків, але і множину елементів, між якими існують зв'язки. Найбільш часто структура системи зображається у формі графа: елементи системи представляються вершинами графа, а зв'язки – дугами (ребрами) графа (рис. 1.2).

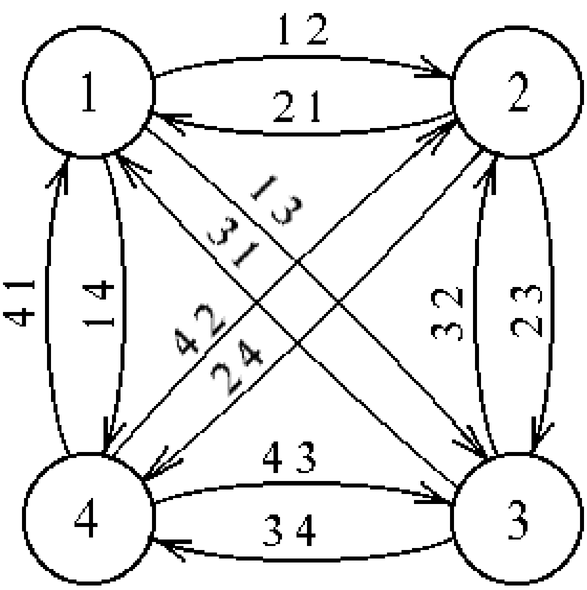


Рис. 1.2. Зображення структури системи у формі графа:
1, 2, 3, 4 - елементи системи;
12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43 - зв'язки між елементами системи

Організація складних систем являє собою процес упорядкованого розміщення множини елементів з урахуванням їх логічних зв'язків з метою здійснення необхідних функцій в складних системах. Звичайно до однієї і тієї ж мети можна прийти різними способами, виходячи з різних принципів організації систем. Кожний принцип організації задає деякий спосіб побудови множини систем, аналогічних за призначенням, але різних за функціями і структурами. Конкретна система являє собою лише приклад реалізації деякого способу організації. Наприклад, більшість сучасних ЕОМ будується на основі одного принципа організації – принципа програмного керування реалізації алгоритма на основі команд, які мають операційно-адресну структуру. Таким чином, організація – поняття більш високого рангу, ніж функція і структура. Це – модель, на основі якої можуть будуватись різні конкретні системи.

Будь-який спосіб побудови функцій, достатніх для досягнення деякої мети (сукупності результатів), називають способом функціональної організації. Спосіб побудови структури складної системи з набору елементів, яка забезпечує реалізацію функцій необхідного класу, називають способом структурної організації. Визначаючи спосіб функціональної організації, виявляють клас функцій, притаманних системам певного призначення (безвідносно до засобів, необхідних для реалізації цих функцій), а визначаючи спосіб структурної організації, виявляють правило побудови структур, що реалізують виявлений клас функцій, які відповідають певному призначенню.

Керування являє собою процес збору, обробки і передачі інформації.

В системі виділяють контури керування, вздовж яких циркулюють потоки інформації. Від елементів керування до пристроїв керування поступає для обробки первинна інформація, а останні видають інформацію для керування.

Існує достатньо великий клас самоорганізуючих (самоналаджуючих) систем, які здатні в результаті дії зовнішнього середовища перейти шляхом послідовної зміни своїх властивостей до деяких стійких станів. До таких систем належать, наприклад, механічні системи зі сталою швидкістю руху, які обладнані регулятором Уатта.

1.4. Предмет теорії систем

Теорія систем являє собою аксіоматичну математичну теорію, в рамках якої розроблено концептуальний апарат і ефективні методи дослідження систем довільної природи. В теорії систем дається математичне визначення її предмета. Це визначення базується на формалізації зв'язків між елементами системи. Якщо формалізовано уявлення про зв'язок між двома елементами, формальний опис системи взаємозв'язаних (взаємодіючих) елементів $\boldsymbol{A_1, ..., A_к}$ перетворюється на композицію таких формальнрмальних зв'язків між відповідними парами елементів ($\boldsymbol{A_i , A_j}$). Зв'язок завжди означає взаємодію елементів. В результаті приходимо до висновку, що система являє собою взаємодіючі в часі процеси.

Трансформація системи привела до математичного визначення її предмета, яке ввів Р. Калман [4]. Він виділив основні поняття і сформулював основні проблеми, з яких виросла, інтенсивно розвивається і знаходить широке практичне застосування сучасна теорія систем.

Для формалізації поняття зв'язку використовуються деякі первинні поняття. Вони відображають деякі сторони організації реальних процесів. Будь-який процес являє собою послідовність в часі реальних явищ. При цьому він не є абсолютно довільною послідовністю: явища якимсь чином об'єктивно організовані. Ця організація, порядок і є змістом поняття "система". В самому загальному вигляді цей порядок встановлюється двома принципами діалектичного матеріалізму: детермінізмом і причинністю.

"Всі форми реальних взаємозв'язків явищ в кінцевому рахунку складаються на основі загально діючої причинності, поза якою не існує жодне явище дійсності... Причинність загальна, бо немає явищ, які не мали б своїх причин, так і немає явищ, які не породжували б тих або інших наслідків" [5]. Філософське розуміння детермінізму тісно пов'язане з поняттям причинності. "Центральним ядром детермінізму служить положення про існування причинності, тобто такого зв'язку явищ, в якому одне явище (причина) при досить певних умовах з необхідністю породжує інше явище (наслідок)" [5].

При математичному формулюванні цих положень поняття причинності відображається в понятті стану і властивостей закона зміни стану, а поняття "певні умови" – в понятті входу. Причинно-наслідковий зв'язок, який задовольняє принципам детермінізму і причинності означає, по-перше, що жодне реальне явище не виникає спонтанно, довільно, завжди є ,передуюче йому в часі, інше реальне явище, яке його визиває. По-друге, жодне явище, яке реалізувалось в даний момент часу, не залежить від того, які реальні явища пройдуть в моменти часу, що настануть за вказаним (в теорії систем цю властивість називають причинністю). Та обставина, що в даний момент реалізувалось певне явище, а не якесь інше, вказує на наявність певних основ для реалізації саме цього явища. В цьому виражається принцип детермінізму реальних процесів.

Неможливість довільного виникнення явища приводить при формалізації закономірності поведінки процесу до необхідності введення іншого процесу, який знаходиться з даним в причинно-наслідковому зв'язку. В теорії систем причинний процес називають входом, а процес-наслідок – виходом.

Іншим фундаментальним поняттям теорії систем є поняття стану. В літературі, присвяченій теорії систем, концепції стану придається особлива увага. З одного боку, будь-яка природничо-наукова теорія використовує це поняття, а з іншого – ніхто не бачив і не виміряв стан реальних об'єктів (процесів). Експериментально встановлено, що фізичні властивості об'єктів змінюються в залежності від стану і ці властивості завжди можна ідентифікувати. Однак сам стан завжди скритий. Наявність стану можна обгрунтувати різними способами.

Реальна система завжди включає два процеси, один з яких залежить від іншого. Разом з тим, при формальному аналізі характеру залежності виходу від входу виявляється, що безпосереднього зв'язку між ними немає. Дійсно, реальна подія в момент часу t не може залежати від того, що в цей момент реально не існує. Події, які пройшли в процесі-вході в моменти τ, передуючі моменту t, в момент t не є реальністю. Тому подія, яка являє собою конкретне значення виходу в момент t, не залежить від значень входу в моменти $\tau < t$. Разом з тим, вихід в момент t також не залежить від входу, який реалізується в той самий момент t, оскільки вплив одного явища на інше не може бути миттєвим, розповсюдження сигналу завжди проходить з кінцевою швидкістю. Причина і наслідок не можуть виникати одночасно.

З одного боку, вихід залежить від входу, а з іншого – не залежить. Вирішення цього протиріччя полягає в тому, що залежність виходу від входу є опосередкованою. Це показує, що існують об'єкти, які зв'язують всю попередню історію входів-причин до моменту ***t*** і вихід в цей момент. Такі об'єкти називають станами. Таким чином, конкретною причиною явища в процесі-виході, основою реалізації саме цього явища слід вважати деякий стан (детермінізм).

В кожний момент ***t*** система характеризується деяким станом-елементом її множини станів, який однозначно визначає значення виходу в цей момент ***t***, і це – одна з аксіом теорії систем. Вплив входу на вихід зводиться до залежності стану в кожний момент ***t*** від процесу-виходу, який реалізується до цього моменту ***t***, тобто в стані накопичуються всі причини, що реалізувались в минулому і які визначають теперішній стан. Якщо в конструкції поняття системи використання процесів входу і виходу було обумовлено фізичними уявленнями про функціонування системи, то поняття стану має відношення до закону формування виходу. Об'єкт, що взаємодіє з системою, може здійснити цю взаємодію тільки через вхід і вихід системи, а встановити безпосередній зв'язок з процесом в просторі станів неможливо. Знання, в якому стані знаходиться система в деякий момент часу, може бути отримане лише в результаті розв'язування деякої теоретико-системної задачі.

Крім входу, стану і виходу є ще два об'єкти, які необхідні при побудові поняття системи. Поняття системи також містить обмеження на можливі процеси. Це обмеження виражається так званими відображенням виходу і перехідним відображенням. Оскільки вихід однозначно визначається станом, то існує зв'язок між ними, який виражається відображенням з множини станів в множину значень, що приймаються виходом, яке називається відображенням виходу. Аналогічно існує зв'язок між входом і станом. Якщо в момент t_0 система характеризувалась станом x^0, а в момент $t_1 > t_0$ – станом x^1, причому в моменти часу τ, де $t_0 < \tau < t_1$, вхід приймав деякі значення u

(τ), то зміна стану саме в стан x^1, а не в будь-який інший, визивається дією визначеного закону поведінки системи. Іншими словами, існує ще одна характеристика – закон, якому підпорядковується поведінка системи в просторі станів. В процесі формалізації цей закон можна описати у вигляді відображення, яке кожному стану і кожному входу ставить у відповідність якийсь стан, причому це відображення залежить від двох моментів часу і від параметрів системи. Воно називається перехідним відображенням.

Таким чином, конструкція поняття системи включає первинні поняття входу u (t), стану x (t) і виходу y (t), а також відношення між цими поняттями, вираженими відображеннями виходу і переходами (рис. 1.3).

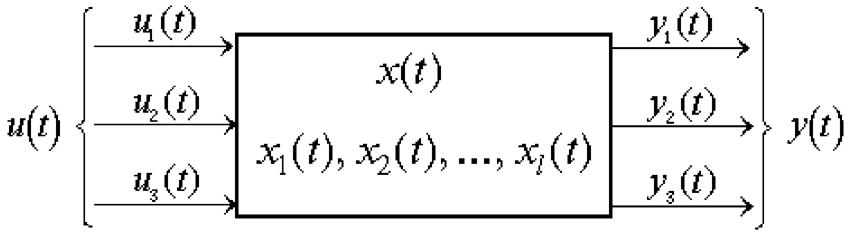


Рис 1.3. Система як перетворювач входу у вихід через свій стан

Знання множини станів, перехідного відображення і відображення виходу дозволяє відповісти на такі питання: 1) яку поведінку може мати система; 2) як необхідно підійти до розв’язування задачі про передбачення поведінки системи; 3) як розв’язати задачу забезпечення необхідної поведінки.

Розв’язування цих задач базується на методології і основних ідеях системного дослідження, які включають в себе питання побудови моделі систем, які відображають взаємозв’язки реальних ситуацій, їх аналізу, синтезу і керування.

1.5. Основи формалізму теорії систем

Раніше вже відмічалось, що при формалізації системи використовується три процеси: вхід, вихід і процес в просторі станів. Для математичного завдання процесу необхідно виділити множину його значень і впорядковану множину, що фіксує, в якій послідовності ці значення реалізуються. Досить часто упорядковану множину трактують як час, і тоді мають справу з процесами, які проходять в часі. Упорядкована множина для цих трьох процесів вважається однією і тією ж і називається множиною моментів часу. Вона позначається через T. Через U, Y і X позначають відповідно множини значень входу, виходу і множину станів. Значеннями вхідних $u\ (t)$ і вихідних $y\ (t)$ процесів, а також процесів стану $x\ (t)$ системи в деякий момент часу є відповідно елементи множин U, Y і X: $u\ (t) \in$U, $y\ (t) \in$ Y і $x\ (t) \in$X.

Кожна конкретна система характеризується своєю множиною входів, які є допустимими для цієї системи. Множина всіх реакцій системи, тобто виходів також є характеристикою системи. Конкретний вихід $y\ (t) \in$ Y в кожний момент t повністю визначається станом і тільки станом системи в цей момент $x\ (t) \in$X. Тоді існує відображення елементів множини X в елементи множини Y (X$\rightarrow$Y) таке, що виконується співвідношення

$$y(t) = \eta\big(t,\ x(t)\big), \quad t \in T. \tag{1.1}$$

Тут залежність відображення η від t означає, що характер залежності виходу від стану зі зміною часу може змінитися.

Відсутність залежності виходу y в момент t від $u\ (t)$ можна також інтерпретувати як неможливість за нескінченно малий час, змінюючи вхідну дію, визвати зміну виходу системи. Разом з тим в теорії дискретних по часу систем відображення η інколи визначають і на множині U, тобто співвідношення (1.1) має вигляд

$$y(t_k) = \eta\big(t_k, x(t_k), u(t_k)\big), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Це пояснюється тим, що час реакції виходу на вхід в деяких ситуаціях безмежно малий по відношенню до інтервалу дискретності, і в моделі його можна не враховувати. Відображення η називається відображенням виходу або функцією спостереження.

Відповідно аксіомі стану, в кожний момент t система знаходиться в певному стані, причому стан в моменти $t > \tau$ однозначно визначається станом в момент τ і відрізком входу $u\ (\tau, t)$. В цьому полягає принцип детермінізму (певності) в поведінці систем. При формалізації цієї обставини встановлюється існування набору відображень елементів множини U у множину X (U$\rightarrow$X) для всіх значень параметрів $\tau \in$T, $t \in$T і $\tau < t$. Конкретне відображення, яке відповідає фіксованим τ і t, дозволяє для будь-яких x і будь-яких $u\ (\tau, t)$ визначити стан в момент t, якщо в момент τ система знаходилась в стані $x(\tau)$ і використовувався вхід $u\ (\tau, t)$, по залежності:

$$x\,(t) = \mu_{\tau t}\big(x\,(t), u\,(\tau,t)\big). \tag{1.2}$$

Аксіома однозначної визначеності стану в моменти $t > \tau$ по стану в момент τ і входу $u\ (\tau, t)$ накладає обмеження на набір відображень $\mu_{\tau t}$. Згідно з цією аксіомою кожний стан системи однозначно визначає майбутній стан (детермінізм процесів). Виходячи із залежності (1.2), можна побудувати відображення σ, через яке визначається стан системи

$$x\,(t) = \sigma\big(t; \tau, x\,(\tau), u\,(\tau,t)\big). \tag{1.3}$$

Перехідне відображення σ повинно відповідати вимозі, що $x = \sigma(t; t, x, u)$ при всіх t, x, u, тобто за проміжок часу нульової довжини система не може перейти в інший стан (або в один і той же момент часу система не може знаходитись в двох різних станах). Крім того, відображення σ повинно бути таким, щоб стан в момент t не залежав від значень входу, які поступають в моменти часу, більші момента t.

Виходячи з попередніх залежностей можна дати математичне визначення системи.

Деяка система Σ визначена, якщо задані впорядковані множини моментів часу T, моножини значень входів U, виходів Y і станів X, перехідне відображення σ, яке задовольняє аксіомам узгодженості, детермінізму і причинності, і відображення виходу η такі, що для будь-якого $y(t) \in$ Y існує $x(t) \in$ X і $u(t) \in$ U, для яких при будь-яких τ, де $\tau \le t$, виконується співвідношення

$$y(t) = \eta\left(t, \sigma\left(t; \tau, x(\tau), u(\tau, t)\right)\right), \tag{1.4}$$

і, навпаки, будь-який процес $y(t)$, $t \ge \tau$, отриманий відповідно (1.4), належить Y.

Іншими словами, систему, яка породжує процеси виходів з Y, можна визначити трьома величинами σ, X, η. Ця трійка є виразом закона поведінки системи, введеним Р.Калманом [4]. Більш традиційним є визначення системи шляхом задання співвідношень, які описують відображення σ. Ці співвідношення (рівняння) називають моделлю системи. Однак останнє визначення є менш загальним. Опис системи, наприклад, в термінах диференціальних равнянь вимагає гладкості відображення σ, що в загальному випадку не обов'язкове.

1.6. Проблеми теорії систем

Проблеми, які встають перед системним дослідником, пов'язані з побудовою множини X, відображень σ і η і вивчення їх властивостей. Це коло проблем аналізу систем. Аналіз починають з виявлення всіх факторів, які впливають на поведінку системи, що вивчається. В системному аналізі вони називаються ревалентними факторами. Ця проблема зв'язана з вивченням і описом множин U і Y. Далі встає задача опису динамічних взаємозв'язків між входом і виходом, тобто задача побудови моделі цих зв'язків, яка називається проблемою ідентифікації. Розв'язком цієї проблеми є множина станів X та відображення σ і η.

З проблемою ідентифікації тісно пов'язана проблема представлення системи, де вивчаються можливі описи закономірностей поведінки, тобто можлива форма відображень σ і η. З точки зору синтезу ця проблема полягає в побудові системи, яка реалізує задану вхідно-вихідну поведінку.

Нехай X, σ і η задані або ідентифіковані. Однією з основних цілей отримання X, σ і η є можливість передбачення (прогнозування) поведінки системи. Звичайно, являє інтерес прогноз поведінки виходу $y(t)$. Однак, враховуючи співвідношення (1.1), цю задачу можна звести до прогнозу процесу в просторі станів. Із залежності (1.1) виходить, що передбачення $x(t)$ для $t \geq t_0$ при відомому вході $u(t_0,t)$ є можливим, якщо в момент t_0 відомо x^0. В зв'язку з цим інша проблема теорії систем з точки зору аналізу пов'язана з вивченням розв'язуваності задач знаходження станів системи за спостереженнями входу і виходу, яка називається проблемою спостереження систем.

Нехай зафіксовано вхід u і для знаходження стану в момент t_1 використовується інформація, що отримується виходом тільки в момент t_1. Тоді задача зводиться до розв'язуваності відносно x^1 рівняння виходу системи (1.1) при $y(t_1) = y_1$. Якщо розмірність x^1 дорівнює розмірності x і рівняння в системі (1.1) незалежні, то з цієї системи можна визначити єдиний розв'язок x^1. Однак множина станів системи, звичайно, буває ширше множини Y, в чому й проявляється складність системи. Для систем, в яких X і Y – скінченновимірні лінійні простори, це виражається в тому, що розмірність X більше розмірності Y. Тоді розв'язок рівняння (1.1) не є єдиним, тобто спостережуваному y_1 будуть відповідати різні стани, при яких воно може реалізуватись. Отже, інформації про вихід у фіксований момент t_1 недостатньо для встановлення стану в цей момент, і для розрізнення станів необхідно розширити інформацію досліджень. Для цього необхідно спостерігати вихід більше, ніж в один момент t, наприклад, на всьому інтервалі $[t_0, t_1]$.

Якщо процес $x\,[t_0, t_1]$ однозначно визначає відповідний йому вихід $y[t_0, t_1]$, то існує відображення H_u: $\mathrm{X}_{[t_0,t_1]} \to \mathrm{Y}_{[t_0,t_1]}$. Якби для H_u існувало зворотнє відображення H_u^{-1}, то будь-який спостережуваний вихід $y[t_0, t_1]$ створювався б єдиним процесом $x\,[t_0, t_1]$ і задача оцінки стану була б розв'язною. Для її розв'язування достатньо знайти H_u^{-1}. Якщо H_u відображає різні $x\,[t_0, t_1]$ в один і той же вихід $y[t_0, t_1]$, то оцінити однозначно стан по цьому виходу неможливо. Система, відображення H_u якої є взаємно однозначним, називається спостережною.

Зазначимо, що властивість спостережності залежить від конкретного виду $u(t)$. Тому при оцінці стану виникає не тільки задача синтезу відповідного алгоритму, але і задача знаходження входу $u(t)$, при якому система буде достатньо спостережною. Із визначення достатньо спостережної системи випливає, що спостережність є властивістю відображень σ і η, тобто внутрішньою властивістю системи.

В теорії кінцевих автоматів проблему спостережності, звичайно, називають діагностичною проблемою. Прикладом проблеми спостережності є задача діагностування машин, наприклад, екскаватора. Конкретна несправність – це один з можливих станів, в якому в даний момент знаходиться екскаватор як система. Задача полягає в оцінці цього стану за спостережуваним виходом, наприклад, тиску в гідросистемі і аналізу її робочої рідини і т.п.

З повної t_0-спостережності системи на інтервалі $[t_0, t_1]$ випливає можливість оцінки будь-якого стану в момент t_0 по виходу $y[t_0, t_1]$. Якщо розглянути задачу оцінки стану в момент t_0 по виходу, який спостерігався до моменту t_0, наприклад, по $y[t_{-1}, t_0]$, де $t_{-1} < t_0$, то, оскільки відображення η залежить від t, вона відрізняється від описаної вище задачі. Задачу оцінки стану по виходу, який спостерігався в попередні моменти часу, називають задачею <u>реконструкції</u> або <u>оцінювання систем</u>.

Наступна проблема теорії систем пов'язана з дослідженням питань розв'язування задач формування спеціальної поведінки систем. Якщо задача спостережності виникає з необхідності прогнозування майбутньої поведінки системи, то формування спеціальної поведінки визивається необхідністю задовільнення певних вимог, що накладаються на процес. Останні називають метою, яка ставиться перед системою. При цьому вважається, що в момент початку формування входу процес в системі не задовольняє вимогам, які сформульовані в меті керування.

Впливати на поведінку системи можна тільки входами. Тому у множині входів виділяється підмножина U_1, елементи якої формуються суб'єктом. Отже множина входів розчленовується на дві підмножини U_1 і U_2 одна з яких, що не залежить від суб'єкта, називається <u>збуреннями</u> – U_2, а інша – <u>керуваннями</u> – U_1. Система, мета і вхідні дані, на основі яких повинна розв'язуватись задача знаходження керувань, які забезпечують досягнення мети, називають <u>проблемою теорії керування.</u>

Вимоги до поведінки системи, звичайно, накладають на вихідний процес. Однак, враховуючи співвідношення (1.1), їх завжди можна (і це доцільно при розв'язуванні задач керування) переформувати у вигляді умов, що накладаються на процес в просторі станів.

Однією з найважливіших задач теорії керування є двоточкова гранична задача, яка формулюється наступним чином. Нехай мета керування полягає в тому, щоб в момент $t_1 > t_0$ система знаходилась в стані x^1, причому в момент t_0 вона знаходилась в стані x^0. Необхідно знайти такий вхід $\overline{u}(t) \in \mathrm{U}$, щоб виконувалась рівність

$$x^1 = \sigma\Big(t_1;\ t_0,\ x^0,\ \overline{u}(t)\Big). \tag{1.5}$$

Якщо зафіксувати (t_0, x^0), то для деяких (t_1, x^1) рівняння (1.5) може бути розв’язане, а для інших ні.

Система (t_0, x^0) називається <u>глобально досяжною</u>, якщо для будь-якого x^1 існують $t_1(x^1) > t_0$ і $u(t)$, які задовольняють співвідношенню (1.5).

Система (t_1, x^1) називається <u>глобально керованою</u>, якщо для будь-якого x^0 існують $t_0(x^0) < t_1$ і $\overline{u}(t)$ такі, що виконується співвідношення (1.5).

Якщо можна вказати кінцевий окіл точки x^0 такий, що для всіх x^1 з цього околу виконуються умови досяжності, то кажуть про локальну досяжність. Аналогічно визначається локальна керованість. Можна розглядати поняття керованості і досяжності на заданому кінцевому інтервалі часу. Керованість і досяжність є властивостями перехідного відображення σ. Задачі, які пов’язані з розробкою ефективних критеріїв, що дозволяють по відображенню σ встановлювати, чи є система досить керованою або досить досяжною, складають <u>предмет</u> теорії керування системами.

Важливою проблемою аналізу систем є проблема стійкості. Вона виникає при вивченні питання, чи буде система виконувати свою функцію і призначення в умовах, коли виникають різні збурення, що досить часто є проявом неповного знання про навколишнє середовище і саму систему.

Нехай призначення системи полягає в перетворенні заданого входу u^0, який породжує процес стану x^0 і вихід y^0. Якщо в результаті якихось обставин процес x в просторі станів не співпадає з x^0,тобто $\bar{x}(t_0) = x^0(t_0) + \Delta x(t_0)$, що може бути наслідком того, що в момент t_0 з'явилось відхилення $\Delta x(t_0)$, то виникає питання, чи збігається при $t > t_0$ і $t \to \infty$ процес $\bar{y}(t) = \eta(t, \bar{x}(t))$ до процесу y^0 або буде він до нього достатньо близький чи ні. Вказана залежність буде мати місце, якщо $\sigma\left(t; t_0, x^0 + \Delta x, u^0(t_0, t)\right)$ буде збігатись до $\sigma\left(t; t_0, x^0, u^0(t_0, t)\right)$. Процес $\Delta x(t_0)$ називається незбуреним рухом ситеми, а процес $\bar{x}(t)$ – збуреним рухом. Вивчення властивостей відображення σ, які запезпечують вказану збіжність або їх близькість складають предмет теорії стійкості систем.

Інші проблеми теорії систем є деталізацією основних сформульованих вище проблем. Ці проблеми виникають при синтезі систем з необхідними властивостями. До них відносяться наступні проблеми синтезу: функціонально-структурного і параметричного в просторі станів системи; оптимального програмного керування; оптимальних законів керування, тобто керування, яке формується в кожний момент часу на основі інформації про стан системи в цей момент; законів керування, які забезпечують стійкість системи; зворотнього зв'язку, тобто керування по виходу системи; адаптивних систем, де в процесі керування проходить процес ідентифікації системи, який пов'язаний з оцінкою структурних параметрів; систем розпізнавання або класифікації вхідних даних і т. д. Ряд цих задач буде розглянуто в наступних розділах.

2. ТЕХНІЧНІ СИСТЕМИ

2.1. Основні поняття про технічні системи

Понад три мільярди років триває еволюція живих істот. Близько трьох мільйонів років формувався в них розум, і всього сорок-п’ятдесят тисячоліть становить вік того, хто згодом назвав себе людиною розумною.

Людина завжди дивувалась гармонії природи і вчилась у неї, створюючи дедалі складніші об’єкти, які тепер називають технічними системами.

Технічна система походить від грецького слова "techne" - мистецтво, майстерність. Вона являє собою сукупність засобів, які створюються для здійснення процесів виробництва і обслуговування невиробничих потреб суспільства. Основне призначення технічних систем – повна або часткова заміна виробничих організаційних функцій людини з метою полегшення праці і підвищення її продуктивності. Розрізняють технічні системи виробничі (машини, механізми, інструменти, апаратура керування машинами і технологічними процесами, засоби транспорту, зв’язку, окремі підприємства, виробничі комплекси і т. д.) і невиробничі (побутові, комунальні, наукових досліджень, освіти, культури, військові, медичні і т. д.).

В залежності від принципа дії і будови базових елементів, які здійснюють передачу і перетворення енергії і інформації, технічні системи поділяються на механічні, гідравлічні, електричні, електронні, оптичні і т. д. Більшість технічних систем, як правило, являють собою змішані системи, де використовують елементи різної фізичної природи. Наприклад: електромеханічні, гідромеханічні, оптико-механічні та інші технічні системи.

Серед розглянутих систем особливе місце займають механічні системи. Справа у тому, що практично всі складні технічні системи мають в своєму складі або елементи механічних систем, або цілі підсистеми механічних систем.

Під механічною системою розуміють довільний пристрій, механізм, машину, конструкцію і т. д., в яких передача і перетворення енергії здійснюється за допомогою механічних елементів (валів, зубчастих колес, муфт і т. д.). В ряді випадків до механічної системи можуть бути зведені окремі системи живих істот, наприклад, опорно-рухальна система тварин і людини може бути представлена у вигляді шарнірно-важільного механізму. Ряд інших об'єктів також може бути змодельовано у вигляді механічних систем. Ці системи досить прості, достатньо наглядні і найбільш досліджені.

Розглянемо деякі технічні системи різних рівнів галузі будівельного виробництва.

2.2. Виробничо-організаційна технічна система

Розглянемо будову і характеристики виробничо-організаційної технічної системи на прикладі системи будівництва греблі гідроелектростанції (ГЕС). Ця система служить для забезпечення і керування процесом будівництва і складається з таких господарств (підсистем) (рис. 2.1): кар'єри, залізобетонні заводи, транспортні лінії, укладальний комплекс греблі, постачальний комплекс обладнання, комплекс монтажних і підйомно-транспортних робіт. При будівництві ГЕС найбільш трудомісткими і тривалими є бетонні роботи, тому при розгляді цієї системи найбільшу увагу будемо звертати саме на них.

Система в цілому працює в наступному порядку. Добутий в кар'єрах камінь переробляється в щебінь спеціально підібраною системою машин і відправляється на бетонні заводи для приготування бетону. З інших кар'єрів доставляється пісок, який також використовується для приготування бетону. Для різних робіт існують різні марки бетону, а кожний із заводів має можливість готувати будь-яку з марок. Крім того, на залізобетонних заводах виготовляють необхідні залізобетонні і арматурні конструкції. Кожний з бетонозмішувальних вузлів заводу може готувати будь-яку з марок бетону (марки бетону відрізняються процентним вмістом цементу і добавок), однак для переналадки виробництва з однієї марки на іншу витрачається певний час. Бетон готується кожним з бетонозмішувальних вузлів порціями, які завантажуються в пересувні бетонозмішувачі і по трасі відвозяться на місце будівництва. Розвантажування, укладка і ущільнення бетону проводиться в різних місцях різними машинами (бетоноукладачами, бетононасосами, вантажопідйомними кранами і т. д.) і за різними технологіями, які залежать, крім всього іншого, від етапу будівництва. Із збільшенням висоти греблі змінюється склад машин для укладки і ущільнення бетону, умови під'їзду до них і т. д. Розвантажені бетонозмішувачі їдуть в зворотньому напрямку на бетонні заводи і т. д.

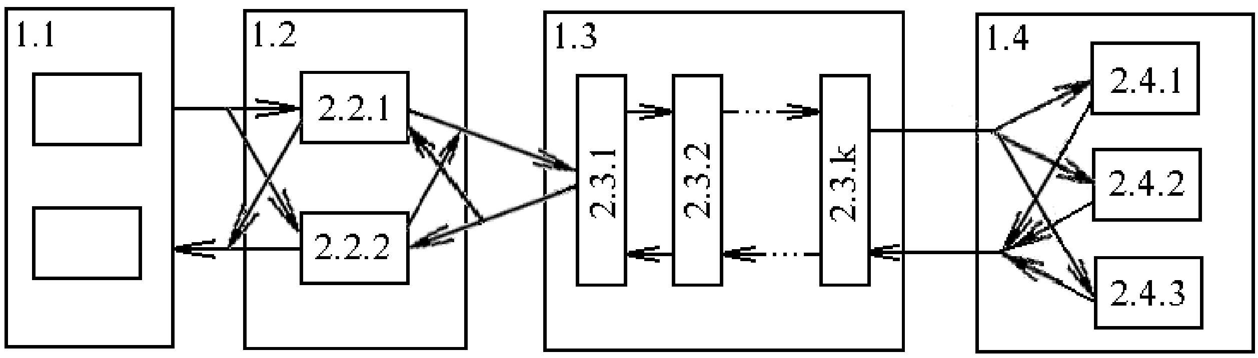


Рис. 2.1. Технічна система будівництва греблі ГЕС

<u>Підсистеми 1-го рівня:</u>

1.1 - кар'єри; 1.2 - бетонні заводи; 1.3 - транспортні зв'язки;

1.4 - комплекси для будівлі греблі.

<u>Підсистеми 2-го рівня:</u>

2.2.1, 2.2.2 - 1-й і 2-й бетонні заводи;

2.3.1 - 2.3.k - ділянки шляху;

2.4.1 - 2.4.3 - розвантажувальні пристрої.

В арматурних цехах готуються арматурні конструкції, які частково спеціальними транспортними засобами відправляються на будівництво греблі, а інша частина металоконструкцій використовується для виготовлення залізобетонних конструкцій. Ці конструкції виготовляються на спеціальних постах, де в форму укладається арматура і бетонна суміш. Після ущільнення і твердіння бетону в пропарочних камерах залізобетонні конструкції відправляються на будівництво греблі спеціальними транспортними засобами. Після розвантажування і монтажу залізобетонних конструкцій підйомними кранами транспортні засоби повертаються на бетонні заводи і цикл їх роботи повторюється.

Щоб мати уявлення про розміри задач, які треба розв'язувати, скажемо, що на будівництві працює декілька заводів, які виготовляють біля 10 марок бетону і декілька десятків типів залізобетонних і арматурних конструкцій; в кар'єрах працюють технологічні лінії із системи машин для виготовлення щебню (бурові машини, дробарки, грохоти, транспортери, навантажувачі) і для добування піску (екскаватори і автомобілі); автотранспортні підприємства (управління механізації) нараховують декілька сот автомобілів і декілька десятків будівельних машин різного призначення; працює більше десятка розвантажувальних машин і машин для укладки бетону на греблі; протяжність автомобільних трас складає декілька десятків кілометрів при достатньо великій завантаженості транспортом, який створює перешкоди при перевезенні вантажів.

Створення подібної системи вимагає розв'язування наступних задач:

1) вибір траси для підвозу бетону і конструкцій до греблі, а також щебню і піску до бетонних заводів (при цьому можливі випадки використання загальнодержавних доріг, прокладка нових, прокладка спеціальних під'їзних шляхів і тунелів і т. д.);

2) вибір кількісного і якісного складу управління механізації;

3) вибір типів залізобетонних заводів, режимів їх роботи, місць розміщення;

4) вибір складу підйомно-транспортних, розвантажувальних і укладочних машин, режимів їх роботи;

5) вибір системи машин для виготовлення щебню і т. д.

Ясно, що в цьому випадку натурні експерименти можливі лише в досить обмеженому об’ємі. Враховуючи унікальність такого будівництва, результати експериментів, що отримані в одних умовах, будуть малокорисними в інших.

Наведений приклад дає деяке уявлення про характер одного з типів складної виробничо-організаційної технічної системи.

Розглянемо більш детально основні характерні риси, які притаманні цій системі.

Навіть при поверхневому розгляді цієї складної технічної системи нам довелось ввести поняття підсистеми як деякої достатньо автономної частини всієї системи. Розчленування складної системи на підсистеми, як правило, здійснюється з певним елементом довільності і залежить як від прийнятих технічних рішень, цілей створення системи, так і від поглядів дослідника на систему. Це, в першу чергу, пояснюється різнорідністю елементів, що складають складну систему. В розглянутому прикладі "транспортна" підсистема, яка відображає рух транспортних засобів по трасі від залізобетонних заводів до місця будівництва, може бути, в свою чергу, розчленована на більш дрібні підсистеми, наприклад, підсистеми перевезення бетону бетонозмішувачами і перевезення спеціальними транспортними засобами арматурних і залізобетонних конструкцій. Ці підсистеми, в свою чергу, можуть бути розділені ще на більш дрібні підсистеми – це підсистеми організації перевезень, технічного обслуговування і ремонту транспортних засобів.

Як в цій виробничо-організаційній системі, так і в інших складних технічних системах одну з основних рис складає взаємодія виділених підсистем. Ця взаємодія виникає в результаті того чи іншого поділу системи на підсистеми. Як вже відзначалось, таий поділ системи на підсистеми має певний елемент довільності. Щоб забезпечити при цьому функціонування всієї системи як єдиного цілого, доводиться тим або іншим способом враховувати результати взаємодії однієї системи з іншою. Звичайно, така взаємодія зводиться до обміну сигналами між підсистемами, який здійснюється по каналах зв'язку, що прокладаються від однієї підсистеми до іншої. Ці канали зв'язку можуть як відповідати реальним каналам, що існують в системі, так і породжуватись прийнятим поділом системи на підсистеми. Крім того, взаємодія здійснюється між зовнішнім середовищем і виділеними елементами системи. Врахування цієї взаємодії аналогічне врахуванню взаємодії між окремими підсистемами, тобто зовнішнє середовище представляється у вигляді деякої підсистеми.

Таким чином, розгляд виробничої організаційної системи будівництва ГЕС показує, що складна технічна система представляється у вигляді багаторівневої конструкції із елементів, що взаємодіють між собою та з зовнішнім середовищем. Тут до елементів 1-го рівня відносяться підсистеми, на які на початку розчленована система, до елементів 2-го рівня - підсистеми, які утворюються при розчленуванні підсистем 1-го рівня, і т. д. до тих пір, поки утворені елементи не стануть простими для дослідження або керування.

Виробничо-організаційна система будівництва греблі ГЕС представлена у вигляді дворівневої конструкції із взаємодіючих елементів (рис. 2.1). На цьому рисунку стрілками показані не дійсні канали зв'язку, а канали, що служать для врахування взаємодії, яка існує між виділеними підсистемами. Фактично обмін сигналами відповідає в даному випадку, наприклад, приходу або виходу одиниці автотранспортного засобу з підсистеми, що розглядається. При цьому самі підсистеми виділені виходячи з реально існуючих особливостей будівництва. Для спрощення прийнято, що працює два бетонних заводи, існує три місця укладки бетону з відповідними механізмами. В дійсності цих елементів може бути значно більше. Взаємодія з зовнішнім середовищем в даному випадку може звестись до відмови роботи заводів і укладочних машин, зміни дорожніх умов, виходячи із метеорологічних умов або інтенсивного руху стороннього транспорту і т. д.

В розглянутій системі підсистеми 1.2.1, 1.2.2, 1.4.1-1.4.3 являють собою не тільки бетонні заводи і розвантажувально-укладальні пристрої відповдно, але фактично включають в себе і транспортні засоби – як ті, що очікують завантаження (відповідно розвантаження), так і ті, що завантажуються (розвантажуються) в даний момент. Аналогічно, підсистеми 1.3.1-1.3.k включають в себе не тільки параметри відповідних ділянок дороги, але і характеристики транспортних засобів, що по них рухаються. Таке представлення складної системи у вигляді багаторівневої конструкції із взаємодіючих елементів має за мету вивчення системи по окремих частинах.

2.3. Технічна система – "середовище-машина"

При розгляді виробничо-організаційної технічної системи будівництва греблі ГЕС ми бачили, що при виконанні тих або інших робіт спостерігається зв'язок між машиною і середовищем, з яким вона взаємодіє. Так, при виготовленні щебню в кар'єрі проводиться ряд робіт: вскришні роботи, які виконуються з метою усунення пустої породи; відділення корисного шару від гірничого масиву і попереднє його розрихлювання для підготовки до навантажувальних робіт; транспортування гірничої маси до місця переробки; подрібнення і сортування кам'яного матеріалу; навантаження матеріалу в транспортні засоби і відправка його на залізобетонні заводи. Всі ці операції виконуються за допомогою спеціальних технологічних і транспортних машин. Цей приклад показує, що машини створюються для реалізації тих або інших технологічних або транспортних операцій, які здійснюються з метою зміни властивостей, форм, розмірів і місця розташування сировини для отримання готової продукції.

В даному випадку під середовищем розуміємо процес обробки і транспортування сировини, який нероздільний з тими або іншими машинами. Таким чином, взаємодія машини з середовищем являє собою технічну систему, підсистемами якої виступають середовище і машина, а характер їх взаємодії визначається структурою зв'язків між середовищем і машиною.

Комплексний розгляд машин і середовищ у вигляді технічної системи дозволяє виявити єдині закономірності взаємодії між ними. В процесі взаємодії із зовнішнім середовищем функціонування машини в залежності від принципу дії проходить неперервно, дискретно або циклічно. Функціонування машини при кожному виді взаємодії проходить за своїми внутрішніми циклами. Ці цикли характеризуються фазами зростання тих чи інших характеристик, їх стабілізації і спадання.

Безпосередніми середовищами функціонування (робочими середовищами), де здійснюється основна перетворювальна функція машини, є технологічне, організаційне або природнє середовище. В них на машини здійснюють вплив сили опору, які можуть мати як корисний (відділення матеріалу від масиву, дроблення його і т. д.), так і негативний (зношування елементів машини, вібрації, шум і т. д.) вплив. Статичні характеристики зміни сил дії машини на середовище досить часто мають вид експонет або парабол. Це дає можливість передбачити деяку загальну закономірність функціонування машини в певному середовищі при розгляді взаємодії машини з середовищем як системи.

Для забезпечення взаємодії між середовищем і машиною повинні бути створені всі необхідні зв’язки з середовищем, забезпечено цілеспрямоване функціонування машини, тобто повинна бути побудована технічна система середовище-машина. Для побудови такої системи, її аналізу, оптимального керування і т. д. необхідна її модель (математична або фізична). Найбільш досконалими моделями таких систем слід признати математичні моделі. Математичне моделювання системи середовище-машина може здійснюватись різними методами [9].

Взаємодія машини з середовищем, яка характеризується вихідними характеристиками машини $y_1,\dots, y_m$ полягає в тому, що ці характеристики неперервно співставляються з характеристиками $z_1,\dots, z_m$, які визначають зв’язки з тими або іншими елементами середовища.

Метою цієї технічної системи є така поведінка системи, щоб розбіжності $\Delta_1,\ldots,\Delta_m$ між вихідними характеристиками машини (робочого органу) $y_1,\ldots,y_m$ і середовища $z_1,\ldots,z_m$ постійно були рівні нулю, які б нові елементи середовища не вступали в контакт з машиною. Якщо $y_1 = z_1,\ldots,y_m = z_m$, то машина адекватно відображає стан середовища, і мета системи машина-середовище вважається досягнутою.

Якщо ж мають місце розбіжності, не рівні нулю, то через механізм зворотнього зв'язку здійснюється дія через приводні механізми на машину і через робочі органи машини на середовище. Гнучкість і мобільність системи визначається числом вхідних функцій машини u_i, якими можна подіяти на систему. Чим більше функцій u_i, тим система більш гнучка і легше пристосовується до зміни середовища. З іншої сторони, число довільних вхідних функцій u_i залежить від числа накладених в'язів на систему. Ця залежність при збільшенні числа в'язів s спочатку росте, а потім спадає. Число вхідних функцій машини може бути зведене до нуля. В цьому випадку будемо мати систему з жорсткою структурою, яка при самій невеликій зміні середовища не може правильно функціонувати.

Які властивості повинна мати система, щоб забезпечити правильне функціонування ? По-перше, вона повинна мати таку структуру (будову), яка дозволяє в процесі функціонування знімати частину накладених в'язів. По-друге, збільшення машиною числа вихідних характеристик (координат робочого органу) підвищує рівень функціонування системи машина-середовище. По-третє, система може мати можливість зміни структури на базі перерозподілу функцій, призначень рівнів керування, координуючих і погоджуючих елементів і організовувати саморганізацію взаємодій між машиною і середовищем.

Відзначимо, що зменшити розбіжності $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ можна шляхом дії як на машину, так і на середовище, наприклад, за допомогою робочих органів машини.

Максимальна ефективність системи машина-середовище буде забезпечена при повному врахуванні взаємодії робочих органів з середовищем і виборі такої будови машини, яка б запезпечила оптимальну взаємодію. Це може бути досягнуто, коли машина і середовище розглядаються як єдина система, яка є підсистемою більш високого рівня системи – системи машин для виготовлення тієї чи іншої продукції.

2.4. Система машин

Одним з основних стратегічних напрямків матеріального виробництва в різних галузях є створення інтегральних виробничих комплексів (ІВК) і їх автоматизація. Побудова системи машин для забезпечення оптимального (найкращого) функціонування ІВК є однією з найважливіших проблем сучасного виробництва. Проблема створення системи машин охоплює значну сферу діяльності сучасної людини і включає в себе проблеми, пов'язані зі створенням машин, дослідженням їх функціонування в різних середовищах, керуваням при виконанні різного роду технологічних процесів і т. д. Проблеми створення і використання системи машин включають в себе першочергові задачі розробки нових машин і правильного системного їх використання при раціональних навантаженнях, погодженого функціонування і ефективної експлуатації.

На шляху створення системи машин необхідно вирішувати ряд наукових проблем, де центральною є проблема взаємодій, які виникають між середовищем, машиною і людиною в світі сучасних технологій. Про взаємодію машини і середовища вже розглянуто раніше, а роль людини в цих процесах є головною, бо заради неї створюються всі системи і процеси. В той же час людина в цьому бере безпосередню участь і тому її взаємодія з машинами повинна бути раціональною. Всі процеси, що виконуються більш продуктивно і ефективно машиною повинні передаватись машині, а що краще виконує людина або чого не можуть виконати машини, повинно залишитись за людиною. Світ сучасних технологій досягає такого рівня, що за людиною залишаються тільки окремі елементи технологічних процесів, а все інше виконують машини. Прикладом тут може бути електронне машинобудування, де практично всі технологічні і транспортні операції механізовано і автоматизовано. За людиною залишаються тільки деякі функції керування, і то лише ті, які краще виконує людина. На жаль, цього не можна поки що сказати про галузь будівельного виробництва, де значна частина технологічних операцій, особливо оздоблювальних, виконується людиною або механізмами і машинами при безпосередній участі людини.

Створення системи машин являє собою розвиток системи середовище-машина [10] на основі цілеспрямованої організації багаторівневої структури, яка включає в себе машини, сукупність технологій і системи керування ними. В такій структурі може бути досягнутий рівень самоорганізації, тобто утворення, в якому заданий стан системи встановлюється без постійно діючого зовнішнього організаційного впливу. Принципи організації і саморганізації в системі машин можна здійснити за рахунок оптимального комплектування машин, впровадження засобів автоматизації, вдосконалення механізмів координації керування, організації виробництва, нововведень і багатьох інших факторів прогресивного розвитку сучасних технологій.

Система машин є складною технічною системою, для впорядкування і організації якої необхідні значні ресурси. Перетворення системи середовище-машина в систему машин необхідно здійснювати з використанням закономірностей системної диференціації і інтеграції. Системна диференціація – це зростання розбіжностей і невідповідностей між складовими частинами системи. Якщо складові системи стають досить різними за своєю організованістю і досить по-різному реагують на зовнішні дії, то це може стати причиною розпаду і зникнення системи. Розпаду системи протидіє системна інтеграція (об'єднання), тобто зростання цілісності системи, зміцнення зв'язків і взаємозалежність та взаємовпорядкованість її складових частин.

Створення системи машин може базуватись на наступних основних концепціях.

По-перше, системи машин є засобами інтенсифікації виробництва та інших сфер людської діяльності. Отже, функціонування системи машин повинно розглядатись як процес погодженої взаємодії техніки і персоналу в середовищі сучасних технологій.

По-друге, створення системи машин передбачає підвищення інтегральної ефективності виробництва, в силу чого конкретне застосування машин повинно бути погоджене з їх циклами життя (тривалістю служби), а також враховувати фази функціонування середовищ. Економічна ефективність сучасного виробництва може бути забезпечена лише при високій технічній ефективності системи машин.

По-третє, система машин повинна утворювати гармонічну єдність енергетичних, інформаційних і конструктивних властивостей сучасних технічних систем.

По-четверте, система машин повинна бути запроектована таким чином, щоб вона могла функціонувати при дотриманні певного співвідношення між рівнем організованості середовища і конструктивно-функціональними можливостями (складністю) машин. Це призводить до можливості вироблення кардинально нового принципу у створенні машин і прогнозування процесу їх розвитку. Цей принцип полягає в тому, що прогрес машинобудування повинен визначатись кількісними співвідношеннями між вихідними параметрами машини і їх взаємодією з середовищем.

Прикладом системи машин може бути комплекс машин, який використовується для дроблення і сортування кам'яного матеріалу з метою отримання щебню і гравію [11]. Для одержання щебню шляхом дроблення твердих порід каменю і для виділення гравію з гравійно-піщаної суміші створюють спеціальні комплекси – дробильно-сортувальні заводи, де повністю механізовані і зв’язані між собою у визначеній послідовності основні операції обробки (дроблення, сортування, виділення сторонніх домішок) утворюють безперервний технологічний процес (рис. 2.2).

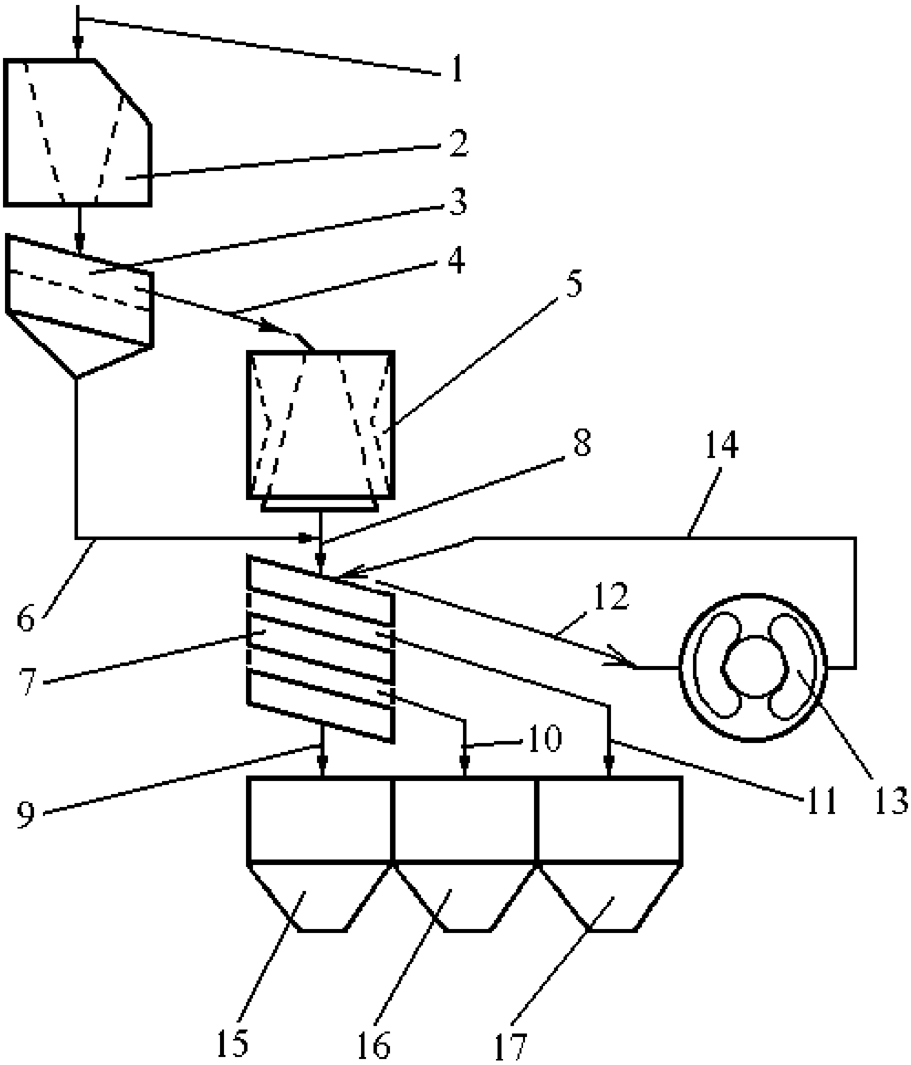


Рис. 2.2. Схема процесу дроблення кам’яних матеріалів

За технологією камінь, що був доставлений на завод у вигляді крупних кусків, подається для дроблення за допомогою транспортера 1 в дробильну машину 2. Отриманий дроблений матеріал передається від дробильної машини 2 на грохот 3, де він розділяється на фракції за крупністю. У дробильному матеріалі майже завжди є надмірні куски, що потребують додаткового дроблення. При сортуванні дробильного матеріалу на грохоті 3 такі надмірні куски затримуються на верхньому його ситі, звідки за допомогою транспортера 4 переміщуються в спеціально поставлену дробарку 5 повторного дроблення. Операція сортування, що здійснюється на грохоті 3, виконується з метою відокремлення з продукту попереднього дроблення лише надмірних його кусків для передачі їх в дробарку 5 повторного дроблення. Решта матеріалу, що пройшов крізь отвори сита грохота 3, направляється за допомогою транспортера 6 для остаточного його сортування за крупністю на грохоті 7, куди одночасно по транспортеру 8 потрапляє з цією ж метою і продукт повторного дроблення з дробарки 5. На грохоті 7 матеріал розділяється на три фракції і за допомогою транспортерів 9-11 направляється в приймальні бункери готової продукції. Крім того, на верхньому ситі грохоту 7 залишаються куски матеріалу, які направляються ще для одного циклу дроблення по транспортеру 12 в дробарку 13. Вихідний продукт цього дроблення відправляється за допомогою транспортера 14 на грохот 7 кінцевого сортування. З бункерів 15-17 за допомогою дозаторів щебінь різних фракцій певними порціями відправляється на залізобетонні заводи або для інших потреб.

На рис. 2.2 показано схему одного з процесів дроблення кам'яних матеріалів. В той же час на практиці використовуються і інші схеми таких технологічних процесів. Як видно з наведеного прикладу, для реалізації такого технологічного процесу необхідна система машин. В залежності від потреб виробництва ці машини повинні бути узгоджені з позицій функціональних можливостей, продуктивності, надійності і т. д. Крім того, на кожному з етапів процесу дроблення можуть бути використані машини різних типів. Так, дробарки 2, 5 і 13 можуть бути щоковими, конусними, валковими, ударними. Аналогічно, різних типів можуть бути грохоти і транспортери. Кожний з типів цих машин має свої переваги і недоліки. Однак найвищу ефективність від роботи цих машин можна отримати тільки в тому випадку, коли вони будуть розглядатись як система машин для виконання повного технологічного процесу, а не як окремі машини. В той же час, кожна з цих машин являє собою підсистему системи машин, тому розгляд окремої машини як системи в питаннях їх раціональної будови, міцності елементів, режимів руху, надійності, металомісткості і т.д. є також дуже актуальною проблемою.

2.5. Машина як технічна система

Окрему машину можна розглядати, як основний елемент системи машин, які використовуються для виконання того чи іншого робочого процесу. Поняття "машина" охоплює велику кількість самих різних об’єктів, які використовуються людиною для задоволення її потреб.

Згідно з визначенням І. І. Артоболевського під "машиною" розуміють пристрій, який створений людиною в результаті вивчення і використання законів природи з метою полегшення або повної заміни її фізичної і розумової праці, підвищення продуктивності і точності при виконанні технологічних, транспортних та інших процесів. В більш короткій формі поняття "машина" може бути визначено наступним чином: машина – це технічна система, яка виконує механічні рухи для перетворення енергії, матеріалів і інформації. Оскільки в машинах механічні рухи здійснюються за рахунок окремих елементів, які знаходяться у зв’язках між собою і об’єднані в деяку цілісність з певною метою, то вони мають всі ознаки систем.

Кожна машина як технічна система має певне призначення і будову (структуру). Призначення машини визначається функціями, які вона може виконувати в тих чи інших умовах використання. Для реалізації цих функцій створюється структура машини, яка визначає її властивості. Структурно машина як система може складатись з підсистем різних рівнів і окремих елементів, які складають ці підсистеми.

За функціональною ознакою машини можна розділити на енергетичні, робочі та інформаційні.

Енергетичною машиною називається машина, яка використовується для перетворення будь-якого виду енергії в механічну енергію або напаки. В першому випадку вона носить назву машини-двигуна, а в іншому – машини-генератора. До машин-двигунів відносяться: електродвигуни, парові і гідравлічні турбіни, двигуни внутрішнього згоряння і т. п. До машин-генераторів відносять електрогенератори, компресори, гідравлічні насоси і т. д.

Робочою машиною називається машина яка використовується для перетворення зміни положення і дослідження властивостей матеріалів. Робочі машини поділяються на технологічні, транспортні і випробувальні.

Технологічною машиною називається робоча машина, у якої перетворення матеріалу проходить шляхом зміни властивостей, форми, розмірів і положення. До технологічних машин відносять металообробні верстати, будівельні, сільськогосподарські та інші машини. Транспортні машини призначені для переміщення в просторі різного роду об'єктів. До цих машин належать: теполовози, електровози, автомобілі, вантажопідйомні і транспортні машини, ліфти і т. п. Випробувальні машини використовуються для дослідження, наприклад, впливу механічної дії в заданих умовах на властивості матеріалу або виробу (розривна машина, машина тертя, твердомір і т. д.).

Інформаційною називається машина для перетворення інформації. Основу цих машин складають електроннообчислювальні машини (ЕОМ), які використовуються для виконання розрахунків, логіко-математичних операцій, моделювання процесів, розв'язування задач оптимізації і т .д.

Важливе місце в сучасній техніці займають машини-автомати, які використовують, головним чином, в тих випадках, коли необхідно виконувати одну і ту ж операцію багато разів. Прикладом машин-автоматів можуть бути металообробні верстати-автомати. Крім того, використовуються машини з технічними засобами на базі ЕОМ, які автоматично виконують складні процеси по завчасно створеній програмі в оптимальному режимі.

Для виконання функцій контролю і керування технологічними процесами і підприємствами використовують автоматизовані системи керування, які працюють при участі людини і системи автоматичного керування, наприклад, руху робота, які функціонують без будь-якої участі людини. Роботи являють собою маніпулятори з пристроями керування на базі ЕОМ, які використовуються для здійснення рухів і функцій керування, що замінюють аналогічні функції людини.

Згідно з функціональною ознакою будівельні машини можна розділити на такі класи: горизонтального безрельсового транспорту; вантажопідйомні і монтажні; неперервного транспорту; наватажувально-розвантажувальні; землерийні; бурові; пальові; механічної обробки (дроблення і сортування) кам’яних матеріалів; приготування, транспортування і укладки бетонних сумішей і розчинів; виробництва залізобетонних виробів; дорожні; оздоблювальні і механізований інструмент.

Кожний з цих класів машин поділяється на групи, які розрізняються характером робочого процесу (взаємодією з матеріалом) або режимом роботи. Так, наприклад, землерийні машини поділяються на землерийні та землерийно-транспортні. В свою чергу, землерийні машини можуть бути циклічної дії (одноковшові екскаватори) та неперервної дії (багатоковшові або роторні екскаватори).

Крім того, групи можуть поділятись на типи, які відрізняються конструкціями окремих елементів. Всі типи машин мають ряд типорозмірів, які відрізняються між собою величинами основних технологічних параметрів (вантажопідйомність, виліт і висота підйому вантажу – для крана, місткість ковша – для екскаватора і т. д.), але мають, в основному, близьку будову.

В функціонально-структурному плані сучасні робочі машини складаються з ряду взаємодіючих частин (елементів): енергетична частина, передаточні механізми, виконавчі (робочі) органи і комплекс вимірювальних пристроїв і пристроїв контролю, регулювання, керування (рис. 2.3).

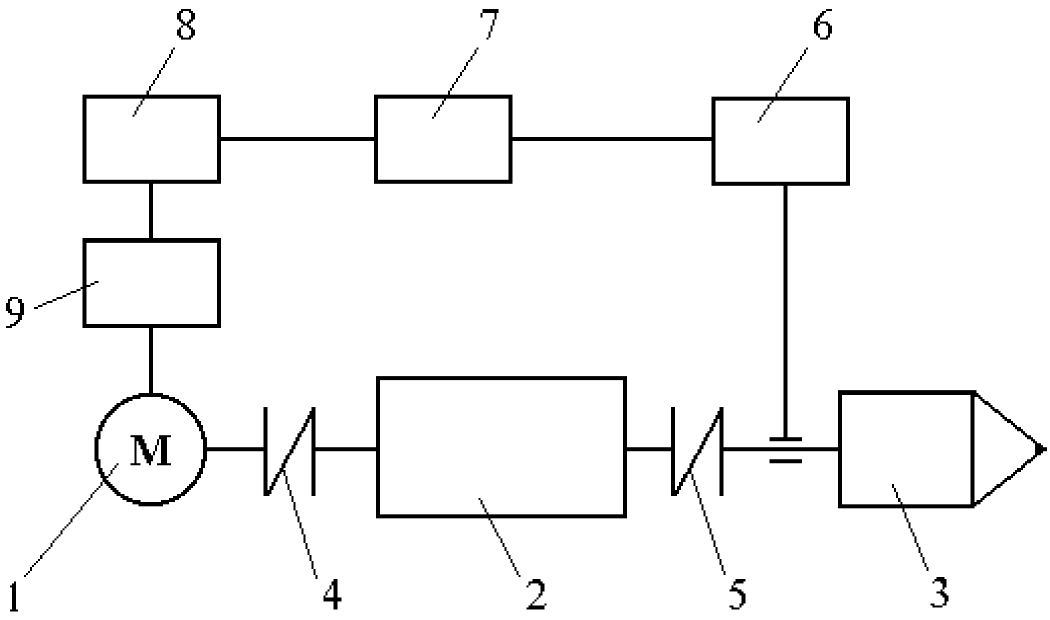


Рис. 2.3. Функціонально-структурна схема будови машини:
1 - двигун; 2 - передаточний механізм; 3 - робочий орган; 4, 5 - елементи зв’язку між елементами машини; 6, 7, 8, 9 - відповідно вимірюючі, контролюючі, керуючі та регулюючі пристрої

Виконавчі (робочі) органи – це головна частина машини. Вони виконують комплекс технологічних операцій по перетворенню матеріалу (предмета праці) в продукт виробництва. Оскільки робочі органи перетворюють різні природні матеріали, процеси і сировину в продукт виробництва, то і принцип дії, конструктивні форми та інші характеристики робочого органу визначаються властивостями матеріалу для обробки, параметрами і особливостями процесу, який реалізує робочий орган. Так, наприклад, робочий орган екскаватора (ковш) пристосований для копання і виймання грунту, дробильні плити щокової дробарки - до подрібнення вхідної будівельної сировини.

Енергетична частина (двигун) забезпечує енергією механізми і робочий орган, шляхом перетворення різних видів енергії в механічну енергію. В залежності від необхідних зусиль на робочому органі і режиму його руху двигун має ті чи інші механічні характеристики (залежності швидкості руху від зусилля). Двигуни пройшли в своєму розвитку ряд історичних етапів, починаючи від винаходу парової машини до широкого використання електродвигунів. Причому електродвигуни застосовуються для кожного функціонального механізму. На сьогоднішній день в транспортних, будівельних та інших машинах широко застосовуються двигуни внутрішнього згоряння, які в майбутньому, мабуть, будуть мати обмежене застосування, бо мають значну токсичність і спричиняють небажаний екологічний вплив, а також через обмеженість вуглецеводневого палива.

Передаточний механізм являє собою проміжну ланку між двигуном і робочим органом, завдання якої полягає в передачі енергії руху від двигуна до робочого або виконавчого механізму. Енергія і рух двигуна перетворюються за допомогою різних передаточних механізмів (зубчастих, ланцюгових, пасових передач, валів, муфт, гідропередач і т. д.) в необхідні рухи робочого органу. Оскільки вал двигуна має більшу швидкість обертання, ніж основний вал робочого органу, то завданням передаточного механізму є зменшення швидкості обертання валу двигуна до рівня швидкості основного валу робочого органу. Передаточний механізм з однієї сторони обумовлений принципом дії, характером руху та іншими параметрами робочого органу, а з іншої – визначається типом і конструкцією двигуна. Передаточний механізм машини зв'язує в єдине ціле технічний пристрій, який виконує задані технологічні функції у виробничому процесі.

Контрольно-керуюча частина машини забезпечує автономне функціонування технічного пристрою, який виконує той чи інший робочий процес шляхом самовлаштування, саморегулювання і самоконтролю. В цьому процесі людина стає поряд з виробничим процесом, замість того, щоб бути його головним учасником, і переключається на творчі види діяльності.

Аналіз функціонально-структурної будови машини показує, що машина складається з елементів (підсистем), які знаходяться у взаємозв'язках між собою. Крім того, кожна з розглянутих підсистем розділяється на підсистеми більш низького рівня. Так, наприклад, двигун внутрішнього згоряння включає в себе підсистеми: циліндро-поршневої групи, перетворення поступального руху поршня в обертальний рух колінчастого вала, живлення, газорозподілення, запалення, мастильна, охолодження і т. д. Причому між цими підсистемами двигуна існує певний взаємозв'язок. Аналогічні підсистеми більш низького рівня можна виділити в передаточному механізмі, виконавчому механізмі, вимірювальному, контролюючому і регулюючому пристроях. Все це показує, що машина являє собою складну технічну систему з ієрархічною структурною будовою.

Крім того, життєвий цикл машини являє собою складну систему. Структура життєвого циклу машини включає в себе процеси її розробки, виготовлення, експлуатації і ремонту, які охоплюють час від виникнення ідеї створення машини до зняття її з експлуатації.

Життєвий цикл, як правило, включає в себе наступні основні стадії або форми (рис. 2.4):

1. Формування вимог до машини і розробка технічного завдання (ТЗ).
2. Проектування машини.
3. Виготовлення, випробовування і доведення дослідного зразка машини.
4. Серійне виробництво машини.
5. Експлуатація і цільове застосування машини.
6. Ремонт машини.

Перша стадія життєвого циклу машини являє собою зовнішнє проектування. На цій стадії вирішуються питання, пов'язані з виясненням цілей, заради досягнення яких створюється машина. Уточнюється коло задач, які планується вирішувати за допомогою машини, а також досліджуються властивості зовнішнього середовища і вивчаються характеристики його впливу на машину. Результатом зовнішнього проектування є технічне завдання на розробку проекта, яке містить основні вимоги до машини і взаємодії її із зовнішнім середовищем, що дає можливість розв'язувати поставлені задачі по створенню машини.

Другу стадію, щоб підкреслити її відмінність від першої, часто називають <u>внутрішнім проектуванням</u>. Це стадія безпосередньої розробки проекту машини. Тут вирішуються питання, пов'язані з визначенням внутрішньої структури машини, з технічними рішеннями її підсистем і конструкцій їх елементів, а також параметрів і режимів експлуатації машини. Мета внутрішнього проектування полягає в розробці всієї необхідної проектно-конструкторської документації, яка складає робочий проект машини, що задовольняє вимогам технічного завдання, тобто вимогам зовнішнього проектування.

З інформаційної точки зору внутрішнє проектування є процес перетворення вхідної інформації про об'єкт проектування, про стан знань в даній галузі, про досвід проектування об'єктів аналогічного призначення у вихідну інформацію у вигляді проектно-конструкторської і технологічної документації, яка виконана в певній формі і містить опис об'єкта для його матеріальної реалізації, тобто виробництва. З точки зору теорії прийняття рішень проектування являє собою процес прийняття проектно-конструкторських рішень, який направлений на отримання опису машини із заданим ступенем деталізації, що задовольняє вимогам технічного завдання.

Друга стадія (проектування) зв'язує наукові дослідження з практичною реалізацією і являє собою процес розробки опису, достатнього для створення ще неіснуючої машини. Ця стадія, без сумніву, є однією з найважливіших стадій в життєвому циклі машини. В ній можна виділити чотири головних етапи (рис. 2.4):

1) попереднє проектування або етап технічних пропозицій;
2) ескізне проектування;
3) технічне проектування;
4) робоче проектування.

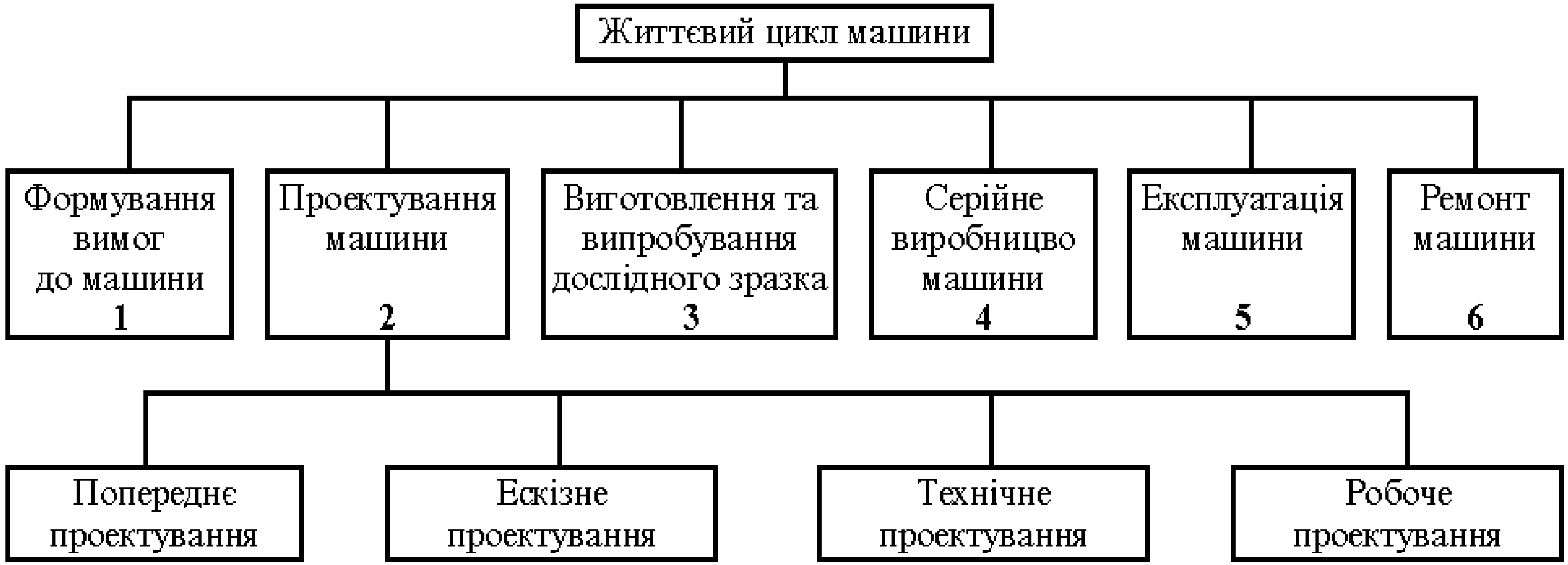


Рис. 2.4. Стадії життєвого циклу машини

На першому етапі здійснюється формування технічної концепції і основних (облікових) параметрів машини, що забезпечують виконання вимог технічного завдання. На цьому етапі усуваються некоректності у вимогах технічного завдання і проходить погодження вимог зовнішнього проектування з можливостями внутрішнього проектування. Характерним для цього попереднього проектування є відсутність детальної структуризації. Тут приймаються рішення з питань, які відносяться до машини в цілому. Виходом цього етапу є технічні пропозиції на розробку проекта машини.

Основною метою ескізного проектування є уточнення характеристик і параметрів машини, що пов'язані з проектно-конструкторською розробкою її основних підсистем і агрегатів і формування їх обліку. Останнє здійснюється на основі ієрархічної (рівневої) структуризації машини і супроводжується проведенням широкого комплексу розрахунків і експериментальних досліджень. Проробка повинна мати таку глибину, щоб можна було зробити порівняльний аналіз показників якості проектних рішень різних варіантів машини з урахуванням конструктивних та експлуатаційних характеристик. Виходом цього етапу є ескізний проект машини.

Етап технічного проектування передбачає розробку комплексу конструкторських документів, що містять остаточні технічні рішення машини. В технічному проекті оцінюють остаточну відповідність проектних рішень вимогам технічного завдання і ступінь складності виготовлення машини, а також наводять правила її експлуатації та ремонту. Виходом цього етапу є технічний проект, який є основою для розробки робочої конструкторської документації.

Накінець, на етапі робочого проектування (конструювання) глибина проробки проекта досягає рівня деталей. Результат роботи на цьому єтапі – робочий проект, який являє собою комплект конструкторської документації на машину, інструкцій по виготовленню і складанню її елементів у вузли і агрегати і машини в цілому, а також інструкцій по випробуванню, експлуатації і ремонту машини.

На стадіях проектування проходять процеси постановки і розв'язування задач проектування, що задовольняють заданим умовам. Від цих стадій в значній мірі залежать наступні стадії життєвого циклу машини.

На третій стадії життєвого циклу машини здійснюється виготовлення і випробування дослідного зразка машини. Дослідний зразок машини може створюватись розробником, тобто організацією, що розробляє проектну документацію, або виробником – організацією, що здійснюватиме серійне виробництво машин. На цьому етапі може виготовлятись окремий зразок або дослідна партія машин. Під час виготовлення дослідного зразка відпрацьовується технологія виготовлення окремих деталей і складання їх в окремі вузли, агрегати і машини в цілому. Після виготовлення дослідного зразка машини проводять попередні заводські випробування, під час яких відпрацьовують раціональні експлуатаційні режими, виявляють необхідність якихось змін у конструкції машини чи її складових частинах. За результатами попередніх випробувань, які проводять разом розроблювач і виробник, вирішують питання про можливість здійснення приймальних випробувань, коригують конструкторську документацію, вносять зміни в конструкцію дослідного зразка. Після успішних попередніх випробувань вирішується питання про проведення приймальних випробувань, які залежно від характеру зв'язку між співвиконавцями можуть бути відомчими, міжвідомчими і державними. Приймальні випробування засвідчують відповідність машини розробленій технічній документації і можливість запуску машини у серійне виробництво.

Четверта стадія – це стадія серійного виробництва машини. Здійснення цієї стадії починається з технологічної підготовки виробництва, яка направлена на розробку технологічних ліній виготовлення деталей і складання їх у вузли, агрегати і машину в цілому. Тут також здійснюється підбір обладнання, матеріалів, інструментів і т. д. На цій стадії повинні бути задоволені технологічні вимоги до процесу виготовлення машини, які направлені на зменшення собівартості виробництва, зменшення витрат енергії і матеріалів, а також забезпечення функціональних показників, соціальних, експлуатаційних і економічних вимог. Це може бути здійснено шляхом вибору найбільш ефективних способів виготовлення деталей і зміцнення їх поверхневого шару, а також підвищення чистоти і точності обробки деталей. Результатом цього етапу є серійний випуск машин тієї чи іншої якості, які поступають в експлуатацію.

На п'ятій стадії (стадії експлуатації) здійснюється використання машини. На цій стадії проявляються конструктивні, технологічні та інші властивості машини. Основна вимога до машин в процесі експлуатації полягає у виконанні своїх функцій за призначенням з мінімальними експлуатаційними витратами. Останні в значній мірі залежать від рівня надійності машини, яка, в свою чергу, залежить від того, наскільки правильно вирішені при проектуванні питання міцності, жорсткості, зносостійкості і точності. Крім того, експлуатаційна надійність машини значно залежить від умов експлуатації і режимів руху приводних механізмів, які визначаються якістю керування машиною.

Забезпечення необхідної експлуатаційної надійності машини залежить від її технічного стану, який повинен підтримуватись на необхідному рівні шляхом своєчасного проведення технічних обслуговувань і ремонтів. Якість проведення останніх в значній мірі залежить від рівня ремонтопригодності машини, яка забезпечується тоді, коли в конструкції машини передбачена система контролепридатності, доступності, легкозйомності, взаємозамінності, стандартизації і уніфікації. Рівень технічного стану машини визначається шляхом діагностування окремих елементів, підсистем і машини в цілому як системи.

Всі розглянуті стадії життєвого циклу машини супроводжуються науковими дослідженнями, тобто на кожній стадії виникають задачі, які не можуть бути вирішені традиційними способами, а вимагають розробки спеціальних методів. Кінцева мета цих досліджень полягає в розробці таких машин, які б мали високу економічну ефективність. В процесі проектування необхідно враховувати значну кількість факторів, які визначають ефективність виробництва і використання машин. Інколи спрощення конструкції машини і технології її виготовлення приводять до значних витрат на обслуговування та ремонт в процесі експлуатації. Глибокі економічні дослідження показують, що головними критеріями економічності машини досить часто є не її вартість, яка визначається витратами на матеріали, дослідження, проектні роботи і виготовлення машини, а її продуктивність, надійність, витрати енергії, вартість обслуговування, ремонтів і т. д.

З аналізу етапів життєвого циклу машини можна зробити висновок, що вони знаходяться в тісному взаємозв’язку між собою. Зовнішнє проектування визначає призначення машини і вимоги до неї. На основі зовнішнього проектування проводиться внутрішнє проектування, яке визначає структуру машини, конструкції і компоновку (розміщення) її складових частин. Прийняті проектні рішення визначають технологію виготовлення деталей машини і складання машини. Конструкція і рівень технології виготовлення машини суттєво впливають на її експлуатаційну надійність. Умови експлуатації визначають рівень технічного стану машини. При досягненні певного технічного стану машини проводяться ті чи інші види ремонту з деякою періодичністю.

Отже все наведене показує, що життєвий цикл машини можна вважати складною технічною системою, підсистемами якої є окремі стадії створення машин, які, в свою чергу, діляться на підсистеми більш низьких рівнів. Так, наприклад, процес проектування поділяється на стадії зовнішнього і внутрішнього проектування, в той же час останнє ділиться на попереднє, ескізне, технічне і робоче. Тому до процесу створення машини необхідно підходити як до створення складної технічної системи з урахуванням взаємозв’язків між окремими елементами. Неврахування цього може привести до небажаних результатів в процесі створення машин.

В історії створення машин є немало суттєвих прорахунків в цьому напрямку. Можна навести загальновідомий приклад з практики створення літаків-винищувачів [12]. Досвід другої світової війни показав, що далеко не всі прогнози підтверджуються практикою боїв. Тактична доктрина кінця 30-х років виходила з того, що повітряна війна буде проходити на великих висотах. У всіх країнах світу намагались підняти стелю польоту бойових літаків. МІГ-3 був найбільш ярким проявом цієї доктрини... Але в перші ж місяці війни пересвідчились, що німецькі льотчики на літаках-винищувачах "Мессершмітт", які мали меншу висоту підйому, ніж МІГи, не ведуть боїв на тих висотах, де вони слабкіші МІГів. Навпаки, вони старались зав'язати всі бої на малій висоті, де більш важкий МІГ програвав в маневрі. До того ж тривалість польоту МІГа на малих висотах виявилась недостатньою. Коли всі ці обставини стали очевидними, конструктори МІГа постарались зменшити вагу літака за рахунок зняття частини зброї і деяких інших рішень. Але це не допомогло,і в результаті було прийняте рішення про припинення виготовлення літаків МІГ-3. Ці приклади показують, що принципова помилка, яка була допущена при зовнішньому проектуванні (не було враховано всі фактори при виборі параметрів літака), незважаючи на витрати значних зусиль і коштів, в кінці кінців привела до невдачі.

Кінцева мета створення будь-якої машини полягає в ефективному її функціонуванні, яке залежить не тільки від досконалості конструкції, але і від способів її використання, і від режимів керування нею. Особливо це відноситься до швидкісних машин циклічної дії, коли доводиться чередувати часті пуски і зупинки. Тому необхідно вибирати такі режими функціонування машин, при яких для тієї чи іншої конструкції, буде досягнута найвища ефективність.

Все це ще раз показує, що процес створення і використання машини необхідно розглядати як систему, в якій враховуються зовнішні характеристики, конструктивні особливості її будови, режими функціонування і т. д.

2.6. Задачі теорії технічних систем

Як було показано раніше, перш за все частинами складної системи є підсистеми різних рівнів, на які розчленовується початкова система. Оскільки підсистеми верхніх рівнів самі досить часто є складними і розчленовуються далі, то в дійсності вивченню підлягають самі дрібні, неподільні системи, які умовно називають елементами. Самостійною частиною є так звана схема спряження елементів, тобто схема, яка реалізує адресацію сигналів, що відображають взаємодію елементів. Визначено, що системи не називаються складними, якщо вони вивчаються як єдине ціле, без вказаної структуризації. В цьому і полягає основна різниця між простими і складними системами. Відміна між ними породжується не стільки самими дослідженнями як такими, а, в основному, задачами, які стоять перед дослідниками.

Розглянемо більш детально складові частини складних технічних систем з метою вивчення задач, які виникають при їх дослідженні. Звернемось спочатку до елементів технічних систем. Кожний елемент являє собою динамічну систему, яка функціонує в часі, з часом змінює свій стан під дією внутрішніх і зовнішніх причин, сприймає вхідні і видає вихідні сигнали в процесі взаємодії з іншими елементами системи. Перераховані властивості є загальними для різних елементів, однак кожний конкретний елемент має свої особливості.

В технічній системі будівництва греблі ГЕС можна виділити різнорідні елементи – залізобетонні заводи, розвантажувальні пристрої, система машин для виготовлення щебню і т. д.

На роботу кожного елемента і системи в цілому досить суттєво впливають випадкові фактори (відмови технологічних машин і транспортних засобів, випадкові потоки транспорту на різних ділянках дороги від заводів до місця будівництва, випадкові тривалості виконання різних операцій і т. д.). Все сказане приводить до висновку про те, що для опису елементів складних технічних систем необхідно мати набір формальних математичних моделей, які задовольняють, з однієї сторони, загальним властивостям всіх динамічних елементів, а з іншої – враховують різні окремі особливості функціонування кожного конкретного елементу.

Таким чином, однією з найважливіших задач теорії технічних систем є пошук математичних моделей, які достатньо адекватно відображають специфіку роботи елементів складних систем. В той же час такі математичні моделі повинні допускати дослідження систем аналітичними або машинними (за допомогою ЕОМ) методами. Далі буде розглянуо ряд таких моделей, які знайшли широке застосування в теорії складних технічних систем.

Основу функціонування складних технічних систем складає взаємодія елементів, яка представляється у вигляді механізма обміну сигналами. Цей механізм включає в себе процеси формування вихідних сигналів і реагування на вхідні сигнали різними елементами, адресації сигналів і їх проходження по каналах зв’язку. Облік процесів формування вихідних і реагування на надходження вхідних сигналів відноситься до проблеми побудови елементів як динамічних технічних систем. Далі зручно вважати, що під час проходження по каналу зв’язку сигнал не підлягає викривленню, а сам процес передачі проходить миттєво. Такі канали називаються ідеальними. Вони виникають при розчленуванні системи у випадку, коли реальна система не має ніяких каналів зв’язку, а вони вводяться тільки для існуючої взаємодії елементів системи. Такі канали зв’язку існують в технічній системі будівництва греблі ГЕС. В реальній системі присутні реальні канали зв’язку (наприклад, система програмного керування рухом зварювального маніпулятора в арматурному цеху залізобетонного заводу), які, природньо, є неідеальними. В цьому випадку їх зручно формалізувати як окремі елементи системи, які реалізують затримки і відхилення сигналів. Такі елементи з’єднуються з іншими елементами вже ідеальними каналами зв’язку. Отже, для вивчення процесу взаємодії елементів технічної системи достатньо розглянути схему спряження, яка реалізує адресацію сигналів в системі з ідеальними каналами зв'язку. При розгляді схеми спряження елементи представляються у вигляді багатополюсників, які мають певне число вхідних і вихідних контактів – кількість цих контактів різна для різних елементів. Якщо занумерувати всі вхідні контакти елементів системи і її вихідні контакти, то задання схеми спряження означає співставлення кожній парі (i, j) (де i, j - порядкові номери відповідно вхідного і вихідного контактів) факта наявності або відсутності ідеального каналу зв'язку. Така конструкція враховує також взаємодію системи із зовнішнім середовищем – достатньо лише зовнішнє середовище уявити фіктивним елементом, який має певну кількість вхідних контактів.

Зі схемою спряження елементів технічної системи виникають певні задачі. Перш за все, це задачі структурного аналізу складних технічних систем, які виявляють різні відношення між елементами системи. Виникає інтерес до питання існування ланцюга каналів зв'язку, які з'єднують різні елементи. Більш глибоке дослідження передбачає врахування напрямку передачі сигналів, а також їх види. Під видом розуміють певну змістовну інтерпретацію призначення сигналів, що передаються. Наприклад, деякі сигнали відповідають матеріальним потокам в системі, інші – інформаційним, треті служать цілям керування і т. д. Такий поділ сигналів, звичайно, проявляється в факті їх виникнення на певних вихідних клемах, що і дає можливість використати для вивчення вказаних задач структурні методи, які дозволяють знайти так звані типові структурні конфігурації (кола, цикли, контури і т. п.). Ці конфігурації відіграють важливу роль у визначенні можливостей системи по передачі і переробці сигналів. При цьому виявляються ще і такі властивості структур, як зв'язність, ієрархічність і т. д.

Особливу роль відіграють формальні структурні перетворення, коли початкова структура системи перетворюється в іншу. Наприклад, деяка підсистема може розчленуватись на ряд більш дрібних підсистем або, навпаки, ряд елементів об'єднується в одну підсистему. Такі перетворення відіграють важливу роль на етапі синтезу, коли вирішується питання про можливість створення системи, яка володіє заданими властивостями і має деякий стандартний набір елементів. Разом з тим необхідно констатувати, що методи структурного аналізу і синтезу складних технічних систем розроблені значно слабше, ніж методи синтезу і аналіз динаміки окремих елементів [7, 8].

Виходячи з раніше сказаного можна зробити висновок, що основною задачею теорії складних технічних систем необхідно вважати розробку методів, які дозволяють на основі вивчення особливостей функціонування, отримання характеристик окремих елементів і аналізу механізма взаємодії між елементами отримувати характеристики системи в цілому. Єдиний метод, який існує на сьогоднішній день і дозволяє знаходити характеристики системи в цілому, є метод моделювання систем. Причому найбільш ефективними і продуктивними необхідно признати методи машинного моделювання за допомогою ЕОМ. Однак метод моделювання може успішно застосовуватись лише при тій умові, що його реалізація в повній мірі враховує особливості моделювання об'єктів, тобто моделювання повинно бути цілеспрямованим (в напрямку погодження модельних експериментів з властивостями системи, що моделюється).

Далі будуть розглянуті моделі, які є математичними і фізичними моделями елементів технічних систем. На основі моделей технічних систем можуть визначатись їх властивості і характеристики, здійснюватись аналіз їх функціонування і аналіз конструкцій, проводитись оптимізація структури систем і параметрів їх елементів, здійснюватись керування системами, в тому числі оптимальне і т.д.

3. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

3.1. Моделі і моделювання

Методи теорії технічних систем спираються на опис тих або інших фактів, явищ, процесів. Наші знання завжди відносні, тому будь-який опис на тій чи іншій мові також відображає лише деякі сторони явищ і ніколи не може бути абсолютно повним. Якщо користуватись мовою філософії, то можна сказати, що опис, відображаючи наші знання, завжди є відносним.

Останнім часом досить широке розповсюдження отримало слово "модель". Поняття "модель" допускає багато різних тлумачень. Існує навіть класифікація моделей. В теорії систем під словом "модель", "модельний опис" розуміють деякий опис, який відображає саме ті особливості процесу, що вивчається, які цікавлять дослідника. Точність, якість такого опису визначаються перш за все відповідністю моделі тим вимогам, які пред'являються до дослідження, відповідністю отриманих за допомогою моделі результатів реальному ходу процесу.

Побудова моделей – завжди процедура неформальна і, звичайно, залежить від дослідника, його досвіду, таланту. Вона завжди спирається на деякий дослідний матеріал, в зв'язку з чим досить часто кажуть, що процес моделювання має феноменологічну основу. Модель повинна достатньо правильно відображати явища, однак одного цього ще мало. Вона повинна бути зручною для користування. Тому ступінь деталізації моделі, форма її представлення і т. д. визначаються метою дослідження і безпосередньо залежать від дослідника. Працюючи з одним і тим же дослідним матеріалом, різні дослідники можуть представляти його зовсім по-різному. Але при всій тій різниці існують загальні принципи моделювання, нехтувати якими недопустимо. Зупинимось на цьому більш детально.

Основна задача аналізу технічних систем полягає у виділенні реальних рухів з множини уявно допустимих, сформулювати принципи їх відбору. Тут і далі під рухом розуміємо більш широке поняття – зміна системи взагалі, всяка взаємодія її матеріальних об'єктів. Проблема моделювання полягає в описі цих принципів відбору в термінах і тих змінних, які відповідно поглядам дослідника найбільш повно характеризують досліджувану систему. Принципи відбору звужують множину допустимих рухів, відкидаючи ті, які не можуть бути реалізовані. Чим більш досконала модель, тим вужчою стає множина реальних рухів, тим точнішим стає прогноз. В різних галузях знань принципи відбору рухів різні.

Сучасна наука розглядає три рівні систем: системи неживої матерії (до них відносяться технічні системи); системи живої матерії (біологічні системи); системи, які пізнають себе (суспільні системи). Технічні системи відносяться до нижчого рівня систем, на якому основними принципами відбору є закони збереження: речовини, імпульсу, енергії і т. д. Будь-яке моделювання повинно починатись з вибору дослідником основних (або, як кажуть, фазових) змінних, за допомогою яких записують закони збереження. Але закони збереження не виділяють єдиного руху з множини уявно можливих і не вичерпують всіх принципів відбору. Необхідно ще враховувати другий закон термодинаміки (про необоротність процесів), принципи мінімуму дисипації енергії, стійкості руху і т. д. Дуже важливе значення мають різного роду умови (обмеження): граничні початкові і т. д.

На рівні біологічних і суспільних систем всі принципи відбору рухів, які справедливі для систем неживої матерії, зберігають свою силу. Той факт, що закони, які справедливі для систем неживої матерії, зберігають свою сислу для систем живої матерії, довгий час був предметом дискусій. Особливо багато труднощів визвав другий закон термодинаміки. Це питання було вирішене Л. фон Бертеланфі, який першим показав, що живі істоти являють собою відкриті системи. Це означає, що вони не можуть існувати без обміну речовиною і енергією з навколишнім середовищем (цим і пояснюється спостережуване у них зменшення ентропії). В живих системах, як і в неживих, процес моделювання починається з запису законів збереження. Однак тут основні змінні мають інший вигляд ніж в неживих системах.

В загальному випадку моделювання можна назвати особливою формою формалізованого підходу до дослідження складних систем. Теоретичною базою моделювання є теорія подібності [13]. Подібність – взаємно однозначна відповідність між двома об'єктами (системами), при якій відомі функції переходу від параметрів одного об'єкта до іншого, а математичні описи цих об'єктів можуть бути перетворені в тотожності. Теорія подібності дає можливість встановити наявність подібності або дозволяє розробити спосіб її отримання.

Моделювання – це процес представлення об'єкта (технічної системи) адекватною (подібною) йому моделлю і проведення експериментів з моделлю для отримання інформації про об'єкт дослідження. При моделюванні модель виступає і як засіб, і як об'єкт досліджень, який знаходиться у відношеннях подібності до реального об'єкту. Іншими словами, модель – це фізична або абстрактна система, яка адекватно являє собою об'єкт дослідження.

3.2. Види моделей

Розрізняють фізичні і абстрактні моделі. Фізичні моделі утворюються із сукупності матеріальних об'єктів. Для їх побудови використовуються різні фізичні властивості об'єктів, причому природа матеріальних елементів, які застосовуються в моделі, не обов'язково та ж , що і в об'єкті дослідження. Прикладом фізичної моделі машини може бути її макет. Абстрактна модель – це опис об'єкта дослідження на будь-якій мові. Абстрактність моделі проявляється в тому, що її складовими компонентами є поняття, а не фізичні елементи (наприклад, словесний опис, креслення, схеми, графіки, таблиці, алгоритми або програми, математичні описи). Серед абстрактних моделей розрізняють: гносеологічні, інформаційні (кібернетичні), сенсуальні (чуттєві), концептуальні, математичні.

Гносеологічні моделі направлені на вивчення об'єктивних законів природи (наприклад, моделі сонячної системи, біосфери, світового океану, катастрофічних явищ природи).

Інформаційні моделі описують поведінку об'єкта-оригінала, але не копіюють його.

Сенсуальні моделі – моделі якихось відчуттів, емоцій, або моделі, які здійснюють вплив на відчуття людини (наприклад, музика, живопис, поезія).

Концептуальна модель – абстрактна модель, яка виявляє причинно-наслідкові зв'язки, що притаманні об'єкту (системі) і суттєві в рамках певного дослідження. Основне призначення концептуальної моделі – виявлення набору причинно-наслідкових зв'язків, врахування яких необхідне для отримання бажаних результатів. Одна і та ж технічна система може представлятись різними концептуальними моделями, які будуються в залежності від мети дослідження. Так, одна концептуальна модель може відображати часові аспекти функціонування машини, а інша – вплив відмов на її технічний стан.

Математична модель – абстрактна модель, яка представляється на мові математичних співвідношень. Вона має форму функціональних залежностей між параметрами, які враховуються відповідною концептуальною моделлю. Ці залежності конкретизують причинно-наслідкові зв'язки, які встановлено в концептуальній моделі, і характеризують їх кількісно.

Таким чином, модель – це спеціальна система, яка певною мірою замінює оригінал. Взагалі не існує моделі, яка повністю еквівалентна оригіналу. Будь-яка модель відображає лише деякі властивості оригіналу. Тому з метою отримання більших знань про оригінал користуються сукупністю моделей. Складність моделювання як процесу полягає у відповідному виборі моделей, які заміщають реальну технічну систему в необхідних відношеннях.

Наприклад, систему диференціальних рівнянь, що описують рух механізмів вантажопідйомного крана, можна використати для визначеня динамічних навантажень, що діють при різних режимах руху на його елементи, але недоцільно – для визначення напрацювання на відмову цих елементів. Очевидно, в останньому випадку необхідно користуватись іншими моделями, наприклад, ймовірнісною математичною моделлю у вигляді закону розподілення напрацювань окремих елементів.

3.3. Рівні моделювання

Останнім часом при аналізі і синтезі складних технічних систем отримав розвиток системний підхід як складова теорії систем, який відрізняється від класичного (індуктивного) підходу. Відповідно до останнього технічна система розглядається з позицій переходу від часткового до загального і синтезує (конструює) систему шляхом злиття її елементів, що розробляються незалежно один від одного. Системний підхід передбачає послідовний перехід від загального до часткового, коли в основі розгляду лежить мета, причому об’єкт дослідження виділяється з навколишнього середовища і представляється у вигляді системи, яка з ним взаємодіє.

Системний підхід дозволяє розв’язати проблему побудови складної технічної системи з урахуванням всіх факторів і можливостей, що пропорційні їх значимості, на всіх етапах дослідження системи і побудови її моделі. Системний підхід означає, що кожна система, в тому числі і технічна, є інтеграційним цілим навіть тоді, коли вона складається з окремих різнорідних підсистем. Таким чином, в основі системного підходу лежить розгляд системи як інтеграційного цілого, причому цей розгляд при розробці системи починається з головного: формулювання мети функціонування.

Побудова моделі технічної системи відноситься до числа системних задач, при розв’язуванні яких синтезують розв’язки на базі великої кількості початкових умов. Використання системного підходу в цих умовах дозволяє не тільки побудувати модель реальної системи, але і на базі цієї моделі вибрати необхідну кількість інформації для керування системою, оцінити показники її функціонування і тим самим на базі моделювання знайти найбільш ефективний варіант побудови і оптимальний режим функціонування реальної системи.

У відповідності з системним підходом в процесах створення і дослідження складних технічних систем моделювання їх елементів і функціональних підсистем виконується в декілька етапів і на різних рівнях в залежності від ступеня деталізації системи. Методика моделювання безпосередньо залежить від рівня моделювання. Кожному рівню моделювання ставиться у відповідність певне поняття системи, елемента системи, законів функціонування елементів системи в цілому і дії зовнішніх навантажень.

Так, при моделюванні механізма підйому вантажопідйомного крана на рівні елементів сам механізм виступає як система. Елементами цієї ситеми виступають складові механізму (рис. 3.1) : двигун -1; гальмівний пристрій - 2; передаточний механізм - 3; барабанно-канатний механізм -4; поліспастна система - 5; захватний пристрій -6. Ці елементи зв'язані між собою у відповідності з функціональною схемою механізма підйому. Робота кожного елемента описується відповідною функцією, наприклад, передаточний механізм зменшує частоту обертання вала двигуна при передачі руху до барабана, а барабанно-канатний механізм перетворює обертальній рух барабана в поступальний рух захватного пристрою. Як зовнішні навантаження на цю систему можна розглядати вагу вантажу, вітрові навантаження і рушійний момент на валу двигуна. Розглянутий механізм являє собою динамічну систему, яка змінює свій стан в часі. Предметом дослідження цієї системи може бути визначення динамічних навантажень в канаті поліспастної системи як функції рушійного (гальмівного) моменту і параметрів механізму.

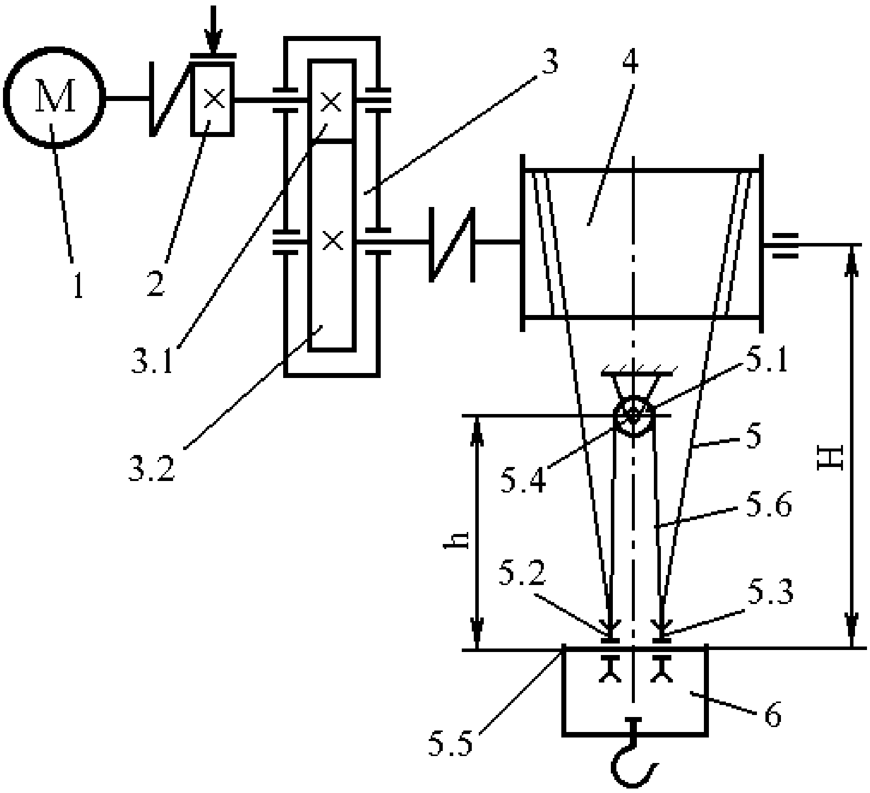


Рис. 3.1. Схема механізма підйому вантажо-підйомного крана

Той же механізм підйому можна моделювати на рівні окремих елементів, наприклад, поліспастної системи. Тоді елементами такої системи можуть виступати блоки 5.1, 5.2, 5.3, осі 5.4 і 5.5, канат 5.6. Кожний з цих елементів виконує свої функції. Зовнішнім навантаженням для цієї системи може виступати динамічне навантаження в канаті 5.6, яке було визначено в моделі більш високого рівня. Метою дослідження системи більш низького рівня може бути визначення динамічних навантажень, наприклад, на осі 5.4 і 5.5.

В залежності від ступеня деталізації опису складних технічних систем та їх елементів можна виділити три основних рівні моделювання.

1. Рівень структурного або імітаційного моделювання складних систем з використанням їх алгоритмічних моделей (моделюючих алгоритмів) і застосування спеціалізованих мов моделювання, теорій множин, алгоритмів, графів, масового обслуговування, статистичного моделювання.

2. Рівень логічного моделювання функціональних схем елементів і вузлів складних систем, моделі яких представляються у вигляді рівнянь безпосередніх зв’язків (логічних рівнянь) і будуються з застосуванням апарату двозначної або багатозначної алгебри логіки.
3. Рівень кількісного моделювання принципових схем елементів складних систем, моделі яких являють собою системи лінійних і нелінійних алгебраїчних, диференціальних або інтегро-диференціальних рівнянь, які досліджуються із застосуванням методів лінійної і нелінійної алгебри, методів функціонального аналізу, теорії ймовірності і математичної статистики.

Сукупність моделей технічної системи на структурному, логічному і кількісному рівнях моделювання являють собою ієрархічну систему, яка розкриває взаємозв’язок різних сторін опису технічної системи і забезпечує системний взаємозв’язок елементів і властивостей на всіх стадіях її створення або дослідження. При переході на більш високий рівень абстрагування здійснюється звертання даних про систему, що моделюється, а при переході до більш детального рівня опису – розвертання цих даних.

3.4. Методи моделювання

При створенні і дослідженні складних технічних систем застосовують методи аналітичного, чисельного, імітаційного, натурного і напівнатурного моделювання.

Аналітичні методи полягають в перетворенні символьної інформації, яка записана на мові математичного аналізу. При використанні аналітичних методів будується математична модель системи, що описує її фізичні властивості за допомогою математичних співвідношень, наприклад, у вигляді диференціальних або інтегральних рівнянь. Моделі такого типу називають аналітичними. Аналітична модель будується на основі понять, символіки і методів деякої теорії (наприклад, молекулярно-кінетичної теорії газів), яка визначає клас математичних аналогій, тобто основоположних математичних моделей. При аналітичному підході необхідні залежності виводяться з математичної моделі послідовним застосуванням математичних правил. Перешкодою при цьому може бути нерозв'язність рівнянь в аналітичному вигляді, відсутність первісної для підінтегральних функцій і т .д. Тому лише при певних властивостях моделі можна отримати розв'язок в явній аналітичній формі. Не дивлячись на обмежені можливості аналітичного підходу, результати, які отримують в аналітичній формі, мають велику пізнавальну цінність і знаходять застосування при розв'язуванні широкого класу теоретичних і прикладних задач.

Останнім часом досить важливою стала задача впровадження в інженерну практику наближених аналітичних методів аналізу нелінійних об'єктів (процесів) різної фізичної природи з застосуванням ЕОМ. Успішне розв'язування цієї задачі стало можливим завдяки розробці систем програмування, які використовуються для аналітичних і чисельно-аналітичних обчислень на ЕОМ. Завдяки створенню систем аналітичних обчислень і перетворень на ЕОМ, які дозволяють працювати безпосередньо з математичними формулами, застосування ЕОМ виявилось плідним для проведення складних розрахунків в небесній механіці, математичній фізиці і т. д. [14].

Чисельні методи базуються на побудові кінцевої послідовності дій над числами, яка приводить до отримання необхідних результатів. При наявності математичної моделі технічної системи застосування чисельних методів зводиться до заміни математичних операцій і співвідношень відповідними операціями над числами: заміна інтегралів сумами, похідних – відношеннями різниць, нескінченних сум – кінцевими і т.д. В результаті цього будується алгоритм, який дозволяє точно або з допустимою похибкою обчислити значення необхідних величин на ЕОМ. Результатом застосування чисельних методів є таблиці, графіки, залежності, які розкривають властивості системи. Чисельні методи по відношенню до аналітичних дозволяють розв'язувати значно більш широке коло задач, але при цьому отримані результати мають частковий характер і вимагають додаткової перевірки.

Характер процесів, які притаманні технічній системі і підлягають відображенню в моделі, може бути настільки складним, що побудова математичної моделі перетворюється в складну задачу, а аналіз моделі навіть чисельними методами може виявитись нерезультативним завдяки трудомісткості або нестійкості алгоритмів у відношенні похибок апроксимації і округлень результатів обчислень. Відтворення в моделі динаміки складних просторово-часових відношень між елементами, що утворюють складну технічну систему, всієї багатогранності її зв'язків із зовнішнім середовищем, діючих в системі законів керування, адаптивних властивостей і рис цілеспрямованої поведінки практично неможливі чисто математичними засобами.

При дослідженні таких систем з використанням методів імітаційного моделювання широке застосування знаходять моделі, які являють собою змістовний опис технічних систем і формі алгоритмів. В описах відображаються як структура системи, що досягається шляхом ототожнення елементів системи з відповідними елементами алгоритмів, так і процеси функціонування системи в часі, які представляються в логіко-математичній формі. При цьому описи системи мають алгоритмічний характер, а самі моделі являють собою програми для ЕОМ. Моделі такого типу називають імітаційними або алгоритмічними.

Особливість даного підходу до моделювання полягає в тому, що для побудови моделі використовуються алгоритмічні мови, які є більш гнучкими і доступними засобами опису складних систем, ніж мови математичних функціональних співвідношень. Завдяки цьому в імітаційних моделях складних технічних систем знаходять відображення багато деталей і функцій, які вимушено не враховуються в математичних моделях.

В теорії складних систем з притаманним їй ймовірнісним підходом до моделювання систем широко використовується наближений чисельний метод аналізу імітаційних моделей – метод статистичних випробувань (метод

Монте-Карло) [15]. Процес побудови і аналізу імітаційних моделей з застосуванням методу статистичних випробувань називається статистичним моделюванням. Статистичне моделювання являє собою метод отримання за допомогою ЕОМ статистичних даних про процеси, які проходять в системі, що моделюється. Для отримання необхідних результатів статистичні дані опрацьовуються і класифікуються з використанням методів математичної статистки. Позитивна властивість статистичного моделювання – це універсальність, яка гарантує принципову можливість аналізу систем будь-якої складності з будь-якою ступінню деталізації досліджуваних явищ. Недолік статистичного моделювання – це трудомісткість процесу моделювання, тобто необхідність виконання великої кількості операцій над числами, і частковий характер результатів, який не розкриває залежності, а лише визначає її в окремих апріорно назначених точках. Імітаційні експерименти широко використовують в практиці створення і дослідження складних технічних систем, коли реальний експеримент неможливий.

Натурним моделюванням називають проведення досліджень на реальному об'єкті (системі) з наступною обробкою результатів експерименту на основі теорії подібності. При функціонуванні технічної системи у відповідності з поставленою метою вдається виявити закономірності проходження реального процесу. Необхідно відзначити, що такі різновидності натурного експерименту, як виробничий експеримент і комплексні випробування, мають високу ступінь достовірності. Методи натурного моделювання базуються на вимірюванні характеристик процесів, що проходять в реальних системах, і обробці результатів вимірювання з метою виявлення тих чи інших закономірностей, які цікавлять дослідника. Експериметальні дослідження дають найбільш достовірну інформацію, але вони носять частковий характер. Натурне моделювання може проводитись також на фізичних моделях, які моделюють реальні процеси. Фізичні моделі будуються на основі теорії подібності.

Напівнатурне моделювання складних технічних систем здійснюється шляхом використання їх комбінованих моделей. В структуру таких моделей включають математичні співвідношення, які описують функціонування окремих елементів (підсистем), а також реальні елементи (підсистеми) або їх фізичні моделі, що є складовими елементами досліджуваної ситеми. В процесі дослідження комбінованих моделей може бути досягнута оптимальна взаємодія між обчислювальним і натурним експериментами. Методи напівнатурного моделювання ефективно використовують при дослідженнях складних технічних систем, які складаються з елементів різної фізичної природи. Ці методи враховують переваги математичного і натурного моделювання.

4. ФІЗИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

4.1. Основні поняття фізичного моделювання

В процесі проведення експериментальних досліджень можуть бути використані натурні обєкти і їх моделі. В натурному експерименті засоби експериментального дослідження взаємодіють безпосередньо з об'єктом дослідження. В модельному експерименті дослідження проводять не з самим об'єктом, а з його замінником-моделлю. Модель тут відіграє подвійну роль. По-перше, вона являє собою об'єкт безпосереднього екпериментального дослідження. По-друге, по відношенню до вивчаємого об'єкту, модель виступає як засіб експериметального дослідження.

В експериметальних дослідженнях досить широко використовується фізичне моделювання технічних систем. Цим методом користуються при дослідженні складних явищ, коли неможливо побудувати задовільну математичну модель, або для перевірки адекватності математичної моделі.

Фізичне моделювання зберігає фізичну природу явищ, але змінює їхній масштаб. Сенс фізичного моделювання полягає в тому, щоб за результатами дослідів на моделях можна було достовірно оцінити характер ефектів і кількісні взаємозв'язки між величинами, які визначають фізично подібні явища в натурних умовах.

Основою фізичного моделювання є теорія подібності, яка спирається на аналіз розмірностей. Об'єкти (явища, процеси, системи і т. п.) є подібними, якщо у відповідні моменти часу у відповідних точках об'єктів значення змінних величин, що характеризують стан одного об'єкта (натури), пропорційні відповідним значенням величин іншого об'єкта (моделі). З цього визначення випливає, що в подібних об'єктах характеристики натурного об'єкта можуть бути отримані простим перерахунком з характеристик модельного об'єкта, які визначаються, як правило, експериментально. Для всіх величин певної розмірності таким множником є коефіцієнт подібності (множник масштабного перетворення).

До фізичного моделювання відносяться механічні, гідравлічні, електродинамічні, теплові та інші різновидності моделювання. Окремими видами фізичної подібності є: геометрична подібність (подібність геометричних елементів фігур або тіл); кінематична подібність (подібність швидкостей для розглядаємих рухів); динамічна подібність (подібність систем діючих сил або силових полів різної фізичної природи – сили ваги, сили тиску і т. п.).

Механічна подібність включає в себе геометричну, кінематичну і динамічну подібності. Електродинамічна подібність характеризується подібностями струмів, напруг, навантажень, потужностей, полів електромагнітних сил і т. д.

Для подібних об’єктів загальними умовами є такі умови: модель і натурний об’єкт повинні бути геометрично подібними; діючі на модель навантаження повинні бути подібними навантаженням на натурні об’єкти; безрозмірні величини (коефіцієнт Пуассона, коефіцієнт тертя, відносна деформація і т. д.) для моделі і натурного об’єкта повинні бути однаковими; матеріали моделі і натурного об’єкта можуть бути різними, але в досліджуваній області зв’язок напружень і деформацій повинени відповідати закону Гука.

4.2. Коефіцієнти і критерії подібності

При механічному моделюванні розрізняють просту і розширену подібність. При простій подібності коефіцієнти подібності для величин, що мають однакову розмірність (наприклад, геометричні розміри) повинні бути однаковими. При розширеній подібності вказані величини можуть мати різні коефіцієнти подібності.

Методика вивчення коефіцієнтів подібності в загальному випадку має такий вигляд. Наприклад, в механіці основними величинами вважають довжину l, час t і масу m. Їх коефіцієнти подібності $\nu_l = l_{\text{н}}/l_{\text{м}}$, $\nu_t = t_{\text{н}}/t_{\text{м}}$, $\nu_m = m_{\text{н}}/m_{\text{м}}$ вибираються довільно, де $l_{\text{н}}, t_{\text{н}}, m_{\text{н}}$ – основні величини натурного об'єкта, $l_{\text{м}}, t_{\text{м}}, m_{\text{м}}$ – відповідні величини моделі. В цих і подальших залежностях індекси "н" і "м" відносяться відповідно до параметрів натурного об'єкту і моделі.

Інші коефіцієнти подібності можуть бути отримані на основі фізичних законів. Для швидкості $\text{v}_{\text{н}} = l_{\text{н}}/t_{\text{н}}$ і $\text{v}_{\text{м}} = l_{\text{м}}/t_{\text{м}}$ коефіцієнт подібності $\nu_{\text{v}} = \text{v}_{\text{н}}/\text{v}_{\text{м}} = l_{\text{н}}t_{\text{м}}/l_{\text{м}}t_{\text{н}}$ можна визначити через коефіцієнти подібності довжини ν_l і часу ν_t у вигляді $\nu_{\text{v}} = \nu_l/\nu_t$. У відповідності з другим законом Ньотона сила F зв'язана з прискоренням w співвідношенням $F = mw$, то, по аналогії з коефіцієнтом подібності для швидкості, коефіцієнт подібності для сили визначається залежністю $\nu_F = \nu_m \nu_l / \nu_t^2$. Таким же чином можуть бути знайдені коефіцієнти подібності для інших фізичних величин.

При фізичному моделюванні експериментальні результати і висновки узагальнюються за допомогою критеріїв подібності. Число таких критеріїв може бути значно меншим, ніж кількість параметрів, що описують той чи інший процес. Скоротити число параметрів, що описують будь-яке явище або процес, можна шляхом їх групування у безрозмірні комплекси, які складаються з розмірних величин, виходячи з природи і умов досліджуваного явища або процесу. Ці безрозмірні комплекси називають критеріями подібності.

Рівність всіх однакових критеріїв подібності для двох фізичних явищ (процесів, систем) – необхідна і достатня умова їх подібності. Це визначається з пропорційності для подібних явищ, що їх описують і входять в критерії подібності. Розмірні фізичні параметри, які входять в критерії подібності, можуть значно відрізнятись між собою. Однаковими повинні бути лише безрозмірні критерії подібності, що характеризують натурний об’єкт і модель. Ця властивість подібних явищ складає основу фізичного моделювання реальних об’єктів. Якщо рівняння, що описують фізичне явище, відомі, то критерії подібності формуються шляхом приведення цього рівняння до безрозмірного критеріального виду.

В механіці для моделювання процесів використовують ряд класичних критеріїв подібності. Відомий закон Ньютона, який описує рух матеріальної точки при дії сили F, в диференціальній формі має вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F/m, \tag{4.1}$$

де m - маса матеріальної точки; x - її координата; t - час. Враховуючи те, що символи диференціювання і інтегрування, які входять в початкові рівняння, можуть бути відкинуті, бо вони не мають розмірності, рівняння (4.1) можна записати в такому виді

$$\frac{x}{t^2} = \frac{F}{m}. \tag{4.2}$$

Тепер, розділивши праву частину рівняння (3.2) на ліву, отримаємо <u>критерій подібності Ньютона</u>

$$K_N = \frac{F t^2}{mx} = Idem, \tag{4.3}$$

де $Idem$ – відповідно однаково для всіх об’єктів, що розглядаються.

Для обертального руху

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M/J,$$

де φ - кут повороту; *M, J* - відповідно крутний момент і момент інерції тіла відносно осі обертання. Аналогічно критерій подібності Ньютона має вигляд

$$K_N = \frac{M\,t^2}{J\,\varphi} = Idem \cdot \tag{4.4}$$

Для системи матеріальних точок, між якими діє зв'язок, можна записати: якщо швидкості тіл з різними масами, що переміщуються на однакові відстані, однакові, то діючі на них сили пропорційні відповідним масам тіл. При вільному падінні тіл закон Ньютона можна записати у вигляді співвідношення

$$m\frac{d^2x}{dt} = mg,$$

де g - прискорення вільного падіння. Тоді для вільного падіння тіл критерій подібності має такий вираз

$$K_g = \frac{x}{gt^2} = Idem \cdot \tag{4.5}$$

Помноживши цей критерій на квадрат критерію гомохронності $K_{HO} = \mathrm{v}t / x$ (критерій подібності механічного руху), отримаємо критерій подібності, який в літературі відомий під назвою <u>критерія Фруда</u>

$$K_{Fr} = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{gx}} = Idem \cdot \tag{4.6}$$

Визначимо критерій подібності пружних тіл. Пружну силу деформованого елементу механічної системи (наприклад, при розтягуванні пружного стержню) можна записати у вигляді

$$F = E\,S\,, \tag{4.7}$$

де E - модуль пружності першого роду; S - відповідна площа поперечного перерізу деформованого елементу. Крім того, згідно з законом Ньютона

$$F = m\frac{d^2x}{d\,t^2}\cdot \tag{4.8}$$

Прирівнявши вирази сил із залежностей (4.7) і (4.8), отримаємо

$$ES = m\frac{d^2x}{d\,t^2}\cdot$$

Замінивши в цьому рівнянні $m = S\,x\,\rho$ (де ρ - густина матеріалу елемента), будемо мати

$$ES = S\,x\,\rho\frac{d^2x}{d\,t^2}.$$

Застосувавши правило визначення критерію подібності, отримаємо

$$K_E = \frac{Et^2}{x^2\rho} = Idem\cdot \tag{4.9}$$

Розділивши квадрат критерію гомохронності K_{HO} на критерій (4.9), будемо мати

$$\frac{K_{HO}^2}{K_E} = \frac{\mathrm{v}^2}{E/\rho}.$$

Добувши квадратний корінь з цього виразу, знайдемо критерій подібності, який має назву критерія Коші

$$K_{CO} = \frac{\mathrm{v}}{\sqrt{E/\rho}} = Idem \cdot \qquad (4.10)$$

Величина $\sqrt{E/\rho}$ являє собою швидкість розповсюдження звукових (коливальних) хвиль в пружному середовищі.

Кожний з критеріїв подібності має свій фізичний зміст. Так, наприклад, останній критерій подібності показує співвідношення між швидкістю руху тіла і швидкістю розповсюдження звукових хвиль в пружному середовищі.

Критерії подібності фізичних явищ, процесів, технічних систем і т. д. незалежні один від одного і їх поєднання дає нові критерії, які відображають ті чи інші фізичні властивості.

4.3. Теореми подібності

Співідношення між параметрами подібних явищ базуються на трьох теоремах подібності, в яких сформульовані необхідні і достатні умови подібності.

Перша теорема подібності встановлює необхідні умови подібності і формулюється таким чином: якщо фізичні явища подібні, то критерії подібності цих явищ рівні між собою

$$K_1 = K_2 = \ldots = K_n = Idem. \tag{4.11}$$

Індекси 1, 2, ..., *n* показують номер явища.

Друга теорема подібності встановлює математичну структуру рівнянь, що описують подібні фізичні явища: функціональна залежність між параметрами, що характеризують явище, може бути виражена у вигляді залежності між критеріями подібності, які сформовані з цих параметрів.

З цієї теореми випливає, що експериментальні результати необхідно обробляти у вигляді узагальнюючих безрозмірних змінних величин, а рівняння, що використовують ці результати, представляти в критеріальній формі. В цьому випадку розв'язування рівнянь дозволяє на основі даних єдиного експерименту проводити узагальнення при інших умовах, навіть при натурних експериментах.

Третя теорема подібності вказує на достатні умови подібності: два фізичні явища подібні, якщо вони описуються однією і тією ж системою рівнянь і мають подібні граничні умови однозначності, а їх критерії подібності чисельно рівні.

Рівняння, про які йде мова, являють собою, в основному, диференціальні рівняння математичної фізики. Вони представляють математичний запис фундаментальних фізичних явищ.

Багато фізичних явищ описуються тотожними диференціальними рівняннями. На цьому принципі тотожності рівнянь побудоване аналогове моделювання. Тут система диференціальних рівнянь являє собою математичну модель деякого класу подібних явищ.

При інтегруванні диференціальних рівнянь отримують безмежну множину розв'язків, які задовольняють ці рівняння. Для отримання розв'язків, які враховують конкретні особливості явища, необхідно задаватись умовами однозначності. Ці умови не залежать від механізму явища, що описується диференціальними рівняннями, і задаються виходячи з умов конкретної задачі. Одиничні явища з одними і тими ж умовами однозначності складають групу подібних явищ. В умови однозначності входять:

1) геометричні параметри, які відображають розміри і форму предметів;
2) фізичні і механічні характеристики матеріалів предметів (коефіцієнт теплопровідності, коефіцієнт тертя, модуль пружності і т. д.);
3) початкові умови, тобто стан системи в момент часу, від якого починається вивчення явища. Задаються функції невідомих змінних в координатах x, y, z для моменту часу, як правило, $t = 0$;
4) граничні умови, які відображають характер взаємодії тіл з навколишнім середовищем. Вони задаються деякими функціями від часу і змінних характеристик, які змінюються на поверхні тіл, наприклад, поверхневих сил, температури і т.п.

Приклад 4.1. Визначити умови подібності балки, яка лежить на пружній основі з розподіленим навантаженням (рис. 4.1).

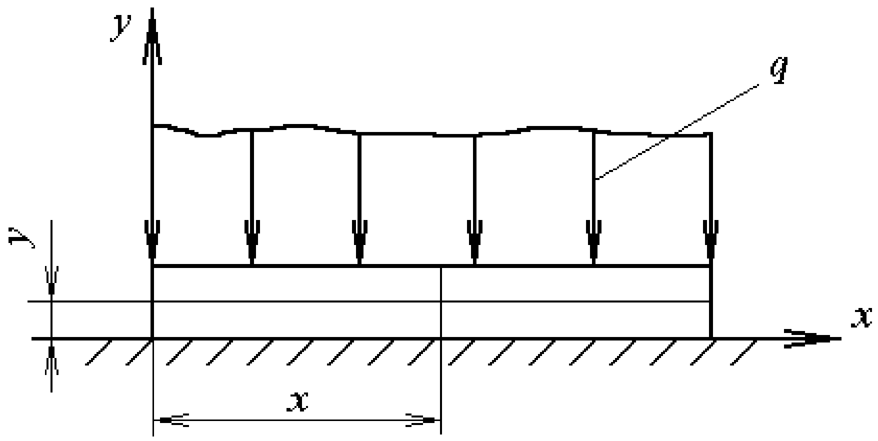


Рис. 4.1. Схема балки на пружній основі

Координата пружної лінії балки описується диференціальним рівнянням четвертого порядку

$$\frac{d^4 y}{d x^4} + \frac{c y}{E I} = \frac{q}{E I}, \tag{4.12}$$

де $y = y(x)$ - прогин балки вздовж координати її осі x; c - жорсткість пружної основи, віднесена до одиниці довжини балки; E - модуль пружності матеріалу балки; $I = I(x)$ - момент інерції поперечного перерізу балки; $q = q(x)$ - інтенсивність навантаження.

Виразимо параметри натурної балки через відповідні параметри її фізичної моделі і коефіцієнти подібності

$$\begin{aligned} &y_{\text{н}} = \nu_y\, y_{\text{м}}; \quad c_{\text{н}} = \nu_c\, c_{\text{м}}; \quad E_{\text{н}} = \nu_{\text{E}} E_{\text{м}}; \\ &I_{\text{н}} = \nu_{\text{I}} I_{\text{м}}; \quad x_{\text{н}} = \nu_x\, x_{\text{м}}; \quad q_{\text{н}} = \nu_q\, q_{\text{м}}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

де $y_{\text{н}}, c_{\text{н}}, E_{\text{н}}, I_{\text{н}}, x_{\text{н}}, q_{\text{н}}$ - параметри натурної балки; $y_{\text{м}}, c_{\text{м}}, E_{\text{м}}$, $I_{\text{м}}$, $x_{\text{м}}, q_{\text{м}}$ - параметри моделі балки ; $\nu_E, \nu_y, \nu_x, \nu_q$ - відповідні коефіцієнти подібності.

Рівняння, подібні рівнянню (4.12), для натурної балки і її моделі мають вигляд:

$$\frac{d^4 y_{\text{н}}}{d x_{\text{н}}^4} + \frac{c_{\text{н}} y_{\text{н}}}{E_{\text{н}} I_{\text{н}}} = \frac{q_{\text{н}}}{E_{\text{н}} I_{\text{н}}}; \tag{4.14}$$

$$\frac{d^4 y_{\text{м}}}{d x_{\text{м}}^4} + \frac{c_{\text{м}} y_{\text{м}}}{E_{\text{м}} I_{\text{м}}} = \frac{q_{\text{м}}}{E_{\text{м}} I_{\text{м}}}. \tag{4.15}$$

Виходячи з подібності моделі і натурної балки поділимо відповідні доданки рівнянь (4.14) і (4.15) між собою і запишемо співвідношення

$$\frac{\dfrac{d^4 y_{\text{н}}}{d x_{\text{н}}^4}}{\dfrac{d^4 y_{\text{м}}}{d x_{\text{м}}^4}} = \frac{\dfrac{c_{\text{н}} y_{\text{н}}}{E_{\text{н}} I_{\text{н}}}}{\dfrac{c_{\text{м}} y_{\text{м}}}{E_{\text{м}} I_{\text{м}}}} = \frac{\dfrac{q_{\text{н}}}{E_{\text{н}} I_{\text{н}}}}{\dfrac{q_{\text{м}}}{E_{\text{м}} I_{\text{м}}}}.$$

Використавши для цих співвідношень залежності (4.13), отримаємо

$$\frac{\dfrac{d^4(\nu_y y_{\text{м}})}{d(\nu_x x_{\text{м}})^4}}{\dfrac{d^4 y_{\text{м}}}{d x_{\text{м}}^4}} = \frac{\dfrac{\nu_c c_{\text{м}} \nu_y y_{\text{м}}}{\nu_E E_{\text{м}} \nu_I I_{\text{м}}}}{\dfrac{c_{\text{м}} y_{\text{м}}}{E_{\text{м}} I_{\text{м}}}} = \frac{\dfrac{\nu_q q_{\text{м}}}{\nu_E E_{\text{м}} \nu_I I_{\text{м}}}}{\dfrac{q_{\text{м}}}{E_{\text{м}} I_{\text{м}}}}.$$

Згідно з теоремами подібності в отриманих співідношенях відкидаємо знаки диференціювання, бо вони не мають розмірностей і скорочуємо вирази. В результаті чого отримуємо співвідношення між коефіцієнтами подібності

$$\frac{\nu_y}{\nu_x} = \frac{\nu_c \nu_y}{\nu_E \nu_I} = \frac{\nu_q}{\nu_E \nu_I}. \tag{4.16}$$

Розділивши всі частини співвідношень (4.16) на $\nu_y \big/ \nu_x^4$, маємо систему рівнянь

$$\frac{\nu_c \nu_x^4}{\nu_E \nu_y} = 1; \quad \frac{\nu_q \nu_x^4}{\nu_E \nu_I \nu_y} = 1. \tag{4.17}$$

Система з двох рівнянь (4.17) зв’язує між собою шість невідомих величин. Чотири з цих величин можна при моделюванні задати довільно, а дві величини, що залишились, можуть бути знайдені з системи рівнянь (4.17).

Нехай величини $\nu_E, \nu_I, \nu_x, \nu_q$ при моделюванні балки вибираються довільно. Тоді ν_y, ν_c можна отримати із залежностей

$$\nu_y = \frac{\nu_q \nu_x^4}{\nu_E \nu_I}; \quad \nu_c = \frac{\nu_E \nu_I}{\nu_x^4}.$$

Отримані співвідношення дають можливість побудувати модель балки, яка подібна натурній, з будь-якого матеріалу, що підпорядкований закону Гука, і будь-яких розмірів.

Принцип подібності систем за відомими диференціальними рівняннями їх стану досить широко застосовується при моделюванні технічних систем будь-якої фізичної природи. Особливе значення цей принцип подібності має для складних механічних систем, коли диференціальні рівніння їх стану відомі, але їх не вдається проінтегрувати. Тоді будують фізичні моделі тих або інших складних механічних систем і за їх допомогою проводять експериментальні дослідження.

Розглянемо ще один приклад фізичного моделювання механічної системи з використанням критеріїв подібності, які відображають стан системи.

<u>Приклад 4.2.</u> Нехай є круглий стержень діаметром d, який закріплено одним кінцем, а на іншому кінці підвішено вантаж, розміри якого $a \times a \times a$ (рис. 4.2). Визначити із умови статичної міцності відповідні коефіцієнти подібності геометричних розмірів і матеріалів стержня і вантажу.

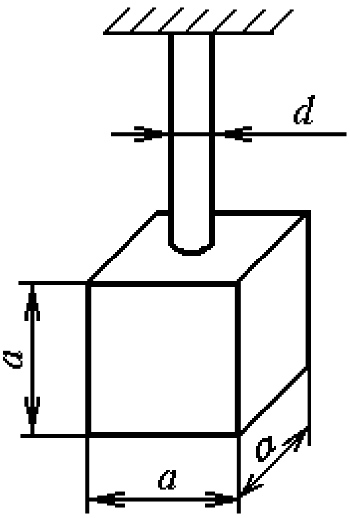


Рис. 4.2. Схема системи "стержень-вантаж"

Оскільки вага вантажу значно більше за вагу стержня, останню не будемо враховувати в подальших розрахунках.

Визначимо для цієї системи критерій статичної міцності. На стержень діє сила ваги вантажу, яка для нашого випадку визначається залежністю

$$F = m\,g = \rho g a^3, \qquad (4.18)$$

де m - маса вантажу; g - прискорення вільного падіння; ρ - густина вантажу.

В той же час, для збереження умов статичної міцності стержня, останній може сприймати навантаження

$$F = [\sigma] s = [\sigma] \pi d^2 / 4, \tag{4.19}$$

де $[\sigma]$ - допустиме напруження на розрив матеріалу стержня; s - площа поперечного перерізу стержня.

Розглядаючи граничний випадок, прирівняємо праві частини (4.18) і (4.19), в результаті чого будемо мати

$$\rho g a^3 = [\sigma] \pi d^2 / 4.$$

Розділивши праву частину цього рівняння на ліву, отримаємо критерій подібності статичної міцності стержня системи "стержень-вантаж"

$$K_\sigma = \frac{\pi d^2 [\sigma]}{4 \rho g a^3} = Idem \cdot \tag{4.20}$$

В залежності (4.20) постійні коефіцієнти π і 4 можуть не враховуватись, бо вони не змінюються при переході від натурної системи до моделі. Тоді критерій подібності остаточно матиме вигляд

$$K_\sigma = \frac{d^2 [\sigma]}{\rho g a^3} = Idem \cdot \tag{4.21}$$

Виразимо параметри натурної системи через параметри моделі і коефіцієнти подібності

$$d_H = \nu_d\, d_M\,;\quad [\sigma]_H = \nu_\sigma [\sigma]_M\,;\quad \rho_H = \nu_\rho \rho_M\,;\quad g_H = \nu_g g_M\,;\,.$$
$$a_H = \nu_a a_M$$

Підставивши почергово параметри натурної системи і моделі в залежність (4.21), отримаємо критерії статичної міцності, які рівні між собою. В результаті цього маємо співвідношення

$$\frac{(\nu_d d_M)^2 \nu_\sigma [\sigma]_M}{\nu_\rho \rho_M\, \nu_g g_M (\nu_a a_M)^3} = \frac{d_M^2 [\sigma]_M}{\rho_M\, g_M\, a_M^3}\ .$$

Після скорочення відповідних величин отримаємо співвідношення між коефіцієнтами подібності

$$\frac{\nu_d^2 \nu_\sigma}{\nu_\rho \nu_g \nu_a^3} = 1\cdot \qquad (4.22)$$

В залежність (4.22) входить п'ять невідомих коефіцієнтів подібності, тому чотири з них можуть задаватись довільно, а п'ятий визначається із отриманого співвідношення. Якщо прийняти, що матеріали стержня і вантажу для натурного об'єкта і моделі однакові, а реальне існування системи і дослідження може здійснюватись в полі сил тяжіння Землі, то залежність (4.22) перетворюється в залежність між коефіцієнтами подібності, які визначають співвідношення між геометричними розмірами натурної системи і моделі

$$\nu_d^2 \big/ \nu_a^3 = 1. \qquad (4.23)$$

Нехай $\nu_a = 10$. Тоді із залежності (4.23) отримаємо, що $\nu_d = \nu_a \sqrt{\nu_a} = 10\sqrt{10} \approx 31{,}62.\cdot$

Таким чином, якщо розміри вантажу зменшено в 10 разів, то відповідний розмір стержня повинен бути зменшений в 31,62 рази. Необхідно відзначити, що в інженерній практиці і наукових дослідженнях іноді допускають, що при моделюванні завжди зберігається пряма пропорційність для всіх параметрів досліджуваної технічної системи. В дійсності, як правило, пряма пропорційність відсутня, і таке припущення приводить до грубих помилок.

4.4. Метод аналізу розмірностей в теорії подібності

Цей метод є основою теорії подібності, за допомогою якого будується фізичне моделювання.

В основі теорії розмірностей лежить принцип розмірної однорідності фізичних рівнянь: всі члени рівнянь, які описують фізичні явища, повинні мати однакову розмірність. На це вперше звернув увагу французький математик Ж. Фур'є.

Будь-який фізичний процес може бути описаний за допомогою функціональної залежності між розмірними і безрозмірними величинами. Величина, чисельне значення якої залежить від прийнятої системи одиниць, називається розмірною (наприклад, довжина, час, сила, енергія і т.д.). якщо чисельне значення величини не залежить від системи одиниць, то вона називається безрозмірною величиною.

Сукупність фізичних величин, що зв'язані між собою або іншими залежностями, утворюють систему одиниць. Всі величини, що входять в систему одиниць, ділять на основні і похідні. За основні вибирають величини, які не залежать від інших величин даної системи. Похідні величини утворюються з основних або інших величин у відповідності з фізичними законами.

В міжнародній системі одиниць *SI* (*CI*) прийнято сім основних одиниць: метр (м), кілограм (кг), секунда (с), ампер (А), кельвін (К), моль, кандела (кд). Допоміжними одиницями є радіан і стерадіан.

Розмірність величини визначається добутком степеней множників, які являють собою основні одиниці. Формула розмірності, яку можна розглядати як характеристику фізичної природи похідної величини, в будь-якій системі одиниць може бути представлена функцією виду

$$[a]=A_1^{\alpha}\cdot A_2^{\beta}\cdot A_3^{\gamma}\cdot\ldots, \tag{4.24}$$

де $[a]$ - похідна одиниця; $A_1, A_2, A_3, \ldots$ - основні одиниці; α, β, γ - будь-які дійсні числа.

При запису формул розмірності використовують символи довжини - L, маси - M, часу - T і т. д. Наприклад розмірності сили F і прискорення w в символьному запису будуть виглядати наступним чином

$$[F]=M\,L\,T^{-2}; \quad [w]=L\,T^{-2}.$$

Особливістю розмірних величин є те, що вони при метричних перетвореннях (переході від однієї системи одиниць до іншої) змінюють свої числові значення. На відміну від розмірних одиниць, безрозмірні одиниці не змінюють свого числового значення при такому переході.

Розглянемо структуру функціональних зв’язків між фізичними величинами, що виражають фізичний закон, незалежний від вибору системи одиниць. Нехай маємо розмірну величину *a*, яка є функцією розмірних величин $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$a=f(a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_n).$$

Серед цих аргументів можуть бути виділені k величин, які будуть мати незалежні розмірності (число основних одиниць повинно бути більше або дорівнювати k). Незалежність розмірностей означає, що формула, яка виражає розмірність будь-якої з них, не може являти собою комбінацію, складену з формул розмірності для інших величин. Наприклад, розмірності довжини - L, швидкості - LT^{-1} і енергії - ML^2T^{-2} незалежні, а розмірності довжини - L, швидкості - LT^{-1} і прискорення - LT^{-2} залежні, бо

$$LT^{-2} = \left(LT^{-1}\right)^2 \cdot L^{-1}.$$

Серед механічних величин є не більше трьох з незалежними розмірностями. Приймемо k незалежних величин $a_1, \ldots, a_k$ за основні і введемо для їх розмірностей позначення: $[a_1] = A_1$, $[a_2] = A_2, \ldots,$ $[a_k] = A_k$. Тоді у віповідності з формулою розмірностей (3.24) інші величини мають вид

$$\begin{aligned} &[a_1] = A_1^{\alpha} \cdot A_2^{\beta} \cdot A_3^{\gamma} \cdot \ldots \cdot A_k^{\chi}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[a_n] = A_1^{\alpha_n} \cdot A_2^{\beta_n} \cdot A_3^{\gamma_n} \cdot \ldots \cdot A_k^{\chi_n}. \end{aligned} \qquad (4.25)$$

Перейдемо до нової системи основних одиниць b, які пропорційні одиницям a. При переході від однієї системи основних одиниць $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ до іншої $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ змінюється не природа процесу, а числові значення розмірних величин. Структура функціонального зв'язку f, за допомогою якого виражається фізичний закон в новій системі одиниць, має вигляд

$$
\begin{aligned}
b &= f(b_1,\ldots,b_k,\ldots,b_n) = \\
&= f(l_1 a_1,\ldots,l_k a_k,\ldots,a_n\, l_1^{\alpha\, n}\, l_2^{\beta\, n}\, l_3^{\gamma\, n}\ldots)\,.
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Оскільки вибір коефіцієнтів $l_1, l_2, \ldots, l_k$ нічим не обмежується, задамо їх у вигляді

$$
l_1 = 1/a_1,\;\; l_2 = 1/a_2,\ldots,\; l_k = 1/a_k\,.
$$

Тоді числові значення перших k аргументів в рівнянні (4.26) стануть рівними одиниці, тобто перетворяться в безрозмірні величини

$$
b_1 = l_1 a_1 = 1,\quad b_2 = l_2 a_2 = 1,\ldots,b_k = l_k a_k = 1.
$$

Також в безрозмірні величини перетворюються розмірні величини $b,\, b_{k+1},\ldots,b_n$. Їх числові значення визначаються залежностями:

$$
\begin{aligned}
&b = \frac{a}{a_1^{\alpha}\; a_2^{\beta}\, a_3^{\gamma}\ldots a_k^{\chi}} = K; \\
&b_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_1^{\alpha\; k+1}\; a_2^{\beta\; k+1}\, a_3^{\gamma\; k+1}\ldots a_k^{\chi\; k+1}} = K_1; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&b_n = \frac{a_{k+1}}{a_1^{\alpha\; n}\; a_2^{\beta\; n}\, a_3^{\gamma\; n}\ldots a_k^{\chi\; n}} = K_{n-k}\,.
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Таким чином, в результаті метричних перетворень отримана безрозмірна система одиниць фізичних величин, в яких залежність (3.26) з урахуванням виразів (4.27) представляється у вигляді

$$K = f(1,\dots,1,K_1,\dots,K_{n-k}),$$

або

$$K = \varphi(K_1,\dots,K_{n-k}). \qquad (4.28)$$

З останнього рівняння можна зробити декілька висновків. По-перше, всяке фізичне співвідношення між розмірними величинами можна сформулювати як співвідношення між безрозмірними величинами. По-друге, зв'язок між n+1 розмірними величинами $a, a_1, \dots, a_n$, незалежний від вибору системи одиниць, приймає вид співвідношення між n+1-k безрозмірними величинами $K, K_1, \dots, K_{n-k}$. При цьому число аргументів зменшилось на k , що відповідає кількості аргументів, які мають незалежні розмірності.

Якщо розмірна величина є також функцією безрозмірних аргументів $a_{n+1}, \dots, a_s$, то рівняння фізичного процесу приймає вигляд

$$a = \varphi(a_1,\dots,a_n,a_{n+1},\dots,a_s). \qquad (4.29)$$

Для безрозмірних аргументів можна записати, що

$$[a_{n+1}] = [a_{n+2}] = \dots = [a_s] = 1.$$

При переході до нової системи одиниць безрозмірні величини залишаються без змін:

$$\begin{aligned} &b_{n+1} = a_{n+1} = K_{n+1-k}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &b_s = a_s = K_{s-k}. \end{aligned} \qquad (4.30)$$

В результаті метричних перетворень вираз (4.29) приймає вигляд

$$K = \psi(K_1, \ldots, K_{n-k}, K_{n+1-k}, \ldots, K_{s-k}). \tag{4.31}$$

В отриманому рівнянні зв'язок між $s+1$ розмірними і безрозмірними величинами приймає вид зв'язку між $s+1-k$ безрозмірними комплексами.

При використанні методу аналізу розмірностей важливим елементом є техніка приведення фізичних рівнянь до безрозмірного виду. Нехай розмірна фізична величина a є функцією s аргументів a_i

$$a = f(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n, \ldots, a_s), \tag{4.32}$$

причому n з них розмірні, а $s-n$ безрозмірні. Спочатку виписують розмірності всіх величин. З числа a аргументів виділяють k аргументів з незалежними розмірностями. За допомогою формул (4.27) утворюють безрозмірні комплекси $K, K_1, \ldots, K_{n-k}$, які доповнюють безрозмірними аргументами (4.30) в кількості $s-n$. Вважаючи, що $K_{n-k+1} = a_{n+1}, \ldots$ $\ldots, K_{s-k} = a$, початкове рівняння (3.32) приводять до безрозмірного виду

$$K = \psi(K_1, \ldots, K_{n-k}, K_{n-k+1}, \ldots, K_{s-k}). \tag{4.33}$$

Розглянемо приклад застосування метода аналізу розмірностей для дослідження механічних систем.

<u>Приклад 4.3.</u> У вібраційній системі деяка маса m здійснює вимушені коливання на пружній опорі жорсткістю c під дією періодичної сили F $\left(F = F_0 \sin \omega t\right)$ з амплітудою F_0 і частотою ω (рис. 4.3)

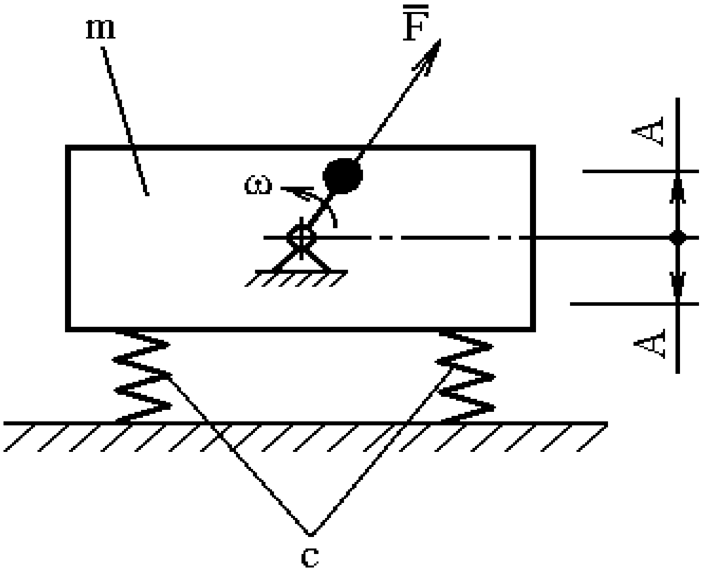


Рис. 4.3. Схема вібраційної системи

Амплітуда коливань A буде залежати від розглянутих параметрів вібраційної системи:

$$A = f(m, c, F_0, \omega). \tag{4.34}$$

Випишемо в символах розмірності всіх величин системи: $[A] = L$; $[m] = M$; $[c] = MT^{-2}$; $[\omega] = T^{-1}$; $[F_0] = MLT^{-2}$. В задачі n=s= 4, причому всі величини, що впливають на процес коливань, розмірні.

За основні величини, як для механічної системи, може бути прийнято k=3 параметри, наприклад, c, F_0 і ω. В цьому випадку n-k =1. За допомогою залежностей (4.27) утворимо безрозмірні комплекси

$$K = \frac{Ac}{F_0}; \quad K_1 = \frac{m\omega^2}{c}.$$

Тоді залежність (4.34) приймає вигляд залежності безрозмірних комплексів

$$K = \varphi(K_1) \text{ або } \frac{A\,c}{F_0} = \varphi\left(\frac{m\,\omega^2}{c}\right). \tag{4.35}$$

В результаті приведення фізичного рівняння до безрозмірного виду початкова кількість аргументів скоротилась від чотирьох розмірних до одного безрозмірного.

Приведення коливань вібраційної системи до безрозмірної форми придає аналізу процесу узагальнюючий характер. Можливі два шляхи проведення дослідів. Перший полягає в послідовній зміні кожного з чотирьох аргументів m, c, F_0, ω, зберігаючи при цьому постійними інші. Другий шлях значно простіший. Із запису в безрозмірній формі залежності (4.34) випливає, що експериментально достатньо дослідити одну функцію $K = \varphi(K_1)$. Таке дослідження зведеться до вимірювання амплітуди коливань при різних значеннях маси *m*.

Процес в цілому описується залежністю між двома безрозмірними параметрами $A\,c/F_0$ і $m\,\omega^2/c$, яку можна представити у вигляді

$$A = \frac{F_0}{c}\,\varphi\left(\frac{m\,\omega^2}{c}\right). \tag{4.36}$$

З отриманого запису можна стверджувати, що амплітуда коливань вібраційної системи прямо пропорційна амплітуді вимушеної сили, а від жорсткості залежить складним, поки невідомим чиним. Маса впливає на амплітуду коливань таким же чином, як і квадрат частоти вимушеної сили.

Метод аналізу розмірностей показує вплив як кожного з аргументів окремо, так і їх сумісний вплив на кінцевий результат. Разом з тим, аналізу розмірностей для отримання кінцевих результатів недостатньо. Конкретний вид функції процесу може бути отриманий дослідним шляхом або теоретично. При користуванні цим методом головним є виявлення основних факторів, які визначають суть явища або процесу, що вивчаються.

За допомогою методу аналізу розмірностей відкрити фізичні закони неможливо. Цей метод розглядається як засіб для упорядкування наших уявлень про характер діючих в природі закономірностей.

5. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

5.1. Основні поняття математичного моделювання

Побудова математичних моделей являє собою основу теорії систем. Це центральний етап в дослідженні, проектуванні, або керуванні будь-якої системи. Від якості математичної моделі залежить доля всіх розглянутих етапів.

В загальному випадку під математичною моделлю технічної або іншої системи розуміють будь-яке співвідношення, яке відображає з необхідною точністю поведінку реальної системи в реальних умовах. Математична модель концентрує записану на мові математичних співідношень сукупність наших знань, уявлень і гіпотез про відповідний об'єкт, явище, процес або систему. Оскільки ці знання ніколи не бувають абсолютними, а гіпотези можуть інколи цілеспрямовано не враховувати даякі фактори, то модель лише наближено враховує поведінку реальної системи.

Математичну модель можна розглядати як деякий оператор, який ставить у відповідність системі внутрішніх параметирів технічної системи $a_1, a_2, \ldots, a_m$ сукупність функціонально зв'язаних між собою зовнішніх параметрів $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Вид функціонального зв'язку залежить від фізичного принципу дії системи, а зміст понять внутрішніх і зовнішніх параметрів системи визначається її фізичною суттю і способом використання.

Таким чином, для складних технічних систем неможливо отримати абсолютно подібні (ізоморфні) математичні моделі. Шляхом формалізації системи отримують спрощену модель, яка відображає основні властивості і не враховує другорядні.

Стан технічної системи в будь-який довільний момент часу t із заданого інтервалу $[t_0, t_1]$ можна охарактеризувати набором величин x_1, x_2, ..., x_l

– характеристиками стану системи. При функціонуванні технічної системи ці характеристики приймають значення, які є функціями часу, тобто $\{x_1(t),\ldots,x_l(t)\} = \vec{X}(t)$, де $\vec{X}(t)$ – вектор стану системи. Проекції цього вектора можна розглядати як координати точки в *n*-мірному фазовому просторі, а процес функціонування системи – як деяку фазову траєкторію.

На систему може діяти вектор вхідних дій $\vec{U}(t) = \{u_1(t),\ldots,u_m(t)\}$, від яких залежать характеристики стану. Система характеризується також набором власних параметрів $\vec{A} = \{a_1,\ldots,a_p\}$, які в стаціонарній системі є константами, а в нестаціонарній – функціями часу. На систему можуть діяти деякі випадкові фактори $\vec{\xi} = \{\xi_1,\ldots,\xi_v\}$. Вона може мати також ряд виходів $\vec{Y} = \{y_1(t),\ldots,y_n(t)\}$.

Таким чином, математична модель технічної системи – це сукупність співвідношень (формул, нерівностей, рівнянь, логічних співвідношень і т. д.), які визначають характеристики стану системи в залежності від її параметрів, вхідних дій, випадкових факторів, початкових умов і часу. Початкові умови – це значення характеристик системи в початковий момент часу $t_0 \colon x_{10}, x_{20},\ldots,x_{n0}$.

Так, наприклад, для динамічних технічних систем математичними моделями можуть бути диференціальні рівняння виду

$$\dot{x} = f(t,x,u,\xi). \tag{5.1}$$

За допомогою таких моделей, коли задано початковий стан, визначають траєкторію процесу.

В залежності від специфіки зв’язків характеристик стану системи з її параметрами і вхідними сигналами розрізняють:

1) детерміновані моделі, в яких в заданий момент часу характеристики стану однозначно визначаються через вказані величини. В цих моделях $\xi = 0$;

2) ймовірнісні (стохастичні) моделі, в яких за допомогою математичних співідношень можна визначити лише розподілення харктеристик стану системи за заданими ймовірнісними характеристиками (розподіленнями) її параметрів, вхідних сигналів, початкових умов.

За ознакою подальшого використання математичні моделі розділяють на аналітичні та імітаційні. Аналітичні моделі забезпечують достатньо високий ступінь деталізації опису системи, однак не завжди дозволяють отримати висновки загального характеру про її функціонування. У випадку застосування імітаційних моделей можуть враховуватись такі особливості складних технічних систем, як наявність в одній і тій же системі елементів неперервної і дискретної дії, нелінійні співвідношення будь-якого характеру, що описують зв’язки між елементами, вплив багаточисельних випадкових факторів складнох фізичної природи і т. д.

5.2. Побудова математичних моделей

В практичних задачах, на відміну від задач чисто математичних, не завжди буває з самого початку ясно, що задано і що необхідно доказати або визначити. До таких задач відноситься і задача побудови математичних моделей технічних систем. Звичайно задається реальна технічна система. Необхідно побудувати її математичну модель для тієї чи іншої мети.

Розв’язування таких практичних задач починається зі збору фактів і даних наукових спостережень. На їх основі проводиться формалізація технічної системи і будується її математична модель, тобто виділяються її найбільш суттєві риси та властивості і проводиться їх опис за допомогою рівнянь і формул.

Розглянемо основні етапи побудови математичних моделей реальних технічних систем (рис. 5.1).

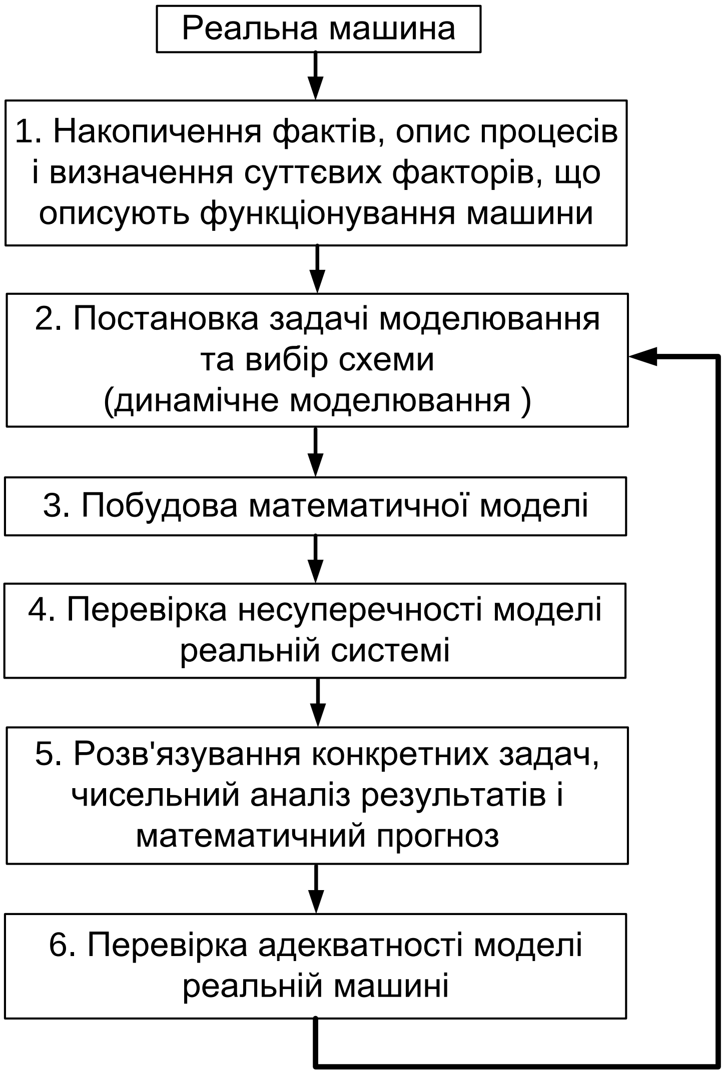


Рис. 5.1. Етапи побудови математичної моделі

Етап 1. При виясненні і постановці задачі на фізичному рівні проходить процес схематизації і ідеалізації технічної системи, тобто виділення її суттєвих факторів, що впливають на функціонування системи. Деякі риси і фактори системи можуть виявитись важливими, інші – не суттєвими.

Етап 2. Після виявлення суттєвих факторів ставляться задачі моделювання і вибирається схема взаємодії між елементами системи. Для динамічних систем будується динамічна модель, яка відображає суттєві фактори. Здійснюється переведення необхідних характеристик на мову математичних понять і величин. Складається система параметрів, які

описують основні фактори і здійснюється формування співвідношень і рівнянь між цими параметрами і величинами. Це найбільш складна і важка стадія процесу моделювання. Тут використовують фундаментальні фізичні закони і
принципи.

Етапи 3, 4. Після побудови моделі (етап 3) необхідно проводити превірку непротирічності моделі реальній системі і конкретності постановки задачі. Тут можна використати досить просте і завжди ефективне правило фізичної розмірності всіх членів рівняння, які складені за законами збереження.

Етапи 5, 6. Перевіряється справедливість моделі за результатами розв'язування теоретичної задачі у відповідності з математичною моделлю, які співставляються з реальними результатами технічної системи. На основі цих результатів перевіряється адекватність математичної моделі реальній системі. Глибина відображення моделлю реальної технічної системи залежить від мети дослідження.

У відповідності з принципами ієрархії математичних моделей кожна модель нижчого рівня не повинна протирічити моделі вищого рівня. На самому нижчому рівні будують математичні моделі конкретних процесів і найпростіших явищ технічної системи.

Математична модель – це результат формалізації реальної технічної системи. Процес формалізації системи при побудові її моделі складається з трьох основних етапів:

1) складання змістовного опису реальної системи, тобто побудова дискриптивної моделі;

2) побудова формалізованої схеми;

3) розробка математичної моделі.

Дискриптивна модель являє собою першу спробу словесного опису закономірностей, що характеризують функціонування технічної системи, а також змістовної постановки задачі або формулювання мети дослідження.

Для побудови такої моделі необхідне вивчення системи шляхом спостереження за нею і фіксації деяких кількісних характеристик.

При побудові моделі системи, що проектується, словесний опис складається на основі досвіду, а також на основі спостереженнь за аналогічними, реально існуючими системами.

Дискриптивна модель, як правило, складається спеціалістами в конкретній галузі техніки без активної участі математиків за результатами дослідження технічної системи. Однак вона повинна обов'язково містити перелік залежностей, які підлягають оцінці, а також перелік факторів, які повинні бути враховані при побудові моделі. В дискриптивну модель включаються початкові дані у вигляді таблиць, графіків, початкових умов. Змістовний опис самостійного значення не має, але служить основою для подальшої формалізації технічної системи.

Формалізована схема – це проміжний етап між словесним описом і математичною моделлю. Вона реалізується в тому випадку, коли неможливий з деяких причин безпосередній перехід від дискриптивної моделі до математичної. При побудові формалізованої схеми необхідно вибирати сукупність характеристик стану і параметрів технічної системи. За характеристики стану бажано вибирати такі функції, які забезпечують зручну можливість визначення необхідних характеристик і дозволяють отримати достатньо просту математичну модель.

Вибір параметрів, що характеризують технічну систему, визначається тими факторами, які необхідно враховувати при побудові математичної моделі. На етапі побудови формалізованої схеми технічної системи повинна бути чітко сформульована математична мета дослідження.

Подальше перетворення формалізованої схеми в математичну модель здійснюється, практично, без притоку допоміжної інформації.

Для динамічних технічних систем, тобто систем, які змінюють свій стан з часом, формалізованою схемою виступає динамічна модель. Найбільш широке застосування динамічні моделі отримали при побудові математичних моделей механічних систем. Спочатку будується динамічна модель технічної ситеми, а потім на її базі формальними методами складається математична модель, тобто наявність динамічної моделі однозначно визначає математичну модель технічної системи.

5.3. Динамічна модель механічної системи

При переході від реальної механічної системи (машини) до її динамічної моделі нехтують тими фізичними факторами, які несуттєві для даного розрахунку або дослідження. В загальному випадку при складанні динамічної моделі механічної системи необхідно враховувати зосереджені маси, розподілені маси по довжині елементів, пружність елементів, залежності рушійних і гальмівних сил двигунів від частоти обертання ротора, зміну приведених мас і т. д. В кожному конкретному випадку одні фізичні фактори є головними, а інші – другорядними.

Динамічна модель повинна задовольняти двом головним вимогам: 1) вона повинна бути в необхідній мірі адекватною реальній механічній системі та, наскільки це можливо, відображати основні її фізичні властивості; 2) вона повинна бути не дуже складною, щоб розв'язування не було досить трудомістким.

Розглянемо процес розробки динамічної моделі механічної системи на прикладі механізма підйому вантажу вантажопідйомного крана, кінематична схема якого показана на рис. 3.1.

За окремі маси механізму приймаємо ротор електродвигуна 1, муфту з гальмівним шківом 2, зубчасті колеса 3.1 і 3.2 передаточного механізму (редкутора) 3, барабан 4 і вантаж 6. Тут не враховані окремими масами вали і канати, бо їх маси приводяться до відповідних елементів, які на них закріплено. Так, наприклад, маси вхідного і вихідного валів редуктора приведені відповідно до мас зубчастих колес 3.1 і 3.2, а маса канату – до вантажу 6. В цьому механізмі маси 1, 2, 3.1, 3.2 і 4 здійснюють обертальний рух, а маса 6 – поступальний.

Складемо з цих мас динамічну модель, з’єднавши їх між собою безінерційними пружними елементами і приклавши діючі навантаження до мас, що розглядаються, (рис. 5.1).

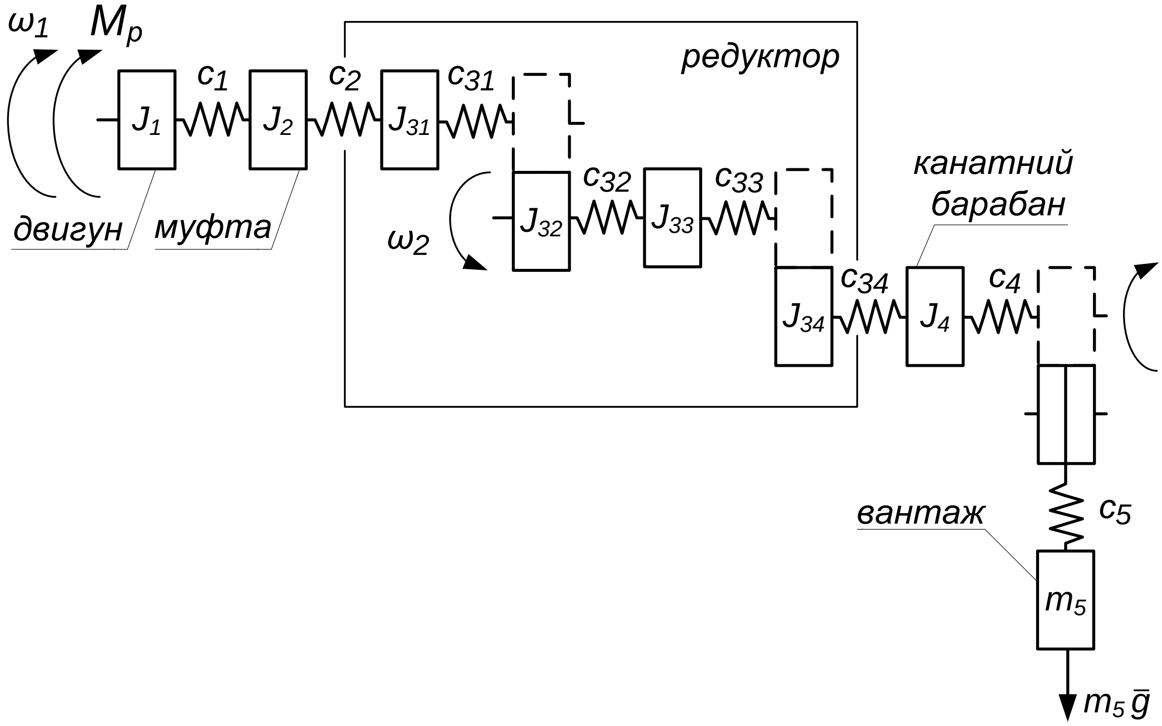


Рис. 5.1. Динамічна модель механізма підйому вантажопідйомного крана

Модель складається з двох ділянок безінерційного вала, кожна з яких обертається з кутовими швидкостями ω_1 і ω_2, а також безінерційного каната, який намотується на барабан зі швидкістю v. Маси елементів двигуна 1, гальмівного шківа 2, передаточного механізму 3 і барабана 4 показані на рис. 3.6 у вигляді умовних дисків з моментами інерції J_1, J_2, J_{31}, J_{32}, J_4, а вантаж 6 - у вигляді матеріальної точки масою m_6. Умовні диски зв’язані між собою пружними безінерційним ділянками валів з коефіцієнтами крутильної жорсткості c_1, c_2, c_{31}, c_{32}, c_4. Диск J_4 зв’язано з вантажем масою m_6 пружним безінерційним канатом з лінійною жорсткістю c_6 через поліспастну систему 5 з кратністю *n*. Кутові швидкості валів з зубчастими колесами 3.1 і 3.2 зв'язані між собою передаточним відношенням $i = \omega_1 / \omega_2$. На рис. 5.1 M - рушійний момент на валу ротора, $m_б g$ - вага вантажу.

За допомогою побудованої динамічної моделі можна створити математичну модель, яка дозволить визначити динамічні навантаження в елементах безінерційних пружних валів між двигуном і гальмівним шківом, шківом і зубчастим колесом 3.1, зубчастим колесом 3.2 і барабаном, а також у канаті, який з'єднує барабан з вантажем через поліспастну систему. Одночасне визначення цих навантажень в рамках однієї математичної моделі приводить до значного ускладнення останньої.

В ряді випадків немає потреби розглядати таку складну математичну модель. Її можна замінити рядом простих моделей, кожна з яких враховує тільки одну пружну ділянку вала або каната. Так, наприклад, якщо виникає потреба визначення динамічних навантажень в пружному канаті, то використовується динамічна модель, в якій всі ділянки валів вважаються жорсткими, а лише канат – пружним.

При приведенні мас ротора двигуна, гальмівного шківа, зубчастих колес, барабана і вантажу до гілок канату, які намотуються на барабан,

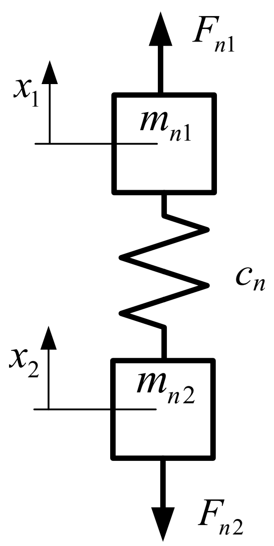


Рис. 5.2. Спрощена динамічна модель механізма підйому вантажопідйомного крана

динамічна модель механізма підйому вантажу має вигляд, показаний на рис. 5.2. Тут прийняті такі позначення: $m_{п1}$ - приведена маса ротора двигуна, гальмівного шківа, зубчастих колес і барабана до гілок каната; $m_{п2}$ - приведена маса вантажу до гілок канату; $F_{п1}$, $F_{п2}$ - приведені до канату сили від дії відповідно рушійного моменту на валу двигуна і ваги вантажу; $c_п$ - приведена жорсткість гілок канату; x_1, x_2 -

координати центрів мас відповідно $m_{п1}$ і $m_{п2}$.

Приведення мас і моментів інерції тіл системи базується на рівності кінетичної енергії заданої і приведеної систем; приведення сил і моментів сил – на рівності робіт (потужностей), які виконують ці сили і моменти та їх приведені величини; приведення жорсткостей – на рівності потенціальних енергій, якими володіють пружні елементи заданої і приведеної систем.

Здійснимо приведення мас, діючих сил і жорсткостей до гілок канату, що намотується на барабан для механізму підйому вантажопідйоного крана (рис. 3.1.). Оскільки виникає потреба визначення динамічних навантажень в гілках канату, то приведення здійснюється з двох сторін. До верхньої частини канату приводяться всі елементи від двигуна до барабана включно, а до нижньої частини – вантаж і канат (рис. 5.2).

Визначимо кінетичну енергію системи "двигун-барабан" (рис. 3.1)

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(J_1 + J_2 + J_{31}\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}\left(J_{32} + J_4\right)\omega_2^2, \tag{5.2}$$

де ω_1, ω_2 - кутові швидкості обертання валів I і II (рис. 3.6) ; J_1, J_2, J_{31}, J_{32}, J_4 - моменти інерції відповідних елементів.

Кінетична енергія приведеної системи розглянутих елементів має вигляд

$$T_{п1} = \frac{1}{2} m_{п1} \cdot \mathrm{v}^2, \tag{5.3}$$

де v - швидкість намотування канату на барабан.

Виходячи з умов приведення мас, прирівнюємо праві вирази залежностей (5.2) і (5.3). В результаті отримаємо

$$\frac{1}{2}\left(J_1 + J_2 + J_{31}\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}\left(J_{32} + J_4\right)\omega_2^2 = \frac{1}{2} m_{п1} \cdot \mathrm{v}^2.$$

Враховуючи те, що ω_2=2v/D (D - діаметр барабану), а $\omega_1 = i\,\omega_2$= 2v i/D, і проводячи математичні перетворення, в кінцевому вигляді знаходимо вираз приведеної маси системи "двигун-барабан"

$$m_{\text{п}1}=4\left[\left(J_1+J_2+J_{31}\right)i^2+J_{32}+J_4\right]\Big/D^2 . \tag{5.4}$$

Аналогічно визначається приведена маса системи "вантаж-канат" (рис. 3.1). В цій системі враховується маса тільки тієї частини канату, яка здійснює рух. В поліспастній системі 5, показаній на рис. 3.1, дві гілки канату, що намотуються на барабан, здійснюють рух від блоків 5.2 і 5.3 до барабану 4 зі швидкістю v, а дві гілки канату від блоку 5.1 до блоків 5.2 і 5.3 в певний момент часу є нерухомими.

При довжині H рухомих гілок канату від осі блоків 5.2 і 5.3 до осі барабану кінетична енергія системи "канат-вантаж" визначається залежністю

$$T_2=\frac{1}{2}\cdot 2H\rho \text{v}^2+\frac{1}{2}m_6\frac{\text{v}^2}{n^2}, \tag{5.5}$$

де ρ - маса одиниці довжини канату; n - кратність поліспастної системи.

Кінетична енергія приведеної системи цих елементів визначається наступним виразом

$$T_{\text{п}2}=\frac{1}{2}m_{\text{п}2}\cdot\text{v}^2. \tag{5.6}$$

Прирівнявши праві частини залежностей (5.5) і (5.6), отримаємо

$$\frac{1}{2}\cdot 2H\rho \text{v}^2+\frac{1}{2}m_6\frac{\text{v}^2}{n^2}=\frac{1}{2}m_{\text{п}2}\cdot\text{v}^2.$$

З отриманого рівняння знаходимо приведену масу системи "вантаж-канат"

$$m_{п2} = \frac{m_б}{n^2} + 2H\rho. \tag{5.7}$$

Для визначення приведеної сили $F_{п1}$ визначимо її потужність в приведеній системі і прирівняємо її до потужності рушійного моменту M на валу двигуна. В результаті будемо мати

$$F_{п1} \cdot \mathrm{v} = M\omega_1.$$

Враховуючи зв’язок між шивдкостями v і ω_1, з останнього рівняння отримаємо

$$F_{п1} = 2\,\mathrm{M\,i/D}. \tag{5.8}$$

Аналогічно знаходимо приведену силу $F_{п2}$, врахувавши рівність її потужності потужності, необхідній для підйому вантажу

$$F_{п2} \cdot \mathrm{v} = \frac{m_б g \mathrm{v}}{n}.$$

З отриманого рівняння маємо

$$F_{п2} = \frac{m_б g}{n}. \tag{5.9}$$

Якщо враховувати ККД передачі від двигуна до барабана η_1 і ККД поліспастної системи η_2, то вирази для приведених сил можна записати у вигляді

$$F_{п1} = 2\,M\,\eta_1\,i/D \tag{5.10}$$

$$F_{п2} = m_6 g/(\eta_2 n) \tag{5.11}$$

Для визначення приведеної жорсткості $c_п$ скористаємось умовою приведення жосткості канатно-поліспастної системи c_6 (рис. 5.1) до гілки каната, яка намотується на барабан. Згідно з цією умовою маємо

$$\frac{1}{2} c_п x_2^2 = \frac{1}{2} c \left(\frac{x_2}{n} \right)^2 .$$

З отриманого рівняння знаходимо приведену жорсткість канатно-поліспастної системи

$$c_п = c/n^2 . \tag{5.12}$$

Виходячи з конструкції поліспастної системи (рис. 3.1) і враховуючи те, що жорсткість одиниці довжини каната дорівнює Es (де E - модуль пружності каната, s - площа його поперечного перерізу), можна визначити жорсткість канатно-поліспастної системи

$$c = 2Es \left(\frac{1}{(n-1)h} + \frac{1}{H} \right), \tag{5.13}$$

де h - відстань між осями рухомих і нерухомих блоків (рис. 3.1).

Аналогічно можуть бути побудовані інші спрощені динамічні моделі механізма підйому вантажу, які дозволяють отримати математичні моделі для визначення динамічних навантажень в елементах безінерційних пружних валів, що з’єднують окремі маси.

Динамічна модель, що показана на рис. 3.6, має сім ступенів свободи, а на рис. 5.2 – тільки дві. Таке спрощення динамічної моделі механічної системи незначно знижує її точність, але набагато спрощує її математичну модель. Зниження точності динамічної моделі механізма підйому вантажу для визначення динамічних навантажень в пружному канаті за рахунок значного зменшення числа ступеней свободи відповідає точності визначення моментів інерції, жорсткостей окремих елементів і рушійного моменту привода.

5.4. Методи побудови математичних моделей механічних систем

На основі отриманої динамічної моделі формальними методами може бути побудована математична модель будь-якої механічної системи. Математичні моделі механічних систем являють собою, як правило, диференціальні рівняння руху або взаємодії окремих елементів.

Для отримання диференціальних рівнянь руху механічних систем при відомих їх динамічних моделях використовується три основних методи: 1) метод рівноваги з використанням принципа Даламбера; 2) принцип можливих переміщень; 3) принцип Гамільтона-Остроградського.

Розглянемо більш детально кожний з цих методів.

Метод рівноваги. Рівняння руху будь-якої механічної системи при наявності її динамічної моделі – це вираз другого закону Ньютона, який встановлює, що швидкість зміни імпульсу будь-якої маси дорівнює діючій на неї силі. В математичній формі це записується у вигляді наступного диференціального рівняння:

$$\overline{F}(t)=\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\,\overline{r}}{dt}\right), \tag{5.14}$$

де $\overline{F}(t)$- вектор прикладеної сили; $\bar{r}$ - радіус-вектор координат центра мас маси *m*; *t* - координата часу.

Для більшості задач динаміки машин і механізмів масу можна розглядати незмінною в часі. Тоді рівняння (5.14) приймає вигляд

$$\overline{F}(t) = m\frac{d^2\,\bar{r}}{dt^2} = m\,\ddot{\bar{r}}(t)\cdot$$

Отримане рівняння виражає умову рівності сили добутку маси на прискорення

$$\overline{F}(t) - m\,\ddot{\bar{r}}(t) = 0. \qquad (5.15)$$

В рівнянні (5.15) другий доданок називають силою інерції, яка здійснює опір прискоренню маси.

Принцип Даламбера (*маса визиває силу інерції, пропорційну її прискоренню і протилежно йому направлену*) широко застосовується в задачах динаміки машин, оскільки дозволяє вивести рівняння руху на основі умов динамічної рівноваги. Сила $\overline{F}(t)$ може включати в себе різні види сил, що прикладені до маси: силу пружного опору, яка направлена в протилежному переміщенню напрямку; силу затухання, яка здійснює опір швидкості переміщення, і незалежні зовнішні сили. Якщо ввести силу інерції, що здійснює опір прискоренню маси, то рівняння руху виражають умову рівноваги всіх сил, які прикладені до маси. Принцип Даламбера розглядає рівновагу окремо взятої маси з прикладенням до неї всіх діючих сил, сили інерції і реакцій зв’язку з іншими масами. Для більшості простих динамічних моделей механічних систем вказаний метод виводу рівнянь руху самий зручний.

Складемо за допомогою цього методу диференціальні рівняння руху динамічної моделі показаної на рис. 5.2.

Приклад 5.1. Розглянемо рівновагу маси $m_{п1}$ з прикладеними до неї силами (рис. 5.3). Тут $R = c_п\left(x_1 - x_2\right)$ - реакція пружного зв'язку між масами $m_{п1}$ і $m_{п2}$; $F_{i1} = m_{п1}\ddot{x}_1$ - сила інерції, що діє на масу $m_{п1}$.

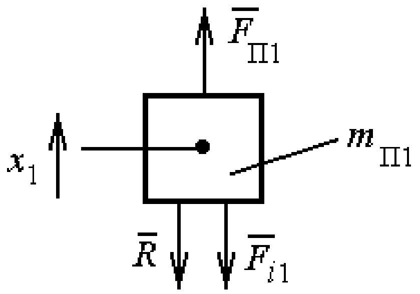


Рис. 5.3. Схема рівноваги маси $m_{п1}$

Розглянемо тепер рівновагу маси $m_{п2}$ з прикладеними до неї силами (рис. 5.4). На цьому рисунку, як і на попередньому, R - реакція пружного зв'язку між масами $m_{п1}$ і $m_{п2}$; $F_{i2} = m_{п2}\ddot{x}_2$ - сила інерції, що діє на масу $m_{п2}$.

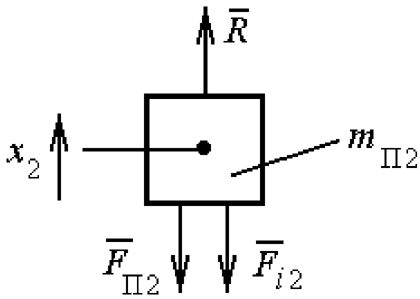


Рис. 5.4. Схема рівноваги маси $m_{п2}$

Використовуючи умови рівноваги (5.15) для мас $m_{п1}$ і $m_{п2}$, отримаємо систему диференціальних рявнянь, які описують рух динамічної моделі, показаної на рис. 5.2.

$$\begin{cases} F_{п1} - c_п\left(x_1 - x_2\right) - m_{п1}\ddot{x}_1 = 0; \\ c_п\left(x_1 - x_2\right) - F_{п2} - m_{п2}\ddot{x}_2 = 0. \end{cases}$$

Запишемо цю систему в іншому вигляді:

$$\begin{cases} m_{п1}\ddot{x}_1 = F_{п1} - c_п\left(x_1 - x_2\right); \\ m_{п2}\ddot{x}_2 = c_п\left(x_1 - x_2\right) - F_{п2}. \end{cases} \tag{5.16}$$

Отримана система диференціальних рівнянь являє собою математичну модель для визначення динамічних навантажень R в пружному канаті.

Принцип можливих переміщень. Коли конструктивна схема механічної системи достатньо складна і містить ряд взаємодіючих тіл кінцевих розмірів, безпосереднє виведення умов рівноваги всіх діючих на систему сил ускладнюється. Змінні сили часто виражаються через переміщення по узагальнюючих координатах, але записати умови їх рівноваги досить складно. В цьому випадку для виведення рівнянь руху замість умов рівноваги використовують принцип можливих (віртуальних) переміщень.

Цей принцип формулюється наступним чином.

Якщо система,що знаходиться в рівновазі під дією декількох сил, отримує можливе переміщення, тобто будь-яке переміщення, яке задовольняє крайовим умовам, то повна робота всіх сил на цьому переміщенні дорівнює нулю.

Згідно з цим принципом рівність нулю роботи сил на можливому переміщенні системи еквівалентна умові рівноваги. Суттєва перевага цього принципу полягає в тому, що складові робіт сил на можливих переміщеннях – скалярні величини і можуть додаватись алгебраїчно, а сили, які діють на елементи динамічної моделі, являють собою вектори і можуть додаватись тільки за правилами векторного аналізу.

При застосуванні принципу можливих переміщень у випадку руху механічної системи до заданих зовнішніх сил приєднуються сили тертя і сили інерції для кожного тіла. У цьому випадку принцип можливих переміщень можна записати так:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{F}_i - m_i\ddot{\overline{r}}_i\right)\delta\overline{r}_i = 0, \tag{5.17}$$

де N - кількість матеріальних точок системи; $\overline{F_i}$ - вектор рівнодійної зовнішніх сил і сил тертя, що діють на матеріальну точку; m_i, $\overline{r_i}$ - маса і вектор координати i-тої точки системи.

Для динамічної моделі, показаної на рис. 3.7, складемо диференціальні рівняння руху за допомогою принципу можливих переміщень (приклад 5.2). З цією метою визначимо всі діючі на маси $m_{п1}$ і $m_{п2}$ сили, включаючи і сили пружності. Використавши рівняння (3.53), отримаємо

$$\left[F_{п1} - c_{п}\left(x_1 - x_2\right) - m_{п1}\ddot{x}_1\right]\delta x_1 + \\ + \left[c_{п}\left(x_1 - x_2\right) - F_{п2} - m_{п2}\ddot{x}\right]\delta x_2 = 0. \quad (5.18)$$

Оскільки рівняння (5.18) має місце при будь-яких, незалежних одне від одного значеннях варіацій δx_1 і δx_2 , то це можливо лише при умові, що коефіцієнти при кожній з цих варіацій дорівнюють нулю. Тоді будемо мати:

$$\begin{cases} m_{п1}\ddot{x}_1 = F_{п1} - c_{п}\left(x_1 - x_2\right); \\ m_{п2}\ddot{x}_2 = c_{п}\left(x_1 - x_2\right) - F_{п2}. \end{cases} \quad (5.19)$$

Отримана система являє собою диференціальні рівняння руху динамічної моделі, показаної на рис. 5.2, і яка співпадає з системою (5.19), отриманою за допомогою методу рівноваги.

<u>Принцип Гамільтона-Остроградського.</u> Цей метод не вимагає векторних рівнянь рівноваги, бо він використовує скалярні величини енергії у варіаційній постановці. *Суть цього методу полягає в тому, що для неконсервативних механічних систем справедливе варіаційне рівняння*

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T + \delta A\right)dt = 0, \quad (5.20)$$

де t_0, t_1 - початковий і кінцевий моменти часу руху системи; δT - варіація кінетичної енергії; δA - елементарна робота сил, прикладених до системи, при переході від прямого до обхідного шляху, який має з прямим шляхом спільні початкові і кінцеві умови.

Якщо система консервативна, то $\delta A = -\delta \Pi$ (де Π - потенціальна енергія системи) і $\delta T + \delta A = \delta(T - \Pi) = \delta L$. У випадку консервативної системи принцип Гамільтона-Остроградського полягає в тому, що

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0 \cdot \tag{5.21}$$

Інтеграл $\mathrm{I}_L = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt$ називається дією за Гамільтоном-Остроградським.

Застосування цього принципу можна здійснювати і в іншій формі

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta(T - \Pi) + \delta A_1\right] dt = 0. \tag{5.22}$$

В цьому випадку консервативні сили (гравітаційні і пружні) входять у вираз потенціальної енергії, а δA_1 являє собою елементарну роботу неконсервативних сил (рушійних і сил опору при переміщенні системи).

Застосування приципу Гамільтона-Остроградського у формі (5.22) дає можливість спростити врахування консервативних сил і, таким чином, придати принципу більший формалізм.

Принцип Гамільтона-Остроградського можна покласти в основу наближених методів розв’язування задач динаміки машин, які широко застосовуються в теорії пружності і при розв’язуванні складних задач теорії коливань.

За допомогою принципа Гамільтона-Остроградського складемо диференціальні рівняння руху динамічної моделі, показаної на рис. 5.2 (приклад 5.3).

Кінетична і потенціальна енергія цієї моделі мають вигляд:

$$T=\frac{1}{2}m_{\text{п}1}\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_{\text{п}2}\dot{x}_2^2; \tag{5.23}$$

$$\Pi=\frac{1}{2}c_{\text{п}}\left(x_1-x_2\right)^2. \tag{5.24}$$

Елементарну роботу неконсервативних сил представимо виразом

$$\delta A_1=F_{\text{п}1}\delta x_1-F_{\text{п}2}\delta x_2. \tag{5.25}$$

Варіація $\delta\left(T-\Pi\right)$ для розглядаємої моделі має вигляд

$$\begin{aligned}\delta\left(T-\Pi\right)=m_{\text{п}1}\dot{x}_1\delta\dot{x}_1+m_{\text{п}2}\dot{x}_2\delta\dot{x}_2-c_{\text{п}}\left(x_1-x_2\right)\delta x_1+\\+c_{\text{п}}\left(x_1-x_2\right)\delta x_2.\end{aligned} \tag{5.26}$$

Після підстановки виразів (5.26) в рівняння (5.22) отримаємо

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\Big\{m_{\text{п}1}\dot{x}_1\delta\dot{x}_1+m_{\text{п}2}\dot{x}_2\delta\dot{x}_2+\left[F_{\text{п}1}-c_{\text{п}}\left(x_1-x_2\right)\right]\delta x_1+\\\left[c_{\text{п}}\left(x_1-x_2\right)-F_{\text{п}2}\right]\delta x_2\Big\}dt=0.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Перших два члени рівняння (5.27) проінтегруємо по частинах, в результаті чого будемо мати

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(m_{\text{п}1}\dot{x}_1\delta\dot{x}_1+m_{\text{п}2}\dot{x}_2\delta\dot{x}_2\right)dt=m_{\text{п}1}\dot{x}_1\delta\dot{x}_1\Big|_{t_0}^{t_1}+$$

$$+m_{\text{п}2}\dot{x}_2\delta\dot{x}_2\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\Big(m_{\text{п}1}\ddot{x}_1\delta x_1 + m_{\text{п}2}\ddot{x}_2\delta x_2\Big)dt. \qquad (5.28)$$

В зв’язку з тим, що на границях інтегрування варіації $\delta\dot{x}_1$ і $\delta\dot{x}_2$ дорівнюють нулю, перших два члени правої частини співвідношення (5.28) дорівнюють нулю. Тому після підстановки виразу (5.28) в рівняння (5.27) отримаємо

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\Big[F_{\text{п}1} - m_{\text{п}1}\ddot{x}_1 - c_{\text{п}}\big(x_1 - x_2\big)\Big]\delta x_1 + \\ &+\Big[c_{\text{п}}\big(x_1 - x_2\big) - F_{\text{п}2} - m_{\text{п}2}\ddot{x}_2\Big]\delta x_2\Big\}dt = 0.\end{aligned} \qquad (5.29)$$

Оскільки варіації δx_1 і δx_2 в середині інтервалу $[t_0, t_1]$ довільні і незалежні між собою, то рівняння (3.65) можливе в загальному випадку лише при умові, що коефіцієнти при варіаціях δx_1 і δx_2 дорівнюють нулю

$$\begin{cases} F_{\text{п}1} - m_{\text{п}1}\ddot{x}_1 - c_{\text{п}}\big(x_1 - x_2\big)\,\delta x_1 = 0; \\ c_{\text{п}}\big(x_1 - x_2\big) - F_{\text{п}2} - m_{\text{п}2}\ddot{x}_2 = 0. \end{cases} \qquad (5.30)$$

Отримана система рівнянь являє собою систему диференціальних рівнянь руху динамічної моделі (рис. 5.2).

Всі три методи отримання диференціальних рівнянь руху механічних систем рівнозначні і, як показує аналіз отриманих рівнянь, ці методи для однієї і тієї ж динамічної моделі приводять до одного і того ж результату. Звичайно вибір методу для будь-якої конкретної механічної системи залежить від типу динамічної моделі і визначається самим дослідником.

Для отримання необхідних результатів диференціальні рівняння руху механічної системи підлягають інтегруванню з метою визначення характеристик стану (переміщень, швидкостей і прискорень) окремих елементів в функції часу.

Розглянемо процес інтегрування системи диференціальних рівнянь аналітичними методами на прикладі рівнянь руху елементів для динамічної моделі, показаної на рис. 5.2 (приклад 5.4.). З другого рівняння будь-якої системи (5.16), (5.19) або (5.30) знаходимо

$$x_1 = x_2 + \frac{m_{п2}}{c_п}\ddot{x}_2 + \frac{F_{п2}}{c_п}. \tag{5.31}$$

Оскільки величини $F_{п2}$, $c_п$ і $m_{п2}$ є постійними в часі, то після двократного диференціювання по часу залежності (5.31) будемо мати

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 + \frac{m_{п2}}{c_п}\dddot{x}_2; \quad \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 + \frac{m_{п2}}{c_п}x_2^{IV}. \tag{5.32}$$

Після підстановки залежностей (5.31) і (5.32) в перше рівняння будь-якої з систем 5.16), (5.19) або (5.30) отримаємо диференціальні рівняння четвертого порядку відносно невідомої функції $x_2(t)$

$$\frac{m_{п1}m_{п2}}{c_п}x_2^{IV} + \left(m_{п1} + m_{п2}\right)\ddot{x}_2 = F_{п1} - F_{п2}. \tag{5.33}$$

Розділивши ліву і праву частини рівняння (5.33) на коефіцієнт біля найвищої похідної і зробивши заміни $k^2 = \left(m_{п1} + m_{п2}\right)\cdot c_п \Big/ \left(m_{п1}m_{п2}\right)$ і $f = \left(F_{п1} - F_{п2}\right)c_п \Big/ \left(m_{п1}m_{п2}\right)$, отримаємо

$$x_2^{IV} + k^2\ddot{x}_2 = f. \tag{5.34}$$

Загальний розв'язок рівняння (5.34) складається з загального розв'язку однорідного рівняння $x_{21}(t)$ і часткового розв'язку повного рівняння $x_{22}(t)$, тобто

$$x_2(t) = x_{21}(t) + x_{22}(t). \tag{5.35}$$

Однорідне рівняння має вигляд

$$x_{21}^{IV} + k^2 \ddot{x}_{21} = 0. \tag{5.36}$$

Для розв'язування цього рівняння складемо характеристичне рівняння

$$r^4 + k^2 r^2 = 0,$$

яке має корінь $r_1 = 0$ кратності два і два уявні корені $r_2 = ki$ та $r_3 = -ki$ кратності одиниця. Ці корені визначають загальний розв'язок рівняння (5.36), який має вигляд

$$x_{21} = C_0 + C_1 t + C_2 \cos kt + C_3 \sin kt, \tag{5.37}$$

де C_0, C_1, C_2, C_3 - довільні сталі, які виражаються з початкових умов руху системи.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.34) шукаємо для випадку, коли f = $Const$, тобто $F_{п1} = Const$ і $F_{п2} = Const$. В цьому випадку частинний розв'язок можна записати у вигляді

$$x_{22}(t) = A t^2,$$

де A - поки що невідомий коефіцієнт. Підставивши цю функцію у рівняння (5.34), отримаємо $2k^2 A = f$. Тоді $A = f/(2k^2)$ і

$$x_{22}(t) = \frac{f}{2k^2} t^2. \tag{5.38}$$

Підставивши функції (5.37) і (5.38) в (5.35), отримаємо загальний розв’язок рівняння (5.34)

$$x_2(t) = C_0 + C_1 t + \frac{f}{2k^2} t^2 + C_2 \cos kt + C_3 \sin kt. \tag{5.39}$$

Продиференціюємо цю функцію тричі по часу, в результаті чого будемо мати:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= C_1 + \frac{f}{k^2} t - C_2 k \sin kt + C_3 k \cos kt;\\
\ddot{x}_2 &= \frac{f}{k^2} - C_2 k^2 \cos kt - C_3 k^2 \sin kt;\\
\dddot{x}_2 &= C_2 k^3 \sin kt - C_3 k^3 \cos kt.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Використавши залежності (5.39) і (5.40), за допомогою функцій (5.31) і (5.32) знайдемо координату і швидкість першої маси

$$x_1 = C_0 + C_1 t + \frac{f}{2k^2} t^2 + C_2 \cos kt + C_3 \sin kt +$$

$$+ \frac{m_{\bullet 2}}{c_{\bullet}} \left(\frac{f}{k^2} - C_2 k^2 \cos kt - C_3 k^2 \sin kt \right) + \frac{F_{\bullet 2}}{c_{\bullet}};$$

$$\dot{x}_1 = C_1 + \frac{f}{k^2}t - C_2 k \sin kt + C_3 k \cos kt + \qquad (5.42)$$

$$+ \frac{m_{\bullet 2}}{c_{\bullet}}\left(C_2 k^3 \sin kt - C_3 k^3 \cos kt\right).$$

Довільні сталі C_0, C_1, C_2, C_3 визначаємо з початкових умов руху системи, коли $t=0$: $x_1 = x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Після підстановки цих умов в залежності (5.40), ..., (5.42) будемо мати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} C_0 + C_2 = 0; \\ C_1 + C_3 k = 0; \\ C_0 + C_2 + \dfrac{m_{п2}}{c_п}\left(\dfrac{f}{k^2} - C_2 k^2\right) + \dfrac{F_{п2}}{c_п} = 0; \\ C_1 + C_3 k - C_3 \dfrac{m_{п2}}{c_п} k^3 = 0. \end{cases}$$

З отриманої системи рівнянь знаходимо, що $C_1 = C_3 = 0$, а

$$C_2 = \frac{1}{k^2}\left(\frac{f}{k^2} + \frac{F_{п2}}{m_{п2}}\right); \quad C_0 = -\frac{1}{k^2}\left(\frac{f}{k^2} + \frac{F_{п2}}{m_{п2}}\right).$$

Підставивши ці сталі в залежності (5.40) і (5.41), отримаємо кінцеві вирази для координати швидкості і прискорення маси $m_{п2}$:

$$x_2 = \frac{f}{2k^2}t^2 - \frac{1}{k^2}\left(\frac{f}{k^2} + \frac{F_{п2}}{m_{п2}}\right)(1 - \cos kt);$$

$$\dot{x}_2 = \frac{f}{k^2}t - \frac{1}{k}\left(\frac{f}{k^2} + \frac{F_{п2}}{m_{п2}}\right)\sin kt; \qquad (5.43)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{f}{k^2} - \left(\frac{f}{k^2} + \frac{F_{п2}}{m_{п2}}\right)\cos kt.$$

За допомогою отриманих залежностей можна визначити також кінематичні характеристики маси $m_{\text{п}1}$.

При дослідженні динаміки механічних систем важливе значення мають динамічні навантаження, які виникають в пружних елементах. Так, в дослідженій динамічній моделі механізма підйому вантажу важливо знайти зусилля в канаті, яке визначається залежністю

$$R = c_{\text{п}}(x_1 - x_2).$$

Підставивши в цей вираз різницю координат із залежності (5.32), отримаємо

$$R = \left(F_{\text{п}2} + m_{\text{п}2}\frac{f}{k^2}\right)(1 - \cos kt) \cdot \tag{5.44}$$

В розглянутій моделі вирази координат $x_1(t), x_2(t)$ і їх похідних визначають стан системи в певний момент часу t в залежності від конструктивних характеристик (мас, моментів інерції, жорсткостей і т. д.) і вхідних характеристик. В дослідженій системі цією характеристикою є рушійний момент на валу двигуна. Виходом цієї системи є величини динамічних навантажень (наприклад, реакція (3.79)), що виникають в пружних елементах. Ці величини можуть бути використані при розрахунках на міцність в процесі проектування системи або при виборі режимів її експлуатації. Більше того, отримані залежності координат дозволяють передбачити поведінку системи в майбутньому на заданому інтевалі руху $[t_0, t_1]$.

Всі розв’язані задачі моделювання конкретного механізму вантажопідйомного крана відносяться до задач, що вирішуються в теорії технічних систем.

5.5. Математична модель руху плоскої механічної системи

Безпосередньо з принципу Гамільтона-Остроградського можуть бути отримані диференціальні рівняння виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s, \tag{5.45}$$

де t - час; T - кінетична енергія системи; q_k - k-та узагальнена координата системи; Q_k - відповідна цій узагальненій координаті узагальнена сила; s - кількість узагальнених координат.

Ці рівняння отримали назву диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду, які можуть використовуватись для будь-якої механічної системи, в якій всі члени, що характеризують енергію і роботу, виражені через узагальнені координати. Рівняння Лагранжа другого роду можуть бути використані як для лінійних, так і для нелінійних механічних систем.

На основі рівнянь Лагранжа складемо рівняння руху плоскої механічної системи [16]. В загальному випадку плоска механічна система має ланки, які виконують тільки поступальний рух, тільки обертальний рух, одночасно поступальний та обертальний (плоский) рух. Згідно з теоремою Шаля плоский рух твердого тіла може бути представлений як поступальний рух центра мас тіла і обертальний рух навколо цього центра. Для такої системи кінетична енергія має вигляд:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l+m} m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m+n} J_j \dot{\varphi}_j^2, \tag{5.46}$$

де m_i, x_i, y_i - маса i-тої ланки системи (i =1, 2, ..., $l+m$) і координати її центра мас; φ_j, J_j - кутова координата j-тої ланки системи (j =1, 2, ..., $m+n$) та її момент інерції відносно осі обертання для ланок, що виконують обертальний рух і відносно центра мас для ланок, що виконують плоский рух; *l, m, n* - кількість ланок, що виконують відповідно поступальний, плоский і обертальний рух.

Плоску систему сил, в яку входять зовнішні, рушійні, дисипативні і консервативні сили, що діють на ланки системи, замінюємо системою сил, прикладених в центрах мас і парами сил (моментами) відносно цих центрів. Тоді узагальнена сила визначається із суми елементарних робіт сил, розкладених по координатних осях, і моментів

$$\sum_{k=1}^{s} Q_k \delta q_k = \sum_{i-1}^{l+m} \left(F_{xi} \delta x_i + F_{yi} \delta y_i \right) + \sum_{j=1}^{m+n} M_j \, \delta \varphi_j \, ,$$

де F_{xi}, F_{yi}- відповідні проекції на координатні осі рівнодійних всіх сил, прикладених до центру мас *i*-тої ланки системи; M_j - момент всіх сил *j*-тої ланки системи відносно осі обертання для ланок, що виконують обертальний рух і відносно центра мас для ланок, що виконують плоский рух.

Записавши варіації координат ланок $\delta x_i, \delta y_i, \delta \varphi_j$ через варіації узагальнених координат δq_k, отримаємо

$$Q_k \delta q_k = \left\lfloor \sum_{i-1}^{l+m} \left(F_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{yi} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right) + \sum_{j=1}^{m+n} M_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \right\rfloor \delta q_k \, ,$$

$$k = 1, 2, \ldots, s.$$

З останнього рівняння знаходимо узагальнені сили

$$Q_k = \sum_{i-1}^{l+m} \left(F_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{yi} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right) + \sum_{j=1}^{m+n} M_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k}, \tag{5.47}$$

$$k = 1, 2, \ldots, s \, .$$

Після підстановки виразів кінетичної енергії (3.81) і узагальнених сил (5.47) в рівняння (5.45) отримаємо диференціальні рівняння руху плоскої механічної системи зі скінченним числом ступенів свободи, які представлено в матричному вигляді

$$\|A\|\{\ddot{q}\} = \{B\}, \tag{5.48}$$

де $\|A\|$ - квадратна матриця коефіцієнтів біля узагальнених прискорень; $\{\ddot{q}\}$ - вектор-стовпчик узагальнених прискорень; $\{B\}$ - вектор-стовпчик правих частин диференціальних рівнянь.

Елементи матриць $\|A\|$ і $\{B\}$ визначаються такими залежностями:

$$\begin{aligned}
a_{k,r} &= \sum_{i=1}^{l+m} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial q_r} \right) + \sum_{j=1}^{m+n} J_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_r}; \\
b_k &= \sum_{i=1}^{l+m} \left(F_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{yi} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right) + \sum_{j=1}^{m+n} M_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} - \\
&\quad - \sum_{p=1}^{s} \sum_{\nu=1}^{s} \dot{q}_p \dot{q}_\nu \left[\sum_{i=1}^{l+m} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_p \partial q_\nu} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_p \partial q_\nu} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{m+n} J_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial q_p \partial q_\nu} \right], \quad k, r = 1,\ 2,\ \ldots,\ s.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Тут $\dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}$, $\dfrac{\partial y_i}{\partial q_k}$, $\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial q_p \partial q_\nu}$, $\dfrac{\partial^2 y_i}{\partial q_p \partial q_\nu}$, $\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial q_k}$, $\dfrac{\partial^2 \varphi_j}{\partial q_p \partial q_\nu}$ - оператори передачі руху i-тої і j-тої ланок системи [17]. Ці оператори в теорії машин і механізмів отримали назву передаточних функцій першого і другого порядків.

На основі цієї моделі можуть бути побудовані математичні моделі руху конкретних механічних систем.Складемо математичну модель руху стрілової системи крана в процесі зміни вильоту вантажу [16] (приклад 5.5). Стрілову систему крана (рис. 5.5) представимо як голономну механічну систему з двома ступенями свободи.

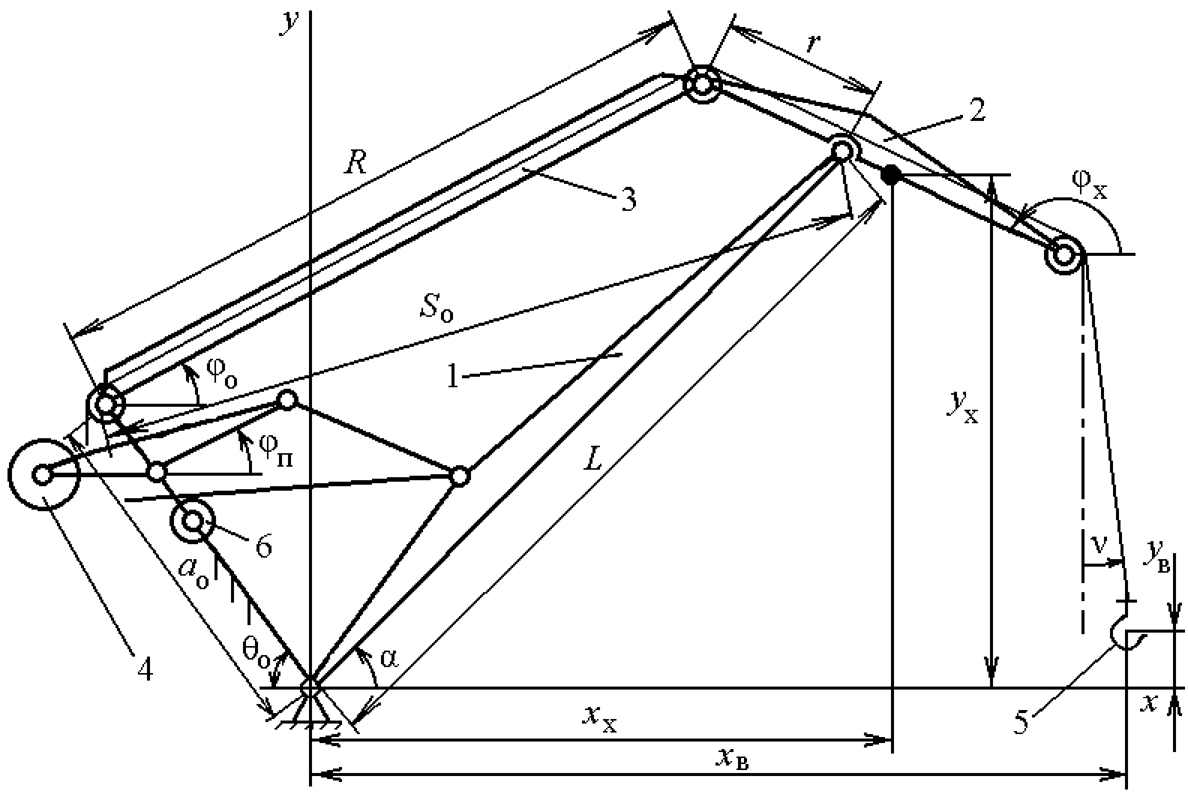


Рис. 5.5. Схема стрілової системи крана

За узагальнені координати прийняті кутові координати стріли в основному русі та відхилення вантажного канату від вертикалі в площині зміни вильоту ν в коливальному русі вантажу. При цьому вважаємо, що стріловий пристрій (стріла - 1, хобот - 2, відтяжка - 3) повністю врівноважені рухомою противагою - 4, а вантаж - 5 рухається по горизонталі в процесі зміни вильоту. Стрілова система приводиться в рух за допомогою рейкового приводного механізму - 6.

Згідно з прийнятою динамічною моделлю за допомогою рівнянь руху плоскої механічної системи складена математична модель стрілової системи, яка виражена узагальненими диференціальними рівняннями руху:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{\alpha} + a_{12}\ddot{v} = b_1; \\ a_{21}\ddot{\alpha} + a_{22}\ddot{v} = b_2, \end{cases} \tag{5.50}$$

де

$$a_{11} = J_P\left(\frac{\partial \varphi_P}{\partial \alpha}\right)^2 + J_C + J_\Pi\left(\frac{\partial \varphi_\Pi}{\partial \alpha}\right)^2 + J_O\left(\frac{\partial \varphi_O}{\partial \alpha}\right)^2 + J_X\left(\frac{\partial \varphi_X}{\partial \alpha}\right)^2 +$$

$$+ m_X\left[\left(\frac{\partial x_X}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_X}{\partial \alpha}\right)^2\right] + m_B\left[\left(\frac{\partial x_B}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_B}{\partial \alpha}\right)^2\right];$$

$$a_{12} = a_{21} = m_B\left(\frac{\partial x_B}{\partial \alpha}\frac{\partial x_B}{\partial v} + \frac{\partial y_B}{\partial \alpha}\frac{\partial y_B}{\partial v}\right);$$

$$a_{22} = m_B\left[\left(\frac{\partial x_B}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_B}{\partial v}\right)^2\right];$$

$$b_1 = M\frac{\partial \varphi_P}{\partial \alpha} + M_C + M_O\frac{\partial \varphi_O}{\partial \alpha} + M_\Pi\frac{\partial \varphi_\Pi}{\partial \alpha} + M_X\frac{\partial \varphi_X}{\partial \alpha} +$$

$$+ F_{Xx}\frac{\partial x_X}{\partial \alpha} + F_{Xy}\frac{\partial y_X}{\partial \alpha} + F_{Bx}\frac{\partial x_B}{\partial \alpha} + F_{By}\frac{\partial y_B}{\partial \alpha} -$$

$$-\dot{\alpha}^2\left[J_P\frac{\partial \varphi_P}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \varphi_P}{\partial \alpha^2} + J_O\frac{\partial \varphi_O}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \varphi_O}{\partial \alpha^2} + J_\Pi\frac{\partial \varphi_\Pi}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \varphi_\Pi}{\partial \alpha^2} + \right.$$

$$+ J_x\frac{\partial \varphi_x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial \alpha^2} + m_x\left(\frac{\partial x_x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x_x}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial y_x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 y_x}{\partial \alpha^2}\right) +$$

$$\left. + m_B\left(\frac{\partial x_B}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x_B}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial y_B}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 y_B}{\partial \alpha^2}\right)\right] - 2\dot{\alpha}\dot{v}m_B\left(\frac{\partial x_B}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x_B}{\partial \alpha \partial v} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial y_B}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 y_B}{\partial \alpha \partial v}\right) - \dot{v}^2 m_B\left(\frac{\partial x_B}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x_B}{\partial v^2} + \frac{\partial y_B}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 y_B}{\partial v^2}\right);$$

$$b_2 = F_{Bx}\frac{\partial x_B}{\partial v} + F_{By}\frac{\partial y_B}{\partial v} - \dot{\alpha}^2 m_B\left(\frac{\partial x_B}{\partial v}\frac{\partial^2 x_B}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial y_B}{\partial v}\frac{\partial^2 y_B}{\partial \alpha^2}\right) -$$

$$-2\dot{\alpha}\dot{v}m_B\left(\frac{\partial x_B}{\partial v}\frac{\partial^2 x_B}{\partial \alpha \partial v} + \frac{\partial y_B}{\partial v}\frac{\partial^2 y_B}{\partial \alpha \partial v}\right) -$$

$$-\dot{v}^2 m_B \left(\frac{\partial x_B}{\partial v} \frac{\partial^2 x_B}{\partial v^2} + \frac{\partial y_B}{\partial v} \frac{\partial^2 y_B}{\partial v^2} \right). \tag{5.51}$$

Тут M, M_C, M_Π, M_O, M_X - рушійний момент на валу двигуна та моменти статичних сил, що діють на стрілу, противагу, відтяжку, хобот відносно осей їх обертання; $F_{Xx}, F_{Xy}, F_{Bx}, F_{By}$- горизонтальні та вертикальні проекції сил, що діють на хобот і вантаж; m_X, m_B - маси хобота і вантажу; J_P, J_C, J_Π, J_O, J_X- моменти інерції ротора двигуна, стріли , противаги, відтяжки відносно осі обертання і хобота відносно центра мас; $\partial\varphi_P/\partial\alpha$, $\partial^2\varphi_P/\partial\alpha^2$, $\partial\varphi_\Pi/\partial\alpha$, $\partial^2\varphi_\Pi/\partial\alpha^2$, $\partial\varphi_O/\partial\alpha$, $\partial^2\varphi_O/\partial\alpha^2$, $\partial\varphi_X/\partial\alpha$, $\partial^2\varphi_X/\partial\alpha^2$, $\partial x_X/\partial\alpha$, $\partial^2 x_X/\partial\alpha^2$, $\partial y_X/\partial\alpha$, $\partial^2 y_X/\partial\alpha^2$, $\partial x_B/\partial\alpha$, $\partial^2 x_B/\partial\alpha^2$, $\partial y_B/\partial\alpha$, $\partial^2 y_B/\partial\alpha^2$ - оператори передачі руху першого і другого порядку, які зв'язують координати ротора двигуна, противаги, відтяжки, і вантажу з координатами стріли; $\partial x_B/\partial v$, $\partial^2 x_B/\partial v^2$, $\partial y_B/\partial v$, $\partial^2 y_B/\partial v^2$ - оператори передачі руху першого і другого порядку, які зв'язують координати вантажу з координатою коливань вантажу; $\partial^2 x_B/\partial\alpha\,\partial v$, $\partial^2 y_B/\partial\alpha\,\partial v$ - змішані оператори передачі руху другого порядку.

Як приклад, визначимо оператори передачі руху для відтяжки стрілового пристрою

$$\frac{\partial\varphi_O}{\partial\alpha} = -\frac{1}{S_O}\frac{\partial S_O}{\partial\alpha}\left(\frac{L^2 - a_O^2 + S_O^2}{\sqrt{4a_O^2 S_O^2 - \left(a_O^2 - L^2 + S_O^2\right)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{S_O^2 + r^2 - R^2}{\sqrt{4R^2 S_O^2 - \left(R^2 - r^2 + S_O^2\right)^2}} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_O}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial \varphi_O}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 S_O}{\partial \alpha^2} \Big/ \frac{\partial S_O}{\partial \alpha} - \frac{\partial \varphi_O}{\partial \alpha} \frac{\partial S_O}{\partial \alpha} -$$

$$-2\left(\frac{\partial S_O}{\partial \alpha}\right)^2 \left\{ \left[\frac{L^4 + \left(S_O^2 - a_O^2\right)^2}{4a_O^2 S_O^2 - \left(a_O^2 - L^2 + S_O^2\right)^2} + 1 \right] \Big/ \sqrt{4a_O^2 S_O^2 - \left(a_O^2 - L^2 + S_O^2\right)} + \right.$$

$$\left. + \left[1 + \frac{r^4 + \left(S_O^2 - R^2\right)^2}{4R^2 S_O^2 - \left(R^2 - r^2 + S_O^2\right)^2} \right] \Big/ \sqrt{4R^2 S_O^2 - \left(R^2 - r^2 + S_O^2\right)^2} \right\}, \qquad (5.52)$$

де

$$S_O = \sqrt{a_O^2 + L^2 + 2a_O L \cos(\theta + \alpha)}; \quad \frac{\partial S_O}{\partial \alpha} = -\frac{a_O L}{S_O} \sin(\theta + \alpha);$$

$$\frac{\partial^2 S_O}{\partial \alpha^2} = -\frac{a_O L}{S_O^2} \left[S_O \cos(\theta + \alpha) - \frac{\partial S_O}{\partial \alpha} \sin(\theta + \alpha) \right].$$

Аналогічно можуть бути визначені оператори передачі руху і для інших ланок стрілової системи: ротора двигуна, хобота, противаги і вантажу. Оператори передачі руху визначаються через конструктивні параметри стрілової системи, які показані на рис. 5.5.

Отримані диференціальні рівняння руху стрілової системи (5.86) з урахуванням операторів передачі руху, наприклад (5.52), являють собою неоднорідні нелінійні диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами. Рівняння такого типу не можуть бути проінтегровані аналітичними методами, тому для їх розв’язування можуть використовуватись чисельні методи. Аналогічний вид мають диференціальні рівняння руху плоскої механічної системи (5.49), тому для них також повинні використовуватись чисельні методи. Для цього система (5.49) приводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку, які записуються в наступному вигляді:

$$\dot{q}_k = p_k; \quad \dot{p}_k = \left|A_k\right| \big/ \left|A\right|, \quad k = 1, 2, \ldots, s, \qquad (5.53)$$

де $\left|A_k\right|$ - визначник матриці $\left\|A\right\|$, в якій k-ий стовбець замінюється вектором-стовпцем $\left\{B\right\}$; $\left|A\right|$ - визначник матриці $\left\|A\right\|$.

Розглянемо чисельні методи для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь типу (5.53). Суть чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь полягає в тому, що похідні невідомих функцій апроксимуються різницевими виразами. Наприклад:

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} \approx \frac{\Delta q(t)}{\Delta t} = \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2\tau}, \tag{5.53}$$

де $\Delta q(t)$ - приріст невідомої функції, який відповідає приросту аргумента Δt; q_i - значення функції q в деякій точці t_i на даному інтервалі; τ - приріст аргументу.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\dot{q}(t) = f(q,t) \tag{5.54}$$

з початковою умовою $q(t_0) = q_0$. Для чисельного розв'язування такого рівняння на основі різницевих виразів розроблено багато методів. Один з таких методів – метод Ейлера першого порядку, в якому розв'язок рівняння (3.90) шукаємо в кожній точці t_i, отриманій розбиттям даного інтервалу зміни аргумента t від t_0 до t_1 на певне число частин *n*. Тоді $\tau = \left(t_1 - t_0\right)/n$, а розв'язок рівняння (3.90) визначається залежністю

$$q_{i+1} = q_i + f\left(q_i, t_i\right)\tau. \tag{5.55}$$

Метод Ейлера має такі різновидності [18].

1. Двокроковий метод

$$\begin{aligned} q_{i+1} &= q_i + f\left(q_{i+1/2},\, t_i\right)\tau, \\ q_{i+1/2} &= q_i + f\left(q_i, t_i\right)\tau/2. \end{aligned} \tag{5.56}$$

2. Неявний метод

$$q_{i+1} = q_i + \left[f\left(q_i,\, t_i\right) + f\left(q_{i-1},\, t_{i-1}\right)\right]\tau/2. \tag{5.57}$$

3. Метод Адамса

$$q_{i+1} = q_i + \left[3\, f\left(q_i, t_i\right) - f\left(q_{i-1}, t_{i-1}\right)\right]\tau/2. \tag{5.58}$$

Проста схема Ейлера досить зручна для реалізації на ЕОМ, але має малу точність. З двох різновидностей двокрокового методу Ейлера перевагу віддають першій схемі, оскільки вона простіше реалізується. Найбільш складним для програмування є метод Адамса.

Метод Ейлера легко розповсюджується і на системи диференціальних рівнянь. Так, для системи

$$\dot{q} = f_1\left(q, p, t\right); \quad \dot{p} = f_2\left(q, p, t\right) \tag{5.59}$$

різницева схема Ейлера дає

$$\begin{aligned} q_{i+1} &= q_i + f_1\left(q_i, p_i, t_i\right)\tau; \\ p_{i+1} &= p_i + f_1\left(q_i, p_i, t_i\right)\tau. \end{aligned}$$

Крім методу Ейлера і його різновидностей, для розв’язування звичайних диференціальних рівнянь широке застосування отримав метод Рунге-Кутта [18]. Він має високий порядок точності, але вимагає значних обчислень, в результаті чого збільшується час розрахунку. Суть методу полягає в послідовному обчисленні коефіцієнтів, за допомогою яких знаходиться значення функції. Для рівняння (5.54) цей метод дає:

$$\begin{gathered}
q_{i+1}=q_i+\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right)/6; \\
k_1=f\left(q_i,t_i\right)\tau; \\
k_2=f\left(q_i+k_1/2,t_i+\tau/2\right)\tau; \\
k_3=f\left(q_i+k_2/2,t_i+\tau/2\right); \\
k_4=f\left(q_i+k_3,t_i+\tau\right)\tau,
\end{gathered} \tag{5.60}$$

а для системи (5.59) –

$$\begin{aligned}
&q_{i+1}=q_i+\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right)/6; \\
&p_{i+1}=p_i+\left(l_1+2l_2+2l_3+l_4\right)/6; \\
&k_1=f_1\left(q_i,p_i,t_i\right)\tau; \\
&l_1=f_2\left(q_i,p_i,t_i\right)\tau; \\
&k_2=f_1\left(q_i+k_1/2,\,p_i+l_1/2,t_i+\tau/2\right)\tau; \\
&l_2=f_2\left(q_i+k_1/2,\,p_i+l_1/2,t_i+\tau/2\right)\tau; \\
&k_3=f_1\left(q_i+k_2/2,\,p_i+l_2/2,t_i+\tau/2\right)\tau; \\
&l_3=f_2\left(q_i+k_2/2,\,p_i+l_2/2,t_i+\tau/2\right)\tau; \\
&k_4=f_1\left(q_i+k_3,\,p_i+l_3,t_i+\tau\right)\tau; \\
&l_4=f_2\left(q_i+k_3,\,p_i+l_3,t_i+\tau\right)\tau.
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Всі розглянуті методи чисельного розв’язування диференціальних рівнянь мають практичне значення лише при реалізації їх на ЕОМ у вигляді стандартних програм. Сучасний дослідник машин і механізмів повинен мати в своїй бібліотеці набір таких стандартних програм.

Додаткова інформація про чисельне інтегрування диференціальних рівнянь наведена у Додатку А.

5.6. Ідентифікація як метод побудови математичних моделей

Задачу ідентифікації можна сформулювати наступним чином: за результатами спостережень за вхідними і вихідними змінними технічної системи побудувати її модель. При цьому система знаходиться в нормальному режимі функціонування. Математично задача формулюється так: якщо технічна система описується деяким оператором A_t, апріорі невідомим, то, маючи заміряні параметри входу і виходу, необхідно побудувати модель оператора A_t, оптимальну по деякому критерію.

Розглянемо взаємодію системи, яка ідентифікується, з середовищем (рис. 5.6). Ця взаємодія проходить по каналах $\vec{Z}$ і $\vec{Y}$. По каналу $\vec{Z}$ середовище впливає на технічну систему (ТС), а по каналу $\vec{Y}$ ТС діє на середовище.

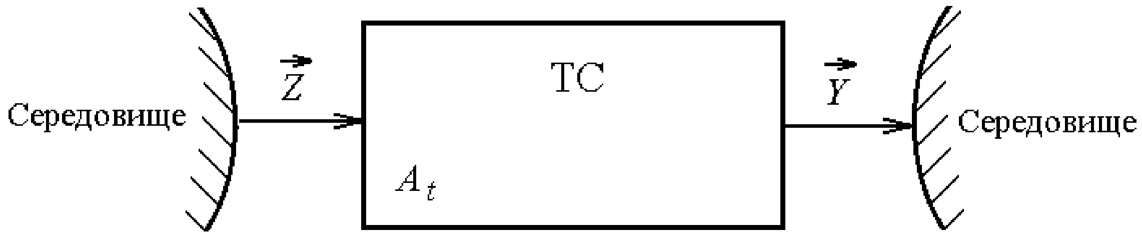


Рис. 5.6. Взаємодія технічної системи з середовищем

Задача ідентифікації зводиться до визначення оператора A_t, який зв'язує вихід ТС $\vec{Y} = A_t(\vec{Z})$. Оскільки досить часто відсутня модель середовища, що діє на ТС, то вхід можна розглядати як випадкову функцію часу $\vec{Z} = \vec{Z}(t)$, статистичні властивості якої в загальному випадку невідомі. Однак відомі спотереження входу і виходу ТС, тобто реалізації функції $\vec{Z}(t)$ і $\vec{Y}(t)$. Неспостерігаємі функції $\xi(t)$, які можуть діяти на ТС, розглядаються як випадкові дії, що утруднюють визначення оператора A_t^1.

Нехай $Z_1,\ldots,Z_N$ - спостереження входу ТС, а $Y_1,\ldots,Y_N$ - відповідні їм спостереження її виходу в дискретні моменти часу $t_1,\ldots,t_N$. Ці спостереження зв'язані невідомим опереатором ТС A_t, тобтоY_i=$A_t(Z_i)$, i = 1, 2, ... , N. Задача ідентифікації полягає в побудові (синтезі) модельного оператора A_t^1, тобто в отриманні оцінки A_t за спостереженнями Z_i і Y_i в дискретні моменти часу t_i.

Таким чином, ідентифікація – це синтез оптимального модельного оператора A_t^1 ТС з використанням результатів спостережень за її вхідними і вихідними змінними.

У відповідності з сучасною теорією можна провести наступну класифікацію ідентифікації:

1) за кінцевим результатом ідентифікації – структурна і параметрична;
2) по способу вивчення ТС ідентифікації – активна і пасивна;
3) по типу моделі, що ідентифікується, – лінійна і нелінійна, детермінована і стохастична, з неперервним і дискретним часом, стаціонарна і нестаціонарна, одномірна і багатомірна, статична і динамічна, з дискретними і розподіленими параметрами.

Успіх ідентифікації ТС суттєво залежить від співвідношення двох факторів: об'єму апріорної інформації про структуру ТС і об'єму вимірювальної інформації. Обидва види інформації необхідні при синтезі моделі, однак вони відіграють різні ролі. Апріорна інформація допомагає визначити структуру моделі, тобто її вид (число входів і виходів, характер зв'язку між ними). Цю процедуру називають структурною ідентифікацією.

Однак структура моделі – це ще не сама модель і для визначення її параметрів необхідно мати результати вимірювань. Задачу визначення параметрів моделі за результатами роботи ТС при заданій структурі моделі називають параметичною ідентифікацією. Наприклад, є певна ТС, і відома система рівнянь, яка її описує. Необхідно визначити тільки коефіцієнти рівнянь.

Першими і найпростішими системами, які були ідентифікованими, виявились статичні нестохастичні системи, тобто регулярні функції, що зв’язують входи і виходи ТС. Ця обставина створила перший підхід теорії ідентифікації, який з’явився в математичному аналізі у вигляді теорії наближення функцій многочленами і веде свій початок від праць П.Л.Чебишева. Цей напрямок пов’язаний з представленням функції у вигляді розвинення по деякій системі функцій (наприклад, поліномів). Теорія наближення має дві гілки – теорію апроксимації та теорію інтерполяції. Остання характерна тим, що інтерпольована функція співпадає з початковою в заданому наборі точок.

Для ідентифікації стохастичних ТС застосовують методи математичної статистики, що дало початок теорії оцінювання. Основною задачею цієї теорії є оцінка параметрів стохастичної системи за спостереженнями випадкових дій. Іншим напрямком математичної статистики для цілей ідентифікації статичних стохастичних ТС стала теорія планування експериментів, яка розглядає активні експерименти з метою підвищення ефективності ідентифікації.

Третім підходом до розв’язування задач ідентифікації є методи теорії систем автоматичного керування. Ця теорія дала життя спеціальним методам ідентифікації динамічних ТС керування в режимі експлуатації при дії випадкових факторів. Саме до цих систем вперше був застосований термін "ідентифікація".

При структурній ідентифікації об’єм апріорної інформації про ТС досить обмежений. Тому необхідно розв’язати наступні задачі:

1) виділення ТС із середовища;

2) вибір класу моделей ТС;

3) визначення характеру зв’язку між входом і виходом моделі ТС;

4) оцінка ступеня і форми впливу вхідних змінних на вихідні, визначення раціональної кількості вхідних і вихідних змінних, що враховуються в моделі;

5) визначення можливості представлення моделі з необхідною точністю в класі лінійних операторів.

Розглянемо деякі способи ідентифікації на прикладі одномірної ТС (рис. 5.7) з зосередженими параметрами. Реальна ТС описується оператором A_t, тобто у формі $y(t) = A_t(Z(t))$, який неможливо знайти, але можна зробити його оцінку. Уточнюючи результат оцінки, отримують ідентифікацію. Застосовуючи деякий алгоритм ідентифікації (АІ), необхідно побудувати модель $y^1(t)=A_t^1\ (Z(t))$ з оптимальним оператором A_t^1, достатньо близьким до A_t, який забезпечує при однаковому вхідному сигналі $Z(t)$ блиизькість вихідних сигналів $y(t)$ і $y^1(t)$.

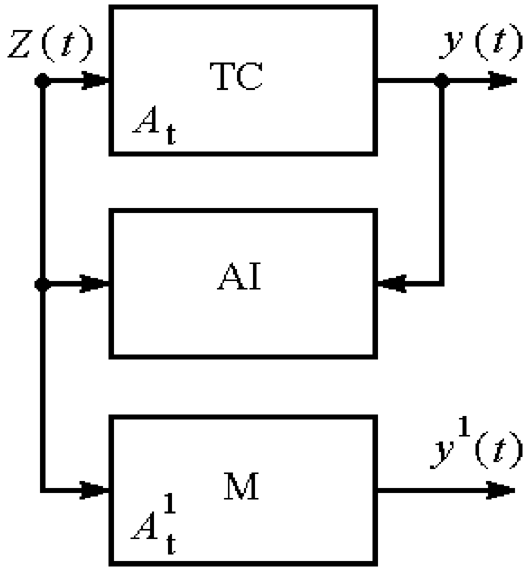


Рис. 5.7. Схема ідентифікації

Зазначимо, що вказана близькість досить відносна, бо оператори A_t і A_t^1 можуть мати різну структуру, можуть бути сформульовані на різних мовах і мати різне число входів. Саме тому близькість операторів безпосередньо оцінити важко або неможливо, бо про оператор ТС досить часто мало що відомо. В зв'язку з цим необхідно оцінювати близькість операторів за їх реакціями на одну і ту ж вхідну дію $Z(t)$, тобто по виходах ТС $y(t) = A_t(Z(t), \xi(t))$і моделі $y^1(t)=A_t^1\ (Z(t),\ \xi^1(t))$. В загальному випадку $Z(t)$ і $y(t)$ можуть бути як детермінованими, так і випадковими функціями часу.

Оптимальний оператор A_t^1 моделі шукається по деякому критерію, який зв'язаний з вихідною змінною $y(t)$, наприклад, для детермінованих функцій

$$\left[y(t) - y^1(t)\right]^2_{\max} \to \min; \tag{5.62}$$

для випадкових функцій часу

$$M\left\{\left[y(t)-y^1(t)\right]^2\right\}\to\min. \tag{5.63}$$

Для розв'язування подібних задач вводиться поняття функції втрат (функції нев'язки) $\rho\left[y(t), y^1(t)\right]$, яка в будь-який фіксований момент часу t залежить від виходу ТС і моделі та не залежить від операторів. Це скалярна функція двох векторних аргументів – виходів ТС і моделі. Найбільш часто функція втрат використовується у сигляді середнього по t квадрата відхилення

$$\rho\left[y(t), y^1(t)\right]=M\left\{\left[y(t)-y^1(t)\right]^2\right\}. \tag{5.64}$$

Критерієм оптимальності оператора моделі A_t^1 є мінімум функції втрат ρ.

Відомо [19], що оптимальну оцінку оператора ТС по критерію мінімуму середнього квадрата відхилення в класі всіх можливих операторів дає умовне математичне сподівання вихідної змінної відносно вхідної (регресія вихідної змінної $y(t)$ по вхідній $z(s)$):

$$y^1(t)=A_t^1\left[z(\mathrm{s})\right]=M\left[y(t)/z(s)\ ,\ s\in T\right]. \tag{5.65}$$

Звичайно оптимальний оператор шукають в класі лінійних операторів, для яких може бути застосований принцип суперпозиції

$$A_t\left[\sum_{i=1}^{n} a_i z_i(t)\right]=\sum_{i=1}^{n} A_t\left[a_i z_i(t)\right].$$

Розглянемо приклади задач параметричної ідентифікації для ТС із зосередженими параметрами.

<u>Приклад 5.6</u>. Дискретна нелінійна ТС задається даними спостережень, що наведені в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Експериментальні дані для дискретної ТС

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_i	0,95	1,65	1,91	1,71	1,08	0,29	-0,53	-1,09	-1,27	-1,03

Структуру моделі ТС у відповідності з даними табл. 5.1 можна представити у вигляді

$$y^1(z_i) = \sin C_1^1 z_i + \sin C_2^1 z_i,$$

де C_1^1 і C_2^1 - параметри ідентифікації синтезуємої функціональної моделі ТС.

Визначимо ці параметри шляхом мінімізації функції втрат

$$\rho\left(C_1^1, C_2^1\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[y^1(z_i) - y_i\right]^2 = \sum_{i=1}^{10}\left(\sin C_1^1 z_i + \sin C_2^1 z_i - y_i\right)^2 . \quad (5.66)$$

Для цього візьмем частинні похідні від функції (5.66) по параметрах ідентифікації C_1^1 і C_2^1. В результаті чого отримаєм систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{10} z_i \cos C_1^1 z_i \left(\sin C_1^1 z_i + \sin C_2^1 z_i - y_i\right) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{10} z_i \cos C_2^1 z_i \left(\sin C_1^1 z_i + \sin C_2^1 z_i - y_i\right) = 0.$$

В результаті розв’язування цієї системи рівнянь отримуємо два "еквівалентних" розв’язки: 1) $C_1^1 \approx 6$, $C_2^1 \approx 4$; 2) $C_1^1 \approx 4$, $C_2^1 \approx 6$.

В розглянутому прикладі прийнята математична модель ТС являє собою нелінійну модель відносно параметрів ідентифікації. Моделі, які є лінійними відносно параметрів ідентифікації являють собою окремий випадок функціональних моделей ТС.

Розглянемо ще один приклад ТС з відомою моделлю, в якій необхідно ідентифікувати параметри.

Приклад 5.7. Нехай поведінка входу і виходу ТС, яка зафіксована на інтервалі $0 \le t \le t_1$ $(t_1 = 1)$ має вигляд, показаний на рис. 5.8.

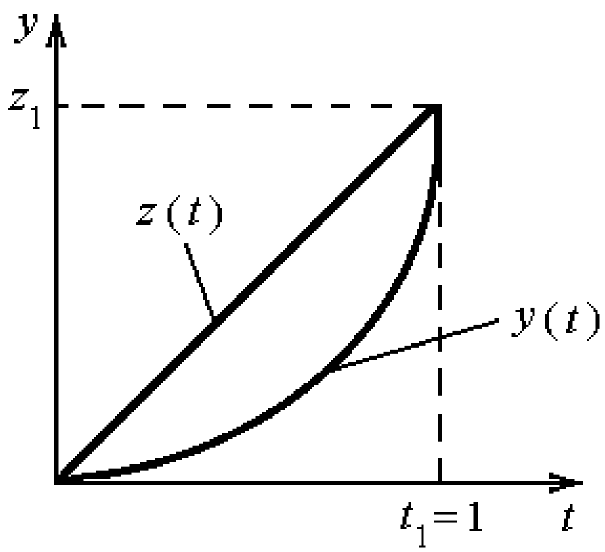


Рис. 5.8. Залежність змінних входу і виходу ТС від часу (тут $z(t) = t$, а $y(t) = t^2$)

Припустимо, що ТС описується диференціальним рівнянням першого порядку. Тоді її математичну модель можна вибрати в такому вигляді

$$\dot{y}^1 + a_1 y^1 = b_0 z(t), \tag{5.67}$$

де a_1, b_0 - параметри ідентифікації.

В цій задачі необхідно вибрати такі значення параметрів a_1 і b_0, щоб втрати при наближенні функції $y^1(t)$ до $y(t)$ були мінімальними. Для розглядаємої задачі функція втрат визначається виразом

$$\rho(a_1, b_0) = \int_0^{t_1} \left[y^1(t) - y(t) \right]^2 dt \,. \tag{5.68}$$

Для визначення структури функції $y^1(t)$ розв'яжемо рівняння (5.68) для випадку, коли $z(t) = t$. Повний розв'язок рівняння (5.68) складається з загального розв'язку y_1^1 однорідного рівняння

$$\dot{y}_1^1 + a_1 y_1^1 = 0 \tag{5.69}$$

і часткового розв'язку повного рівняння y_2^1

$$y^1 = y_1^1 + y_2^1 \,. \tag{5.70}$$

Для знаходження загального розв'язку рівняння (5.69) складемо характеристичне рівняння $r + a_1 = 0$, з якого знаходимо, що $r = -a$. У відповідності з цим розв'язком характеристичного рівняння загальний розв'язок рівняння (5.69) має вигляд

$$y_1^1 = C\, e^{-a_1 t} \,, \tag{5.71}$$

де C - постійна інтегрування.

Частковий розв'язок повного рівняння шукаємо у вигляді

$$y_2^1 = A_0 + A_1 t. \qquad (5.72)$$

З цієї залежності візьмемо першу похідну, в результаті чого отримаємо

$$\dot{y}_2^1 = A_1.$$

Після підстановки функцій y_2^1, $\dot{y}_2^1$ і $z(t)$ в рівняння (5.69) будемо мати

$$A_1 + a_1 A_0 + a_1 A_1 t = b_0 t.$$

З отриманого рівняння знаходимо

$$A_0 = -b_0 / a_1^2;\ A_1 = b_0 / a_1 .$$

Після підстановки цих коефіцієнтів в залежність (5.72), а останньої і (5.71) – в рівняння (5.70) отримаємо повний розв'язок рівняння (3.69)

$$y^1 = Ce^{-a_1 t} + \frac{b_0}{a_1} t - \frac{b_0}{a_1^2}, \qquad (5.73)$$

в якому постійна інтегрування C знаходиться з початкових умов: $t = 0$, $y^1 = 0$, які дають $C = b_0 / a_1^2$. Тоді залежність (5.73) має вигляд

$$y^1 = \frac{b_0}{a_1}\left[\frac{1}{a_1}\left(e^{-a_1 t} - 1\right) + t\right].$$

Підставивши цю залежність і вихід ТС $y = t^2$ в функціонал (5.69), будемо мати

$$\rho(a_1, b_0) = \int_0^{t_1} \left\{ \frac{b_0}{a_1} \left[\frac{1}{a_1} \left(e^{-a_1 t} - 1 \right) + t \right] - t^2 \right\}^2 dt \cdot \qquad (5.74)$$

Отриманий функціонал відображає втрати при наближенні функції $y^1(t)$ до $y(t)$.

В результаті мінімізації функціоналу (5.74) на множині параметрів a_1 і b_0 встановлено, що його мінімальне значення досягається при значеннях a_1= 1 і b_0= 2.

Ідентифікація багатомірних ТС здійснюється аналогічно ідентифікації одномірних систем. У випадку багатомірної ТС на її вхід діє векторна випадкова функція

$$\vec{Z}(t) = \left\{ z_1(t), z_2(t), \ldots, z_p(t) \right\}.$$

На виході цієї системи також маємо векторну випадкову функцію

$$\vec{Y}(t) = \left\{ y_1(t), y_2(t), \ldots, y_q(t) \right\}.$$

Використовуючи ту ж методику, що і в випадку одномірної ТС, і вводячи деяку функцію втрат, можна визначити оптимальний оператор для випадку багатомірної ТС.

Введемо функцію втрат виду

$$\rho\left[\vec{Y}(t), \vec{Y}^1(t),\right] = M \left\{ \sum_{i=1}^{q} \delta_i \left[y_i - y_i^1 \right]^2 \right\}, \qquad (5.75)$$

де δ_i - безрозмірний ваговий коефіцієнт , який вибирається в залежності від значимості i-го виходу. При цьому повинна виконуватись умова нормування $\sum_{s=1}^{q}\delta_i = 1$. Використовуючи функцію втрат (5.75), можна показати, що оптимальна оцінка оператора моделі по критерію мінімуму середнього квадрата похибки може бути знайдена в класі будь-яких операторів за допомогою умовного математичного сподівання відповідній вихідній змінній відносно всіх вхідних змінних. Для кожного з виходів можна записати

$$y_i^1(t) = A_{ti}^1\left[\vec{Z}(s)\right] = M\left[y_i(t)/\vec{Z}(s), \quad s \in T\right] \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

де A_{ti}^1 - компоненти оптимального векторного оператора A_t^1, що являють собою оператори перетворення зі скалярними значеннями, тобто функціоналами, які при перетворенні вектора $\vec{Z}(t)$ дають скалярні функції $y_i^1(t)$.

Методи ідентифікації умовно ділять на пасивні і активні. Типовими пасивними методами є методи автоматичного керування, які використовуються для ідентифікації пристроїв регулювання динамічних ТС. При дослідженні процесів (наприклад, технологічних) широко застосовують активні експериментально-статистичні методи планування експериментів [20], а для аналізу детермінованих статичних ТС використовують теорію наближення функцій (наприклад, методи апроксимації і інтерполяції).

Покажемо практичні можливості застосування активних методів ідентифікації на прикладі побудови регресивних моделей ТС. Ці моделі будуються із застосуванням методів планування експеримента. Основний недолік моделей полягає в тому, що вони є локальними, тобто адекватні ТС в порівняно вузькому діапазоні факторів. Обробка експериментальних даних здійснюється методами класичного регресивного аналізу [20].

В загальному випадку, якщо є ряд факторів $\left\{ z_1, z_2, \ldots, z_k \right\} = \vec{Z}$, що діють на ТС, то відгук $\boldsymbol{y}$ є емпіричною функцією цих факторів, тобто $y = \varphi($ $z_1, z_2, \ldots, z_k$), апріорі невідомою. Будемо будувати модель реакції системи (регресивну модель) у вигляді деякого поліному відносно цих факторів

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1} \beta_j z_j + \sum_{j,i=1}^{k} \beta_{ji} z_i z_j + \ldots, \tag{5.76}$$

де β_0 - вільний член,

$$\beta_j = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \right|_{\vec{Z}=0}; \quad \beta_{ji} = \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j z_i} \right|_{\vec{Z}=0}.$$

Тут β_j враховує лінійний ефект, а β_{ji} – квадратичний ефект ($i = j$) і ефект взаємодії між факторами ($i \neq j$). Ці коефіцієнти неможливо точно визначити, бо невідомий аналітичний вираз для функції φ, а можливо дати лише їх оцінки $b_0 = \beta_0^1, b_j = \beta_j^1, \ldots,$ тобто фактично регресивну модель можна отримати у вигляді

$$y^1 = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j z_j + \sum_{i,j=1}^{k} b_{ji} z_j z_i + \ldots = f(\vec{Z}, b_0, b_1, \ldots).$$

Перед побудовою регресивної моделі необхідно обмежитись якоюсь ступенню полінома, а також корисно побудувати експериментальну лінію регресії, яка дозволяє зробити висновок про форму моделі і дає допоміжну можливість визначити необхідну ступінь полінома.

Виробивши вид моделі, здійснюють оцінку коефіцієнтів регресії β_0, β_1, ... , застосовуючи метод найменших квадратів. Шукають мінімум функціоналу

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N}\left(y_i - y_i^1\right)^2, \tag{5.77}$$

де *N* - об'єм виборки; y_i - виміряне значення виходу; $y_i^1 = f\,(\vec{Z}_i, b_0, b_1, \ldots)$ - значення виходу, що передбачено моделлю.

Якщо позначити через *l* число коефіцієнтів β в рівнянні (5.76), то *s*= *N*- - *l* являє собою число ступеней свободи. Функціонал (5.77) буде мати мінімум, якщо $\partial\Phi/\partial b_0 = 0,\ \partial\Phi/\partial b_1 = 0, \ldots$, або

$$2\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - f\left(\vec{Z}_i, b_0, b_{1,\ldots}\right)\right]\frac{\partial f\left(\vec{Z}_i, b_0, b_{1,\ldots}\right)}{\partial b_0} = 0;$$

$$2\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - f\left(\vec{Z}_i, b_0, b_{1,\ldots}\right)\right]\frac{\partial f\left(\vec{Z}_i, b_0, b_{1,\ldots}\right)}{\partial b_1} = 0;$$

....

$$2\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - f\left(\vec{Z}_i, b_0, b_{1,\ldots}\right)\right]\frac{\partial f\left(\vec{Z}_i, b_0, b_{1,\ldots}\right)}{\partial b_l} = 0.$$

Перетворивши цю систему до нормальної форми, отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} y_i \frac{\partial f\left(\vec{Z}_i, b_0, b_{1,\ldots}\right)}{\partial b_0} - \sum_{i=1}^{N} f\left(\vec{Z}_i, b_0, b_{1,\ldots}\right)\frac{\partial f\left(\vec{Z}_i, b_0, b_{1,\ldots}\right)}{\partial b_0} = 0;\\
&\sum_{i=1}^{N} y_i \frac{\partial f\left(\vec{Z}_i, b_0, b_{1,\ldots}\right)}{\partial b_1} - \sum_{i=1}^{N} f\left(\vec{Z}_i, b_0, b_{1,\ldots}\right)\frac{\partial f\left(\vec{Z}_i, b_0, b_{1,\ldots}\right)}{\partial b_1} = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{i=1}^{N} y_i \frac{\partial f\left(\vec{Z}_i, b_0, b_{1,\ldots}\right)}{\partial b_l} - \sum_{i=1}^{N} f\left(\vec{Z}_i, b_0, b_{1,\ldots}\right)\frac{\partial f\left(\vec{Z}_i, b_0, b_{1,\ldots}\right)}{\partial b_l} = 0.
\end{aligned} \tag{5.78}$$

Система алгебраїчних рівнянь (5.78) містить стільки рівнянь, скільки невідомих коефіцієнтів $b_0, b_{1,\ldots}$. Розв’язавши цю систему при відомій структурі функції f, можна визначити коефіцієнти $b_0, b_1, \ldots, b_l$.

Оскільки функціонал $\Phi \geq 0$, то він обов’язково буде мати мінімум. Покажемо застосування описаної процедури побудови регресивних моделей на простому прикладі. Розглянемо задачу лінійної регресії.

Приклад 5.7. Нехай річна продуктивність праці в розрахунку на одного робітника і енергоозброєність праці на підприємствах по ремонту будівельних машин характеризується даними, що представлені в табл. 5.2. Побудувати модель залежності продуктивності на підприємствах від їх енергоозброєності.

Таблиця 5.2

Умовні дані продуктивності праці і енергоозброєності на підприємствах

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
z_i	2,8	2,2	3,0	3,5	3,2	3,7	4,0	6,0	5,4	5,2	5,2	6,0	9,0	4,8
y_i	6,7	6,9	7,2	7,3	8,4	8,8	9,1	10,6	10,7	11,1	11,8	12,1	12,4	9,8

В табл. 5.2 наведено такі дані: i - порядковий номер ремонтного підприємства; z_i - енергоозброєність i-го підприємства в кВт на одного робітника; y_i - річна продуктивність праці одного робітника в тисячах грошових умовних одиниць.

В цій задачі значення енергоозброєності підприємств являють собою вхідні змінні, а значення продуктивності – вихідні змінні.

Побудова математичної моделі дозволить визначити вплив енергоозброєності підприємства на продуктивність його робітників.

Представимо регресивну модель у вигляді лінійного двочлена

$$y_i^1 = a + bz_i.$$

Тоді вираз функціоналу (5.77) запишеться наступним чином

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a + bz_i \right) \right]^2 .$$

Щоб визначити мінімум цього функціоналу, продиференціюємо його по невідомих параметрах a і b і отримані вирази прирівняємо до нуля. В результаті чого будемо мати

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(a + bz_i \right) \right)(-1) = 0; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(a + bz_i \right) \right)(-z_i) = 0, \end{cases}$$

де n = 14 - кількість підприємств по ремонту будівельних машин.

Перетворимо останню систему до виду:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = na + b\sum\limits_{i=1}^{n} z_i; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} z_i\, y_i = a\sum\limits_{i=1}^{n} z_i + b\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2 . \end{cases} \qquad (5.79)$$

Використовуючи дані табл. 5.2 вирахуємо суми системи (5.79):

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 132{,}9; \; \sum_{i=1}^{n} z_i = 64{,}2; \; \sum_{i=1}^{n} z_i\, y_i = 650{,}99; \; \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = 33{,}26.$$

Підставивши отримані результати в (5.79), отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 14a + 64{,}2b = 132{,}9; \\ 64{,}2a + 335{,}26b = 650{,}99, \end{cases}$$

розв'язавши яку маємо

$$a = 4{,}829;\ b = 1{,}017.$$

В результаті рівняння регресії запишеться у вигляді

$$y = 4{,}829 + 1{,}017z.$$

Таким чином, ріст енергоозброєності праці на підприємствах по ремонту будівельних машин на 1 кВт на одного робітника приводить до збільшення продуктивності праці в середньому на 1,017 тис. умовних грошових одиниць на одного робітника.

5.7. Адекватність моделі і технічної системи

5.7.1. Методи спрощення моделей

Як правило, процеси функціонування реальних технічних систем (ТС) є настільки складними, що виникає потреба спрощення їх моделей. Найбільш розповсюдженими є наступні методи спрощення моделей:

1) розчленування складних ТС на ряд більш простих підсистем (декомпозиція) [21];

2) виділення суттєвих властивостей та дій і врахування інших (несуттєвих) факторів в параметричній формі (метод макромоделювання);

3) лінеаризація нелінійних процесів в деякій області зміни змінних загальноприйнятим методом малих відхилень;

4) приведення систем з розподіленими параметрами до систем з зосередженими параметрами;

5) нехтування динамічними властивостями процесів.

Розглянемо деякі з перерахованих методів спрощення моделей більш детально.

В загальному випадку кінцевою метою декомпозиції є розчленування простору змінних $\left\{ y_1, y_2, \ldots, y_q, z_1, z_2, \ldots, z_p, v_1, v_2, \ldots, v_r, f_1, f_2, \ldots, f_s \right\}$, де $\vec{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$, $\vec{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_s\}$ - відповідно спостережувані і неспостережувані (тобто неконтрольовані) дії на систему. Якщо в такій системі будь-який вихід має зв'язок з іншими виходами, то декомпозиція практично неможлива, а якщо такого зв'язку немає, то модель може бути розчленована на таку кількість моделей, скільки існує блоків-виходів, між якими немає зв'язку. Розглянемо приклад розчленування загальної моделі на систему більш простих еквівалентних моделей.

<u>Приклад 5.8</u>. Нехай існує простір змінних параметрів $\left\{ y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3, v_1, v_2, v_3, f_1, f_2, f_3 \right\}$, в якому існують наступні достатньо міцні зв'язки:

$$\begin{aligned} &y_1 \leftrightarrow z_1, v_2, v_3, f_2; \\ &y_2 \leftrightarrow y_1, z_2, v_1, v_2, v_3, f_1; \\ &y_3 \leftrightarrow z_1, v_3, f_1, f_2. \end{aligned} \tag{5.80}$$

Тоді система визначається наступними координатами в фазовому просторі:

$$\begin{aligned} &y_1(z_1, v_2, v_3, f_2); \\ &y_2(y_1, z_2, v_1, v_2, v_3, f_1); \end{aligned} \tag{5.81}$$

$$y_3(z_1, v_3, f_1, f_2).$$

Якщо загальна модель системи має вид неявного виразу достатньо великої розмірності

$$\varphi\left(y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3, v_1, v_2, v_3, f_1, f_2, f_3\right) = 0, \qquad (5.82)$$

то в розглянутому випадку, враховуючи зв’язки (5.80) і співвідношення (5.81), які визначають стан системи, можна складну модель (5.82) і представити у вигляді еквівалентних їй трьох більш простих часткових моделей для кожного з виходів системи y_1, y_2, y_3:

$$\varphi_1(y_1, z_1, v_2, v_3, f_2) = 0;$$
$$\varphi_2\left(y_2, z_1, z_2, v_1, v_2, v_3, f_1, f_2\right) = 0;$$
$$\varphi_3(y_3, z_1, v_3, f_1, f_2) = 0.$$

Завдяки проведеній декомпозиції системи значно спрощується задача її теоретичного дослідження.

При використанні методу макромоделювання в початковому просторі змінних залишаються (тобто враховуються) тільки ті з них, які значно впливають на вихідні змінні. Інші неврахованi змінні можуть бути враховані в параметричній формі шляхом зміни коефіцієнтів при врахованих змінних або шляхом введення вільних членів.

При побудові спрощених моделей з урахуванням тільки суттєвих впливів широко використовується метод адаптивної моделі, тобто моделі, коефіцієнти якої підставляються таким чином, щоб деяка міра розходження (нев’язки) виходів моделі і реальної ТС приймала допустимі (мінімальні) значення. Для цього використовують критерії мінімізації нев’язок. При цьому ті змінні, які стабілізуються і не приводять до зміни вихідних змінних, в моделі не відображаються. Структура спрощеної моделі називається макромоделлю, яка для *k*-тої вихідної змінної має вигляд

$$\varphi_k \left(y_1, \ldots, y_q, z_1, \ldots, z_p, v_1, \ldots, v_r, f_1, \ldots, f_s \right) = 0. \qquad (5.83)$$

Маючи початкову повну модель (5.83), можна оцінити ступінь впливу на вихідну змінну y_k тієї або іншої дії шляхом визначення похідних від y_k, тобто $\partial y_k / \partial z_j$, $\partial y_k / \partial v_i$, $\partial y_k / \partial f_k$. Для цього необхідно тільки, щоб змінна y_k в явній формі визначалась з (5.83).

По величині похідної можна визначити вплив зміни тієї чи іншої дії на процес функціонування складної технічної системи.

В початковому процесі характеристики стану ТС можуть залежати не тільки від часу, але і від просторових координат. З множини ТС з розподіленими параметрами можна виділити системи, параметри яких приводяться до зосереджених. Це такі системи, в яких достатньо знати значення вхідних і вихідних змінних в кінцевому числі фіксованих точок простору.

Наприклад, лінійні елементи ТС з розподіленими параметрами структурно можуть бути представлені у вигляді багатомірної лінійної ситеми з зосередженими параметрами. На рис. 3.14 показано балку на двох опорах, яка під дією зовнішньої змінної сили *P* здійснює коливання відносно положення статичної рівноваги (приклад 5.9).

В цій системі кожна точка балки здійснює своє переміщення *y*, яке залежить від положення координати *x*. Ця балка являє собою систему з розподіленими параметрами (масами) вздовж координати *x*, тобто тут маса балки і її прогин є координати довжини *x*: *m* (*x*) і *y* (*x*). Ці змінні є характеристиками з розподіленими параметрами.

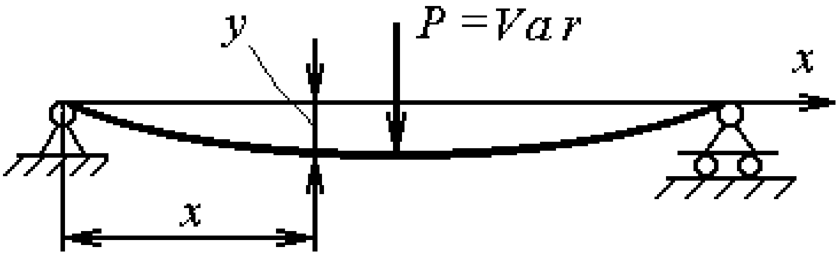


Рис. 5.9. Схема балки з розподіленими параметрами

Розглянута система з розподіленими параметрами може бути замінена системою з зосередженими параметрами (рис. 5.10). В заміщеній схемі окремі елементи балки замінені масами $m_1, m_2, \ldots$ і відповідними їм координатами $y_1, y_2, \ldots$.

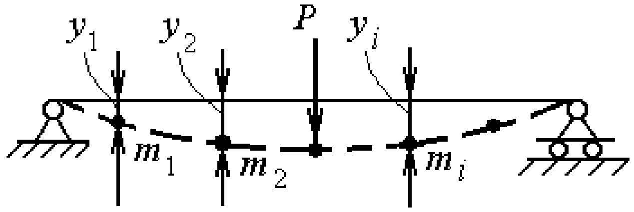


Рис. 5.10. Схема балки з зосередженими параметрами

При розгляді коливань балки під дією змінної сили P умовою еквівалентності схем, показаних на рис. 5.9 і рис. 5.10, є рівність кінетичних енергій систем з розподіленими і зосередженими параметрами.

5.7.2. Аналіз моделей

Модель ТС, що досліджується, є формалізованим і спрощеним її описом. В ній враховується тільки деяка підмножина із множин ознак, які складають початковий опис системи. Вид моделі визначається не тільки природою реальної ТС, але і тими завданнями, для розв'язування яких будується модель, а також необхідною точністю їх розв'язування. Тому необхідні дослідження отриманої моделі з метою визначення області її найбільш ефективного застосування при розв'язуванні інженерних задач і встановлення меж зміни параметрів, в яких вона справедлива.

Ефективність використання математичних моделей для дослідження ТС може бути показана за допомогою наступного приклада.

Приклад 5.10. Розглянемо задачу дослідження режиму вимушених коливань механічного осцилятора з двома пружно з'єднаними масами. Нехай розглядається коливання маси m під дією вимушеної сили $F(t) = F_0 \sin \omega t$ (рис. 5.11).

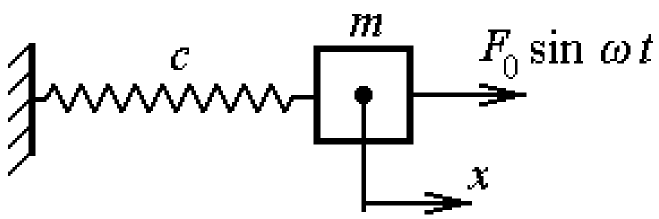


Рис. 5.11. Динамічна модель пружних коливань одномасової системи

Користуючись математичною моделлю руху плоскої механічної системи, неважко показати, що математична модель цього процесу без врахування впливу тертя являє собою диференціальні рівняння

$$m\ddot{x} + cx = F_0 \sin \omega t, \tag{5.84}$$

де x - рухома координата маси m; c - коефіцієнт жорсткості пружного елементу; F_0 - амплітуда вимушеної сили, яка збуджується з частотою ω. Для сталого режиму коливань розв'язок рівняння (5.84) має вигляд [22]

$$x = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \sin \omega t, \tag{5.84}$$

де $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ - власна частота коливань одномасового осцилятора. Із залежності (5.84) знаходимо, що амплітуда коливань визначається із співвідношення

$$x_0 = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}. \qquad (5.85)$$

Тепер розглянемо, як впливає на процес коливань маси m приєднання до неї іншої маси m_1 через пружний елемент з жорсткістю c_1 (рис. 5.12).

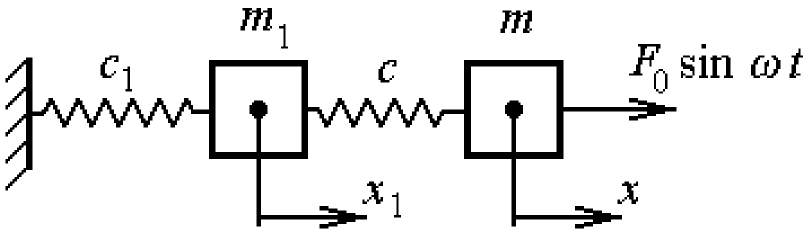


Рис. 5.12. Динамічна модель пружних коливань двомасової системи

Диференціальні рівняння коливань цієї системи без врахування сили тертя можна записати у вигляді [23]

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\left(x - x_1\right) = F_0 \sin \omega t; \\ m_1 \ddot{x}_1 - c\left(x - x_1\right) + c_1 x_1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо амплітуди сталих коливань для кожної з мас:

для маси m

$$x_0^* = \frac{F_0}{m\left|\omega_0^2 - \omega^2 - \dfrac{\omega^2 c_1}{\omega_{10}^2 - \omega_0^2}\right|}; \qquad (5.86)$$

для маси m_1

$$x_{10}^* = \frac{F_0}{m_1\left|\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(\omega_{10}^2 - \omega^2\right)\dfrac{m}{c_1} - \omega^2\right|}, \qquad (5.87)$$

де $\omega_{10}=\sqrt{c_1/m_1}$ - власна частота коливань приєднаного одномасового осцилятора.

Порівнюючи значення амплітуд коливань x_0 і x_0^* (до і після приєднання маси m_1), можна показати, що при виборі певних значень параметрів c_1 і m_1 приєднаної маси можна добитися значного зменшення амплітуди x_0^*. Знайдемо умову, при якій $x_0^* < x_0$, тобто в результаті приєднання маси m_1 амплітуда коливань маси m зменшиться. Ця умова запишеться у вигляді

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left(\omega_{10}^2-\omega_0^2\right)<0. \tag{5.88}$$

Умову (5.88) отримано в результаті аналізу залежності (5.86) і (5.87).

Нерівність (5.88) означає, якщо власна частота ω_0 початкового осцилятора більша вимушеної частоти, то власна частота ω_{10} приєднаного осцилятора повинна бути менше ω і навпаки. Більше того, амплітуда x_0^* може бути шляхом відповідного підбору значень c_1 і m_1 як завгодно зменшена, а при $\omega_{10}-\omega \to 0$ вона прямує до нуля.

Таким чином, приходимо до висновку, який завчасно зовсім не очевидний і навіть може бути сприйнятий як парадоксальний: при певних співвідношеннях параметрів приєднаного осцилятора (його власна частота повинна дорівнювати частоті ω) маса, до якої прикладена вимушена сила, залишається в спокої, а розкачується інша маса, до якої сила безпосередньо не прикладена.

Аналогічний висновок можна отримати і для осцилятора з демпфуванням, однак умова, при якій $x_0^* < x_0$, буде знаходитись з моделі процесу з урахуванням впливу тертя.

Цей результат підказує ідею конструкції пристроїв погашення вимушених коливань (динамічних погашувачів коливань), які базуються на пружному приєднанні до коливальної системи допоміжних мас, що сприймають розкачування на себе. Область застосування таких пристроїв досить широка – це технічні системи, в яких необхідно усунути шкідливі коливання.

Однак приєднана маса m_1 не повинна бути досить малою, бо із залежності (3.124) для її амплітуди x_{10}^* випливає, що при $\omega_{10} = \omega$ величина $x_{10}^* = F_0 \Big/ \left(m_1 \omega^2 \right)$ буде значно зростати при малих m_1. Крім того, коливання мас m і m_1 обмежені розмірами конструкції, яка здійснює коливання.

5.7.3. Оцінка ідентичності моделі і технічної системи

Необхідна умова для переходу від дослідження технічної системи (ТС) до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів на ТС – вимога адекватності моделі і ТС. Адекватність передбачає відтворення моделлю з необхідною повнотою всіх властивостей ТС, які суттєві для даного дослідження. Оскільки будь-яка модель має характер певної проекції ТС, ніколи не можна говорити про абсолютну адекватність, при якій модель за всіма характеристиками відповідає оригіналу. Отже, оцінка ідентичності може спиратись тільки на оцінку відмінності моделі від оригіналу.

Поняття адекватності базується на математичних поняттях ізоморфізму і гомоморфізму. ТС, що досліджується, та її модель називаються ізоморфними, якщо між ними існує взаємно-однозначна відповідність. Гомоморфізм, як і ізоморфізм, передбачає збереження в моделі всіх визначених в ТС властивостей і відношень. Однак тут вимога взаємно-однозначної відповідності замінюється вимогою однозначної відповідності моделі ТС, тоді як відповідність ТС моделі не однозначна.

Ізоморфна модель включає всі риси, які теоретично притаманні оригіналу. При бажанні побудувати ізоморфну модель головна перешкода полягає у відсутності перетворення, яке встановлює необхідну взаємно-однозначну відповідність.

Гомоморфізм визначає таку форму зв'язку між двома подібними системами, коли однозначне лише в одну сторону перетворення дозволяє звести початкову систему до більш простої системи, яка гомоморфна початковій. Моделюванню ТС притаманний гомоморфізм.

Оцінити рівень ідентичності моделі і ТС можна за допомогою кількісних показників. Задача встановлення рівня ідентичності моделі і ТС може бути поставлена наступним чином: для відомої ТС будується її модель таким чином, щоб при подачі однакових вхідних дій на ТС і її модель вихідні сигнали мінімально відрізнялись один від одного. Рівень відхилень вихідних сигналів визначається кількісними показниками. Серед них можна виділити мінімум середнього квадрата похибки.

При побудові моделей досить часто завчасно невідомі ні ступінь впливу входів на виходи, ні форма залежності між окремими вхідними і вихідними змінними. При таких умовах оптимальну оцінку моделі ТС при використанні критерію мінімуму середнього квадрата похибки дозволяє дати регресія виходу по відношенню до всіх входів, тобто умовне математичне сподівання виходу. Добавлення врахованих входів при побудові оцінки моделі збільшує дисперсію (квадрат відхилення) умовного математичного сподівання виходу.

В загальному випадку для *p* входів і одного виходу маємо

$$y^*(t) = M\left[y(t) / z_1(s_1),\ z_2(s_2),\ \ldots,\ z_p(s_p)\ ;\ s_k \in T_k\right], \qquad (5.89)$$

де $z_1(s_1), z_2(s_2), \ldots, z_p(s_p)$ - враховані вхідні змінні, які змінюються на кінцевих інтервалах часу T_k, тобто $s_k \in T_k$, k = 1, 2,..., p; $y^*(t)$ - значення виходу моделі в фіксований момент часу t; $y(t)$ - виміряне значення виходу ТС. Для одномірного випадку (один вхід і один вихід) вихідна змінна моделі визначається так:

$$y^{*}(t)=M\left[y(t)/z\,(s)\,;\ s\in T\right]. \tag{5.90}$$

Мірою близькості $y(t)$ і $y^{*}(t)$ як випадкових функцій часу є дисперсія умовного математичного сподівання. Безумовна дисперсія виходу $D\left[y(t)\right]$ може бути представлена у вигляді двох доданків [24]

$$\begin{gathered}D\left[y(t)\right]=D\left\{M\left[y(t)/z\,(s)\,;\ s\in T\right]\right\}+\\ +D\left[y(t)/z\,(s)\,;\ s\in T\right].\end{gathered} \tag{5.91}$$

Перший доданок в (5.91) характеризує ту частину загальної дисперсії, яка визначається змінами у врахованій змінній; другий – характеризує частину загальної дисперсії, яка відображає неврахованi фактори.

Залежність (5.91) витікає із рівності

$$\begin{aligned}D(y)&=M\left[y-M\,(y)\right]^{2}=\\ &=M\left[y-M\left(y/z\right)+M\left(y/z\right)-M\,(y)\right]^{2}=\\ &=M\left[y-M\,(y/z)\right]^{2}+M\left[M\left(y/z\right)-M\,(y)\right]^{2}+\\ &+2M\left\{\left[y-M\,(y/z)\right]\left[M\left(y/z\right)-M\,(y)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{5.91}$$

Оскільки в рівності (5.91) останній доданок дорівнює нулю, то можна записати

$$D(y)=D(y/z)+D\left[M\,(y/z)\right],$$

тобто отримано залежність, яка відповідає (5.91).

За величину рівня ідентичності моделі і ТС приймають дисперсивну міру

$$Q_{y/z}(t,T) = \frac{D\left\{M\left[y(t)/z(s); s \in T\right]\right\}}{D\left[y(t)\right]},$$

яку називають кореляційним відношенням.

За міру неідентичності моделі і ТС використовують

$$\overline{Q}_{y/z}(t,T) = \frac{D\left[y(t)/z(s); s \in T\right]}{D\left[y(t)\right]}.$$

Очевидно, що справедлива рівність $Q + \overline{Q} = 1$.

Розглянемо деякі властивості дисперсивної міри.

1. Для детермінованої одномірної ТС умовна дисперсія виходу $D(y/z)$ дорівнює нулю, тому дисперсія умовного математичного сподівання дорівнює безумовній дисперсії виходу, тобто

$$D\left[M\left(y/z\right)\right] = D\left[y(t)\right].$$

Таким чином, при всіх врахованих входах і при відсутності інших впливів на ТС математичне сподівання дорівнює самій вихідній величині.

В цьому випадку

$$Q_{y/z}(t,T) = 1; \; \overline{Q}_{y/z}(t,T) = 0. \tag{5.92}$$

ТС, для яких справедливі рівності (5.92), називаються детермінованими, повністю визначеними або регулярними.

2. Якщо вихідна змінна $y\ (t)$ ніяк не зв'язана з входом $z(s); s \in T$, то (оскільки в цьому випадку $M\left(y/z\right)=M\ (y)$) з виразу для дисперсії умовного математичного сподівання $D\left[M\left(y/z\right)\right]=M\left[M\left(y/z\right)-M\ (y)\right]^2$ випливає, що $D\left[M\left(y/z\right)\right]=0$. Тому справедлива рівність

$$D\left(y/z\right)=D\left[y(t)\right].$$

В цьому випадку дисперсивна міра

$$Q_{y/z}(t,T)=0 \qquad (5.93)$$

при умові, що $D\left[y(t)\right]\neq 0$. ТС, для яких можливе виконання рівності (5.93), називають невизначеними або нерегулярними.

6. АНАЛІЗ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Одними з найважливіших задач дослідження технічних систем (ТС) є задачі аналізу і синтезу. Аналіз – це метод вивчення системи, який базується на поділі її на частини, що вивчаються окремо шляхом абстрагування від впливу інших частин. При цьому задачі дослідження системи суттєво спрощуються. В процесі аналізу за відомою структурою і параметрами ТС вивчається її поведінка, тобто досліджуються властивості системи і її характеристики.

Синтез – це метод вивчення системи, який грунтується на розгляді її частин у взаємодії між собою, їх взаємному впливі і зв’язках. Синтез дає повне уявлення про об’єкт дослідження як цілісну систему. При цьому задачі синтезу системи в порівнянні з задачами аналізу значно ускладнюються. Процес синтезу ТС полягає в знаходженні її структури і визначенні парамерів за заданими властивостями.

Задачі аналізу і синтезу ТС взаємозворотні і, як правило, розв’язуються спільно. Так задачі синтезу як більш складні частіше всього розв’язуються з використанням результатів розв’язування задач аналізу.

6.1. Задачі аналізу

Як вже відомо, аналіз – це процес визначення або дослідження властивостей, які притаманні технічній системі. Нехай відомі функції і характеристики елементів, що входять в склад системи, і визначена її структура. Необхідно визначити функції і характеристики, які притаманні системі як сукупності елементів.

Аналіз систем з метою визначення і оцінки їх якісних і кількісних властивостей є однією з найважливіших задач теорії технічних систем. Аналіз дозволяє оцінити властивості різних класів ТС, їх структур, стратегій керування системами; характеристики як окремих елементів, так і їх сукупності.

Показники, що характеризують властивості ТС, можуть бути визначені одним з двох способів: 1) шляхом обробки результатів натурного експерименту; 2) в результаті фізичного або математичного моделювання процесів функціонування системи.

Вивчення системи в натурних умовах, практично, доцільно тільки при виконанні наступних умов:

- система може функціонувати в режимах, які дозволяють досягти цілі експерименту;
- є можливість фіксації всієї необхідної інформації без суттєвих витрат на датчики і накопичувачі інформації;
- фіксація і статистична обробка отриманої інформації в реальному масштабі часу задовольняє поставленим термінам експерименту;
- зміна режиму функціонування системи не приводить до аварії.

Оскільки в більшості практичних випадків перераховані умови не виконуються, то найбільш ефективним засобом аналізу складних ТС є їх математичне моделювання, яке детально описано в попередньому розділі.

Задача аналізу ТС включає три етапи.

<u>На першому етапі</u> необхідно виявити причинно-наслідкові зв’язки, які притаманні системі, яка аналізується, і побудувати її концептуальну (причинно-наслідкову) модель, що розкриває суть процесів, які проходять в системі. При побудові концептуальної моделі встановлюється наявність залежності між характеристиками процесу, що цікавлять дослідника, і параметрами системи. Ці параметри повинні бути закладені в модель системи.

<u>На другому етапі</u> на базі прийнятої концептуальної або динамічної моделі будується математична модель, яка виявляє кількісні співвідношення між характеристиками процесу і параметрами системи. Така модель може бути задана, наприклад, у вигляді функціональної залежності $Y = \Phi(X, U)$, де

Y - множина вихідних характеристик системи; X - множина параметрів, що враховуються концептуальною або динамічною моделлю; U - множина вхідних дій на систему. Кількісні співвідношення конкретизують причинно-наслідкові зв'язки і тим самим повністю визначають модель системи. Дослідження залежностей Y= Ф (X, U) дозволяє виявити властивості системи, граничні і екстремальні значення характеристик, взаємні зв'язки між ними.

Оскільки побудова моделі здійснюється формальним методами, то виникає необхідність перевірки достовірності моделі і отриманих на її основі теоретичних результатів, що і здійснюється на третьому етапі розв'язування задачі аналізу. Перевірка достовірності проводиться шляхом співставлення отриманих з моделі залежностей з експериментальними даними або даними, які отримані іншими методами аналізу.

Результатом аналізу є моделі процесів, що проходять в системах, і закономірності, які притаманні процесам і системам. Моделі розкривають причинно-наслідкову природу процесів і встановлюють залежності між їх характеристиками і параметрами системи. Саме в цьому полягає пізнавальна цінність аналізу.

Прикладна цінність аналізу обумовлена використанням результатів аналізу для постановки задач синтезу, які виникають при проектуванні технічних систем.

Дослідження складних ТС почаниється з аналізу властивостей алгоритмів, різних стратегій керування процесами, способів організації систем в цілому. При цьому будуються і досліджуються моделі процесів, що проходять в системах, які реалізують різні класи прикладних задач на основі різних структур і стратегій керування процесами. Результати аналізу сприяють розумінню суті процесів, що проходять в складних ТС.

6.2. Формалізація і постановка задачі аналізу технічних систем

Автоматизовані (машинні) методи аналізу вимагають особливої ретельності в описанні задач, які стоять перед інженером-дослідником і інженером-проектувальником конкретної ТС. В цьому випадку процес аналізу повинен бути, по можливості, строго формалізованим. Це означає, що він повинен підпорядковуватись жорстким закономірностям, які не допускають довільної інтерпретації. Структура і характер вхідної інформації і інформації, яку отримано в результаті процесу, повинні бути жорстко фіксованими. В таких випадках кажуть про алгоритмізацію процесу аналізу ТС. Під алгоритмізацією розуміють точну послідовність операцій аналізу, яка задає обчислювальний процес, що починається з довільних вхідних даних, і направлена на отримання повністю визначеного цими даними результату.

В певних випадках для того, щоб зробити процес аналізу технічної системи більш ефективним, виникає потреба надати людині (інженеру) можливість в необхідних і строго визначених місцях цього процесу втручатись в його хід, тобто розформалізувати його. Це не зменшує важливості жорсткої формалізації процесу аналізу, а робить його більш гнучким.

Розглянемо тепер довільну технічну систему, яка є частиною навколишнього світу. Останній має вплив на ТС і характеризується параметрами входу $u_1, u_2, \ldots, u_m$, які можуть бути позначені вектором входу $\mathbf{U} = \{ u_1, u_2, \ldots, u_m \}$. Якщо вхідні характеристики залежать від часу *t*, то $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$. Вхідні характеристики можуть бути детермінованими або ви-падковим Класичним і досить розповсюдженим прикладом детермінованого впливу на систему є синусоїдальні коливання виду $\mathbf{U}(t) = \{A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \ldots, A_m \sin(\omega_m t + \varphi_m)\}$, де $A_1, \ldots, A_m; \omega_1, \ldots, \omega_m;$ $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$- амплітуди, частоти і початкові фази коливань. Випадкові дії інколи є корисними, а інколи мають негативний вплив на систему. Загальним для цих дій є те, що вони випадкові (стохастичні) і їх поведінку не можна достовірно передбачити завчасно.

До цього часу ми говорили про вплив на систему із зовні, але метою будь-якої системи є створення певного технічного ефекту, що діє на зовнішній світ. Цей ефект, як і вхідні дії, можна описати набором певних функцій часу, які у векторній формі мають вигляд $\mathbf{Y}=\{y_1 y_2,\ldots,y_n\}$. Ці функції називають відгуком або виходом системи. Виходом ТС може бути струм, напруга, переміщення, прискорення і т. д.

Виходячи з розглянутих вхідних і вихідних характеристик, можна сказати, що задачею технічної системи є перетворення компонентів вектора $\mathbf{U}$, які не заважають системі, в компоненти вектора **Y**, які дають корисний ефект.

Щоб охарактеризувати задачу аналізу необхідно мати ще одне, і досить важливе поняття – це опис технічної системи, яке може бути представлене у вигляді вектор-функції часу $\mathbf{X}(t)=\{x_1(t), x_2(t),\ \ldots, x_l(t)\}$. Опис системи повинен бути настільки повним і точним, щоб задача аналізу могла бути розв'язана. В різних галузях техніки використовують різні форми опису: диференціальні рівняння руху механічної системи; операторні рівняння системи керування; алгебраїчні рівняння типу законів Ома і Кірхгофа в електротехніці; креслення з числовими даними машин і механізмів і т. д.

Тепер ми можемо описати задачу аналізу ТС в одній із самих відомих її постановок: задані вхідні дії **U**(t) на систему і її опис **X**(t), необхідно знайти відгук або виходи системи **Y**(t).

Фактично інженер або дослідник, який аналізує ТС, розв'язує, як правило, більш складну задачу. Справа в тому, що визначення відгуку **Y**(t) є часто не єдиною і, більше того, не завжди головною задачею дослідника. У зв'язку з цим виникає питання, якими параметрами і функціями характеризується ТС. Для того, щоб відповісти на це питання введемо систему понять, які пов’язані з результуючою інформацією аналізу ТС. Ця система понять включає в себе: 1) набір функцій і чисел, що описують поведінку (функціонування, динаміку) системи; 2) набір функцій і чисел, що відповідають характеристикам системи; 3) набір функцій і чисел, що описують властивості системи. При такому підході функції $y_1 y_2,\ldots,y_n$ являють собою окремі випадки функцій і чисел, що складають перший елемент тріади.

Спираючись на введені поняття, розглянемо задачу аналізу в найбільш повному вигляді: задані вхідні (корисні і зайві) дії $\mathbf{U}(t)$ на систему, а також її опис $\mathbf{X}(t)$, наприклад, у формі диференціальних рівнянь $\dot{\mathbf{X}}(t) = f\left(t, \mathbf{U}(t)\right)$; необхідно знайти набір функцій і чисел, що описують поведінку, характеристики і властивості ТС.

При традиційному ("ручному") аналізі знаходження цих функцій і чисел виконується аналітично, але це не завжди можливо. Наприклад, у випадку, коли диференціальні рівняння стану системи не вдається аналітично проінтегрувати. В цьому випадку необхідно використовувати чисельні методи інтегрування і обчислювальні засоби (ЕОМ). Крім того, в процесі аналізу технічної системи ЕОМ може виконувати допоміжні функції: будувати графіки функцій по раніше знайденому аналітичному виразу, перевіряти виконання певних нерівностей, зберігати і накопичувати різну інформацію і т. д. При машинному аналізі розрахунок чисел і функцій, що складають тріаду, повністю виконує ЕОМ. За людиною залишаються високоінтелектуальні аспекти цього процесу: вибір методу аналізу, перехід до іншого методу, прийняття рішення про зміну формулювання задачі аналізу, співставлення результатів, отриманих різними способами, співставлення результатів машинного аналізу з відомими експериментальними даними і т. д.

Процес аналізу ТС залежить від того, детерміновані чи випадкові компоненти вхідної дії. В першому випадку вхідні дії задаються звичайними функціями часу **U**(t). Це можливо зробити, як відомо, за допомогою аналітичного виразу, графіка, таблиці значень функції або алгоритму її розрахунку за допомогою ЕОМ. Якщо компонент u (t) вектор-функції **U**(t) випадковий, необхідно користуватись методами опису випадкових функцій. Це роблять, описуючи звичайним шляхом деякі спеціально введені детерміновані функції, наприклад, функції густини ймовірності або кореляційні функції.

Коли **U** залежить, крім t, ще і від просторових координат, то ми маємо справу з описм функції дії від багатьох змінних. Це ускладнює задання функції, однак принципи опису залишаються такими ж, як і для випадку з однією змінною.

6.3. Технологія аналізу технічної системи

Як буде показано пізніше, задача аналізу значно простіша задачі синтезу ТС. Пояснюється це , в основному,тим, що задача аналізу легше формалізується. Поведінку обчислювача (людини або ЕОМ) тут простіше уявити у вигляді жорсткої, завчасно заданої послідовності операцій, яка не допускає, як і самі операції, ніякої зміни. Складові операції аналізу можуть бути достатньо складними, а їх кількість значною, і повторюватись в розрахунках декілька разів. Але це не змінює суті справи, а лише показує необхідність використання ЕОМ для аналізу ТС.

Структура машинного аналізу ТС може бути в загальних рисах описана в декілька етапів наступним чином.

На першому етапі дослідник вводить в машину опис ТС. Тут важливими є два моменти. Мова, на якій зроблено опис системи, повинна бути легко доступною машині. Краще всього, коли опис системи зводиться до послідовності буквених, цифрових і деяких спеціальних символів, завчасно обумовлених. З іншого боку, мова повинна бути простою, яку в змозі освоїти дослідник або інженер, що не має спеціальної підготовки, без значних витрат часу і коштів.

Другий етап. Обчислювальна машина перетворює опис системи в форму, зручну для подальших операцій аналізу. Досить часто трапляється, що основною операцією аналізу ТС є розв'язання системи алгебраїчних рівнянь або інтегрування системи диференціальних рівнянь. Тому необхідно ввести в машину, наприклад, систему диференціальних рівнянь, що описують поведінку ТС. Коли ЕОМ розв'язує чисто математичну (або, краще сказати, сформульовану як чисто математичну) задачу, то, звичайно, так і поступають. Однак, якщо аналізується ТС і особливо якщо вона складна, то подібний підхід не досить раціональний.

Складання опису на мові алгебраїчних, диференціальних або інших рівнянь досить часто співставиме по трудомісткості з іншими операціями процесу аналізу, наприклад, з самим розв'язуванням рівнянь. Тому бажано автоматизувати процедуру складання і формування рівнянь, що описують поведінку ТС. Формування рівнянь належить до тих операцій, які допускають жорстку формалізацію. Тому машина, як правило, краще справляється з цією операцією, ніж людина.

Тут ми зустрічаємось з випадками взаємодії людини і ЕОМ. Тому корисно замітити, що в ідеалі така взаємодія повинна підпорядковуватись простому принципу: те, що піддається формалізації, – машині, що ні (інтелектуальне, інтуїтивне, пов'язане з накопиченням досвіду, адаптації, з неформальними розв'язками) – людині. На розглянутому етапі аналізу вдало використовується цей принцип.

Закінчується процес перетворення опису системи розробкою його стандартної універсальної форми. Після цього, щоб сформулювати опис, машині необхідно розрахувати певні набори чисел і функцій, якими відрізняється опис однієї конкретної системи від іншої в формі, яка прийнята за стандартну.

Розглянемо простий приклад (приклад 6.1). нехай за стандартну форму опису ТС вибрана система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1l}x_l = B_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2l}x_l = B_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ll}x_l = B_l. \end{cases} \tag{6.1}$$

Тут під $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$ розуміють вектор стану системи, а інші величини – дійсні або комплексні числа.

Більш вдалим може бути запис рівнянь (6.1) в матричній формі:

$$Ax = B. \tag{6.2}$$

В цих умовах ТС, які можна описати подібним чином, будуть розрізнятись наборами таких чисел: числом l; l^2 числами $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{21}$; l числами $B_1, \ldots, B_l$. З цих даних випливає, що перетворення опису системи в нашому прикладі повинно зводитись до наступного: дані про систему, що введені в ЕОМ, перетворюються в набори чисел, які відрізняють матриці A і B різних систем.

Третій етап. Мета аналізу полягає в розрахунку певної сукупності чисел і функцій, які описують поведінку, характеристики і властивості ТС. Ці числа і функції можуть з’явитись тільки як результат переробки машиною опису системи, який розроблено на другому етапі аналізу. Ця переробка, тобто власно розрахунки, і складають суть третього етапу аналізу.

Частіше за все на третьому етапі проводиться розв’язування тих рівнянь, які було сформульовано на другому етапі. В нашому прикладі з лінійними рівняннями третій етап являє собою розрахунок вектора **X**. Якщо опис системи було сформульовано на мові диференціальних рівнянь, то третій етап полягає і їх інтегруванні.

Таким чином, третій етап аналізу здається чисто математичним за своїм характером. Однак це не зовсім так. Будь-яку обчислювальну задачу, в даному випадку знаходження коренів системи (6.1), або інтегрування диференціальних рівнянь, можна розв’язати по-різному, вибравши для цього певний метод розв’язування. Далі, обчислювальний метод ще не визначає однозначно алгоритму розв’язування, тобто жорсткого набору дій в усіх деталях. Нехай, наприклад, певний спосіб розв’язування задачі містить деякі подібні A в формулі (6.2). Виявляється, що цю операцію можна здійснити за допомогою різних алгоритмів. Виконуючи ті операції, які вимагає третій етап аналізу, ми повинні фіксувати обчислювальний метод і алгоритм.

Щоб обчислювальний процес, який складає суть третього етапу, міг бути фактично реалізованим, необхідно вибрати обчислювальний метод, який реалізує його алгоритм і чисельні параметри алгоритму. Тут ми знову повертаємось до проблеми взаємодії людини і ЕОМ в процесі аналізу. Всі ці проблеми вибору можна розв’язати трьома способами: 1) автор програми робить вибір обчислювального методу завчасно для всіх доступних їй задач; 2) ЕОМ, аналізуючи процес розв’язування задачі і отримані результати, у відповідності із завчасно введеними в неї правилами, змінює процес розв’язування, про який йшла мова в першому пункті; 3) нові розв’язки приймаються не ЕОМ, а інженером під час обчислювального процесу в залежності від того, як розвивається цей процес.

Всі ці проблеми вибору тісно пов’язані не тільки з математичними аспектами задачі аналізу, але і з фізичними і технічними особливостями конкретної системи, яка підлягає аналізу. Наприклад, один і той же метод інтегрування диференціальних рівнянь може бути досить вдалим і зовсім неефективним в залежності від того, яка система. Врахування особливостей ТС дуже важливе при перегляді прийнятих розв’язків. Невдачу або удачу зробленого вибору кваліфікований інженер-дослідник, звичайно, може зв’язати не тільки і не стільки з формально-математичними особливостями опису системи, скільки з її фізичними і технічними властивостями і особливостями (інколи зовсім незрозумілими математику-прикладнику). Тому фізична інтерпретація тих результатів, до яких привів вибір методу, алгоритму і параметрів алгоритму, фізична та інженерна інтуїція інженера-дослідника виявляються досить важливими і визначальними при розв’язуванні задач аналізу ТС.

Однак отримати бажаний результат аналізу технічної системи можна тільки в тому випадку, коли забезпечені можливості зручного діалогу між людиною і ЕОМ. Забезпечення як програмних, так і апаратних засобів для такого діалогу є однією з основних цілей розробників програм аналізу і синтезу ТС. Саме такий діалоговий режим обчислювального процесу дозволяє інженеру-досліднику активно втручатись в розрахунки і вирішувати проблеми вибору методів і алгоритмів обчислень. Добрі програми аналізу ТС повинні забезпечити спілкування між людиною і машиною і робити його, по можливості, зручним, тобто вимагати незначної кількості вказівок з контролем помилок і невідповідностей в цих вказівках.

Четвертий етап аналізу технічної системи пов’язаний з обробкою результатів, отриманих в рамках процесу діалогу між людиною і ЕОМ: побудова графічних матеріалів за допомогою графічних пристроїв ЕОМ, вивід інформації на монітор, друкування таблиць чисел і текстових документів, передача результатів в бази даних, де накопичуються результати різних досліджень, об’єднаних спільністю типів технічних систем, задач аналізу і т. д. Одні і ті ж результати, що отримані на третьому етапі, можуть за вимогою дослідника приймати різні форми в процесі обробки. Наприклад, сукупності (масиви) чисел, що відповідають набору певних кривих, можуть бути перетворені в таблиці функцій, графіки, таблиці чисел, гістограми (оцінки густини ймовірностей випадкових величин) і т. д. В свою чергу, гістограми можуть бути надруковані і виведені на монітор у вигляді таблиць, графіків і т. д. Вказівки про характер обробки результатів вихідної інформації можуть видозмінюватись в процесі аналізу технічної системи.

Етап аналізу, пов'язаний з обробкою вихідної інформації, не можна недооцінювати, оскільки вдало знайдена форма представлення результатів дає можливість досліднику знайти нові ідеї, які дозволяють більш повно розкрити фізичні і технічні процеси в системі, знайти інші підходи до аналізу, змінити початковий опис системи і т. д.

6.4. Структура процесу аналізу технічної системи

В багатьох випадках до інформації, яка міститься в початковому описі технічної системи (ТС), додається інформація іншого роду, яку називають апріорною. Це – вся та інформація, яку інженер-дослідник повинен обробити і ввести в ЕОМ до початку обчислень, щоб зробити розв'язок задачі аналізу можливим при доступних ресурсах ЕОМ. Під ресурсами ЕОМ розуміють сукупність таких величин, як машинний час, об'єм використаної пам'яті і т. п.

Збір і обробка апріорної інформації вимагають певних витрат ресурсів – людських і машинних. Тому дослідник, організуючи і плануючи процес машинного аналізу, майже завжди розв'язує таку задачу: збір і обробка апріорної інформації або витрати ресурсів під час розрахунку на ЕОМ.

Під час аналізу виникають питання повноти і точності опису ТС. До початку аналізу не вдається знайти відповіді на поставлені питання, оскільки багато умов і параметрів, що в них входять, можна перевірити лише після завершення процесу аналізу. Такі ж питання виникають і про повноту апріорної інформації. Все це є характерним для процесу аналізу складних ТС, де неможливо завчасно передбачити, як буде проходити процес, з якими кількісними похибками він здійснюється, який характер будуть мати отримані числа і функції. Тому доцільно будувати цей процес як послідовність певних проб, даючи можливість інженеру-досліднику повертатись до вже пройдених етапів процесу, зі зміною початкової інформації, методів та алгоритмів розрахунку і т. д.

З врахуванням цих застережень процедеру аналізу ТС можна здійснювати в такій послідовності.

1. Введення початкового опису системи. Визначення функцій і чисел, які необхідно отримати після закінчення аналізу.
2. Перетворення початкового опису в форму, яка зручна для ЕОМ (формування опису).
3. Збір, обробка і введення апріоної інформації.
4. Власне аналіз (обчислення на ЕОМ, які мають на меті отримання функцій і чисел, що вказані в першому пункті).
5. Перевірка умови, яку можна сформулювати наступним чином: чи достатньо інформації, яка міститься в описі системи, і апріорної інформації? Якщо достатньо, то процедура аналізу продовжується, а якщо ні, то необхідно доповнити недостатню інформацію і повернутись до пунктів 1 або 3 цієї процедури.
6. Обчислення і виведення результатів аналізу на зовнішні носії інформації.
7. Перевірка умови: чи всі цілі аналізу досягнуті і чи потрібно доповнювати їх новими (обчислити допоміжні числа, функції, побудувати допоміжні графіки і т. д.)? Якщо доповнення не потрібні, то аналіз системи закінчується, а якщо потрібні – повертаємось на початок процедури, вказавши новий набір необхідних функцій, чисел і т. д.

Побудована таким чином процедура аналізу ТС являє собою циклічну структуру, в якій певні операції можуть виконуватись декілька разів. Тут необхідно відзначити, що будь-які розв’язки, які можуть бути прийняті інженером-дослідником в процесі аналізу, носять неформальний характер, тому роль останнього в цьому процесі є визначальною.

6.5. Формування опису технічної системи

Вимоги до форми опису ТС зі сторони інженера-дослідника і ЕОМ, які диктуються найкращою організацією обчислювального процесу, суттєво різні. Інженеру-досліднику важлива перш за все простота опису, тобто форма опису повинна бути такою, щоб його могла скласти малокваліфікована людина. В той же час обчислювальний процес може бути здійснений лише тоді, коли початковий опис буде перетворений в форму, яка є зручною для ЕОМ.

Покажемо це на прикладі (приклад 6.2). Розглянемо механічну систему – колону кусочно-постійного перерізу (рис. 6.1).

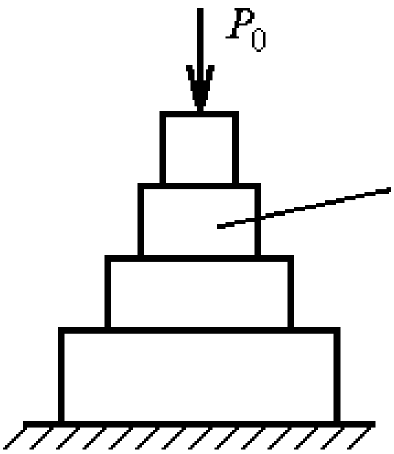


Рис. 6.1. Схема колони кусочно-постійного перерізу (s_i - площа поперечного перерізу i-го елементу колони, P_0 - навантаження)

Вхідною дією системи $u(t)$ є прикладена зовнішня сила P_0. Геометрія поперечного перерізу кожного i-го елементу фіксована. Тому площа поперечного перерізу s_i повністю характеризує цей елемент.

Що можна розглядати тут як опис системи? Очевидно, він буде складатись з числа елементів, які утворюють колону, довжин цих елементів, наборів констант, які характеризують матеріали елементів, набору чисел s_i.

Легко бачити, що формування і введення в ЕОМ цієї інформації не вимагає високої кваліфікації.

Однак для розв'язування задач аналізу і синтезу колони необхідно сформувати інший її опис – "машинний". Такий опис включає в себе дві матриці – жорсткості K (s) і маси M (s). Знання цих матриць дозволяє в окремому випадку знайти власні частоти коливань споруди з рівняння

$$K(s)y = \lambda M(s)y. \tag{6.3}$$

Як доцільно організувати алгоритм розрахунку матриць K (s) і M (s)? Очевидно , початковими даними повинні бути характеристики, введені інженером-дослідником (користувачем). На їх основі ЕОМ спочатку обчислює матриці K_i та M_i, які характеризують i-тий елемент колони. Потім, враховуючи відомості про порядок розміщення елементів в колоні, за допомогою деякого алгоритму обчислюються результуючі матриці K (s) і M (s).

Таким чином, опис, який необхідний для розв'язування задачі аналізу колони постійно-поперечного перерізу, отримано. Аналогічно можуть бути отримані описи для інших технічних систем.

6.6. Апріорна інформація

Апріорною інформацією називають інформацію, яку необхідно зібрати, опрацювати, і ввести в ЕОМ, щоб можна було розв'язати задачу аналізу ТС при допустимих машинних ресурсах або зменшити вимоги до них. Розглянемо визначеня апріорної інформації на конкретних прикладах.

Приклад 6.3. Розв'язування системи кінцевих рівнянь. В багатьох випадках обчислення, які пов'язані з аналізом ТС на ЕОМ, вимагають розв'язування системи кінцевих (алгебраїчних або трансцендентних) рівнянь

$$
\begin{cases}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_l) = 0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_l(x_1, x_2, \ldots, x_l) = 0,
\end{cases}
\tag{6.4}
$$

або в векторній формі

$$
f(\mathbf{X}) = 0. \tag{6.5}
$$

Деякі обчислювальні алгоритми дозволяють розрахувати корінь

$$
\mathbf{X}_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots\ldots, x_{l0})
$$

лише тоді, коли в машину введено певне достатньо близьке до $\mathbf{X}_0$ значення вектора $\hat{\mathbf{X}}_\mathbf{0}$.

Інші алгоритми приводять до розв'язку системи (6.4) або (6.5) і тоді, коли про $\hat{\mathbf{X}}_\mathbf{0}$ нічого не відомо, однак значення $\hat{\mathbf{X}}_\mathbf{0}$ дозволяє суттєво прискорити розрахунок кореня. Зрозуміло, що визначення $\hat{\mathbf{X}}_\mathbf{0}$ природньо інтерпретувати як знаходження апріорної інформації.

Інколи передбачувані значення $\hat{\mathbf{X}}_\mathbf{0}$ практично невідомі, тоді необхідно говорити про цілу, достатньо протяжну область G_x в просторі координат $x_{10}, x_{20}, \ldots\ldots, x_{l0}$, в якій повинна знаходитись необхідна для розв'язку системи (4.4) точка. В такій ситуації апріорною інформацією є, очевидно, опис області G_x.

<u>Приклад 6.4</u>. Розрахунок періодичних режимів руху ТС. Аналіз ряду ТС пов'язаний з властивістю періодичності їх руху. Ця властивість інколи визначає робочий режим функціонування системи (періодичні коливання

механічних систем і машин), а інколи пов'язана з порушенням робочого режиму. Дослідження властивості періодичності зводиться до знаходження умов, при яких існують або завідомо відсутні періодичні розв'язки деяких рівнянь, що входять в опис системи. Частіше за все необхідно знайти і самі розв'язки, хоча б наближено.

Нехай опис системи зведено до системи звичайних диференціальних рівнянь в так званій нормальній формі Коші:

$$\begin{cases} dx_1/dt = \varphi_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_l, u_1, u_2, \ldots, u_m); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_l/dt = \varphi_l(t, x_1, x_2, \ldots, x_l, u_1, u_2, \ldots, u_m) \end{cases}, \tag{6.6}$$

або в векторній формі

$$d\mathbf{X}/dt = \varphi(t, \mathbf{X}, \mathbf{U}), \tag{6.7}$$

де t - час; $\mathbf{U}(t) = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ - вектор вхідних дій; $\mathbf{X}(t) = =\{x_1, x_2,$ $\ldots, x_l\}$ - вектор стану системи, який необхідно знайти в результаті роз-в'язування системи (6.6) або (6.7).

Для багатьох технічних систем з періодичності функцій $x_1(t),$ $\ldots, x_l(t)$ випливає періодичність відгуків системи $y_1(t), \ldots, y_n(t)$. В таких випадках задача зводиться, по суті, до знаходження періодичних розв'яків для $\mathbf{X}(t)$. Тепер вияснимо, яку роль тут відіграє апріорна інформація.

Добре відомо, що розв'язок $\mathbf{X}(t)$ для системи (6.6) визначається початковими умовами $\mathbf{X}(0)$, тобто сукупністю $\{x_1(0), \ldots, x_l(0)\}$. Може статись так, що в просторі координат $x_1(0), \ldots, x_l(0)$ існує область G_x, яка відрізняється такою властивістю: якщо $\mathbf{X}(0)$ належить G_x, то розв'язок виявляється періодичним, в протилежному випадку розв'язок $\mathbf{X}(t)$ завжди неперіодичний. В більшості технічних систем область G_x не співпадає з усім простором, а обмежена. Більше того, область G_x може бути досить складною і заплутаною. Якщо розраховувати періодичні розв'язки і, як наслідок цього, періодичні режими руху технічної системи для певних початкових умов, то знання області G_x цілком необхідне. В іншому випадку область G_x довелось би шукати в рамках деякої процедури, що, звичайно, вимагало б допоміжних машинних ресурсів. Таким чином, розрахунок області G_x являє собою знаходження необхідної апріорної інформації.

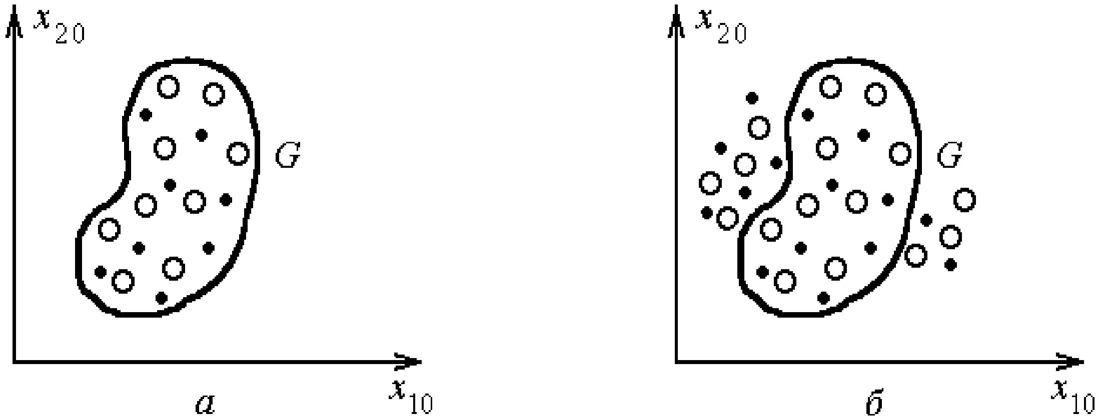
В обох розглянутих нами прикладах метою збору і обробки апріорної інформації є визначення області G_x в якомусь просторі. Відносно області G нас можуть цікавити два питання: 1) чи дійсно всі точки цієї області мають необхідні нам властивості (наприклад, чи з усіх її точок починаються траєкторії, що призводять до періодичних рухів); 2) наскільки тісно область G облягає ту область, яка тільки і має розглянуту властивість.

Розглянемо три випадки, які показано на рис 6.2. Для простоти ми обмежимось областями на площині, тобто вважаємо, що вектори $\mathbf{X}$ двомірні.

На рис. 6.2 кружочками відмічено ті точки області G, які дають періодичні режими руху технічній системі.

Ситуація, що показана на рис. 6.2, *а* відповідає ідеальному випадку: область G складається тільки з точок, які з максимальною точністю і повнотою описують апріорну інформацію. На рис. 6.2, *б* область G складається з точок, які не повністю описують апріорну інформацію, бо за межами області G є точки, які задовольняють початковим умовам для циклічних режимів руху технічної системи.

Область G повинна була б бути більш повною, ніж на рис. 6.2, *б*. Однак нам це невідомо і, можливо, повна межа області визначиться лише після розрахунків на ЕОМ. Третій можливий випадок показано на рис 6.2, *в*. Тут область *G* охоплює не тільки бажані точки (вони утворюють область G^{+}), але і зайві (область G^{-}). Очевидно , почавши розрахунки з точок, що належать області G^{-}, ми не отримаємо бажаного результату. В цьому випадку наша апріорна інформація неточна.



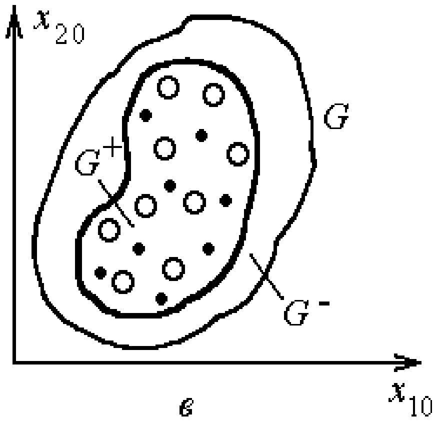


Рис. 6.2. Область G початкових умов, що забезпечують існування заданих властивостей (періодичних режимів руху) технічної системи

З розглянутого прикладу можна зробити висновок, що існують два небажаних випадки опису апріорної інформації на стадії попереднього дослідження системи: неповнота (рис. 6.2, *б*) і неточність (рис. 6.2, *в*). Кількісна оцінка цих факторів можлива лише ймовірнісними методами. Наприклад, можна оцінити ймовірність ситуації, яка подібна тій, що показана на рис. 6.2, *б*, або оцінити статистичні характеристики випадкових величин, що характеризують область G^{-}.

Жорсткі рекомендаціії по вибору апріорної інформації в тому чи іншому вигляді (рис. 6.2) дати практично неможливо. Для випадку, показаному на рис. 6.2, *а*, необхідні значні витрати ресурсів на підготовку апріорної інформації, але при цьому значно зменшуються витрати на обчислювальні операції. У випадках (рис. 6.2, *б, в*), навпаки, зменшуються витрати на підготовку апріорної інформації, зате збільшуються витрати на обчислювальні операції. При цьому співвідношення між одними і другими витратами в значній мірі залежать від точності визначення області *G*, яка може бути звуженою або розширеною.

6.7. Приклад машинного аналізу технічної системи

Розглянемо структуру процесу машинного аналізу на прикладі розрахунку періодичних коливань технічної системи. Припустимо, що розв'язок системи (6.7) при вибраних нами початкових умовах належить області G_x і є неперіодичним. В процесі діалогу з ЕОМ дослідник в завчасно визначених ним точках осі t буде отримувати інформацію про розв'язок $\mathbf{X}(t)$ і його періодичність. При наявності цієї інформації неперіодичність процесу руху механічної системи можлива в двох випадках: 1) розв'язок в дійсності неперіодичний; 2) розв'язок періодичний, але розрахунок перехідного процесу ще не закінчено. Вияснити причину неперіодичності процесу дослідник може декількома шляхами.

1. Зупинити процес обчислень через деякий час і тим самим внести певний вклад в задачу аналізу – визначити властивості системи. Прийняттю такого рішення може сприяти апріорна інформація іншого характеру, ніж та, яку пов'язували з областю G_x. Такою інформацією може бути час встановлення періодичного режиму руху механічної системи t_B. Якщо за апріорними даними час встановлення періодичності руху повинен бути певної величини, а розрахунковий відрізок процесу складає до моменту прийняття рішення значно більшу величину часу, то рішення про зупинку обчислювального процесу є

виправданим. Однак при цьому задача аналізу по розрахунку періодичності руху механічної системи залишається невиконаною.

2. Продовжувати процес обчислень, щоб вияснити, чи встановиться в подальшому періодичний режим руху. При цьому також можна використати допоміжну апріорну інформацію.

3. Частково зупинити процес обчислень і перевірити достатність описової і апріорної інформації. Може бути, що апріорної інформації достатньо, а описової – недостатньо, або навпаки. Може статись так, що необхідно уточнити апріорну інформацію, наприклад, величину t_B. Ця величина може виявитись випадковою. Ми вважаємо, що технічна система і зовнішні дії на неї детерміновані, тому і t_B повинно бути детермінованим числом. Однак, якщо система складна і інформація про t_B апріорна, то визначити величину t_B з достатньою точністю неможливо. Використовуючи будь-який метод оцінки, вдається визначити лише діапазон, в якому з певною ймовірністю повинна знаходитись величина t_B.

7. СИНТЕЗ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

7.1. Суть задачі синтезу технічної системи

Постановка задачі синтезу в певній мірі зворотня постановці задачі аналізу. В процесі синтезу задаються описи вхідних дій і описи поведінки, характеристики і властивості майбутньої системи. Досить часто в описи поведінки системи входять описи виходів. Ці описи або їх частина в аналізі не задавались, а шукались. В задачі синтезу необхідно знайти опис самої системи та її стани, в той час як в задачі аналізу опис системи заданий. Таким чином, розв’язування задачі синтезу являє собою процес перетворення одних описів в інші. Ця задача аналогічна задачі аналізу, тільки вхідні і вихідні описи тут інші і сам процес перетворень описів також інший. Саме ці принципові різниці роблять процес синтезу більш творчим, де головну роль відіграє кваліфікований спеціаліст, якого не може замінити ніяка сукупність обчислювальних засобів. Однак нерозумно завантажувати спеціаліста громіздкою одноманітною інформацією, яка не вимагає творчих здібностей та інтуїції. Тому в процесі синтезу технічних систем бажано організувати взаємодію людини і ЕОМ.

В процесі синтезу технічних систем центральне місце займають проблеми вибору структури системи і базисних елементів. Ці проблеми в багатьох задачах дуже погано формалізуються і алгоритмізуються. Саме тут повинна проявлятись творча сила людського інтелекту, його вміння користуватись інтуїцією, досвідом розв’язування подібних або суттєво інших задач і т. д.

Одним із шляхів синтезу технічних систем є вибір певної структури і базисних елементів і на основі розв’язування задачі аналізу здійснення зондування параметрів системи і вибір таких з них, які задовольняють бажаним властивостям системи. Якщо аналіз направлений, то його можна будувати таким чином, щоб наблизитись до бажаних властивостей системи.

Так або інакше нам вдається встановити залежність між характеристиками властивостей системи і параметрами її базисних елементів.

На перший погляд здається, що такий підхід досить простий. Однак в дійсності нам не зовсім ясно, яку саме систему необхідно аналізувати. Система тільки створюється і її опис нам необхідно знайти, тоді як для задачі аналізу він повинен бути відомим. Так ми стикаємось з основним протиріччям задачі синтезу, яке принципово усунути неможливо. Створення системи вимагає інформації про її поведінку, характеристики і властивості, а саму систему ще треба відшукати. Раніше, ніж опис системи буде знайдено, цю інформацію неможливо отримати, а не знаючи її, неможливо створити систему.

Основне протиріччя процесу синтезу пов'язане і з іншими, також достатньо суттєвими причинами. Їх можна охарактеризувати таким чином: створити систему вдається лише тоді, коли ми знаємо, яку систему ми хочемо створити. Однак це знання приходить лише в процесі знаходження необхідної нам системи і, по суті, багато питань залишаються неясними і після того, як опис системи знайдено, а сама вона реалізована. Бувають випадки, коли постановка задачі синтезу проявляється лише після досить довгої екплуатації системи, тобто коли сама проблема синтезу, можливо, вже не викликає інтересу. Для підтвердження цієї думки розглянемо приклад.

Приклад 7.1. Нехай створюється деяка механічна система, для якої основним робочим режимом є коливальний процес. Діапазон частот цього процесу відомий ще до початку проектування, інші початкові дані також не викликають сумніву. Після того, як задача синтезу була розв'язана і було знайдено опис механічної системи, здійснили її дослідження. В результаті було встановлено, що поряд з коливаннями в заданому частотному діапазоні система здійснює "паразитні" коливання, спектр яких знаходиться поза цим діапазоном, і які недопустимі з точки зору нормальної експлуатації системи (можуть зруйнувати систему, впливають на її взаємодію з іншими системами і т. д.).

В результаті розгляду цього прикладу виникає питання, розв’язали ми задачу синтезу чи не розв’язали. Якщо під розв’язком проблеми синтезу розуміти знаходження будь-якої системи, що задовольняє початковим вимогам, то ми, звичайно, розв’язали задачу. Але якщо мета проектування являє собою знаходження опису механічної системи, що задовольняє її ефективному функціонуванню, то проблема залишилась невирішеною. Протиріччя полягає в тому, що виконати формально описані умови ще не означає задовольнити "істинні" умови синтезу.

З розглянутого прикладу видно, що вимогу відсутності паразитних коливань необхідно було включити в постановку задачі синтезу. Однак важливість цієї умови стала очевидною лише після проведення аналізу створеної механічної системи. До цього інженер, який формулював задачу, не підозрював про можливість виникнення небажаних процесів. Необхідно зауважити, що при невдалому проведенні аналізу він міг не зафіксувати небажані ефекти і на наступній стадії розробки системи.

Досвід створення складних технічних систем показує, що на початку процесу синтезу неможливо формалізувати всі умови, щоб вважати систему задовільною або, тим більше, найкращою з можливих. Визначеність в заданні вимог приходить лише з розумінням поведінки, характеристик і властивостей системи – тієї самої системи, опис якої невідомий і який необхідно знайти. Звичайно, ці протиріччя майже не проявляються у випадку нескладних систем, поведінка, характеристики і властивості яких по суті легко передбачувані, хоча б якісно.

Зрозуміло, якщо процес синтезу завершено, то описане вище протиріччя повинно бути рано чи пізно усунутим. Знімається воно одноразовим або багаторазовим звертанням до процесу аналізу і оцінкою його результатів. Таким чином, аналіз виступає основним засобом для зняття протиріччя, що виникає в процесі синтезу технічних систем.

Принципові труднощі процесу синтезу – незнання того, що можливо і що неможливо в створюваній системі, і невміння формалізувати побажання проектувальника – можуть бути зняті, якщо проаналізувати деякий варіант системи. Виходячи з цього, можна запропонувати таку структуру процесу:

1. Запропонувати варіант опису технічної системи, який задовольняє початковим вимогам синтезу.
2. Провести грунтовний аналіз запропонованої системи. На цьому етапі запропонувати варіант опису технічної системи, який задовольняє початковим вимогам синтезу.
3. Провести грунтовний аналіз запропонованої системи. На цьому етапі бажано використати ЕОМ.
4. Оцінити переваги запропонованої системи на основі отриманої інформації про її поведінку, характеристики і властивості.

Якщо система задовольняє необхідним вимогам або, тим більше, є найкращою із всіх можливих, то процес синтезу необхідно закінчити, а якщо – ні, то повернутись до першого пункту. Така структура синтезу дозволяє людині і ЕОМ робити те, що у кожного з них виходить краще за все. Пропонування ідей, формування гіпотез, оцінка – все, що вимагає неформального, творчого підходу, залишається за людиною. Все, що краще алгоритмізується, в основному, виконується ЕОМ. Але справа не тільки в цьому. Кожний вдалий крок в описаній вище ітеративній, циклічній процедурі дозволяє що-небудь нове зрозуміти в системі, що створюється: поступово визначаються межі можливого і неможливого, виявляються недооцінені або непомічені небезпечності, формалізуються цілі синтезу і т. д. Таким чином, крок за кроком усуваються перешкоди, знімаються протиріччя.

Описана структура процесу синтезу є лише основою складного, розгалуженого процесу. Наприклад, задання опису системи вмагає задання структури, базису елементів і параметрів. Чи дає виявлення всіх цих компонентів можливість запропонувати варіант опису системи ? Здебільшого – ні. У вскому разі, визначення параметрів системи людина виконує гірше, ніж на ЕОМ. Розрахунок параметрів часто вдається представити у вигляді стрункого алгоритму, який допускає ефективне використання ЕОМ. Тоді за людиною залишається творча робота, а отримані під час цієї роботи результати опису системи доповнюються чисельною інформацією від ЕОМ.

Звернемось до прикладу 6.2, який описано у розділі 6. Задання опису колони доцільно звести до вибору самої структури (рис. 6.1) і визначення базиса елементів, тобто набору форм поперечних перерізів кожного з елементів. Що стосується визначення чисел s_i, то цей розрахунок швидше і точніше виконає ЕОМ. До того ж, подібні розрахунки можна підпорядкувати різним вимогам, наприклад постаратись підібрати s_i таким чином, щоб колона мала (при заданих структурі і базисі) мінімальну вагу. Іншим важливим моментом в розглянутій процедурі синтезу є оцінка доцільності знайденого технічного рішення на третьому етапі. Якщо задача синтезу колони поставлена таким чином, щоб її вага не була більшою за певну величину, то в результаті оцінки ваги отриманої конструкції приймається певне рішення. Якщо поставлена умова виконується, то процес синтезу закінчується, а якщо ні, то продовжується до отримання бажаного результату. У випадку, коли дані, отримані на другому етапі, не можна покращити, то необхідно поступитись деяким старим побажанням, наприклад, погодитись на збільшення ваги колони. Так або інакше, оцінку придатності знайденого варіанту системи необхідно зробити гнучкою, щоб вона добре адаптувалась до отриманих в процесі синтезу нових даних.

Розглянемо варіант, коли необхідно повертатись до першого етапу з заміною нового варіанту структури системи ті її базису. Тут необхідно враховувати, що всі накопичені в процесі синтезу знання – виконання процедури аналізу (етап 2), оцінка отриманого рішення (етап 3), – все це впливає на формування ідеї про нову структуру або про новий базис елементів. Продивившись декілька варіантів, наприклад, поперечних перерізів елементів колони (рис. 4.1), виявивши, які з поставлених умов були виконані, а які ні, зрозумівши, якою він хоче бачити систему, конструктор пропонує такі нові описи системи, що після розрахунку їх параметрів можна прийти до висновку або її прийнятності (кращого варіанту йому не знайти), або неможливості розв'язати задачу синтезу системи.

7.2. Про зміну постановки задачі синтезу

Як було показано раніше, синтез нерозривно пов'язаний із розумінням того, як веде або повинна вести себе система, які її властивості, характеристики, параметри і т. д. Приріст відповідної інформації не може не змінити постановки задачі синтезу. Якщо розглянути приклад 7.1 з паразитними коливаннями механічної системи, то можна говорити про дефект початкової постановки: вона не врахувала важливої вимоги, яка б забороняла системі проявляти коливальні властивості поза робочим діапазоном часот. Після того, як цей недолік системи був проаналізований конструктором, він, природньо, ввів таку заборону, і постановка задачі змінилась.

Однак постановка задачі може змінюватись більш суттєво.

Покажемо це на прикладі (приклад 7.2) циклічної зміни будь-якої характеристикрактеристики технічної системи, яка являє собою функцію $v(t)$ єдиного аргументу t (рис. 7.1).

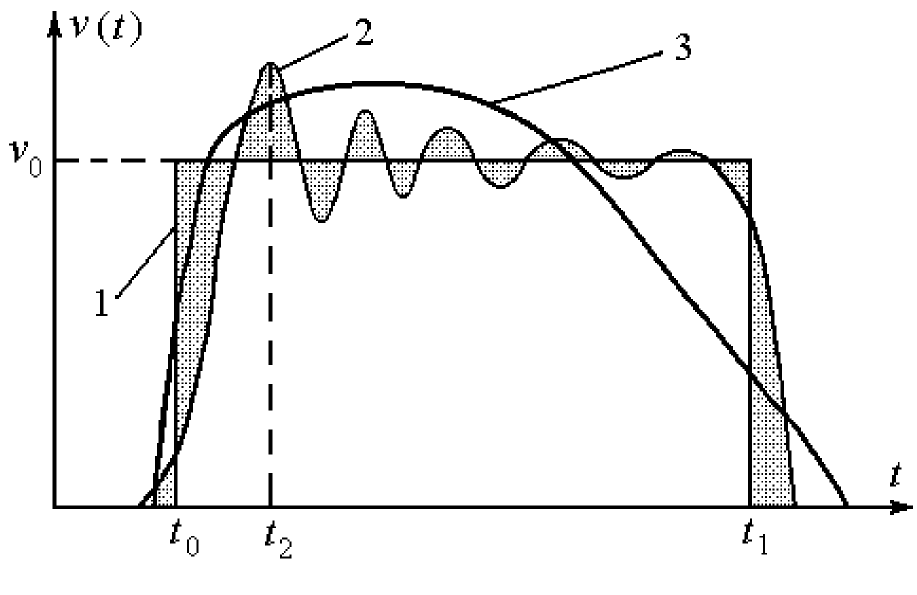


Рис. 7.1. Можливі варіанти характеристики системи, що синтезується: 1 - ідеальна; 2 - з піковим виступом; 3 - з плавною зміною параметра v

В ідеалі характеристика $v(t)$ повинна являти собою прямокутник з висотою v_0, побудований на основі t_0, t_1 (функція 1). Можливо така характеристика взагалі не може бути реалізована, або вона фізично допустима, але її реалізація вимагає значних витрат коштів. Тому на початку синтезу конструктор системи вказує, що він згоден на відхилення від функції 1, але вимагає, щоб це відхилення – певним чином виміряне – не перевищувало вказаного ним граничного значення. Виберемо за міру відхилення кривої 2 від функції, зображеної прямокутником 1, заштриховану площу і позначимо її δ_{21}. Тепер можна сформулювати вимоги до системи, яку треба синтезувати. Варіант системи задовольняє встановленим вимогам тоді і тільки тоді, коли

$$\delta_{21} \le \delta_0, \tag{7.1}$$

де δ_0 - граничне значення відхилення.

Необхідно побудувати алгоритм синтезу таким чином, щоб він досягав зменшення заштрихованої площі до тих пір, поки нерівність (7.1) не стане виконаною. Як тільки це станеться і інші вимоги до системи також будуть виконані, процедуру синтезу можна вважати завершеною. Тоді будь-яка система, що задовольняє вказаним вимогам, у відповідності з початковою постановкою задачі вважається задовільною. В багатьох випадках знання величини δ_{21} і виконання умови (7.1) для конструктора, який приймає рішення про закінчення процесу синтезу, є недостатнім. Він бажає ще побачити характеристику $v(t)$ у вигляді графіка 2 на рис. 7.1. Розглядаючи криву 2, розробник системи може, наприклад прийти до висновку про недопустимість інтенсивності появи виступу, який має місце при $t = t_2$. В цьому випадку він може відхилити отриманий опис системи, хоча б нерівність (7.1) і була при цьому виконана.

Для отримання кращого рішення системи розробник починає процедуру синтезу спочатку, але при цьому вводить допоміжну інформацію в початкову постановку задачі. Нехай при новому процесі синтезу отримано характеристику 3 (рис. 7.1), а величина δ_{31} перевищила раніше назначену межу δ_0, тобто нерівність (7.1) не виконується.

Проаналізувавши ситуацію, розробник системи може прийти до висновку, що отримане рішення системи є прийнятним. Відсутність небезпечних виступів може виявитись настільки важливою перевагою нової характеристики, що розробник згоден і на порушення висунутої спочатку умови (7.1), і на сильне відхилення кривої 3 від прямокутника при $t = t_1$. Однак можлива і така стратегія пошуку, при якій розробник системи намагається зменшити δ_{21} і разом з ним ліквідує небезпечні виступи характеристики 2.

На основі розглянутого прикладу 6.6 приходимо до таких важливих висновків: 1) початково сформульована (до розв'язування задачі) постановка проблеми синтезу може не включати важливих вимог, які стають пізніше досить очевидними; 2) зміни постановки задачі майже неминучі в ході синтезу складних технічних систем; 3) в багатьох випадках оцінку переваг системи, знайденого проектного рішення неможливо або недоцільно формалізувати, тобто зводити до перевірки чисто кількісних вимог.

Найбільш показовим моментом виявляється тут невідтворюваність оцінки результатів. Інший розробник системи при подібному підході може віддати перевагу іншій характеристиці $v(t)$.

Більше того, той же розробник, який відхилив криву 2 (рис. 7.1) в іншій ситуації (володіючи іншою інформацією, перебуваючи в іншому оточенні або в іншому емоційному стані) міг оцінити характеристику 2 як задовільну.

7.3. Способи оцінки технічних систем

Розглянемо два основних способи оцінки технічних систем, які визначають і постановку задачі, і в значній мірі структуру алгоритму синтезу.

Перший спосіб пов'язаний з розрахунком певного набору чисел і функцій. При цьому кожній з систем відповідає одна і та ж множина чисел і функцій, хто б і коли їх не розраховував і незалежно від умов розрахунків.

В останньому прикладі набір чисел і функцій складався з одного елемент δ. Після того, як числа і функції визначені, перевіряється виконання системи нерівностей або інших подібних співвідношень. Така перевірка завжди і однозначно приводить або до придатності системи, або до її непридатності. В розглянутому прикладі 7.1 достатньо було вияснити справедливість однієї нерівності (7.1). В більш складних випадках може виявитись необхідність перевірки, чи належить якась х арактеристика створюваної системи завчасно вказаній області. Наприклад, розробник може вимагати, щоб характеристика $\nu(t)$ всіх придатних варіантів системи містилась у завчасно вказаній області (рис. 6.4). Тоді оцінка придатності системи зводиться до поточковоі (для кожної абсциси t, розміщеної між t_0 і t_1) перевірки приналежності числа $\nu(t)$ відповідному відрізку, який обмежений ламаними 1 і 2 (рис. 7.2).

Виходячи з такого способу оцінки технічних систем, характеристика 3 задовольняє вказаним вимогам, а характеристика 4 – ні.

Такий жорстко формалізований, однозаний, що не допускає ніяких неформальних моментів, підхід називають *кардиналістським* підходом до синтезу технічних систем [26].

Другий спосіб . Альтернативним до розглянутого способу оцінки технічних систем є *ординалістська* трактовка синтезу [26]. Тут передбачається, що неможливо (недоцільно) використовувати для оцінки технічнхнічних систем тільки набір чисел і функцій, або на основі цього набору неможливо (недоцільно) завжди і однозначно давати висновок про придатність системи.

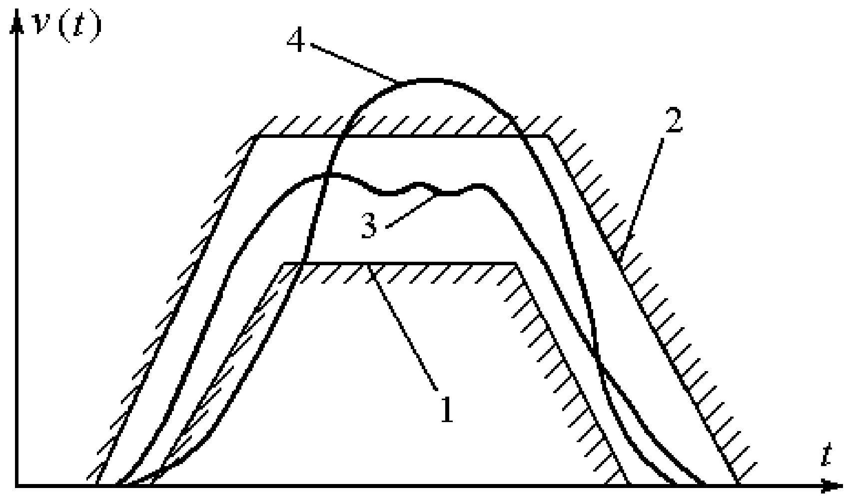


Рис. 7.2. Задання області, до якої повинні належати характеристики всіх систем, що синтезуються

До цих пір ми вважали, що мета синтезу полягає в знаходженні опису придатної (задовільної) системи. Такий підхід відповідає неоптимальному синтезу технічних систем.

Однак в багатьох випадках розробник хоче досягти максимальної мети – йому потрібна не задовільна, а найкраща із всіх можливих систем. Така стратегія проектування приводить до оптимального синтезу.

Неважко здогадатись, що оптимальний синтез неможливо виконати, якщо ми обмежимось винесенням рішення про задовільність, але не зуміємо зрівняти хоча б дві технічні системи, щоб вибрати з них кращу. Нехай запропоновано для порівняння дві технічні системи з певного набору і ми можемо зробити один з трьох висновків: перша система краща, ніж друга; друга система краща першої; з точки зору їх використання системи однакові (еквівалентні).

При кардиналістському порівнянні цих систем, оперуючи певним набором чисел і функцій, а також алгоритмом їх обробки, завжди і однозначно можна прийняти одне і тільки одне із трьох рішень. В ординалістському варіанті використання набору чисел і функцій, як і алгоритмів їх обробки, не забороняється. Однак тут не вказується ніякого формального правила, за допомогою якого можна зробити однозначний висновок про перевагу тієї чи іншої системи і який не залежав би від неформальних обставин, кваліфікації, досвіду і смаків експерта і т. д.

Типовим прикладом кардиналістської оцінки може бути рішення віддати перевагу системі (приклад 7.1) з меншим δ (рис. 7.1). Ординалістський шлях порівняння систем здійснюється експертом на основі вивчення графіків типу тих, які показано на рис. 7.1. Наприклад, експерт може віддати перевагу системі з характеристиками $\nu(t)$, які не мають значних виступів, хоча їх відхилення від ідеальної характеристики були б значними.

7.4. Неоптимальний і оптимальний синтез технічних систем

Розглянемо суть неоптимального і оптимального автоматизованого синтезу технічних систем з використанням ЕОМ. Нехай опис поведінки, характеристик і властивостей системи зводиться до задання *n* дійсних чисел $K_1, K_2, \ldots, K_n$ – показників якості (функціонування) технічної системи. Кардиналістські рішення про задовільність і перевагу тих чи інших систем повністю можуть бути зведені до обробки цих *n* чисел, які утворюють деякий вектор $\overline{\mathbf{K}}$. В ординалістській трактовіці цей вектор також може виявитись корисним, хоча не повинен алгоритмічно приводити до однозначних рішень.

Неоптимальний кардиналістський синтез. Він полягає в перетворенні описів впливів, необхідної поведінки, характеристик і властивостей системи в такий опис бажаної системи, для якої одночасно виконується *n* нерівностей:

$$K_{11} \le K_1 \le K_1^1;$$
$$K_{21} \le K_2 \le K_2^1; \qquad (7.2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$K_{n1} \le K_n \le K_n^1.$$

Дійсні числа K_{i1} та K_i^1 (i = 1, 2, ... , n) задаються разом зі складом вектора $\overline{\mathbf{K}}$. Деякі з чисел K_{i1} або всі вони можуть бути і нулями. Наприклад, для механічної системи (приклад 7.3) нерівності (7.2) можуть прийняти такий вигляд:

$$|\sigma_i| \le \sigma_i^1 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_\sigma);$$
$$|z_j| \le z_j^1 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_z);$$
$$|\nu_j| \le \nu_j^1 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_\nu); \qquad (7.3)$$
$$|w_j| \le w_j^1 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_w);$$
$$|F_k| \le F_k^1 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_F),$$
$$\omega_1 \le \omega \text{ (нерівність з номером } n-1),$$
$$M \le M^1 \text{ (нерівність з номером } n).$$

Тут σ_i - напруження для i-го елементу конструкції. Абсолютна величина напруження не повинна перевищувати σ_i^1 (всього таких умов n_σ); z_j, ν_j, w_j - переміщення, швидкість і прискорення в деякій j-й точці, абсолютні величини яких не повинні перевищувати граничних значень z_j^1, ν_j^1, w_j^1 (таких умов n_z); F_k - зусилля в k-му елементі конструкції, яке обмежується величинами F_k^1 (число цих нерівностей n_F може дорівнювати n_σ). Передостання з нерівностей (7.3) вимагає, щоб основна частота ω не була меншою деякого граничного значення ω_1, а остання нерівність обмежує масу M конструкції.

Необхідно відзначити, що в нерівностях типу (7.2) часто присутні вимоги до надійності (наприклад, до напрацювання на відмову) і техніко-економічні (наприклад, обмеження зверху на вартість системи).

Частіше всього машинний синтез використовується після того, як знайдена структура системи і вибрано базис її елементів. Тоді задовольнити нерівності (7.2) - (7.3) можна, лише змінюючи вектор $\bar{a}$, від якого залежать всі $K_1, K_2, \ldots, K_n$.

Кардиналістський підхід до синтезу полягає в тому, що кожна система однозначно характеризується набором чисел з вектору $\overline{\mathbf{K}}$. Рішення про задовільність системи вимагає перевірки, чи задовольняє кожний з компонентів цього вектора відповідну нерівність (7.2). Такий алгоритм синтезу не допускає ніяких неоднозначностей. Він допускає лише неоднозначність результату – може статись так, що задовільними є декілька систем. Розглянутий підхід синтезу не вказує алгоритму, за яким необхідно вибрати той чи інший варіант системи з отриманих задовільних варіантів.

Неоптимальний ординалістський синтез. Тут відсутній формальний алгоритм прийняття рішення про задовільність варіанта технічної системи. Можливий синтез системи, коли для її оцінки відсутній набір функцій і чисел. Однак такий підхід недоцільний і не використовується в практиці створення технічних систем. Більш доцільним є спосіб, коли для оцінки систем зберігається набір чисел і функцій, але процес вибору складу вектора $\overline{\mathbf{K}}$ і крайніх меж K_{i1} та K_i^1 в нерівностях (7.2) здійснюється конструктором неформально. Розглянемо це на прикладі.

Приклад 7.4. При оцінці механічної системи, критерії задовільності якої виписані у вигляді (7.3), можуть в деяких випадках виключати окремі нерівності або доповнювати систему новими нерівностями. Величини σ_i^1, z_j^1, v_j^1, w_j^1, F_k^1, ω_1, M^1 конструктор може змінювати, виходячи з нової інформації, яку він отримав до певної стадії синтезу.

Вектор параметрів $\bar{a}$, від якого залежать компоненти вектора $\overline{\mathbf{K}}$, повинен задовольняти певним обмеженням. Неприклад, маси тіл та їх розміри повинні виражатись додатніми числами і не бути більшими за граничні значення. Цю умову можна сформулювати так: вектор $\bar{a}$ повинен належати деякій області в просторі параметрів G_a.

Оптимальний кардиналістський синтез. Вважаємо, що характеристики і властивості системи достатньо повно відображаються вектором $\overline{\mathbf{K}}$.

При оптимальному підході до синтезу системи частина компонентів, як і при неоптимальному синтезі, повинна задовольняти систему нерівностей (7.2). Інша частина складових повинна приймати мінімальні або максимальні значення, тобто

$$\begin{aligned} &K_{n+1} = \min, \\ &K_{n+2} = \max, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &K_s = \min. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Розглядаючи замість складових $\overline{\mathbf{K}}$, які повинні приймати максимальні значення, ті ж складові зі знаком мінус, або зворотні величини, легко виключити із системи (7.4) умови максимуму. Наприклад, замінивши K_{n+2} на $-K_{n+2}$, отримаємо

$$
\begin{aligned}
K_{n+1} &= \min,\\
-K_{n+2} &= \min,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
K_s &= \min.
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

Умови (5.5) називаються екстремальними, а нерівності (7.2) – обмеженнями в задачі оптимального синтезу технічної системи. При цьому вектор параметрів $\bar{a}$ повинен належати множині значень $\overline{\mathbf{G}}_a$.

Оскільки компоненти вектора $\overline{\mathbf{K}}$ є функціями від $\bar{a}$ і характеризують цілі синтезу, то $K_i(a_1,\ldots,a_p)$ часто називають цільовими функціями. Вирази системи (7.5) називаються критеріями оптимальності. Задача оптимального синтезу в такій постановці вважається розв'язаною, якщо знайдено хоча б один вектор $\bar{a}$ такий, що він сам належить $\overline{\mathbf{G}}_a$, а показники якості, що йому відповідають, задовольняють вимоги (7.2) і (7.5).

Оптимальний ординалістський синтез. Співвідношення між цим підходом і тільки що розглянутим приблизно таке ж, як при неоптимальному синтезі. Як і там, перед розробником відкривається два шляхи.

1. Можна розрахувати деякі числа, функції, побудувати якісь графіки і вважати, що вся ця інформація досить повно характеризує систему, яка створюється. Такі розрахунки і такі побудови повторюються декілька разів в процесі зондування системи або її направленого вивчення. Потім розробник вивчає ці набори чисел і графіків для різних варіантів побудови системи. В результаті такого вивчення він робить висновок, яка з систем найкраща, оптимальна. Інший або навіть той же розробник в інших умовах може прийняти інший варіант системи – в цьому проявляється неформальність ординалістського підходу до синтезу технічних систем.
2. Можна прийти до прийняття рішення при ординалістському синтезі і більш формально, використовуючи більш вільну трактовку кар-

диналістських умов (7.5) і факту належності вектора $\overline{a}$ до області $\overline{\mathbf{G}}_a$. В процесі синтезу дозволяється змінювати склад нерівностей (7.2) і набір критеріїв (7.5), переводити компоненти вектора $\overline{\mathbf{K}}$ із (7.5) в (7.2) і навпаки або знехтувати якимись з них, деформувати область $\overline{\mathbf{G}}_a$ і змінювати межі K_{i1} та K_i^1 в нерівностях (7.2).

В багатьох випадках такий ординалістський підхід виявляється більш корисним і в порівнянні з досить вільним ординалістським підходом, і в порівнянні з кардиналістським підходом.

7.5. Алгоритм неоптимального синтезу технічних систем

До цього розглядались, в основному, проблеми постановки задачі синтезу та їх вирішення, виходячи з загальних принципів, якими можна користуватись при знаходженні описів технічних систем. Тепер розглянемо деякі конкретні способи синтезу, які базуються на жорстко алгоритмізованих крадиналістських підходах.

Нехай цілі створення нової системи і висунуті до неї вимоги добре відомі розробнику і він може визначити показники якості $K_1, K_2, \ldots, K_n$, які повністю описують систему, і можна вказати межі $K_{11}, K_1^1, \ldots,$ K_{n1}, K_n^1, в яких відповідні показники повинні знаходитись. Кардиналістська постановка задачі породжує абсолютно жорсткі вимоги до майбутньої системи. В обмін на це розробник отримує можливість перекласти весь процес синтезу технічної системи на ЕОМ, оскільки ніяких неформальних рішень, що пов’язані зі зміною постановки задачі, йому приймати не доведеться, хіба що в такій постановці розв’язати проблему синтезу взагалі не вдається.

Процес синтезу розпадається на ряд стадій. Перші з них пов’язані з синтезом структури і вибором базису елементів, тобто набору елементів, з яких будуються системи. Ці стадії погано піддаються формалізації і, як правило, виконуються людиною при допомозі ЕОМ. Однак покажемо, як міг би бути алгоритмізований синтез структури, або, як його ще називають, структурний синтез.

Нехай перетворення деякого входу $u(t)$ у вихід $y(t)$ в довільній по фізичній природі системі здійснюється всього лише трьома блоками A, B, C, і кожний з них розміщується за іншим так, як показано на рис. 7.3 (приклад 7.5). Кожний з блоків A, B, C може займати будь-яку позицію 1, 2, 3.

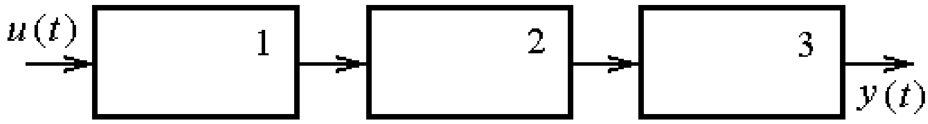


Рис. 7.3. Структура системи, що синтезується

1, 2, 3 – номери блоків системи

В цій, дуже ідеалізованій ситуації на кожний з блоків можна дивитись як на наподільний елемент системи. В сукупності блоки A, B, C складають базис елементів синтезу. При цьому ми вважаємо, що мікроструктура кожного блоку вибрана і фіксована, але їх параметри не визначені і є вільними. Позначимо відповідні сукупності параметрів блоків через $\overline{a}_A$, $\overline{a}_B$, $\overline{a}_C$.

До чого в таких умовах зводиться синтез системи? По-перше, до вибору порядку розміщення блоків A, B, C: можливі структури ABC, BCA, CAB, CBA, BAC, ACB. По-друге, до знаходження всіх компонентів вектора $\overline{a}$, тобто до знаходження "підвекторів" $\overline{a}_A$, $\overline{a}_B$, $\overline{a}_C$. Результат останнього розрахунку повинен залежати від порядку розміщення блоків. Тому визначення параметрів, яке називається параметричним синтезом, не може бути ізольовано від синтезу структури.

До початкової інформації в кардиналістському неформальному синтезі належать: опис структур елементів (в нашому прикладі блоків A, B, C); опис області G_a, до якої можуть належати допустимі значення набору параметрів

$\overline{a}$, тобто об'єднання наборів $\overline{a}_A$, $\overline{a}_B$, $\overline{a}_C$; $2n$ чисел $K_{11}, K_1^1, \ldots, K_{n1}, K_n^1$, які входять в нерівність (7.2) і визначають вже сформульовані умови прийнятності системи, яка синтезується.

Відомо, що синтез являє собою перетворення одних описів в інші. Описи, які нам треба знайти, такі: трьохелементна послідовність символів, яка розміщує в певному порядку букви А, В, С – це опис структури системи; набір чисел $\overline{a}$, тобто опис параметрів системи. Задача синтезу буде розв'язана, якщо описи, що знаходяться в початковій інформації, виявляться перетвореними в останні два.

Алгоритм синтезу можна розділити на наступні етапи.

1. На основі інформації про подібні системи і спираючись на досвід та інтуїцію конструктора або випадково, останній видає певну послідовність символів А, В, С і деякий початковий вектор параметрів $\overline{a}^{\,01}$. Цим повністю визначається система, якщо дотримуватись початкових припущень.
2. Проводиться частковий аналіз системи, що вибрана на попередньому етапі. Таий аналіз обмежується розрахунком вектора $\overline{\mathbf{K}}$.
3. Здійснюється перевірка n нерівностей (7.2) і формується висновок про задовільність чи незадовільність системи.

Якщо система виявилась задовільною, то процес неоптимального синтезу можна вважати вдало завершеним. Якщо нерівності (7.2) не виконані, то здійснюється новий процес підбору задовільної системи. Цей процес здійснюється шляхом повернення до першого етапу при наявності інформації про попередню незадовільну систему.

Можливі варіанти алгоритму синтезу відрізняються стратегією вибору в цих умовах нової системи. Тут можна йти двома напрямками. Перший – зберегти попередню структуру системи , тобто послідовність блоків, і постаратись задовольнити умови придатності системи за рахунок більш вдалого вибору вектора параметрів $\overline{a}$, ніж в попередньому випадку, коли інформації було менше, ніж зараз. Це, по суті, намагання вийти з положення за рахунок параметричного синтезу. Другий – вважати, що незадовільність системи залежить від поганої структури і тому подальші пошуки в просторі параметрів дають мало шансів на успіх. Тоді структура змінюється, тобто вибирається нова послідовність елементів A, B, C і в цій структурі вибирається нова комбінація параметрів – вектор $\overline{a}$.

Якщо в нових умовах на першому етапі нова система так або інакше вибрана, то можна перейти до етапу 3 і проаналізувати на задовільність отриману систему. При цьому можливі два варіанти: або запропонований алгоритм синтезу приведе до задовільної системи, або обчислювальні ресурси будуть вичерпані до того, як це станеться (в подібних циклічних розрахунках часто встановлюється певний граничний час, і ЕОМ автоматично закінчує розрахунок, як тільки відведений час використано). В другому випадку розробнику необхідно замінити початкову інформацію, розширити обмеження на структуру або перейти до нового алгоритму синтезу.

Подібні розв'язки вимагають високої кваліфікації розробника. Перехід до нового алгоритму базується на впевненості, що задача синтезу в її початковій кардиналістській постановці може бути розв'язана, але використаний раніше алгоритм або не знаходить розв'язку, або розшукує його недопустимо повільно. Можливий також варіант, що не існує жодної структури і жодної комбінації параметрів, які дозволяють задовольнити n нерівностей (7.2). Тоді всі подальші намагання приведуть до невдачі і обчислювальні ресурси будуть використані марно.

7.6. Правила зміни структури і параметрів технічних систем

Правила зміни структури можуть базуватись на двох різних ідеях. Перша полягає в довільному переборі всіх можливих структур. Це, по суті, зондування структурного простору. Друга ідея враховує інформацію, що накопичилась на останньому або декількох попередніх спробах синтезу.

Нехай в першій серії спроб останнього прикладу 7.5 була структура ABC і домагання знайти для неї такі параметри, щоб система стала задовільною, виявились безуспішними. Алгоритм подальшого пошуку структури може будуватись з урахуванням невдачі в першій спробі. З неї, наприклад, може випливати, що A не повинно бути першим блоком. Тоді структуру ACB можна не розглядати і , таким чином, зменшити кількість спроб синтезу структури системи.

Такі алгоритми можуть базуватись лише на глибокому розумінні того, як функціонує система, як структура першого блоку впливає на вектор показників $\overline{\mathbf{K}}$ всієї системи і т. д. Зрозуміло також, що невдача пешої спроби може бути пов'язана з двома наступними блоками і подальший синтез системи в просторі структур буде направлено по хибному шляху.

Необхідно відзначити, що структурний синтез вимагає значних зусиль і витрат, бо його перспективність стає зрозумілою тільки тоді, коли закінчено і параметричний синтез. Оскільки структури містять, як правило, досить велику кількість елементів, то вимоги до обчислювальних засобів бувають досить значними.

Алгоритмічні пошуки структури системи пов'язані зі значними труднощами. Їх можна порівняти, наприклад, з пошуком найкращого наступного ходу в шаховій партії. Для них характерні і вимушена відмова від довільного перебору всіх варіантів, і необхідність кількісно оцінити значну і важко формалізуєму накопичену інформацію, і проблема прогнозу тих наслідків, до яких може привести прийняте рішення. Такі задачі зараз інтенсивно досліджуються і, можливо, з часом перспективи алгоритмічних пошуків структури будуть більш реалістичними ніж сьогодні.

Ситуація з правилами зміни параметрів при синтезі технічних систем значно спрощується. В цій задачі структура системи відома, залишається знайти такий вектор $\overline{a}$, щоб були виконані n нерівностей (7.2). Оскільки у всіх відношеннях, крім вибору вектора, система описана, то відомі і правила обчислення вектора $\overline{\mathbf{K}}$.

Отож, формально кажучи, необхідно розв'язати деяку систему нерівностей. Розв'язуванням цієї задачі займається спеціальна галузь математики. Покажемо, як зв'язати розв'язування системи нерівностей із задачею знаходження екстремуму деякої спеціально підібраної функції. Таке зведення однієї проблеми до іншої зв'язує між собою неоптимальний і оптимальний параметричний синтез систем. Пояснюється це тим, що багато задач оптимального синтезу також зводяться до знаходження екстремуму.

Для простоти обмежимось випадком, коли показників якості системи всього два (n = 2). Тоді необхідно знайти вектор $\overline{a}$ такий, щоб виконувалось дві нерівності

$$K_{11} \leq K_1(\overline{a}) \leq K_1^1, \quad K_{21} \leq K_2(\overline{a}) \leq K_2^1. \tag{7.6}$$

При цьому вектор параметрів зобов'язаний належати області $\overline{\mathbf{G}}_a$, яка вже вказана.

Перетворимо дві двосторонні нерівності (7.6) в чотири односторонні:

$$\begin{gathered} K_1(\overline{a}) - K_1^1 \leq 0; \quad K_{11} - K_1(\overline{a}) \leq 0; \\ K_2(\overline{a}) - K_2^1 \leq 0; \; K_{21} - K_2(\overline{a}) \leq 0. \end{gathered} \tag{7.7}$$

Якщо позначити тепер ліві частини нерівностей (5.7) через $f_1(\overline{a}), \ldots, \; f_4(\overline{a})$, то отримаємо еквівалентну (7.7) систему:

$$\begin{gathered} f_1(\overline{a}) \leq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_4(\overline{a}) \leq 0. \end{gathered} \tag{7.8}$$

З чотирьох функцій зліва в (7.8) побудуємо одну $F(\overline{a})$ за правилом

$$F(\overline{a}) = \max_{1 \le i \le 4} f_i\,(\overline{a}). \tag{7.9}$$

Цей запис означає, що для кожного значення $\overline{a}$ обчислюються чотири значення $f_1(\overline{a})$, $f_2(\overline{a})$, $f_3(\overline{a})$, $f_4(\overline{a})$ і серед них вибирається найбільше – воно і приймається рівним $F(\overline{a})$.

Якщо тепер знайти такий вектор $\overline{a}_1$, щоб було

$$F(\overline{a}_1) = \min \tag{7.10}$$

і вектор $\overline{a}_1$ належав $\overline{\mathbf{G}}_a$, то знайдене значення $\overline{a}_1$ буде задовольняти початковим нерівностям (7.6), а з ними і (7.7) та (7.8).

Рис. 7.4 ілюструє це на прикладі двох гіпотетичних функцій $f_1(a)$ і $f_2(a)$ від однієї змінної (параметра) a (приклад 7.6).

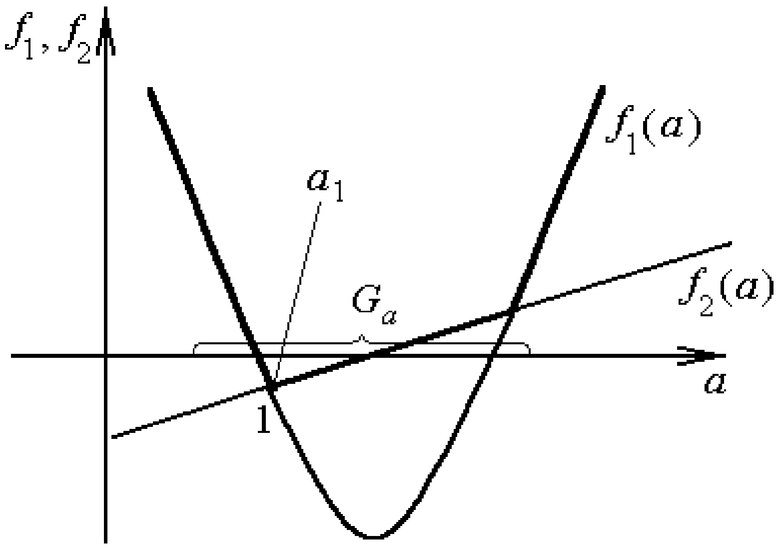


Рис. 7.4. Зведення системи нерівностей до розв’язання задачі пошуку мінімуму (жирна ламана)

Легко бачити, що знайдене таким чином значення (точка 1) задовольняє всім нерівностям (хоча це і не єдина точка зору). У всякому разі видно, що, вміючи розв'язувати задачі мінімізації, які пов'язані з оптимальним кардиналістським синтезом, можна реалізувати і процес неоптимального синтезу.

7.7. Морфологічний аналіз і синтез технічних систем

Метод морофологічного аналізу і синтезу, розроблений швейцарським астрономом Ф.Цвіккі, побудований на принципах комбінаторики [27]. Суть його полягає в тому, що в технічній системі або в іншому об'єкті виділяють групу основних конструктивних або інших ознак. Для кожної ознаки вибирають альтернативні варіанти, тобто можливі варіанти його реалізації. Комбінуючи їх між собою, можна отримати множину різних технічних рішень, в тому числі і тих рішень, які мають практичний інтерес.

Практичне використання методу полягає в побудові морфологічної таблиці, заповненні її можливими альтернативними варіантами та виборі із всієї множини найбільш прийнятних технічних рішень.

Найбільше поширення отримав метод Цвіккі, в якому за ознаки вибираються функції елементів технічної системи, а за альтернативні варіанти – різні способи реалізації кожної функції. В цьому випадку морфологічна таблиця буде мати стільки стовбців, скільки функціональних елементів в системі на вибраному рівні. Тоді число можливих варіантів технічних рішень визначається залежністю

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m,$$

де m - число функціональних елементів системи на заданому рівні; n_i - число альтернативних варіантів i-го ($i = 1, 2, ..., m$) функціонального елементу.

Розглянемо побудову морфологічної таблиці на прикладі стрілової системи вантажопідйомного крана з горизонтальним переміщенням вантажу при зміні вильоту (рис. 7.5).

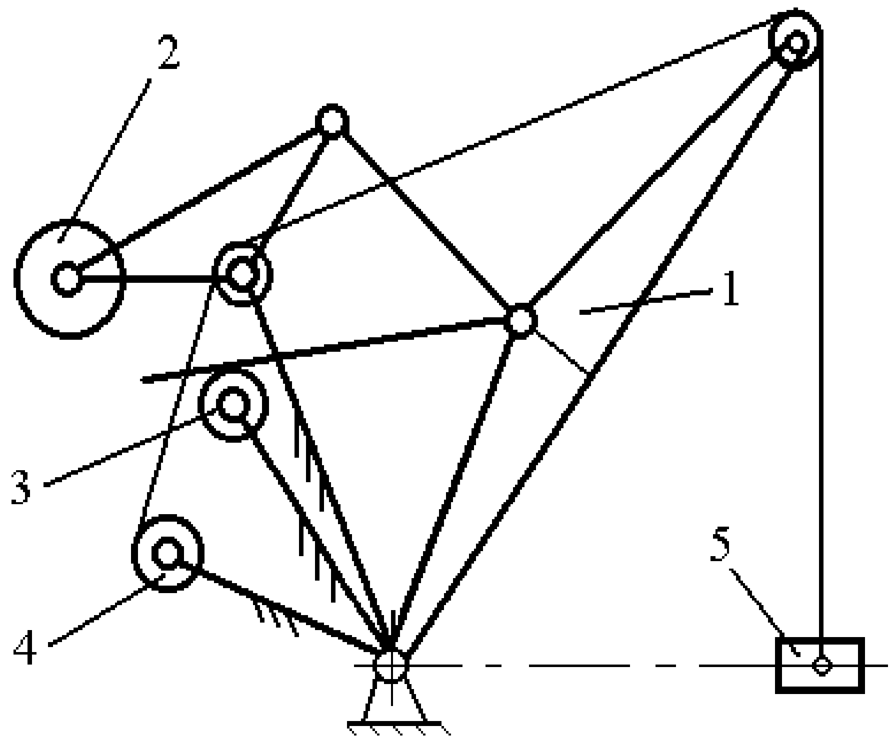


Рис. 7.5. Схема стрілової системи крана

Стрілова система складається з таких основних функціональних елементів: 1 - стріловий пристрій; 2 - механізм його врівноваження; 3 - приводний механізм; 4 - механізм вирівнювання траєкторії вантажу 5. Для розглянутої системи морфологічна таблиця має чотири стовбці, в які входять функціональні елементи стрілової системи (табл. 7.1).

В цій же таблиці в кожному стовбці приведені альтернативні варіанти функціональних елементів стрілової системи.

Шляхом вибору одного з альтернативних варіантів технічних рішень з кожного стовбця отримаємо один із можливих варіантів стрілової системи. Так, якщо взяти альтернативні варіанти під першим номером з кожного стовбця, то отримаємо варіант стрілової системи, який показаний на рис. 7.5.

Всього ж з цієї таблиці можна отримати $N = 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5 = 900$ варіантів стрілової системи вантажопідйомного крана з горизонтальним переміщенням вантажу. Ця таблиця може доповнюватись новими можливими варіантами функціональних елементів.

Таблиця 7.1

Морфологічна таблиця можливих варіантів стрілової системи вантажопідйомного крана

Альтер-нативні варіанти	Функціональні елементи			
	Стріловий пристрій	Механізм врівнова-ження	Приводний механізм	Механізм вирівнювання траєкторії вантажу
1	Жорстка прямо-лінійна стріла	Чотири-ланковий	Рейковий	Профільний барабан
2	Жорстка криво-лінійна стріла	Шести-ланковий	Гвинтовий	Вирівнюваль-ний блок
3	Шарнірно-скла-дова стріла з прямолінійним хоботом	Поліспастний	Гідравлічний	Вирівнюваль-ний поліспаст
4	Шарнірно-скла-дова стріла з профільним хоботом	На стрілі	Кривошипний	Вантажний канат парале-льний осі стріли
5	Прямолінійна стріла з висув-ними секціями	Вріноважува-льний візок	Поліспастний	Вантажний канат парале-льний осі від-тяжки
6	Прямолінійна стріла з вставними секціями	–	Кривошипно-коромисловий	–

Розглянемо процес складання морфологічної таблиці на більш низькому рівні для приводного механізму стрілової системи вантажопідйомного крана. Одним з варіантів приводного механізму може бути рейковий механізм (рис. 7.6).

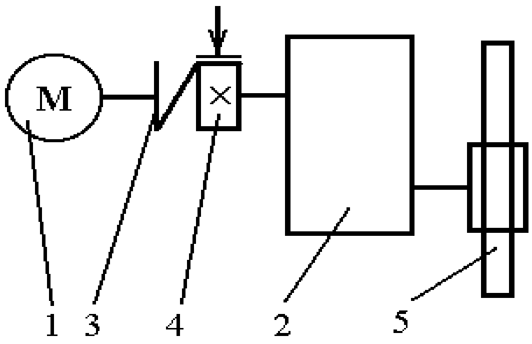


Рис. 7.6. Кінематична схема рейкового приводного механізму

Цей приводний механізм складається з двигуна - 1, передаточного механізму - 2, з’єднувального пристрою - 3, гальмівного механізму - 4 та рейкового механізму - 5. В приводному механізмі виділено п’ять функціональних елементів, різні альтернативні варіанти яких утворюють морфологічну таблицю (табл. 7.2).

Таблиця 7.2

Морфологічна таблиця можливих варіантів приводного механізму стрілової системи вантажопідйомного крана

Альтернативні варіанти	Функціональні елементи				
	Двигун	Передаточний механізм	З’єднувальний пристрій	Гальмівний механізм	Виконавчий механізм
1	2	3	4	5	6
1	Електродвигун постійного струму	Циліндричний редуктор	Втулочно-пальцева муфта	Колодочний з електромагнітним штовхачем	Зубчастий

Продовження таблиці 7.2

1	2	3	4	5	6
2	Електро-двигун змінного струму з коротко-замкнутим ротором	Планетар-ний редуктор	Зубчаста муфта	Колодоч-ний з гід-равлічним штовхачем	Цевочний
3	Електро-двигун змінного струму з контакт-ними кільцями	Черв'яч-ний редуктор	Лацюгова муфта	Стрічковий з важель-ним про-стим керу-ванням	Черв'ячний
4	Гідродвигун	Хвильо-вий редук-тор	Кулачково-дискова муфта	Стрічковий диференці-альний	Гвинтовий
5	Двигун внурішньо-го згоряння	Конічний редуктор	Гідромуфта	Дисковий	Поліспаст-ний
6	–	Комбіно-ваний редуктор	Глухе фланцеве з'єднання	Порошко-вий електромаг ніт-ний	Рейковий
7	–	–	Кулачковий	Електроін-дукційний	Кривошип-но-кромми-словий

Аналіз табл. 7.2 показує, що можна отримати N = $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 10290$ варіантів приводу зміни вильоту стрілової системи. Не всі ці варіанти приводу можуть мати практичне втілення Однак значна кількість альтернативних варіантів дає змогу провести аналіз різних конструктивних рішень І вибирати з них у тих чи інших умовах найбільш ефективні та перспективні конструкції приводів.

8. ПОСТАНОВКА ТА КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ ТЕХНІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

8.1 Поняття керування

Питання про керування в складних технічних ситемах різної фізичної природи мають в останні роки все більше і більше значення. Це пов’язано з тим, що для технічних систем, які мають справу з високими енергіями, значними швидкостями, швидкоплинними процесами, дорогими установками і експериментами, характерна вимога найбільш раціонального використання ресурсів, вибору найкращих можливостей програми дій. Все це визначає ті проблеми, які складають предмет теорії керування.

В технічних системах проходять процеси, характер яких залежить від множини супутніх їм умов і факторів. Змінюючи умови проходження процесів, можна впливати на їх характер, змінювати їх, пристосовувати їх до тих або інших цілей. Таке втручання в природний хід процесу, зміна його і являє собою суть керування. Таким чином, можна сказати, що керування являє собою таку організацію того або іншого процесу, яка забезпечує досягнення певних цілей [28].

Будь-який процес керування можна розділити на чотири етапи: поява мети, оцінка ситуації, прийняття рішення і реалізація прицнятного рішення. Етап появи мети з’являється до початку процесу керування, тому його можна не розглядати. В зв’язку з цим процес керування можна розглянути як виконання трьох основних етапів:

1) збір та обробка інформації з метою оцінки ситуації, що склалась;

2) прийняття рішення про найбільш цілеспрямовані дії;

3) виконання прийнятого рішення.

Інколи буває необхідний ще четвертий етап: контроль виконання рішення.

Різні види задач керування відрізняються одна від одної способом і послідовністю виконання цих операцій.

Існує багато задач, в яких механізми збору та обробки інформації і виконання прийнятого рішення відпрацьовані досить чітко, що над ними можна зовсім не замислюватись при здійсненні процесу керування. В таких задачах всі розглянуті процеси керування зводяться, по суті, до розгляду тільки другого етапу. Подібні задачі називають одноетапними задачами прийняття рішення.

Однак такий підхід в більшості випадків є ідеалізованим і спрощенням реального керування. В дійсності всі етапи процесу керування знаходяться в тісному взаємозв'язку і етап прийняття рішення вимагає детального розгляду можливих способів реалізації прийнятого рішення.

Інколи процес керування розбивають на декілька послідовних кроків, причому рішення, прийняте на будь-якому кроці, залежить від результатів виконання рішень попереднього кроку. Прикладом може бути процес керування складною системою, якою є ракета, при запуску її з Землі на Місяць. Тут важливо виділити наступні кроки: виведення ракети на навколоземну орбіту, організація рухом ракети в напрямку Місяця, перехід ракети на навколомісячну орбіту, посадка ракети на Місяць.

В цьому прикладі окремі кроки процесу керування виявились досить природніми. Однак в багатьох випадках розбивання складного процесу керування на кроки з чітким виділенням всіх його етапів на кожному кроці виявляється досить складною задачею.

З розглянутого видно, наскільки складними і різноманітними можуть бути задачі керування. Однак в значній мірі можна недооцінити складність розв'язування цих задач, якщо враховувати ті обставини, що процеси керування проходять, як правило, в складному навколишньому оточенні. На здійснення процесів керування впливають різноманітні зовнішні фактори, сукупність яких часто називають станом природи. Для того, щоб прийняти правильне рішення про ті або інші дії, необхідно оцінити результати цих дій, а для цього необхідно знати характер ситуації, в якій ці дії здійснюються.

Однак типовим для задач керування є випадок, коли наявна інформація буває або недостатня для точної оцінки ситуації, або викривлена зовнішніми факторами. При цьому недостатність інформації не знімає задачі прийняття рішення. Особливість задач керування саме в тому і полягає, що рішення повинно бути обов'язково прийняте незалежно від того, в змозі ми точно оцінити результати, до яких приведе прийняте рішення, чи ні.

Таким чином, в процесі керування виникає важлива задача прийняття рішення в умовах, коли інформація про ситуацію, що склалась, або недостатня, або викривлена. Така задача отримала назву задачі прийняття рішення в умовах невизначеності.

Розглянемо ще один специфічний клас задач керування, який пов'язаний з діяльністю великих промислових підприємств, на зразок організаційно-виробничої технічної системи, яка була розглянута в другому розділі.

До промислової революції керівництво дрібним підприємством могла здійснювати одна людина, яка здійснювала закупки, планувала і направляла роботу, збувала продукцію, наймала і звільняла робітників. При малих розмірах підприємства керівник міг приймати організаційні рішення, не використовуючи ніяких наукових методів і базуючись лише на своїх знаннях, досвіді, інтуїції. Якщо деякі з прийнятих рішень були не кращими, то вони не приводили до значних втрат, або могли бути швидко виправлені.

Укрупнення промислових підприємств зробило неможливим здійснення адміністративних функцій однією людиною. З'явились керівники виробничих відділів, відділів збуту, фінансових відділів, відділів кадрів і т. д. Механізація і автоматизація виробництва привела до подальшого розчленування адміністративних функцій. Так, виробничі відділи виявились поділеними на більш дрібні групи, які займаються питаннями експлуатації та ремонту, контролю якості, планування, постачання, зберігання готової продукції і т. п.

Кожний окремий спеціалізований підрозділ великої організації виконує певну частину спільної роботи, керуючись загальними цілями підприємства. Однак у кожного спеціалізованого підрозділу виникають і свої власні цілі. Всі ці цілі не завжди узгоджуються, а інколи вступають в протиріччя між собою.

Як приклад можна розглянути проблему забезпечення підприємства запасами. Окремий підрозділ може бути зацікавлений в значному збільшенні запасів на складі для забезпечення неперервного випуску своєї продукції. Але при обмеженому об'ємі складських приміщень це приводить до зниження запасів для інших підрозділів. В результаті виникає задача організаційно-управлінського типу – вибір такої стратегії у відношенні запасів, яка була б найбільш доцільна для всього підприємства в цілому.

При розв'язуванні подібного роду організаційно-управлінських задач необхідно дуже добре розуміння цілей окремих підрозділів і таке їх погодження, щоб вони не приходили в протиріччя ні між собою, ні з загальними цілями всього підприємства. Якщо при цьому врахувати, що прийняття не кращих рішень в умовах великого підприємства може принести немалі збитки, то стає ясно, що при розв'язуванні організаційно-управлінських задач виявляється недопустимим базуватись тільки на особистому досвіді і здоровому глузді. Необхідні наукові методи.

Розробкою наукових методів розв'язування організаційно-управлінських задач займається наукова дисципліна, яка отримала назву дослідження операцій. Під <u>операцією</u> розуміють деякий організаційний захід, проведення якого передбачає певну чітко сформульовану мету, наприклад, регламентацію зберігаємих на складі запасів. Повинні бути задані умови, що характеризують обставини проведення заходу, зокрема потреби в запасах і обмеження на складські приміщення в розглянутому прикладі. Метою дослідження операцій є знаходження і наукове обгрунтування таких способів, проведення заходів, які в певному сенсі є найбільш вигідними.

Специфічна особливість задач організаційно-управлінського типу полягає в тому, що наслідки того або іншого способу їх вирішення можуть суттєво відобразитись на роботі всього підприємства. Тому прийняття кінцевого рішення завжди відноситься до компетенції відповідальної особи, адміністратора, який наділений відповідними правами, і виходить за рамки дослідження операцій. Дослідження операцій має на меті дати в руки адміністратору обгрунтовані рекомендації по прийняттю рішення.

Таким чином, дослідження операцій являє собою науковий напрямок, мета якого полягає в розробці методів аналізу цiленаправлених заходів (операцій), і об'єктивна порівняльна оцінка можливих рішень. Хоча дослідження операцій являє собою самостійний науковий напрямок, при розв'язуванні окремих задач воно застосовує методи кібернетики.

8.2. Оптимізація процесу керування

8.2.1. Критерій якості керування

Задачу керування будемо розглядати як математичну. Однак, на відміну від багатьох інших математичних задач, вона має ту особливість, що допускає не одне, а множину різних рішень. Це пов'язано з тим, що в задачах керування існує, як правило, багато способів організації будь-якого процесу, які приводять до досягнення поставленої мети. Так, при запуску ракети на Місяць можна вибрати різні траєкторії для її польоту і т. п. Тому задачу керування можна було б ставити як задачу знаходження хоча б одного з можливих способів досягнення поставленої мети. Однак така постановка питання буває недостатньою.

Якщо є множина рішень будь-якої задачі, то необхідно вести розмову про вибір такого рішення, яке з тієї чи іншої точки зору було б найкращим. Можна навести багато прикладів подібних задач. Так, існує багато способів для виготовлення ємкості з листа металу заданих розмірів. Розв’язком цієї задачі необхідно вважати отримання ємкості максимальної місткості. Доставляти будівелні матеріали до об’єкту будівництва можна, користуючись залізничним, водним і автомобільним транспортом. Розв’язком задачі буде вибір найбільш вигідного виду транспорту з точки зору часу доставки, вартості, збереження властивостей матеріалів і т. п. Аналогічний стан має місце і в задачах керування технічними ситемами.

В тих випадках, коли мета керування може бути досягнута декількома різними способами, на спосіб керування можна накласти додаткові вимоги, ступінь виконання яких може служити основою для вибору способу керування.

В багатьох випадках реалізація процесу керування вимагає витрат тих чи інших ресурсів, електроенергії і т. п. Отже, при виборі способу керування необхідно казати не тільки про те, чи досягається поставлена мета, але і про те, які ресурси доведеться витратити для її досягнення. В цьому випадку задача керування полягає в тому, щоб з множини рішень, які забезпечують досягнення поставленої мети вибрати одне, яке вимагає найменших витрат ресурсів.

В інших випадках основою для вибору способу керування можуть бути інші вимоги, що накладаються на систему керування: вартість обслуговування, надійність, відхилення отриманого стану системи від бажаного і т. п.

Математичний вираз, який дає кількісну оцінку ступеню використання накладених на спосіб керування вимог, називають критерієм якості керування. Найбільш доцільним або оптимальним способом керування буде такий, при якому критерій якості керування досягає мінімального (максимального) значення. При виборі, наприклад, режиму польоту ракети за критерій якості керування можна прийняти або вираз для кількості палива, яке витрачається на одиницю шляху, або шлях, який проходить ракета за рахунок одиниці палива. Найбільш економічному, тобто оптимальному режиму руху буде відповідати в першому випадку мінімальне, а в другому максимальне значення критерію якості керування.

Класифікацію оптимізаційних критеріїв, які використовуються для оптимізації керування рухом механізмів виконаємо за певними показниками.

1. ***За фізичною сутністю*** критерії поділяються на: динамічні, кінематичні, енергетичні, швидкодії. Приведемо приклади вказаних критеріїв на прикладі одномасової динамічної моделі. <u>Динамічний критерій</u>:

$$I_{F^2_{дин}} = \frac{1}{t_p}\int_0^{t_p} F^2_{дин}\,dt = \frac{1}{t_p}\int_0^{t_p} (m\ddot{x})^2\,dt, \qquad (8.1)$$

де m – приведена до поступального руху маса ланки механізму; t_p – тривалість руху механізму; x – узагальнена координата ланки механізму (x є функцією однієї незалежної змінної – часу t, якщо не вказано інше); $F_{дин}$ – динамічна складова приводного зусилля. Точка над символом означає диференціювання за часом. Критерій (8.1) відображає середнє, за час руху, значення квадрату динамічної складової приводного зусилля. Динамічні критерії дають змогу оцінити зусилля та моменти, що діють у елементах машини, а також їх вищі похідні за часом. Мінімізація динамічних критеріїв дозволяє зменшити діючі у елементах механізмів зусилля та, як наслідок, подовжити їх строк служби. <u>Кінематичний критерій</u>:

$$I_{\dot{x}^2} = \frac{1}{t_p}\int_0^{t_p} \dot{x}^2\,dt. \qquad (8.2)$$

Критерій (8.2) відображає середнє, за час руху, значення квадрату швидкості руху ланки механізму. Використання кінематичних критеріїв дозволяє дати оцінку кінематичним характеристикам руху ланки механізму: переміщенням, швидкостям, прискоренням, ривкам тощо. Мінімізація цих критеріїв дає змогу реалізувати режими руху, які враховують різноманітні кінематичні обмеження: на величину швидкості, прискорення тощо. <u>Енергетичний критерій</u>:

$$I_{N^2_{дин}} = \sqrt{t_p \int_0^{t_p} N^2_{дин}\, dt} = \sqrt{t_p \int_0^{t_p} (m\ddot{x}\dot{x})^2\, dt}, \qquad (8.3)$$

де $N_{дин}$ – динамічна складова потужності. Критерій (8.3) виражає квадрат енергетичних витрат протягом тривалості руху механізму. Енергетичні критерії відображають витрати або/і втрати енергії (механічної, електричної) при виконанні руху. Енергетичні критерії варто використовувати для потужних механізмів або/і у випадках коли вартість використовуваної енергії (електричної, дизельного палива тощо) є значною. Необхідно зазначити, що у деяких випадках чітке розмежування між кінематичними, динамічними та енергетичними критеріями провести неможливо, оскільки енергетичні та динамічні характеристики механізму виражаються через його кінематичні функції, як це видно із виразів (8.1) та (8.3). <u>Критерій швидкодії</u>:

$$I_{t_p} = \int_0^{t_p} dt = t_p \qquad (8.4)$$

відображає тривалість руху ланки механізму. Даний критерій бажано використовувати для синтезу оптимальних режимів руху портових кранів-перевантажувачів та контейнерних кранів. Однак необхідно пам’ятати про те, що оптимальне за швидкодією керування завжди є релейним, що погіршує динаміку руху крана та врешті-решт веде до передчасного виходу його із ладу. Тому використання критерію (8.4) рекомендується виконувати у структурі комплексного критерію, у який входять також інші складові, наприклад, динамічні критерії.

2. ***За математичним представленням*** критерії бувають: інтегральні, термінальні, інтегрально-термінальні (узагальнені), інтегрально-термінальні (для систем із розподіленими параметрами). Приведемо вирази вказаних критеріїв. Інтегральний критерій:

$$I = \int_0^{t_\partial} P(x,\, \dot{x}, \ldots, \overset{k}{x},\, t)dt, \tag{8.5}$$

де P – підінтегральний вираз критерію; k – найвищий порядок похідної за часом у підінтегральному виразі P. Інтегральний критерій відображає показник якості руху машини протягом усього проміжку часу $[0, t_p]$. Термінальний критерій:

$$T = T\left(t_\alpha,\, x,\, \dot{x}, \ldots, \overset{z}{x}\right), \quad t_\alpha \in [0,\, t_p], \tag{8.6}$$

де z – найвищий порядок похідної за часом у термінальному критерії T; t_α – моменти часу із часового проміжку $[0, t_p]$, (α=1, 2,…, r); r – кількість моментів часу в які проводиться „оцінка” руху за допомогою термінального критерію. Зазначимо, що у випадку зведення оптимізаційної задачі до крайової, підбором крайових умов можна досягнути глобального мінімуму термінального критерію. При цьому розв’язок оптимізаційної задачі шукається у звуженому класі функцій, які задовольняють вимозі мінімізації термінального критерію. Необхідно зробити зауваження стосовно інтегральних та термінальних критеріїв. Інтегральний критерій дає оцінку показнику якості руху на всьому проміжку руху динамічної системи. У деякі моменти часу підінтегральний вираз критерію (8.5) може приймати великі значення. Але, оскільки, тривалість таких моментів незначна, то вони не значно вплинуть на величину критерію. Однак, великі значення оцінюваного показника руху, який виражається підінтегральною функцією у (8.5), можуть кардинально впливати, наприклад на надійність крана. У випадку використання інтегрального критерію (8.1) короткочасні „пікові" динамічні зусилля можуть викликати поломку кінематичних зачеплень у приводі. Вказаний недолік інтегрального критерію компенсує термінальний: дійсно, вираз цього критерію можна підібрати так, щоб він оцінював значення динамічного зусилля у певні „критичні" моменти часу (пуск, реверс тощо). Однак термінальний критерій не дає змоги дати оцінку режиму руху ланки механізму на всьому проміжку $[0, t_p]$, що, звичайно, є недоліком цього критерію. Для того, щоб поєднати бажані властивості і позбутись недоліків інтегрального та термінального критеріїв використовують <u>інтегрально-термінальний (узагальнений) критерій</u>:

$$IT = I + T. \tag{8.7}$$

Зазначимо, що критерій IT можна розглядати як модифікований інтегральний критерій, оскільки моменти часу t_α у структурі термінального критерію входять у проміжок часу $[0, t_p]$, за яким проводиться оцінка за допомогою інтегрального критерію. Критерій (8.5) можна перетворити у (7), якщо назначити значну „ціну" підінтегрального виразу у моменти часу t_α. Варіаційні задачі, які відповідають приведеним критеріям (8.5)-(8.7) відомі під назвами: Лагранжа, Майера та Больца відповідно. <u>Інтег-</u>

рально-термінальний (для систем із розподіленими параметрами) критерій:

$$IT_{\eth.\ddot{\imath}.} = \int_0^L P\left(x(t,\, l),\, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial l}, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial l^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial l}, ..., \frac{\partial^{k+s} x}{\partial t^k \partial l^s},\, t,\, l \right) dl \Bigg|_{t=t_\alpha}, \qquad (8.8)$$

де s – найвищий порядок похідної за незалежною змінною l у підінтегральному виразі P; l – незалежна змінна (параметр) динамічної системи; L – найбільше значення параметру l. Диференціальними рівняннями у частинних похідних описуються коливальні рухи канатів (поперечні та повздовжні), балок кранових мостів, довгих валів у передачах тощо. Для оцінки руху цих та інших елементів крана можуть бути використані критерії (8.8). Ці критерії, наприклад, можуть представляти вимоги щодо мінімізації енергії коливань елементу із розподіленими параметрами у моменти часу t_α (зокрема при $t = t_\eth$).

3. ***За структурою*** оптимізаційні критерії бувають: одиничні та комплексні. Одиничні критерії вимагають мінімізації одного небажаного показника. Якщо цей показник вибрано невдало, то мінімізація критерію не може у значній мірі вплинути на підвищення ефективності роботи вантажопідйомного крана. Для відображення декількох небажаних показників використовуються комплексні критерії загальна структура яких представляється у вигляді:

$$IT_{\hat{e}\hat{\imath}\hat{\imath}\ddot{e}} = \sum_{j=1}^{\tilde{j}} \delta_j I_j + \sum_{i=1}^{\tilde{i}} \delta_i T_i, \qquad (8.9)$$

де δ_j - ваговий коефіцієнт, який відображає „вагу” j-того одиничного інтегрального критерію I_j; δ_i - ваговий коефіцієнт, який відображає „вагу”

i-того одиничного термінального критерію T_i; $\widetilde{j}$ та $\widetilde{i}$ - кількість відповідно інтегральних та термінальних критеріїв. Вагові коефіцієнти δ_j і δ_i пов'язані співвідношенням:

$$\sum_{j=1}^{\widetilde{j}} \delta_j + \sum_{i=1}^{\widetilde{i}} \delta_i = 1. \tag{8.10}$$

Якщо прийняти, наприклад, $\sum_{j=1}^{\widetilde{j}} \delta_j + \sum_{i=1}^{\widetilde{i}-1} \delta_i = 0$, то критерій $IT_{компл}$ перетворюється у одиничний термінальний критерій. Якщо $\sum_{j=1}^{\widetilde{j}-1} \delta_j + \sum_{i=1}^{\widetilde{i}} \delta_i = 0$, то критерій $IT_{компл}$ перетворюється у одиничний інтегральний критерій.

4. ***За розмірністю*** критерії поділяються на: розмірні та безрозмірні. Розмірні критерії дають змогу наглядно оцінити ефект від їх мінімізації. Наприклад, критерій (8.3), одиницею якого є Джоуль, показує енергетичні витрати при реалізації оптимізованого режиму руху механізму. Критерій (8.4), який вимірюється у секундах, відображає тривалість часу на виконання руху. Зазначимо, що використання комплексного розмірного критерію вимагає приведення різних фізичних величин до однієї розмірності. Це виконується шляхом множення їх на відповідні розмірні коефіцієнти, наприклад: сталі часу, жорсткості, коефіцієнти демпфування тощо. Приведемо найпростіший приклад:

$$I_{êîìïë} = \frac{1}{t_ð}\int_0^{t_ð} F_{çí}^2 dt + \frac{1}{t_ð}\int_0^{t_ð} F_{ïð}^2 dt = \frac{m^2}{t_ð}\int_0^{t_ð} \ddot{x}^2 dt + \frac{ñ^2}{t_ð}\int_0^{t_ð} x^2 dt, \tag{8.11}$$

де $F_{çí}$ - сила інерції одномасової коливної системи; $F_{ïð}$ - сила пружності пружного елемента системи; m - зосереджена маса елемента системи; $ñ$ -

жорсткість пружного елемента системи; x - координата зосередженої маси системи. Критерій (8.11) відображає середньоквадратичні, за період часу $[0,\ t_p]$, значення сил інерції та пружної сили, які виникають у коливній системі. Безрозмірні критерії вимагають приведення усіх їх складових до безрозмірних величин. Прикладом безрозмірного критерію є безрозмірна питома дія.

5. ***За видом математичного виразу*** критерії розрізняють: лінійні та нелінійні. Лінійні критерії оптимізації вимагають розв'язання лінійних екстремальних задач. Прикладом лінійних критеріїв є функціонали (8.1) та (8.2) Розв'язок цих задач, як правило, шукають аналітичними методами. Мінімізація нелінійних критеріїв вимагає знаходження розв'язку нелінійних оптимізаційних задач. У загальному випадку ці розв'язки неможливо знайти у аналітичному вигляді і тому використовуються наближені чисельні методи. Прикладом нелінійного критерію є критерій виду:

$$I = \int_0^{t_\partial} (\dot{x} - v)^b \, dt, \tag{8.12}$$

де v - задана швидкість руху ланки механізму; b - показник степеня підінтегрального виразу критерію. Якщо $b = 2$, то оптимізаційна задача називається лінійно-квадратичною. У випадку $b > 2$, наприклад, $b = 4$ критерій (8.12) є нелінійним. Такий критерій „штрафує" значні відхилення швидкості ланки механізму від заданого значення v протягом часу $t \in [0,\ t_\partial]$. Якщо обрати $b = 0{,}2$, то критерій (8.12) приблизно однаково „штрафує" як невеликі так і великі відхилення швидкості ланки механізму від заданого значення v протягом часу $t \in [0,\ t_\partial]$. У загальному випадку показник степеня b є несталим, який змінюється в залежності від величини динамічної похибки швидкості руху системи $\dot{x} - v$. У випадку $b \to 0$ критерій (8.12) перетворюється у критерій швидкодії (8.4). Загалом найбільший інтерес для оптимізації режимів руху механізмів машин представляють нелінійні критерії. Тому актуальним завданням є вибір чисельних методів їх розв'язку. При виконанні вказаного вибору чисельного методу необхідно враховувати обчислювальні можливості цифрової системи, необхідність розв'язувати оптимізаційну задачу в режимі реального часу, складність самої задачі та інші фактори.

8.2.2. Обмеження, що накладаються на процес керування

При розв'зуванні задачі керування неможливо не враховувати ті обставини, що рух будь-якої системи завжди підлягає різного роду обмеженням. Для більш повного уявлення про обмеження розглянемо конкретний приклад керування автомобілем. Здійснюючи процес керування, водій повинен рахуватися з тим, що автомобіль має обмежену потужність двигуна, а це значить, що він може везти лише обмежений вантаж з обмеженою граничною швидкістю. Завдяки обмеженості, швидкість автомобіля і напрямок руху можуть змінюватись лише з обмеженим прискоренням. Це значить, що неможливо миттєво зупинити або миттєво змінити напрямок руху у випадку виникнення непередбаченої ситуації, і це, в свою чергу, обмежує швидкість руху. При виборі маршруту водій вимушений рахуватися з обмеженим запасом палива в баку і необхідністю поповнення цього запасу в дорозі тощо.

У загальному випадку існує два види обмежень на вибір способу керування. Обмеженнями першого виду є самі закони природи, відповідно до яких здійснюється рух керованої системи. При математичному формулюванні задачі керування ці обмеження являють собою алгебраїчні, диференціальні або різницеві рівняння зв'язку. Другий вид обмежень становить собою обмеження ресурсів, що використовуються при керуванні, або інших величин, які в силу фізичних особливостей якоїсь системи не можуть чи не повинні перевищувати певних меж. Математично обмеження цього виду виражаються, як правило, у вигляді систем алгебраїчних рівнянь або нерівностей, які зв’язують змінні, що описують стан системи.

Розділяють „**класичні**” (у вигляді рівностей) і „**некласичні**” (у вигляді нерівностей) обмеження. „Класичні”, у свою чергу, діляться на **голономні**, **неголономні** й **ізопериметричні**.

Голономні обмеження являють собою алгебраїчні рівняння зв’язку шуканих функцій *X(t)* і *U(t)*, записані, для зручності, у вигляді однорідних рівнянь із нульовою правою частиною:

$$\varphi_i(X, U, t) = 0, \;\; з = 1...r, \tag{8.13}$$

де r - кількість алгебраїчних рівнянь.

Для задач оптимізації динамічних режимів роботи об’єктів керування голономні обмеження нетипові. Крім того, як правило, цих обмежень можна позбутися ще на етапі формулювання задачі шляхом відповідних перетворень. Тому надалі вони не розглядаються.

Неголономні обмеження являють собою диференціальні рівняння:

$$\varphi_i(X, \dot{X}, U, t) = 0, \;\; i = 1...n, \tag{8.14}$$

де n - кількість диференціальних рівнянь.

Це диференціальні рівняння об’єкта керування, а також інші рівняння, що дозволяють врахувати додаткові обмеження.

Ізопериметричні обмеження мають вигляд:

$$\int_{t_0}^{t_{\hat{e}}} \varphi_i(X, U, t)dt = c_i = const, \;\; i = 1..k, \tag{8.15}$$

де k - кількість інтегральних рівнянь.

Як приклад такого обмеження можна привести обмеження на витрату енергії в перехідному процесі:

$$\int_{t_0}^{t_{\hat{e}}} u^2(t)dt = c = const. \tag{8.16}$$

За допомогою певних перетворень ізопериметричні обмеження перетворюються в неголономні. Це перетворення полягає у введенні додаткових змінних, похідні яких за часом рівні підінтегральним виразам (8.16):

$$\dot{x}_{n+i} = \varphi_i(X, U, t), \;\; i = 1...z, \tag{8.17}$$

де z - кількість „нових” додаткових умов.

Умовно говорячи, нові змінні „розширюють” вихідну систему рівнянь об’єкта. Підставляючи (8.17) в (8.15), одержимо:

$$\int_{t_0}^{t_{\hat{e}}} \varphi_i(X, U, t)dt = \int_{t_0}^{t_{\hat{e}}} \dot{x}_{n+i} dt = x_{n+i}(t_{\hat{e}}) - x_{n+i}(t_0) = c_i. \tag{8.18}$$

Для спрощення вважають $x_{n+i}(t_0)=0$, тоді $x_{n+i}(t_{\hat{e}})=c_i$.

Типовим прикладом некласичних обмежень є обмеження на максимальні значення керуючих величин (обмеження на керування по модулю):

$$|u_i| \le u_{i,\max}, \;\; i = 1..m, \tag{8.19}$$

де m - кількість обмежень на керування.

Інший вид додаткових умов, що накладаються на задачу – це **крайові умови**, що визначають значення змінних об’єкта в початковий і кінцевий моменти часу перехідного процесу. За видом крайових умов розрізняють **задачі із закріпленими кінцями**, коли $X(t_0)$ і $X(t_к)$ відомі (задані), і **задачі з рухомими кінцями**, коли частина або всі компоненти цих векторів невідомі (можуть приймати довільні значення). Серед останніх задач часто зустрічаються **задачі з вільним правим кінцем**, у якій вектор $X(t_к)$ невідомий.

Залежно від визначеності моменту часу $t_к$ задачі розділяють на **задачі з фіксованим і нефіксованим часом**. До останнього типу задачі відноситься задачі на максимальну швидкодію.

Отже, задача оптимізації керування полягає в тому, щоб знайти такі вектори $U(t)$ і $X(t)$, які доставляють екстремум функціоналу критерію оптимальності з урахуванням усіх обмежень і крайових умов. Ці вектори називаються відповідно оптимальним керуванням і оптимальною траєкторією. У результаті розв'язку задачі оптимальне керування може бути знайдене або як **оптимальна програма**

$$U = U(t), \tag{8.20}$$

або як **оптимальна стратегія**

$$U = U(X). \tag{8.21}$$

Для побудови системи керування другий розв'язок, мабуть, більш бажаний, тому що дозволяє побудувати замкнену систему, здатну оптимальним чином функціонувати при будь-яких початкових умовах. Однак визначити оптимальну стратегію, як правило, набагато складніше, чим оптимальну програму.

Задачу керування можна вважати сформульованою математично, якщо: сформульована мета керування, яка визначена через критерій якості керування; визначені обмеження першого виду, які являють собою системи диференціальних або різницевих рівнянь, що обмежують можливі способи руху системи; визначені обмеження другого виду, які становлять собою систему алгебраїчних рівнянь або нерівностей, що враховують обмеженість ресурсів або інших величин, які використовуються при керуванні.

Спосіб керування, який задовольняє всі поставлені обмеження і зводить до мінімуму (максимуму) критерій якості керування, називають оптимальним керуванням.

8.2.3. Постановка задачі оптимального керування

Задачу керування можна вважати сформульованою математично, якщо: сформульована мета керування, що визначена через критерій якості керування; визначені обмеження першого виду, які являють собою системи диференціальних або різницевих рівнянь, що обмежують можливі способи руху системи; визначені обмеження другого виду, які являють собою систему алгебраїчних рівнянь або нерівностей, що враховують обмеженість ресурсів або інших величин, які використовуються при керуванні.

Спосіб керування, який задовольняє всім поставленим обмеженням і зводить до мінімуму (максимуму) критерій якості керування, називають оптимальним керуванням.

8.3. Класифікація задач оптимального керування

8.3.1. Однокрокові задачі прийняття рішень

В однокрокових задачах не розглядаються методи реалізації прийнятого рішення, тобто визначається не величина і характер керуючого впливу $\overline{u}$, а безпосередньо значення змінної стану системи $\overline{x}$, яке забезпечує найкраще досягнення мети керування.

Однокрокова задача прийняття рішення вважається заданою, якщо задані простір сукупності неконтрольованих зовнішніх факторів $\overline{V}$ з розподіленням ймовірностей $p(\overline{v})$ для всіх $\overline{v} \in \overline{V}$, простір станів (розв'язків) $\overline{X}$ і критерій якості прийняття рішення, який для цього випадку називають цільовою функцією. В літературі замість терміну "цільова функція" використовують також назву "функція виграшу" або "функція втрат". Цільову функцію, яка визначає в явному вигляді цілі керування, можна розглядати як вихідну величину y технічної системи. Цільову функцію, яка залежить від неконтрольованих зовнішніх впливів $\overline{v}$ і від стану технічної системи $\overline{x}$, можна записати у вигляді

$$\overline{y} = \overline{y}(\overline{x}, \overline{v}). \tag{8.22}$$

Розв'язок однокрокової задачі полягає в знаходженні таких $\overline{x} \in \overline{X}$, які зводять до мінімуму функцію $\overline{y}$, тобто задовольняють умову

$$\overline{x}^* = \left\{ \overline{x} \in \overline{X} \,\middle|\, \overline{y}(\overline{x}, \overline{v}) \right\} = \min. \tag{8.23}$$

Якщо стоїть задача не мінімізації, а максимізації функції $\overline{y}$, то вона не приводить ні до яких труднощів, бо якщо при $\overline{x} \in \overline{x}^*$ функція $\overline{y}(\overline{x}, \overline{v})$ досягає максимуму, то при тому ж $\overline{x}$ функція $-\overline{y}(\overline{x}, \overline{v})$ буде досягати мінімуму.

Існує ряд методів розв'язування однокрокової задачі прийняття рішення. Застосування того чи іншого методу залежить від способу задання множини допустимих рішень $\overline{x}$, від інформації про неконтрольований зовнішній вплив і від виду цільової функції $\overline{y}$. Ознайомимось з характеристиками цих методів.

Задачу називають детермінованою, якщо немає невизначеності у відношенні до неконтрольованого зовнішнього впливу. В детермінованих задачах простір неконтрольованого зовнішнього впливу $\overline{V}$ складається тільки з одного елементу $\overline{v}$, ймовірність якого дорівнює одиниці. В цьому випадку цільова функція буде залежати від стану технічної системи

$$y = y(\overline{x}) = y(x_1, \ldots, x_n). \tag{8.24}$$

Однокрокову детерміновану задачу називають класичною задачею оптимізації [29], якщо в ній мають місце обмеження

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \; m < n. \tag{8.25}$$

В цій задачі необхідно знайти значення $x_1, \ldots, x_n$, які задовольняють рівнянням (8.25) і мінімізують функцію $y(x_1, \ldots, x_n)$.

Однокрокові задачі отримали назву <u>математичного програмування</u>. Ці методи дають можливість знайти значення змінних $x_1, \ldots, x_n$, які задовольняють обмеженням

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) \begin{cases} \le b_i, \\ = b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ \ge b_i, \end{cases} \tag{8.26}$$

і перетворюють в мінімум цільову функцію $y(x_1, \ldots, x_n)$. На змінні часто накладають допоміжні умови невід’ємності їх значень. Необхідно відзначити, що математичне програмування являє собою не аналітичну, а алгоритмічну форму розв’язування задач, тобто дає не формулу, яка визначає кінцевий результат, а вказує лише обчислювальну процедуру, яка приводить до розв’язування задачі. Тому методи математичного програмування стають ефективними, головним чином, при використанні ЕОМ.

Найпростішим випадком задачі математичного програмування є задача лінійного програмування. Вона відповідає випадку, коли ліві частини обмежень (8.26) і цільова функція (8.24) являють собою лінійні функції від $x_1,\ldots,x_n$. В задачі лінійного програмування необхідно знайти невід'ємні значення змінних $x_1,\ldots,x_n$, які мінімізують цільову функцію

$$y(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{8.27}$$

і задовольняють системі обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1,\ldots,m\cdot \tag{8.28}$$

Будь-яку задачу математичного програмування, яка відрізняється від сформульованої, називають задачею нелінійного програмування. В задачах нелінійного програмування або цільова функція (8.24), або ліві частини обмежень (8.26), або те та інше являють собою нелінійні функції від $x_1,\ldots,x_n$. Однак до задачі нелінійного програмування відноситься і така, в якій цільова функція і обмеження мають вигляд (8.27) і (8.28), але пропонується, наприклад, цілочисельність змінних. Ця остання задача отримала назву задачі цілочисельного програмування.

Однокрокову задачу прийняття рішень називають стохастичною, якщо простір некерованих зовнішніх впливів $\overline{V}$ складається більш ніж з одного елементу, так що відомим є не дійсне значення некерованих впливів $\overline{v}$, а розподіл ймовірностей $p(\overline{v})$ на просторі $\overline{V}$.

Стохастичні задачі, які вимагають знаходження значень змінних, що задовольняють обмеженням (8.26) і мінімізують цільову функцію (8.24), називають задачами стохастичного програмування. Однак в багатьох випадках шляхом іншого визначення цільової функції задачі стохастичного програмування можуть бути зведені до задач лінійного програмування. Оскільки некерований зовнішній вплив $\overline{v}$ є випадковою величиною з розподілом ймовірностей $p(\overline{v})$ на просторі $\overline{V}$, то і значення $\overline{y}(\overline{x},\overline{v})$ при заданому $\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ також буде випадковою величиною з тим же розподілом ймовірностей $p(\overline{v})$ на просторі $\overline{V}$. Тому в цьому випадку за цільову функцію доцільно прийняти математичне сподівання функції $\overline{y}(\overline{x},\overline{v})$ на просторі $\overline{V}$.

Таким чином, для випадкових процесів цільова функція має вигляд

$$y_1(\overline{x}) = \sum_{\overline{v} \in \overline{V}} p(\overline{v}) y(\overline{x},\overline{v}). \tag{8.29}$$

Оскільки $y_1(\overline{x})$ являє собою детерміновану функцію від $\overline{x}$, то задача знаходження змінних $x_1,\ldots,x_n$, які задовольняють обмеженням (8.26) і перетворюють в мінімум цільову функцію (8.29), може бути розв'язана методами лінійного або нелінійного програмування.

Важливим випадком однокрокової стохастичної задачі прийняття рішення є випадок, коли величини $x_1,\ldots,x_n$ можуть приймати лише кінцеву множину значень. Методами розв'язування таких задач займається розділ математики, який отримав назву теорія стохастичних рішень.

Останнім часом значну увагу придають задачам, в яких рішення приймається не однією особою, а декількома (наприклад, двома), причому інтереси цих осіб протилежні. Прикладом може бути задача переслідування, в якій відстань між тим, хто переслідує, і тим, кого переслідують, залежить від рішень і дій обох цих осіб. При цьому той, хто переслідує, зацікавлений в тому, щоб максимально скоротити цю відстань, а той кого переслідують, в тому, щоб зробити її, по можливості, найбільшою. Подібні задачі отримали назву конфліктних ситуацій, а методи їх розв'язування розглядаються в теорії ігор. Осіб, що приймають рішення, називають гравцями.

Оскільки в конфліктній ситуації рішення кожним з гравців приймаються незалежно від рішень іншого гравця, при математичному описі конфліктної ситуації простір рішень необхідно розглядати як прямий добуток двох множин $\overline{X} \times \overline{Z}$, де $\overline{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ - простір рішень першого гравця; $\overline{Z} = \{z_1, \ldots, z_m\}$ - простір рішень другого гравця.

Елементи простору рішень $\overline{X} \times \overline{Z}$ будуть являти собою пари виду $(x, z), x \in \overline{X}, z \in \overline{Z}$, тобто будуть визначатись рішеннями, які приймає як перший, так і другий гравець. Для простоти вважаємо, що невизначеність в стані неконтрольованого зовнішнього впливу відсутня. Тоді цільова функція

$$y = y(\overline{x}, \overline{z}) \tag{8.30}$$

залежить тільки від елементів простору $\overline{X} \times \overline{Z}$.

Протилежність інтересів гравців полягає в тому, що перший гравеці, який робить вибір з множини $\overline{X}$, намагається своїм вибором мінімізувати цільову функцію, в той час як другий гравець, який робить вибір з множини $\overline{Z}$, намагається її максимізувати. Таким чином, суть конфліктної ситуації полягає в тому, що кожний гравець повинен прийняти найкраще зі своєї точки зору рішення, пам'ятаючи, що його суперник зробить те ж саме.

8.3.2. Динамічні задачі оптимізації керування

Серед задач керування значне місце займають задачі, в яких технічна система знаходиться в стані неперервного руху і змін під дією різних зовнішніх і внутрішніх факторів. Задачі керування такими технічними системами відносяться до класу динамічних задач керування.

Технічна система називається керованою, якщо серед діючих на неї різноманітних факторів існують такі, користуючись якими можна змінити характер її руху. Як вже вказувалось раніше, такі ціленаправлені дії називають керуваннями і позначають $\overline{u}(t)$.

Характер руху технічної системи визначається системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x}_i = g_i(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}), \quad \overline{x}_i(0) = c_i \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.31}$$

де c_i, $i = 1, \ldots, n$ характеризує початковий стан технічної системи.

Інколи цю систему скорочено записують в векторній формі у вигляді одного диференціального рівняння

$$\dot{\overline{x}} = \overline{g}(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}), \quad \overline{x}(0) = \overline{c}\,. \tag{8.32}$$

Керування $\overline{u}(t)$ входить в рівняння (8.32), оскільки це рівняння визначає не просто конкретний рух технічної системи, а лише її технічні можливості, які можуть бути реалізованими шляхом використання того або іншого керування з простору допустимих керувань $\overline{U}$.

Оцінити, наскільки при тому або іншому способі керування досягаються поставлені цілі, можна, як і раніше, шляхом введення цільової функції (8.24), яку в даному випадку зручно записати у вигляді

$$y = y_v\left[\overline{x}(t), \overline{u}(t)\right]. \tag{8.33}$$

Так, якщо $u(t)$ – миттєва витрата палива, а $x(t)$ – миттєва швидкість автомобіля, то з точки зору витрат палива якість керування в будь-який момент часу може бути охарактеризована величиною

$$y(t) = u(t)/x(t), \tag{8.34}$$

де $y(t)$ - миттєва витрата палива на одиницю шляху.

Природньо необхідно відзначити, що функція $y(t)$ буде залежати від некерованих зовнішніх впливів $\overline{v}$, тобто сукупності зовнішніх факторів, які визначають умови руху автомобіля.

Цільову функцію (8.34) використовують досить рідко, оскільки вона дає оцінку лише миттєвих значень процесу керування, тоді як в більшості випадків виникає необхідність оцінити процеси в технічних системах на протязі всього часу керування від 0 до t_1.

В багатьох випадках цільову функцію вдається підібрати таким чином, що оцінку процесу в технічній системі можна здійснити шляхом інтегрування цільової функції за весь час керування, тобто за критерій якості керування прийняти функціонал

$$\mathbf{I}(\overline{u}) = \int_0^{t_1} y_v\left[\overline{x}(t), \overline{u}(t)\right] dt \,. \tag{8.35}$$

Так, якщо цільова функція має фізичну суть витрат, то вираз (8.35) визначає сумарні витрати за весь процес керування.

Інколи мета керування являє собою бажаний хід процесу $\overline{z}(t)$. При цьому за цільову функцію можна взяти квадрат або абсолютне значення відхилення дійсного процесу $\overline{x}(t)$ від бажаного:

$$y(t) = \left[\overline{x}(t) - \overline{z}(t)\right]^2; \quad y(t) = \left|\overline{x}(t) - \overline{z}(t)\right|. \tag{8.36}$$

В цих випадках критерій якості керування (8.36) буде визначати повну квадратичну або абсолютну похибку.

В динамічних задачах керування поряд з обмеженнями $\overline{U} = \{u_1,\ldots,u_R\}$, які визначають простір допустимих керувань $\overline{u}$, доводиться мати справу з інтегральними обмеженнями виду

$$\int_0^{t_1} Q_\nu\left[\overline{x}(t), \overline{u}(t)\right]dt \le \mathbf{I}_m = \text{const}. \tag{8.37}$$

Досить часто доводиться мати справу з обмеженнями меж зміни миттєвого значення деякого параметра $a(\overline{x},\overline{u})$ в процесі керування. Позначимо через a_0 таке значення параметра *a*, перевищення якого є небажаним. Якщо підінтегральну функцію $Q_\nu(\overline{x},\overline{u})$, яка має назву в даному випадку <u>функції штрафу</u>, визначити із співвідношення

$$Q_\nu(\overline{x},\overline{u}) = \begin{cases} 0, & a \le a_0; \\ \left[a(\overline{x},\overline{u}) - a_0\right]^2, & a > a_0, \end{cases} \tag{8.38}$$

то інтегральне обмеження (8.38) буде визначати вимогу, щоб миттєве значення параметра *a* могло перевищувати a_0 лише короткочасно і на незначну величину. Ця умова буде виконуватись тим жорсткіше, чим менше $\mathbf{I}_m$. Так, при $\mathbf{I}_m = 0$ обмеження (8.38) взагалі не буде допускати перевищення *a* над a_0.

Обмеження виду (8.38) виникають також тоді, коли необхідно мати справу з обмеженими ресурсами (енергії, палива і т. п.).

На основі наведених співвідношень можна дати таке визначення оптимального керування в динамічних системах.

<u>Оптимальним</u> називається керування $\overline{u}^*(t)$, яке вибирається з простору допустимих керувань $\overline{U}$, таке, яке для системи, що описується

диференціальним рівнянням (8.32), мінімізує критерій якості (8.35) при заданих обмеженнях на ресурси (8.37), що використовуються в процесі керування.

Динамічні задачі керування, як і однокрокові, можуть бути детермінованими, якщо простір стану некерованих впливів $\overline{V}$ складається тільки з одного елементу v_0, і стохастичними, якщо простір станів некерованих впливів $\overline{V}$ складається більш ніж з одного елементу і заданий апріорний розподіл ймовірностей $p(\overline{v})$ на просторі $\overline{V}$.

Серед стохастичних задач важливе місце займають задачі адаптивного керування, які використовують в тих випадках, коли апріорних даних про стан некерованих впливів недостатньо для здійснення ефективного керування або коли відсутній достатньо точний опис самої технічної системи. Адаптивне керування має за мету уточнення даних про стан навколишнього середовища або властивості технічної системи безпосередньо в процесі керування шляхом випробовування різних способів керування і пошуку того з них, який в тих чи інших конкретних умовах виявляється найбільш ефективним.

8.3.3. Керування кінцевим станом

В ряді випадків характер руху технічної системи в процесі керування не викликає суттєвого інтересу, а важливим є тільки стан, який прийме технічна система в момент закінчення процесу керування. Прикладами подібних задач може бути доставка вантажу до заданого строку в заданий пункт призначення, досягнення технічною системою до назначеного терміну заданої продуктивності і т. п. Такі задачі називають задачами керування кінцевим станом.

Позначимо через $\overline{x}(t_1)$ стан технічної системи в кінцевий момент часу t_1. Тоді цільова функція має вигляд

$$y = y_v\left[\bar{x}(t_1)\right]. \qquad (8.39)$$

Оскільки $\bar{x}(t_1)$ залежить від характеру застосованого керування $u(t)$, то і значення y також буде залежати від застосованого керування. Тому задачу вибору оптимального керування можна сформулювати для цього випадку наступним чином: із простору допустимих керувань $\bar{U}$ вибрати таке керування $\bar{u}^*(t)$, яке для технічної системи, що описується диференціальним рівняннями (8.32), мінімізує цільову функцію (8.39) при обмеженнях (8.37) на ресурси, які використовуються в процесі керування.

9. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ТЕХНІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

У попередньому розділі була дана постановка задачі оптимального керування технічними (динамічними) системами. Викладемо стуність та проаналізуємо методи знаходження розвязків цієї задачі.

9.1. Класичне варіаційне числення

9.1.1. Задача із закріпленими кінцями й фіксованим часом

Розглянемо задачу пошуку безумовного екстремуму функціонала виду:

$$J\big(y(t),\dot{y}(t),t\big)=\int_{t_0}^{t_ê} f_0\big(y(t),\dot{y}(t),t\big)dt, \tag{9.1}$$

де *y(t)* - деяка функція незалежної змінної *t* (надалі - часу).

Припустимо, що функція *y(t)* доставляє екстремум функціоналу (9.1). Дамо цій функції приріст $\Delta y(t)$ такий, що:

$$\begin{cases}\Delta y(t_0)=0,\\ \Delta y(t_ê)=0.\end{cases} \tag{9.2}$$

Визначимо збільшення функціонала (9.1), викликане приростом функції $\Delta y(t)$:

$$\begin{aligned}\Delta J &= J\big(y(t)+\Delta y(t)\big)-J\big(y(t)\big)=\\ &=\int_{t_0}^{t_ê}\left[f_0\left(y(t)+\Delta y(t),\dot{y}(t)+\frac{d\Delta y}{dt},t\right)-f_0\big(y(t),\dot{y}(t),t\big)\right]dt.\end{aligned} \tag{9.3}$$

Розклавши підінтегральний вираз (9.3) у ряд Тейлора й відкинувши всі доданки вище першого порядку малості, одержимо так звану першу варіацію функціонала:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_{\hat{e}}} \left[\frac{\partial f_0}{\partial y} \Delta y(t) + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \frac{d\Delta y}{dt} \right] dt. \tag{9.4}$$

Перша варіація функціонала є головною (лінійною) частиною його збільшення. Проінтегруємо другий доданок підінтегрального виразу (9.4) по частинах:

$$\int_{t_0}^{t_{\hat{e}}} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \frac{d\Delta y}{dt} dt = \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \Delta y \Big|_{t_0}^{t_{\hat{e}}} - \int_{t_0}^{t_{\hat{e}}} \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \Delta y(t) dt. \tag{9.5}$$

Беручи до уваги вираз (9.2), одержимо:

$$\int_{t_0}^{t_{\hat{e}}} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \frac{d\Delta y}{dt} dt = -\int_{t_0}^{t_{\hat{e}}} \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \Delta y(t) dt. \tag{9.6}$$

Підставляючи вираз (9.6) в (9.4), запишемо:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_{\hat{e}}} \left[\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \right] \Delta y(t) dt. \tag{9.7}$$

Оскільки функція *y(t)* доставляє екстремум функціоналу (9.1), його перша варіація, визначена на цій функції, повинна бути рівною нулю:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_{\hat{e}}} \left[\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} \right] \Delta y(t) dt = 0. \tag{9.8}$$

Рівність (9.8) повинна мати місце для довільних функцій $\Delta y(t)$, що задовольняють крайовим умовам (9.2). Це можливо, якщо функція $\Delta y(t)$ множиться на нуль, тобто виконується рівність:

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} = 0. \tag{9.9}$$

Рівняння (9.9) називається **рівнянням Ейлера** [30].

Таким чином, якщо існує така функція *y(t)*, для якої функціонал (9.1) досягає екстремуму, то вона задовольняє рівнянню Ейлера (9.9).

Відзначимо, що рівняння (9.9) - це необхідна, але не достатня умова екстремуму функціонала (9.9), подібно тому, як рівність нулю похідної деякої функції в деякій точці не є достатньою умовою екстремуму функції в цій точці. Більше того, якщо екстремум і досягається, то невідомий його вид (мінімум або максимум). Отже, розв’язок рівняння (9.9) потребує перевірки. Однак у багатьох випадках при розв’язуванні реальних задач оптимального керування отриманий розв’язок і вид екстремуму можна обґрунтувати фізичними міркуваннями і таку перевірку не виконують.

У випадку, якщо функціонал залежить від декількох функцій:

$$J = \int_{t_0}^{t_{\hat{e}}} f_0\big(y_1(t), \dot{y}_1(t), y_2(t), \dot{y}_2(t), \ldots, y_n(t), \dot{y}_n(t)\big)dt, \tag{9.10}$$

необхідними умовами його екстремуму будуть рівняння Ейлера, записані щодо всіх невідомих функцій:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}_i} = 0, \quad i = 1 \ldots n, \tag{9.11}$$

де n – кількість невідомих функцій.

При розв’язуванні задач оптимального керування під функціями $y_i(t)$ потрібно розуміти невідомі траєкторії руху об’єкта $X(t)$ і саме керування $U(t)$. Тому в загальному випадку функціонал може мати вигляд:

$$J = \int_{t_0}^{t_{\hat{e}}} f_0\big(x_1(t), \dot{x}_1(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_n(t), u_1(t), \dot{u}_1(t), \ldots, u_m(t), \dot{u}_m(t)\big)dt, \tag{9.12}$$

де m – кількість керувань об’єктом.

Однак похідні компонентів вектора стану X можуть бути виражені через самі компоненти й керуючі впливи за допомогою рівнянь об’єкта, а похідні вектора керування у функціонал у більшості випадків не входять. Крім того, надалі для спрощення будемо вважати керування скалярним. З врахуванням цього функціонал запишемо у вигляді:

$$J = \int_{t_0}^{t_ê} f_0\big(x_1(t),\ldots,x_n(t),u(t)\big)dt. \tag{9.13}$$

Таким чином, розглядається задача Лагранжа.

На змінні стану й керування накладені різні обмеження. У класичному варіаційному численні розглядаються обмеження у вигляді неперервних функцій. Стосовно задач оптимізації динамічних режимів ці функції зв'язують між собою змінні стану об'єкта й керуючий вплив і являють собою не що інше, як диференціальні рівняння об'єкта:

$$\dot{x}_i = f_i(X,u,t), \quad i = 1...k, \tag{9.14}$$

де k – кількість диференціальних рівнянь руху об'єкта.

Рівняння (9.14) можуть бути представлені у вигляді неголономних обмежень у такий спосіб:

$$\varphi_i(X,\dot{X},u,t) = f_i(X,u,t) - \dot{x}_i = 0. \tag{9.15}$$

Для врахування обмежень використовується метод невизначених множників Лагранжа. Згідно з ним підінтегральна функція критерію розширюється шляхом включення в неї обмежень. Отримана в такий спосіб функція називається **функцією Лагранжа (лагранжианом)**:

$$L = f_0\big(X,u(t)\big) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\varphi_i(X,\dot{X},u,t), \tag{9.16}$$

де $\psi_i(t)$ – невідомі функції, що називаються множниками Лагранжа.

Відзначимо, що чисельно лагранжиан дорівнює функції $f_0\big(X,u(t)\big)$.

Надалі при пошуку екстремуму замість вихідного функціонала використовується функціонал:

$$J^* = \int_{t_0}^{t_ê} L(\ldots)dt. \tag{9.17}$$

Рівняння Ейлера для функціонала (9.17) приймуть вид:

$$\frac{\partial J^*}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial J^*}{\partial \dot{x}_i} = 0, \tag{9.18}$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial u} = 0. \tag{9.19}$$

Останнє рівняння являє собою рівняння Ейлера для керування. Його простий вид випливає з того, що в лагранжиан не входить похідна керування й $\frac{\partial J^*}{\partial \dot{u}} = 0$.

Очевидні також наступні рівності:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_i} = 0, \tag{9.20}$$

що представляють собою неголономні обмеження.

Система рівнянь (9.18–9.20) називається **рівняннями Ейлера-Лагранжа**. На практиці рівняння Ейлера-Лагранжа зручніше записувати через так звану **функцію Гамільтона (гамільтоніан)**:

$$H = f_0\big(X, u(t)\big) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) f_i(X, u, t) = L + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\dot{x}_i. \tag{9.21}$$

З врахуванням того, що $L = H - \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\dot{x}_i$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = -\psi_i$, рівняння (9.18-9.20) приймуть вид:

$$\frac{\partial I}{\partial x_i} + \frac{d\psi_i}{dt} = 0 \tag{9.22}$$

або

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial I}{\partial x_i}, \tag{9.23}$$

$$\frac{\partial I}{\partial u} = 0. \tag{9.24}$$

Очевидно також, що:

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_i} = f_i(X, u, t). \tag{9.25}$$

Рівняння (9.25) - це рівняння об'єкта, виражені через гамільтоніан. Надалі замість них можна безпосередньо використовувати вираз (9.14).

Система рівнянь (9.23)-(9.25) називається **системою Гамільтона**. Вона являє собою *2n* звичайних диференціальних рівнянь першого порядку у формі Коші (рівняння (9.23) і рівняння об'єкта (9.23)).

Таким чином, якщо існує керування *u(t)* і траєкторії *X(t)*, такі, що на них досягається екстремум функціонала (9.13), то снують не рівні одночасно нулю множники $\psi_i(t)$, що задовольняють рівнянням (9.23)–(9.25).

Щоб знайти оптимальне керування й оптимальні траєкторії необхідно розв'язати систему Гамільтона. Для цього, як відомо, потрібно *2n* додаткових умов. Якщо розглядається задача з фіксованим часом і закріпленими кінцями, то в якості додаткових виступають крайові умови: $X(t_0)=X_0$, $X(t_к)=X_к$ (кількість цих умов *2n*).

Виконаємо ще одне узагальнення: якщо функціонал (9.1) у підінтегральному виразі містить вищі похідні компонентів вектору стану *X* об'єкта керування, то необхідно використовувати рівняння Ейлера-Пуассона [31]:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial f_0(t, x, \dot{x}, \ldots, \overset{n}{x})}{\partial \overset{i}{x}} = 0. \tag{9.26}$$

У виразі (9.26) прийнято, що найвища похідна, яка входить у функціонал (9.1) має порядок *n*.

9.1.2. Задача з незакріпленими кінцями й фіксованим часом

Як і раніше, розглянемо спочатку задачу пошуку безумовного екстремуму функціонала однієї функції:

$$J(y(t),\dot{y}(t),t) = g_0\big(y(t_0), y(t_{\hat{e}})\big) + \int_{t_0}^{t_{\hat{e}}} f_0\big(y(t),\dot{y}(t),t\big)dt. \tag{9.27}$$

Інтегральна складова критерію визначає „якість” перехідного процесу на проміжку часу [t_0; $t_к$]. Функція $g_0(...)$ визначає складову якості, пов’язану з незакріпленими лівим і правим кінцями.

Відповідно до раніше наведеної класифікації задача пошуку екстремуму функціонала (9.27) є задачею Больца.

Для визначення необхідних умов екстремуму функціонала (9.27) необхідно знайти його першу варіацію й прирівняти її до нуля. Відзначимо, що збільшення $\Delta y(t)$ у цьому випадку приводить до збільшення інтеграла й функції $g_0(...)$. Це пов’язано зі збільшеннями значень функції Δy у незакріплених кінцях:

$$\begin{cases} \Delta y(t_0) \neq 0, \\ \Delta y(t_{\hat{e}}) \neq 0. \end{cases} \tag{9.28}$$

Визначимо збільшення функціонала (9.27), викликане збільшенням функції $\Delta y(t)$:

$$\Delta J = g_0\big(y(t_0)+\Delta y(t_0), y(t_{\hat{e}})+\Delta y(t_{\hat{e}})\big) - g_0\big(y(t_0), y(t_{\hat{e}})\big) +$$
$$+\int_{t_0}^{t_{\hat{e}}}\left[f_0\left(y(t)+\Delta y(t), \dot{y}(t)+\frac{d\Delta y}{dt}, t\right) - f_0\big(y(t),\dot{y}(t),t\big)\right]dt. \tag{9.29}$$

Розклавши ΔJ в ряд Тейлора й відкинувши всі доданки вищих порядків малості, одержимо першу варіацію функціонала:

$$\delta J = \frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)}\Delta y(t_0) + \frac{\partial g_0}{\partial y(t_к)}\Delta y(t_к) + \int_{t_0}^{t_к}\left[\frac{\partial f_0}{\partial y}\Delta y(t) + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}}\frac{d\Delta y}{dt}\right]dt. \tag{9.30}$$

Проінтегрувавши другий доданок підінтегрального виразу (9.27) по частинах, одержимо:

$$\delta J = \frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)}\Delta y(t_0) + \frac{\partial g_0}{\partial y(t_к)}\Delta y(t_к) + \int_{t_0}^{t_к}\frac{\partial f_0}{\partial y}\Delta y(t)dt + \left.\frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}}\Delta y\right|_{t_0}^{t_к} - \int_{t_0}^{t_к}\frac{d}{dt}\frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}}\Delta y(t)dt. \tag{9.31}$$

Оскільки функція *y(t)* доставляє екстремум функціоналу (9.27), його перша варіація на цій функції, повинна бути рівною нулю. Згрупувавши доданки в (9.31), запишемо:

$$\delta J = \left[\frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)} - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}}(t_0)\right]\Delta y(t_0) + \left[\frac{\partial g_0}{\partial y(t_к)} + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}}(t_к)\right]\Delta y(t_к) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_к}\left[\frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}}\right]\Delta y(t)dt = 0. \tag{9.32}$$

Рівність (9.32) повинна виконуватися при будь-яких функціях *Δy(t)* і їх крайових значеннях $\Delta y(t_0)$ і $\Delta y(t_к)$. Тому необхідні умови екстремуму функціонала (9.27) можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial g_0}{\partial y(t_0)} - \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}}(t_0) = 0, \tag{9.33}$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial y(t_к)} + \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}}(t_к) = 0, \tag{9.34}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}} = 0. \tag{9.35}$$

Рівняння (9.35) є рівняння Ейлера, а рівняння (9.34), (9.33) називаються **умовами трансверсальності**.

Умови трансверсальності зв'язують частинні похідні функцій $g_0(...)$ і $f_0(...)$ і після їхнього визначення перетворюються в алгебраїчні рівняння.

У випадку, коли функціонал залежить від декількох функцій, рівняння Ейлера записуються для всіх функцій, а умови трансверсальності - для всіх незакріплених кінців.

Стосовно задач оптимального керування об'єктом, що описується n диференціальними рівняннями першого порядку, функціонал якості приводиться звичайно до виду:

$$J = g_0\left(x_1(t_0), .. x_n(t_0), x_1(t_ê), .. x_n(t_ê)\right) + \int_{t_0}^{t_ê} f_0\left(x_1(t), .. x_n(t), u(t), t\right) dt. \quad (9.36)$$

Ми маємо n незакріплених лівих і n незакріплених правих кінців, що показано в (9.36). На практиці число незакріплених кінців звичайно менше, і $g_0(...)$ є функцією менш ніж $2n$ змінних.

Для врахування обмежень, що накладаються на функції $x_i(t)$, керування $u(t)$ і незакріплені кінці, використовується метод невизначених множників Лагранжа. Вихідний функціонал (9.36) „розширюється" шляхом включення в нього всіх обмежень (у вигляді лівих частин рівностей), помножених на невизначені множники Лагранжа:

$$J^* = G(\ldots) + \int_{t_0}^{t_ê} L(\ldots) dt, \quad (9.37)$$

$$G = g_0(...) + \sum_{i=1}^{r} \nu_i g_i(...), \quad (9.38)$$

$$L = f_0\left(X, u(t)\right) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) \varphi_i(X, \dot{X}, u, t), \quad (9.39)$$

де $g_i(...)=0$ – обмеження, що накладаються на незакріплені кінці (максимальна їхня кількість дорівнює числу незакріплених кінців); ν_i – невизначені множники Лагранжа.

Необхідними умовами екстремуму функціонала (9.36) будуть:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial u} = 0, \end{cases} \tag{9.40}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_j(t_0)} - \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right|_{t_0} = 0, \tag{9.41}$$

де j - індекс незакріплених лівих кінців,

$$\frac{\partial G}{\partial x_s(t_{\hat{e}})} + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s}\right|_{t_{\hat{e}}} = 0, \tag{9.42}$$

де s - індекс незакріплених правих кінців.

Рівняння (9.40) є рівняння Ейлера-Лагранжа, а рівняння (9.41) і (9.42) - умовами трансверсальності для функціонала (9.36).

Враховуючи, що $L = H - \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\dot{x}_i$, рівняння (9.40)–(9.42) можна записати через функцію Гамільтона:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x_i} = -\dot{\psi}_i, \\ \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0, \end{cases} \tag{9.43}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_j(t_0)} = -\psi_j(t_0), \tag{9.44}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_s(t_{\hat{e}})} = \psi_s(t_{\hat{e}}). \tag{9.45}$$

Як вже вказувалося, рівняння (9.43) разом з рівняннями об'єкта утворюють систему з $2n$ диференціальних рівнянь першого порядку. Для їхнього розв'язку необхідно $2n$ додаткових умов. Якщо задача містить r незакріплених кінців, то ми маємо $2n$-r крайових умов і r умов трансверсальності (9.44), (9.45). Таким чином, загальне число умов рівне $2n$, і, отже, задача має розв'язок [32].

9.2. Принцип максимуму Понтрягіна

9.2.1. Проблеми розв'язування варіаційних задач

При знаходженні оптимального керування варіаційними методами доводиться мати справу з труднощами, які мають принциповий характер:

1. варіаційні методи дають можливість знаходити тільки відносні максимуми функціонала, тоді як інтерес викликає знаходження абсолютного максимуму або мінімуму.
2. рівняння Ейлера для багатьох технічних систем виявляються нелінійними, що часто не дає можливості отримати розв'язок варіаційної задачі в явному вигляді.
3. часто оптимальне керування технічними системами має розриви. Метод множників Лагранжа не в змозі визначити кількість і місце розташування точок розриву, і тому в цих випадках він не дає можливості знайти оптимальне керування.
4. на значення керуючих впливів і фазових координат технічних систем досить часто вводяться обмеження у вигляді нерівностей, що не дає змоги знаходити оптимальне керування варіаційними методами.

Оскільки остання обставина мала вирішальне значення для розвитку нових ідей в області оптимального керування, то зупинимось на ній більш детально.

Звичайними обмеженнями, що накладаються на сигнали керування, є обмеження виду

$$\left| u_i(t) \right| \le M_i \tag{9.46}$$

які означають необхідність обмеження по величині сигналів керування. Так, обмеженими можуть бути: напруга, яка підводиться до якоря електродвигуна, граничний кут повороту руля автомобіля, гранична температура в камері згоряння двигуна внутрішнього згоряння тощо. При цьому отримання оптимальних процесів вимагає, як правило, підтримання сигналів керування на граничних значеннях, що відповідає найбільш швидкому і ефективному проходженню процесів в технічній системі. Типовий для цих випадків характер зміни керування $u(t)$ при оптимальному процесі приведено на рис. 9.1.

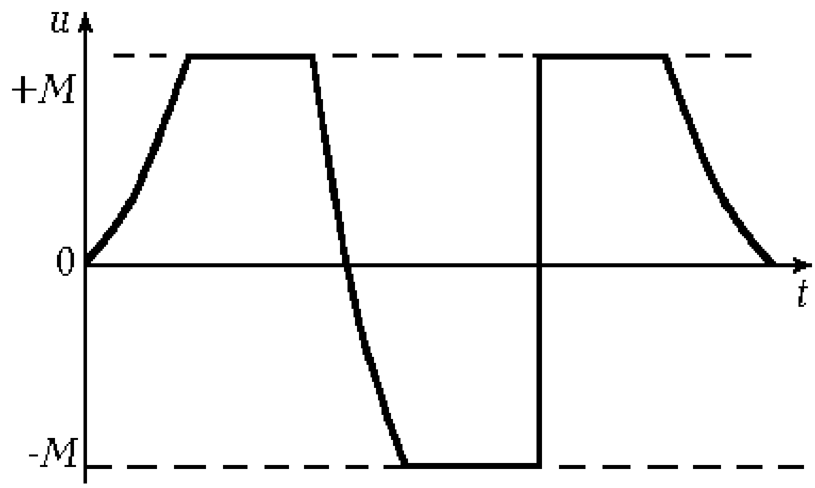


Рис. 9.1. Характерний вигляд оптимального сигналу керування технічною системою

Однак граничні значення керування $u(t)$ лежать на межах області допустимих керувань U і, природно, не є внутрішніми точками цієї області, для яких тільки справедливі варіаційні методи. Правда, від обмежень виду (9.46) можна позбутись шляхом введення нових змінних v_i, які зв'язані зі змінними u_i співвідношенням $u_i = M_i \sin v_i$. При цьому значення $|u_i| = M_i$ будуть відповідати змінним $v_i = \pm\pi/2$, які є внутрішніми точками області нових допустимих керувань. Однак така заміна змінних, як правило, приводить до значного ускладнення отриманих рівнянь.

Наведені труднощі сприяли інтенсивному вивченню проблеми оптимальності керування технічними системами. Л.С.Понтрягін і його учні, В.Г.Болтянський, Р.В.Гамкрелідзе і Є.Ф.Міщенко, створили теорію оптимального керування [33], в основі якої лежить сформульваний

Л.С.Понтрягіним принцип максимуму як необхідна умова екстремуму функціонала при різних обмеженнях і умовах. Цей принцип дозволив побудувати теорію оптимального керування на строгій математичній основі і відкрив широкі можливості для її практичного застосування при керуванні технічними системами.

9.2.2. Формулювання принципу максимуму

Мета керування в задачі оптимального керування полягає в мінімізації деякого функціоналу. Розглянемо задачу з функціоналом

$$\mathbf{I} = \int_0^{t_1} f_0\big(x(t),\, u(t),\, t\big)dt + \Phi\big(x(t_1),\, t_1\big), \tag{9.47}$$

який являє собою суму інтегрального функціоналу $\int_0^{t_1} f_0\big(x(t),u(t),t\big)dt$ і термінального функціоналу $\Phi\big(x(t_1),t_1\big)$. Задача з інтегральним функціоналом при $f_0 = 1$ називається задачею **оптимальної швидкодії**.

Відзначимо, що при фіксованих t_1, x_0 і допустимому керуванні $u(t)$ стан технічної системи $x(t)$ і значення функціоналу (9.47) визначаються однозначно. Задача оптимального керування полягає в мінімізації цього функціоналу на множині наборів (t_1, x_0, u, x).

Набір (t_1, x_0, u, x), який мінімізує функціонал (9.47), називається розв'язком задачі оптимального керування, керування u – оптимальним керуванням, а x – оптимальним станом. Часто розв'язком задачі оптимального керування називають пару (u, x).

Розглянемо наступну задачу оптимального керування з функціоналом (9.47):

$$\mathbf{I}(u) = \int_0^{t_1} f_0\big(x(t),u(t),t\big)dt \to \min,$$

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t), t\big), x(0) \in X_0, x(t_1) \in X_1$$
$$u(t) \in U, 0 \le t \le t_1. \qquad (9.48)$$

При цьому вважається, що момент t_1 не фіксований, тобто розглядається задача з незакріпленим часом; множина U не залежить від часу, а фазові обмеження відсутні. Введемо функцію:

$$H(x,u,t,\psi_0,\psi) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(x,u,t), \qquad (9.49)$$

де ψ_0 - константа, $\psi(t) = \big(\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t)\big)$. Функція H називається **функцією Гамільтона**, яка відіграє тут роль, аналогічну функції Лагранжа у варіаційному численні. Функцію H називають також **функцією Понтрягіна**. Функції Лагранжа і Гамільтона (Понтрягіна) мають такий самий вигляд, що і відповідні функції у варіаційних задачах класичного типу, тільки в ці функції не входять обмеження на керування, які в цьому випадку мають вигляд включення $u \in U$. Відзначимо, що область керування при цьому може мати будь-яку довільну природу. Вона може бути замкненою множиною або складатись зі скінченного числа ізольованих точок. Саме в цьому полягає принципова різниця між теорією оптимального керування і теорією класичного варіаційного числення, де завжди вважалось, що область зміни функцій керування відкрита і вони є неперервними, а функції $f(x,u,t)$ і $f_0(x,u,t)$ неперервно-диференційовані. Для розглянутої задачі справедлива теорема [33]: *нехай вектор-функція $u^*(t)$ є оптимальним керуванням, а вектор-функція $x^*(t)$ – відповідним оптимальним станом у сформульованій задачі оптимального керування. Тоді існує неперервна вектор-функція $\psi^*(t) = \big(\psi_1^*(t),\ldots,\psi_n^*(t)\big)$ і число $\psi_0^* \le 0$ таке, що:*

1) вектор-функція виду $\psi^* = \big(\psi_0^*(t), \psi^*(t)\big)$, $0 \le t \le t_1$ є нульовий;

2) *вектор-функція $\psi^*(t)$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь*

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} H\big(x(t), u(t), t, \psi_0, \psi(t)\big)\Big|_{\substack{u=u^*(t)\\ x=x^*(t)}} =$$

$$= -\psi_0 \frac{\partial}{\partial x_i} f_0\big(x(t), u(t), t\big) - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_j\big(x(t), u(t), t\big), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (9.50)$$

3) *при кожному $t \in [0, t_1]$ функція $H\big(x^*(t), \psi^*(t), u\big)$ векторної змінної $u = (u_1, \ldots, u_m)$ досягає максимуму на множині $u = u^*(t)$, тобто*

$$H\big(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)\big) = \max_{u \in U} H\big(x^*(t), \psi^*(t), u\big),$$
$$0 \le t \le t_1; \qquad (9.51)$$

4) *при кожному $t \in [0, t_1]$ виконується рівність*

$$H\big(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)\big) = 0. \qquad (9.52)$$

В формулюванні цієї теореми головною є умова максимуму (9.52). Саме тому теорему і назвали принципом максимуму. Умова 1 теореми виключає випадок $H \equiv 0$ і робить рівність (9.52) змістовною.

За допомогою функції Гамільтона праву частину рівнянь стану з (9.48) можна записати у вигляді

$$f_i\big(x, u, t\big) = \frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial \psi}, i = 1, \ldots, n \qquad (9.53)$$

Тоді початкову систему рівнянь стану з (9.48) разом з лінійною системою (9.50), яку називають **спряженою системою**, часто записують в симетричному вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \partial H(x, \psi, u, t) / \partial \psi_i; \\ \dot{\psi}_i &= -\partial H(x, \psi, u, t) / \partial x_i, i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \qquad (9.54)$$

Якщо в конкретній задачі вдається показати, що $\psi_0^* \neq 0$, то завжди можна прийняти $\psi_0^* = -1$, оскільки рівності (3.50) - (3.52) не змінюються при множенні їх на довільне число. Можливий випадок також, коли $\psi_0^* = 0$. Тоді функція Гамільтона не включає f_0, а це означає, що необхідні умови теореми 1 не включають інформації про функціонал $\mathbf{I}(u)$. Замінюючи початковий функціонал іншим, отримаємо для нової задачі ті ж самі умови оптимальності в формі принципу максимуму, що і для початкової. Задачі оптимального керування подібного типу називають **особливими** (або виродженими).

Рівність (9.52) використовується, в основному, для визначення кінцевого моменту часу t_1 і включена в число необхідних умов оптимальності тому, що тут розглядається задача з нефіксованим часом керування. Якщо функції $u^*(t)$ і $\psi^*(t)$ задовольняють рівностям (9.50), (9.48), то $H\left(x^*(t),\psi^*(t),u^*(t),t\right) = const$ і тому при розв’язуванні конкретної задачі рівність (9.52) достатньо перевірити тільки для одного довільного фіксованого моменту $t \in (0,t_1)$.

Теорема про принцип максимуму не дає повної відповіді на питання, як знайти оптимальне керування, оскільки про вектор $\psi(t)$ нам відомо тільки те, що це певний розв’язок системи (9.53), але невідомо, який саме. Однак принцип максимуму дає інформацію про структуру оптимального керування, що полегшує розв’язок задачі.

Принцип максимуму дає тільки необхідні умови оптимальності. Тому, якщо певне допустиме керування задовольняє цьому принципу, то воно не обов’язково є оптимальним. Функцію $u^*(t)$, яка задовольняє всім умовам теореми, називають екстремаллю Понтрягіна. Лише для деяких класів задач (наприклад, лінійних задач оптимальної швидкодії) принцип максимуму є як необхідною, так і достатньою умовою оптимальності.

В прикладних задачах принцип максимуму нерідко дозволяє однозначно визначити оптимальне керування. Так, якщо завчасно відомо, що оптимальне керування існує і, крім того, знайдено єдине допустиме керування, то це єдине керування є оптимальним.

Наведемо також формулювання принципу максимуму для задачі з **фіксованим часом керування**. Для цього звернемось до задачі оптимального керування, яка відрізняться від попередньої тільки тим, що тут час керування t_1 будемо вважати фіксованим, тобто заданим з самого початку. Для цієї задачі справедлива наступна теорема: *нехай вектор-функція* $u^*(t)$ *являє собою оптимальне керування, а* $x^*(t)$ *– відповідний йому оптимальний стан системи в задачі оптимального керування з фіксованим часом керування* t_1*. Тоді існує неперервна вектор-функція* $\psi^*(t) = \left(\psi_1^*(t),\ldots,\psi_n^*(t)\right)$ *і число* $\psi_0^* \leq 0$ *такі, що виконуються умови* 1), ...,3) *попередньої теореми.*

Єдине, чим відрізняються умови оптимальності даної теореми від умов оптимальності першої теореми полягає у відсутності рівності (9.52). В розглянутій задачі час t_1 задано, тому стає зайвою умова для його визначення.

9.2.3. Методика використання принципу максимуму

Зупинимось на схемі застосування принципу максимуму. Розглянемо задачу оптимального керування з фіксованим часом керування. Знаходження екстремалі Понтрягіна починається з центральної умови принципу максимуму

$$H(x,\psi,u) \to \max, \quad u \in U \tag{9.55}$$

з якої при кожному фіксованому наборі x, ψ визначають керування *u*, яке є функцією параметрів x і ψ, тобто

$$u = u(x,\psi). \tag{9.56}$$

В загальному випадку це зробити досить складно, однак для деяких класів задач керування функцією (9.56) вдається записати в явному вигляді. Нехай, наприклад,

$$\begin{aligned} &f_i(x,u) = f_i(x) + \sum_{k=1}^{m} f_{ik}(x) u_k, i = 0,1,\ldots,n, \\ &U = \{u \in R^m\}, a_k \le u_k \le b_k, k = 1,2,\ldots,m, \end{aligned} \tag{9.57}$$

де a_k, b_k - задані числа. В цьому випадку функція Гамільтона має вид

$$H = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(x) + \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \psi_i f_{ik}(x) \right] u_k \tag{9.58}$$

і досягає максимуму (завдяки лінійності по *u*) тільки в граничних точках множини *U*, а саме при

$$u_k = \begin{cases} b_k, \text{ при } \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_{ik}(x) > 0; \\ a_k, \text{ при } \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_{ik}(x) < 0. \end{cases} \tag{9.59}$$

Припустимо, що функція (9.59) знайдена. Підставимо її в початкову і спряжену їй системи. В результаті цього будемо мати

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, u(x,\psi)), \\ &\dot{\psi} = -\partial H(x,\psi,u(x,\psi))/\partial x, \ \ 0 \le t \le t_1, \end{aligned} \tag{9.60}$$

де $\dot{\psi} = (\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \ldots, \dot{\psi}_n)$, $\partial H/\partial x = (\partial H/\partial x_1, \partial H/\partial x_2, \ldots, \partial H/\partial x_n)$.

Отримано систему $2n$ диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, загальний розв'язок якої містить $2n$ довільних постійних. Після знаходження загального розв'язку ці довільні постійні визначають з $2n$ крайових умов:

$$x(0) = x^{(0)}, x(t_1) = x^{(1)}. \quad (9.61)$$

В результаті використання умов (9.61) отримують деякі функції $\bar{x}(t)$ і $\bar{\psi}(t)$. Для визначення ψ_0 достатньо, як відмічалось раніше, розглянути два випадки, $\psi_0 = 0$ і $\psi_0 = -1$, і встановити, який з них має місце в дійсності. При цьому необхідно враховувати, що вектор-функція $\left(\bar{\psi}_0, \overleftarrow{\psi}(t)\right)$ повинна бути ненульовою.

Нехай функції $\bar{x}(t)$ і $\bar{\psi}(t)$ знайдені. Тоді, підставивши їх в (9.56), отримаємо

$$u = u\left(\bar{x}(t),\ \bar{\psi}(t)\right),\ 0 \le t \le t_1 \quad (9.62)$$

Припустимо, що функція $\bar{u}$ виявилась кусково-неперервною, причому $\bar{u} = u\left(\bar{x}(t),\ \bar{\psi}(t)\right) \in U$ при кожному $t \in [0, t_1]$. Тоді ця функція є екстремаллю Понтрягіна, а це значить, що вона входить в число керувань, які можуть бути оптимальними. Якщо відомо, що розв'язок задачі оптимального керування існує і доведено, що екстремаль Понтрягіна $\bar{u}$ єдина, то вона є оптимальним керуванням.

Таким чином, застосування принципе максимуму зводиться до задачі використання умов максимуму (9.55) і розв'язування системи диференціальних рівнянь (9.60) з крайовими умовами (9.61). Це крайова задача принципе максимуму. В тих випадках, коли її аналітично розв'язати не вдається, то використовують різні чисельні методи [34].

9.2.4. Використання принципу максимуму для розв'язання задачі оптимальної швидкодії

Розглянемо горизонтальне переміщення кранового візка з жорстким підвісом вантажу (рис. 9.2).

Нехай в початковий момент часу $t = 0$ візок, який ми ототожнюємо з матеріальною точкою знаходиться в положенні $x = 0$ і має швидкість $v = 0$. Задача полягає в тому, щоб вибрати такий режим роботи приводного механізму, при якому візок перемістився б в положення $x = \Delta x$ і при цьому його швидкість була рівною нулю.

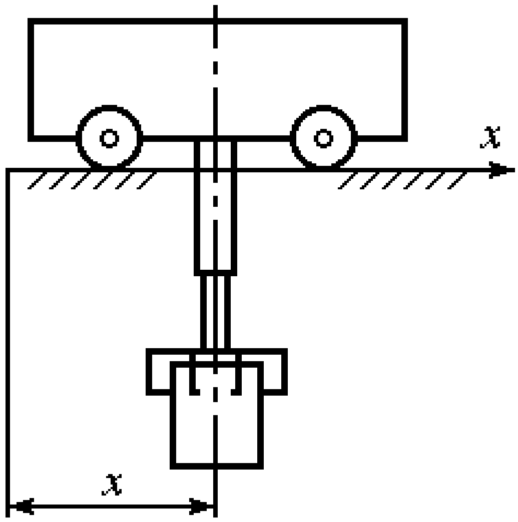


Рис. 9.2. Схема горизонтального руху кранового візка з жорстким підвісом вантажу

В системі координат, яка пов'язана з поверхнею рейок візка (ось x направлена вздовж руху візка), рівняння руху візка з приводним механізмом має такий вигляд:

$$m\ddot{x}(t) = F(t) - F_0, \tag{9.63}$$

де $x(t)$ - координата центра мас візка; $m_{\cdot}$- приведена до центра мас візка маса елементів приводу і візка; $F(t)$ - приведена до ободу приводних коліс візка рушійна (гальмівна) сила приводу; F_0 - сила опору переміщенню візка, яку приймаємо постійною ($F_0 = const$).

Очевидно, значення сили $F(t)$ не може бути скільки завгодно великим. Воно обмежене технічними можливостями приводного механізму, тобто

$$-F_г \leq F(t) \leq F_p, \quad t \in [0,\ t_1], \tag{9.64}$$

де F_p, $F_г$ - максимально допустимі рушійне і гальмівне зусилля приводу, які є величинами постійними ($F_г$=*const*, F_p=*const*); t_1 - тривалість руху візка.

При цих умовах можливі декілька різних режимів роботи приводного механізму, які забезпечать необхідне переміщення візка. Необхідно вибрати такий режим руху візка, який з певної точки зору є найбільш вигідним. Виберемо за критерій такої вигоди мінімум тривалості руху візка, яка забезпечує максимальну продуктивність кранового механізму. Інтегральний функціонал такого критерію має вигляд:

$$\mathbf{I} = \int_0^{t_1} dt \to \min. \tag{9.65}$$

Тепер можна математично сформулювати задачу оптимального керування переміщенням кранового візка: знайти кусково-неперервну функцію $F(t)$, підпорядковану нерівностям (9.64), при якій розв’язок $x(t)$ рівняння (9.63) задовольняє при $t = 0$ заданим початковим умовам:

$$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0, \tag{9.66}$$

а при деякому $t = t_1$ – умовам

$$x(t_1) = \Delta x,\ \dot{x}(t_1) = 0 \tag{9.67}$$

причому такий, що функціонал (9.65) приймає мінімально можливе значення на множині таких функцій *F*. При цьому вважаємо, що клас кусково-неперервних функцій є найбільш широким класом технічно реалізуємих функцій $F(t)$.

Сформульована задача є простою задачею оптимального керування. Керуванням в цій задачі служить функція $F(t)$. Введемо такі позначення: $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, $F(t) = u(t)$, $F_p = a$, $F_г = b$, $F_0 = c$.

Після цього задачу оптимального керування рухом візка запишемо в такому вигляді: знайти кусково-неперервну функцію $u(t)$, що задовольняє нерівностям $-b \le u(t) \le a,\ 0 \le t \le t_1$, для якої розв'язок $x(x_1(t),\ x_2(t))$ системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \left(u(t) - c\right)/m \end{cases} \tag{9.68}$$

задовольняє крайовим умовам

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0; \\ x_1(t_1) = \Delta x,\ x_2(t_1) = 0. \end{cases} \tag{9.69}$$

причому функціонал (9.65) досягає свого найменшого значення.

Складемо функцію Гамільтона (Понтрягіна) для цієї задачі

$$H = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 \left(u(t) - c\right)/m. \tag{9.70}$$

Використавши для цієї функції спряжену систему, отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1. \end{cases} \tag{9.71}$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд

$$\begin{cases} \psi_1(t) = c_1; \\ \psi_2(t) = -c_1 t + c_2. \end{cases} \tag{9.72}$$

де c_1, c_2 - постійні інтегрування. Функція H (9.70) лінійна по відношенню до u, тому умова максимуму для неї виконується тільки при

$$u^*(t) = \begin{cases} a, \psi_2^*(t) > 0, \\ b,\ \psi_2^*(t) < 0. \end{cases} \tag{9.73}$$

Таким чином, оптимальне керування $u^*(t)$ може приймати лише два значення a і $-b$ і має, виходячи з лінійності функції ψ_2^*, не більше одного перемикання, тобто такої точки, в якій функція $u^*(t)$ змінює свій знак. Тоді оптимальне керування має вигляд:

$$u^*(t) = \begin{cases} a,\ 0 \le t < t_2, \\ -b,\ \mathrm{t}_2 \le t \le t_1, \end{cases} \tag{9.74}$$

де t_2 - момент перемикання керування. За допомогою системи рівнянь (9.69) при керуванні (9.74) знайдемо оптимальний за швидкодією режим руху кранового візка:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \begin{cases} [(a-c)/m]t^2/2 + c_1 t + c_3, 0 \le t < t_2, \\ -[(b+c)/m]t^2/2 + c_2 t + c_4,\ \mathrm{t}_2 \le t \le t_1, \end{cases} \\ x_2(t) &= \begin{cases} [(a-c)/m]t + c_1, 0 \le t < t_2, \\ -[(b+c)/m]t + c_2,\ \mathrm{t}_2 \le t \le t_1, \end{cases} \end{aligned} \tag{9.75}$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 - постійні інтегрування. З крайових умов руху візка знаходимо постійні інтегрування:

$$\begin{cases} c_1 = c_3 = 0; \\ c_2 = [(b+c)/m]t_1; \\ c_4 = \Delta x - [(b+c)/m]t_1^2/2. \end{cases} \tag{9.76}$$

З умов неперервності швидкості $\dot{x}$ та переміщення x кранового візка знайдемо моменти часу перемикання рушійної сили t_2 і мінімальної тривалості руху t_1:

$$t_1 = \sqrt{2\frac{(a+b)\Delta x}{(a+c)(b+c)}}; \quad t_2 = \frac{b+c}{a+b} t_1. \tag{9.77}$$

Оптимальним за швидкодією при обмеженнях рушійної і гальмівної сили приводу є режим руху кранового візка, який складається з ділянок рівноприскореного руху і рівносповільненого гальмування (рис. 9.3).

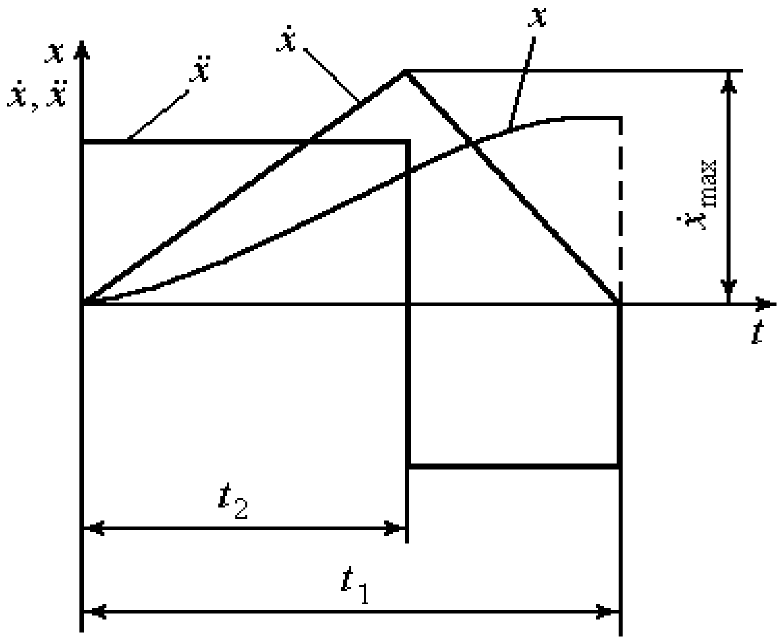


Рис. 9.3. Графіки зміни переміщення x, швидкості $\dot{x}$ і прискорення $\ddot{x}$ візка при оптимальному за швидкодією режимі руху при обмеженнях на діючі сили

9.3. Метод динамічного програмування

Метод динамічного програмування запропонований Р. Беллманом в основному для оптимізації дискретних багатокрокових процесів, однак застосовується й для неперервних систем.

На відміну від варіаційного числення й принципу максимуму, спрямованих на відшукання оптимального керування у вигляді оптимальної програми, метод динамічного програмування орієнтований на пошук оптимальної стратегії.

В основу методу покладений наступний **принцип оптимальності**: *оптимальна стратегія має ту властивість, що незалежно від того, яким був первісний стан системи й первісний розв'язок (керування), наступні розв'язки (наступне керування) повинні бути оптимальні щодо стану, який виник після прийняття першого розв'язку*. Це означає, що оптимальна стратегія в будь-який момент часу визначається тільки тим станом, у якому перебуває система в даний момент.

Розглянемо застосування методу для неперервних систем. Для простоти будемо вважати керування скалярним. Нехай рух об'єкта визначається рівняннями

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n, u, t), \quad i = 1...n \tag{9.78}$$

або у векторній формі:

$$\dot{X} = f(X, u, t). \tag{9.79}$$

Необхідно визначити оптимальну стратегію $u=u(X)$, яка мінімізує функціонал:

$$J = \int_0^{t_ê} f_0(X(t), u(t))dt \tag{9.80}$$

з урахуванням крайової умови $X(t_к)=X_к$.

Згідно з методом динамічного програмування за початковий стан об'єкта можна прийняти будь-який стан X. При цьому мінімальне значення функціонала й оптимальне керування, що переводить об'єкт зі стану X у стан

$X_к$, однозначно визначаються станом X. Позначимо мінімальне значення функціонала так $S(X)$:

$$S(X) = \min_{u \in U} \int_0^{t_{\hat{e}}} f_0\big(X(t), u(t)\big)dt, \tag{9.81}$$

де U - область припустимих керувань.

Відмітимо, що $S(X_к)=0$, що безпосередньо випливає з (9.81). Інтеграл, що входить в вираз (9.81), можна представити у вигляді:

$$\int_0^{t_{\hat{e}}} f_0\big(X(t), u(t)\big)dt = \int_0^{\Delta t} f_0\big(X(t), u(t)\big)dt + \int_{\Delta t}^{t_{\hat{e}}} f_0\big(X(t), u(t)\big)dt. \tag{9.82}$$

Допустимо, на інтервалі $t=0 \ldots \Delta t$ керування було оптимальним. Надалі керування повинно вибиратися, виходячи із принципу оптимальності:

$$\int_{\Delta t}^{t_{\hat{e}}} f_0\big(X(t), u(t)\big)dt = S\big(X(\Delta t)\big) \tag{9.83}$$

тобто повинно бути оптимальним щодо стану $X(\Delta t)$.

Оскільки траєкторія $X(t)$ неперервна, то при $\Delta t \to 0$ справедливо наступне:

$$X(\Delta t) \to X + \dot{X}\Delta t = X + f(X, u)\Delta t, \tag{9.84}$$

$$\int_0^{\Delta t} f_0\big(X(t), u(t)\big)dt \to f_0\big(X, u\big)\Delta t, \tag{9.85}$$

де X, u - значення координат об'єкта й керування в початковий момент часу.

Підставимо вираз (9.84) в (9.83). Результат разом з (9.85) підставимо в (9.82) і далі в (9.79), (9.80), будемо мати:

$$J = f_0(X, u)\Delta t + S\big(X + f(X, u)\Delta t\big), \tag{9.86}$$

$$S(X)=\min_{u\in U}\left(f_0(X,u)\Delta t+S\left(X+f(X,u)\Delta t\right)\right), \tag{9.87}$$

Припустимо, що S – неперервно-диференційована по X функція, тоді при $\Delta t\to 0$:

$$S\left(X+f(X,u)\Delta t\right)\to S(X)+\frac{\partial S}{\partial X}f(X,u)\Delta t, \tag{9.88}$$

де

$$\frac{\partial S}{\partial X}f(X,u)=\frac{\partial S}{\partial x_1}f_1(X,u)+\frac{\partial S}{\partial x_2}f_2(X,u)+...+\frac{\partial S}{\partial x_n}f_n(X,u). \tag{9.89}$$

Отже:

$$S(X)=\min_{u\in U}\left(f_0(X,u)\Delta t+S(X)+\frac{\partial S}{\partial X}f(X,u)\Delta t\right). \tag{9.90}$$

З виразу (9.89) одержимо:

$$\min_{u\in U}\left(f_0(X,u)\Delta t+\frac{\partial S}{\partial X}f(X,u)\Delta t\right)=0. \tag{9.91}$$

Оскільки $\Delta t\neq 0$, остаточно запишемо:

$$\min_{u\in U}\left(f_0(X,u)+\frac{\partial S}{\partial X}f(X,u)\right)=0. \tag{9.92}$$

Рівняння (9.92) називається **функціональним рівнянням Беллмана**. Воно зв’язує *S(X)* з функціями *u* і *X*, що забезпечують мінімум функціонала. Його розв’язок дозволяє визначити не тільки функцію *S(X)*, але й оптимальні траєкторії і оптимальне керування. Якщо функціонал, який потребує мінімізації є квадратичним, то розв’язок рівняння (9.92) прийнято шукати у вигляді квадратичної форми.

Зазначимо, що використання дискретного динамічного програмування дозволяє отримати глобальний мінімум функціоналу, однак при його знаходженні необхідна велика кількість пам’яті ЕОМ (прокляття розмірності).

Перевагою методу динамічного програмування є те, що воно дає змогу отримати адаптивне оптимальне керування, тобто таке, яке є функцією поточних координат мехатронної системи u=u(t, x(t)). Недоліком притаманним даному методу є складність (в деяких випадках неможливість) розвязання рівняння Беллмана (9.92) [35].

Зв’язок між варіаційним численням, принципом максимуму та динамічним програмуванням наведено у Додатку Б.

9.4. Прямі варіаційні методи

Диференціальні рівняння оптимізаційних задач інтегруються у кінцевому виді лише у небагатьох випадках [30]. У зв’язку з цим виникає потреба в інших методах розв’язку цих задач. Основна ідея прямих методів полягає у тому, що оптимізаційна задача розглядається як гранична, для деякої задачі на екстремум функції кінцевого числа змінних. Ця задача на екстремум функції кінцевого числа змінних розв’язується звичайними методами, а потім граничним переходом отримується розв’язок відповідної оптимізаційної задачі.

Різниця між прямими методами та аналітичними методами розв’язування варіаційних задач полягає у тому, що у другому випадку спочатку знаходять множину екстремалей, а потім із цієї множини виділяють ту екстремаль (шляхом підбору крайових умов), яка задовольняє початкову та кінцеву точки фазового простору. Однак до розв’язування задач оптимізації можна підійти і з іншого боку – спочатку знайти усю множину допустимих кривих, при яких система переходить з початкового у кінцевий стан, а потім з цієї множини кривих обрати ту, яка мінімізує (максимізує) заданий функціонал [36].

Наведемо функціонал деякої варіаційної задачі, наприклад найпростіший:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} P(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))dt, \tag{9.93}$$

де P - підінтегральна функція; t_0 та t_1 - межі інтегрування (для задач оптимального керування початок та кінець оптимального процесу відповідно); $x(t)$ - функція, від якої залежить значення функціоналу (крапка над символом означає диференціювання за часом), можна розглядати як функцію нескінченної кількості змінних. Це твердження стає очевидним, якщо припустити, що допустимі функції можуть бути розкладені у степеневі ряди, наприклад у ряди Фур'є, або взагалі в деякі ряди виду:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n(t), \tag{9.94}$$

де $\varepsilon_n(t)$ - задані функції, a_n - коефіцієнти при функціях.

Таким чином, для задання функції у вигляді ряду (9.94) достатньо задати значення всіх коефіцієнтів a_n, і значення функціоналу (9.93) у цьому випадку визначається заданням нескінченної послідовності чисел: $a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots a_n$, тобто функціонал є функцією нескінченної кількості змінних: $I = I(t,\ x(t),\ \ \dot{x}(t),\ldots, x^{(n)}(t)) = \varphi(a_0,\ \ a_1,\ \ a_2,\ldots a_n)$.

Отже, відмінність між оптимізаційними задачами і задачами на екстремум функцій кінцевого числа змінних полягає у тому, що у варіаційному випадку доводиться досліджувати на екстремум функцію нескінченної кількості змінних.

У багатьох випадках виконати граничний перехід при $n \to \infty$ не вдається, тому звичайно обмежуються невеликим числом $n = 3,\ 4,\ 5,$ а іноді навіть $n = 1$. Звичайно, чим більше n, тим краще значення функціоналу наближається до екстремуму.

Якщо прямими методами визначається абсолютний мінімум функціоналу, то наближене значення мінімуму функціоналу знаходиться з надлишком. При знаходженні прямими методами максимального значення функціоналу отримуємо наближене значення функціоналу з недостатком.

Прямі варіаційні методи можна використовувати для функціоналів декількох аргументів $I = I(x(t_1, t_2, ..., t_n))$ або декількох функціональних аргументів $I = I(x(t), y(t), \ldots, w(t))$.

Необхідно також сказати, що крім прямих варіаційних методів використовуються наближені методи розв'язування крайових задач. Дійсно, варіаційна задача зводиться до розв'язання рівняння Ейлера-Пуассона, яке розв'язується при встановлених крайових умовах.

Серед найпоширеніших наближених методів розв'язування крайових задач можна виділити методи: Галеркіна-Бубнова, колокацій, найменших квадратів та інші.

9.4.1. Кінцево-різницевий метод Ейлера

Л. Ейлер перший у своїх працях в області варіаційного числення використовував метод, який тепер називається кінцево-різничним прямим методом. Цікаво відмітити, що саме за допомогою цього методу Ейлер у 1744 році вивів знамените рівняння, яке є необхідною умовою екстремуму найпростішого функціонала (9.93), і яке носить його ім'я [30].

Суть даного методу полягає у тому, що значення функціоналу, наприклад:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} P(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))dt, \quad x(t_0) = a, \quad x(t_1) = b, \tag{9.95}$$

розглядаються не на довільних у даній варіаційній задачі кривих, а лише на ломаних, які складені з заданого числа n прямолінійних ділянок, з заданими абсцисами вершин $t_0 + \Delta t,\ t_0 + 2\Delta t, ..., t_0 + (n-1)\Delta t$, де $\Delta t = \dfrac{t_1 - t_0}{n}$ (рис. 9.4.).

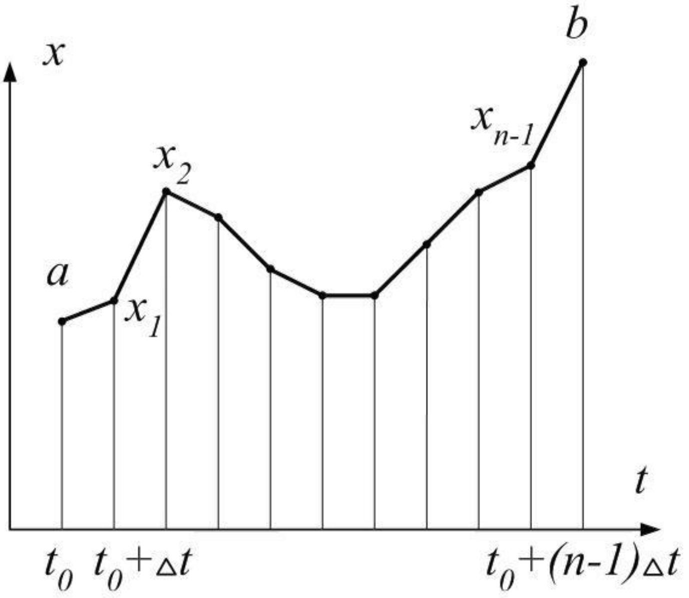


Рис. 9.4. Ломана, на якій шукається екстремум функціоналу

На таких ломаних функціонал перетворюється у функцію ординат $I = \varphi(x_1,\ x_2, ..., \ x_{n-1})$ вершин ломаної, оскільки ломана визначається цими координатами.

Обираємо координати так, щоб функція $I = \varphi(x_1,\ x_2, ..., \ x_{n-1})$ досягала екструмуму, тобто $x_1,\ x_2, ..., \ x_{n-1}$ визначаємо з системи рівнянь:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, ..., \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} = 0. \qquad (9.96)$$

Визначивши ординати ломаної, отримаємо наближений розв’язок варіаційної задачі. Граничним переходом при $n \to \infty$ можемо отримати точний розв’язок варіаційної задачі.

Зручніше, однак, значення функціоналу I на вказаних вище ломаних обчислювати наближено, наприклад у найпростішій задачі заміняти інтеграл (9.93) інтегральною сумою:

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} P(t_i,\ x_i,\ \frac{\Delta x_i}{\Delta t}). \qquad (9.97)$$

До недоліків цього методу слід віднести те, що розв’язком варіаційної задачі є ломана крива, складена з прямих, що означає розривність похідної у точках, які відповідають ординатам $x_1,\ x_2,...,\ x_{n-1}$. Тому реалізація оптимального за критерієм (9.93) закону руху деякої (технічної) системи на практиці є складною задачею. Збільшуючи кількість ординат n, можна в деякій мірі усунути цей недолік, але тоді збільшується об’єм і складність обчислень.

9.4.2. Метод Рітца

Ще одним, доволі розповсюдженим, прямим варіаційним методом є метод запропонований Рітцом [37]. Ідея цього методу полягає у тому, що значення деякого функціоналу розглядається не на довільних допустимих кривих даної варіаційної задачі, а лише на лінійних комбінаціях:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i W_i(t), \qquad (9.98)$$

з постійними коефіцієнтами, які складені з функцій на деякій обраній послідовності функцій: $W_1(t),\ W_2(t),...,W_n(t)\ldots$ Ці функції повинні бути допустимими у розглядуваній задачі, що накладає деякі обмеження на вибір послідовності $W_1(t),\ W_2(t),...,W_n(t)$. На таких лінійних комбінаціях функціонал перетворюється у функцію $I = \varphi(\beta_1,\ \beta_2,...,\ \beta_n)$ коефіцієнтів $\beta_1,\ \beta_2,...,\ \beta_n$. Ці коефіцієнти обираються так, щоб функціонал досягав екстремуму, отже $\beta_1,\ \beta_2,...,\ \beta_n$ повинні бути визначені з системи рівнянь:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,...,\ n). \qquad (9.99)$$

Виконуючи граничний перехід при $n \to \infty$ отримаємо, у випадку існування границі, функцію $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i W_i(t)$, яка є точним розв'язком розглядуваної варіаційної задачі.

До недоліків методу слід віднести необхідність відшукувати функції $W_1(t),\ W_2(t), ..., W_n(t)$, які повинні відповідати крайовим умовам. В деяких випадках це є доволі складно, особливо при неоднорідних крайових умовах з заданням значень вищих похідних. Крім того, необхідно пам'ятати про вимоги гладкості та неперервності функцій, що досить часто вимагається за умовами задачі.

9.4.3. Метод Канторовича

Метод Канторовича використовується для знаходження функції, яка доставляє екстремум функціоналу і яка, крім того, залежить від декількох аргументів [38]. Цей метод схожий з попередньо розглянутим методом Рітца. За цим методом також необхідно обрати координатну систему функцій, які є функціями декількох аргументів $W_1(t_1, t_2, ..., t_n),\ W_2(t_1, t_2, ..., t_n), ..., W_n(t_1, t_2, ..., t_n)$ і наближений розв'язок варіаційної задачі шукається у вигляді:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(x_m) W_i(t_1,\ t_2, \ldots, t_n), \qquad (9.100)$$

однак коефіцієнти $\eta_i(x_m)$ не постійні, а є незалежними функціями однієї з незалежних змінних. Функціонал на класі функцій виду (9.100) перетворюється у функціонал $\widetilde{I}(\eta_1(x_m),\ \eta_2(x_m), \ldots, \eta_i(x_m))$, який залежить від n функцій однієї незалежної змінної $\eta_1(x_m),\ \eta_2(x_m), ..., \eta_i(x_m)$. Ці функції обираються так, щоб функціонал $\widetilde{I}(\eta_1(x_m),\ \eta_2(x_m), \ldots, \eta_i(x_m))$ набував екстремуму. При цьому необхідно розв'язати систему з m рівнянь Ейлера-

Пуассона для функціоналу $\widetilde{I}(\eta_1(x_m),\ \eta_2(x_m),...,\eta_i(x_m))$, який після інтегрування за всіма аргументами окрім x_m перетворюється у функціонал, в який входить лише один аргумент. Знайшовши функції $\eta_i(x_m)$, які є екстремаляти функціонала $\widetilde{I}(\eta_1(x_m),\ \eta_2(x_m),...,\eta_i(x_m))$ та підставляючи їх у вираз (9.100), отримаємо наближений розв'язок варіаційної задачі.

Якщо здійснити перехід $n \to \infty$, то при деяких умовах можна отримати точний розв'язок, якщо ж граничного переходу не здійснювати, то цим методом буде отримано наближений розв'язок, причому, взагалі кажучи, значно більш точне, ніж при використанні методу Рітца з тими ж координатними функціями і з тим же числом параметрів *n*. Це викликано тим, що клас функцій (9.100) зі змінними $\eta_i(x_m)$ значно ширше класу функцій (9.98) де коефіцієнти β_i постійні. Отже серед функцій (9.100) можна підібрати функції, які краще апроксимують розв'язок варіаційної задачі, ніж серед функцій (9.98).

9.4.4. Огляд інших прямих варіаційних методів

Приведені вище прямі варіаційні методи не вичерпують усю їх множину. Це лише „класичні" методи, які були розроблені раніше інших і які досить широко використовуються. Однак з'являються нові прямі методи, що вказує на актуальність проблем, які вирішуються методами варіаційного числення. Ми не зможемо дати вичерпну інформацію щодо прямих методів, розглянемо лише деякі з них [39-49].

У роботі [39] пропонується прямий варіаційний метод, у якому екстремаль представляється нескінченним розкладом по повній системі базисних функцій. Після врахування граничних умов отримуються усі необхідні умови класичного варіаційного числення – рівняння Ейлера, умови трансверсальності, умови Ердмана-Вейерштрасса тощо. Задачі на умовний екстремум з допомогою методу штрафних функцій зводяться до варіаційних задач, де ізопериметричні умови і обмеження враховуються за допомогою множників Лагранжа. Розглянений прямий варіаційний метод використовується для функціоналів, які залежать від однієї та двох змінних.

У праці [40] на основі інтервальних розширень розв’язку варіаційної задачі і залишкового члена квадратурної формули задача зводиться до мінімізації інтервальнозначної функції. Крім того, у цій же роботі доведено теорему, виконання якої гарантує одержання інтервалів, що містять розв’язок початкової задачі і запропоновано алгоритми розв’язання задачі у замкненому виді, які автоматично враховують усі види похибок. Для розв’язування системи нелінійних рівнянь, до якої зведена задача оптимального керування, пропонується застосовувати інтервальний аналог методу Ньютона.

Для розв’язку задач оптимального керування (які, як відомо, мають варіаційну постановку) пропонується використовувати ізохроно-ітеративний метод [41]. Сутність цього методу полягає у побудові послідовності рішень найпростіших варіаційних задач, яка збігається. Цей метод дозволяє регулювати ступінь точності розв’язку задачі.

Цікавий спосіб розв’язування варіаційних задач запропонований у роботі [42]. Сутність способу полягає у тому, що відрізок інтегрування розбивається на рівні частини і для кожної вузлової точки визначається значення функції. Крива, яка апроксимує точний розв’язок варіаційної задачі представляється у вигляді інтерполяційної кусочної функції, яка проходить через вузлові точки, причому локальні криві, з яких складається інтерполяційна крива, описуються поліномами третьої степені. Екстремізація функціоналу полягає у локальному варіюванні ординат вузлових точок (окрім крайніх) інтерполяційної функції.

М.М. Моісеєвим та його співробітниками був розроблений метод наближеного розв’язування варіаційних задач, який, по суті, є методом спуску у фазовому просторі [43]. Цей метод отримав назву методу варіацій у фазовому просторі. За цим методом на інтервалі інтегрування вводиться сітка, для простоти рівномірна. У кожній точці сітки визначається екземпляр сітки у фазовому просторі функції, який має свій крок. Задача, яку необхідно розв'язати, полягає у тому, щоб знайти „ціну" (у термінах величини функціоналу) переходу від однієї точки $\{t_i, x_j^i\}$ сітки до іншої $\{t_{i+1}, x_k^{i+1}\}$. Ця процедура називається елементарною операцією. Маючи набір таких „цін" можна будувати деяку наближену оптимальну траєкторію. Зазначимо, що об'єм розрахунків, які необхідно провести є значним.

Метод локальних варіацій [44], який був розроблений Ф.Л. Черноуським та М.В. Баничуком представляє собою найбільш широко використовувану форму методу варіацій у фазовому просторі. Метод носить ітераційний характер. Кожна ітерація є переходом від деякої траєкторії до близької до неї у сенсі величини функціонала, який підлягає мінімізації.

Крім того, для наближеного розв'язування варіаційних задач використовуються методи: кінцевих елементів [45], проекції градієнта [46] (та його модифікації [47]), послідовної лінеаризації [48] та інші.

ДОДАТКИ

Додаток А

Чисельне розв’язування диференціальних рівнянь

Революційні зміни в методичному інструментарії теорії та прикладних питаннях динаміки машин пов’язані з появою й широким поширенням комп’ютерів. Зокрема, комп’ютер дозволяє ефективно застосовувати чисельний розв’язок диференціальних рівнянь для аналізу динаміки коливних систем, наочно й швидко представляти результатів за допомогою комп’ютерної графіки.

Динамічна система загального виду на площині задається рівняннями:

$$\dot{x} = f(x,\ y),\ \dot{y} = g(x,\ y). \tag{A.1}$$

Розглянемо основну ідею чисельного розв’язання такого роду рівнянь. Для загальності будемо вважати, що функції, що фігурують у правих частинах виразів (А.1), можуть залежати не тільки від динамічних змінних, але й від часу:

$$\dot{x} = f(x,\ y,\ t),\ \dot{y} = g(x,\ y,\ t). \tag{A.2}$$

Будемо представляти шукані функції часу $x(t)$ й $y(t)$ їх значеннями на дискретній множині точок $t_n=nh$, як кажуть, у вузлах сітки із кроком h за часом:

$$x_n = x(nh),\ y_n = y(nh). \tag{A.3}$$

Величина кроку повинна бути досить малою, оскільки від неї буде залежати точність розв’язку.

Найпростіший спосіб апроксимувати похідні за часом x и y полягає в тому, щоб представити похідні у такому вигляді:

$$\dot{x}_n \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{h}, \ \dot{y}_n \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}. \qquad (А.4)$$

Підставляючи ці вирази в (А.2), приходимо до запису рівнянь у вигляді різницевої схеми:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = f(x_n,\ y_n,\ t_n),\ \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = g(x_n,\ y_n,\ t_n). \qquad (А.5)$$

Звідси неважко виразити в явному виді x_{n+1} і y_{n+1} через x_n і y_n:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n,\ y_n,\ t_n),\ y_{n+1} = y_n + hg(x_n,\ y_n,\ t_n). \qquad (А.6)$$

Використовуючи ці співвідношення й задавшись початковими умовами (x_0, y_0), ми можемо крок за кроком обчислювати на комп'ютері значення змінних у вузлах сітки n= 1,2,3,... Отримані результати можна:

- вивести на друк й одержати таблицю функцій, що представляють розв'язок (такий спосіб широко застосовувався в епоху перших електронно-обчислювальних машин, які не мали дисплею);
- вивести на дисплей у вигляді графічної залежності, відкладаючи по осі абсцис час t_n=nh, а по осі ординат значення x_n і y_n;
- вивести на дисплей у вигляді фазового портрета, відкладаючи по осі абсцис значення x_n, а по осі ординат y_n.

Як відомо з курсу математичного аналізу, при апроксимації похідних виразами (5) ми допускаємо на кожному кроці похибку порядку h^2. Оскільки число кроків при побудові розв'язку має порядок h^{-1}, а похибка має тенденцію накопичуватися від кроку до кроку, тобто результуюча похибка, буде порядку h. В цьому випадку ми маємо різницевий метод першого порядку. Його називають методом Ейлера. В принципі цей метод дозволяє досягти будь-якої бажаної точності, але ціною істотного зменшення кроку, тобто збільшення числа кроків і об'єму обчислень [49].

Як можна вдосконалити метод і добитися більшої точності? Один із можливих способів полягає в наступному. Спочатку, використовуючи метод Ейлера, знайдемо половину кроку:

$$x_{n+1/2} = x_n + \tfrac{1}{2} hf(x_n,\ y_n,\ t_n),\ y_{n+1/2} = y_n + \tfrac{1}{2} hg(x_n,\ y_n,\ t_n). \quad \text{(A.7)}$$

Потім, „відштовхуючись" від початкової точки, зробимо повний крок, але з використанням вже обрахованих величин $x_{n+1/2}$, $y_{n+1/2}$, $t_{n+1/2}=(n+1/2)h$:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_{n+1/2},\ y_{n+1/2},\ t_{n+1/2}),\ y_{n+1} = y_n + hg(x_{n+1/2},\ y_{n+1/2},\ t_{n+1/2}). \quad \text{(A.8)}$$

Можна показати, що цей метод дає на одному кроці похибку порядку h^3, а на кінцевому фіксованому часовому інтервалі похибка буде порядку h^2. Таким чином, це метод другого порядку. Використання алгоритму більш складного в порівнянні з методом Ейлера першого порядку звичайно виправдовує себе, тому що для одержання потрібної точності число кроків можна обрати суттєво меншим.

Можна побудувати й різницеві схеми більш високого порядку. Одна з них, досить зручна й широко використовувана, відома як метод Рунге-Кутта четвертого порядку. Стосовно до системи рівнянь (A.2) алгоритм виконання одного кроку за часом задається наступними співвідношеннями:

$$k_1 = f(x_n,\ y_n,\ t_n),\ \ l_1 = g(x_n,\ y_n,\ t_n),$$

$$k_2 = f(x_n + \tfrac{1}{2} hk_1,\ y_n + \tfrac{1}{2} hl_1,\ t_n + \tfrac{1}{2} h),\ l_2 = g(x_n + \tfrac{1}{2} hk_1,\ y_n + \tfrac{1}{2} hl_1,\ t_n + \tfrac{1}{2} h),$$

$$k_3 = f(x_n + \tfrac{1}{2} hk_2,\ y_n + \tfrac{1}{2} hl_2,\ t_n + \tfrac{1}{2} h),\ l_2 = g(x_n + \tfrac{1}{2} hk_2,\ y_n + \tfrac{1}{2} hl_2,\ t_n + \tfrac{1}{2} h),$$

$$k_4 = f(x_n + hk_3,\ y_n + hl_3,\ t_n + h),\ l_2 = g(x_n + hk_3,\ y_n + hl_3,\ t_n + h),$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6} h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

Наука про чисельний розв’язок диференціальних рівнянь в даний час є самостійним і досить об’ємним розділом обчислювальної математики. Поряд з перерахованими тут методами існує багато інших, які в якихось випадках можуть виявитися зручними (наприклад, багатокрокові схеми Адамса). Для докладного ознайомлення з тонкощами чисельного розв’язку диференціальних рівнянь, різними алгоритмами, технічними прийомами (такими як автоматичний контроль точності), „підводними каменями”, які можуть зустрітися при розв’язанні конкретних задач, читачеві слід звернутися до відповідної до спеціальної літератури.

Додаток Б

Зв'язок методів розв'язування задач оптимального керування

Для великої кількості технічних систем динаміку руху у першому наближенні можна представити у вигляді найпростішого диференціального рівняння:

$$m\ddot{x} = F - W, \tag{Б.1}$$

де m - приведена до поступального руху маса системи; x - узагальнена координата системи (поступальне переміщення); F - приводне зусилля, що діє на систему; W - сила статичного опору руху системи, утому числі технологічного характеру. Крапка над символом означає диференціювання за часом.

Рівняння (Б.1), з урахуванням позначень $x = x_1$, $\frac{F - W}{m} = u$ можна подати у канонічному вигляді:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \tag{Б.2}$$

Критерієм оптимізації процесу, який необхідно мінімізувати, оберемо інтегральний функціонал, який за структурою є комплексним критерієм:

$$I = \int_0^T (\delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + \delta_3 u^2) dt, \tag{Б.3}$$

де T – тривалість руху системи; δ_1, δ_2 та δ_3 - вагові коефіцієнти, які враховують важливість відповідних доданків у підінтегральному виразі критерію (3).

Будемо шукати оптимальне керування при таких крайових умовах:

$$\begin{cases} x_1(0) = s_0, \; x_2(0) = v_0; \\ x_1(T) = x_2(T) = 0, \end{cases} \tag{Б.4}$$

де s_0 та v_0 - початкове положення та початкова швидкість динамічної системи.

Таким чином, необхідно перевести динамічну систему з деякого початкового положення, яке характеризується ненульовими значеннями положення s_0 та швидкості v_0 у нульове положення при мінімізації критерію за виразом (Б.3). Для механічної системи такий режим руху означає загальмовування.

Для того, щоб розв’язати поставлену задачу методом принципу максимуму необхідно записати функцію Гамільтона:

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - \delta_1 x_1^2 - \delta_2 x_2^2 - \delta_3 u^2, \tag{Б.5}$$

де ψ_1 і ψ_2 - спряжені змінні. Згідно принципу максимуму необхідно таким чином керувати процесом, щоб Гамільтоніан (Б.5) був максимальним. Для відкритої області керування ($u \in (-\infty; \infty)$) таке керування знаходиться з умов стаціонарності функції Гамільтона:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_2 - 2\delta_3 u = 0. \tag{Б.6}$$

З рівняння (Б.6) отримаємо:

$$u = \frac{\psi_2}{2\delta_3}. \tag{Б.7}$$

Для того, щоб пересвідчитись, що отримане керування (Б.7) доставляє максимум Гамільтоніану (Б.5), необхідно проаналізувати знак другої похідної Гамільтоніана по керуванню:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2\delta_3 < 0, \quad (\delta_3 > 0). \tag{Б.8}$$

Вираз (Б.7) справедливий для відкритої області керування. Однак, як правило, на керування накладаються обмеження у вигляді нестрогих нерівностей:

$$u_{\max} \geq u \geq u_{\min}, \tag{Б.9}$$

де $u_{\max}$ та $u_{\min}$ - відповідно максимальне та мінімальне значення керування. Тоді область допустимих керувань буде обмежена границями $u_{\max}$ та $u_{\min}$. Враховуючи обмеження (Б.9) оптимальне керування можна подати у такому вигляді:

$$u = \begin{cases} u_{\max}, & якщо\ \dfrac{\psi_2}{2\delta_3} \ge u_{\max}; \\ \dfrac{\psi_2}{2\delta_3}, & якщо\ u_{\max} \ge \dfrac{\psi_2}{2\delta_3} \ge u_{\min}; \\ u_{\min}, & якщо\ \dfrac{\psi_2}{2\delta_3} \le u_{\min}. \end{cases} \tag{Б.10}$$

Таким чином, отримано структуру оптимального керування (Б.10). Для знаходження невідомої спряженої змінної ψ_2 необхідно знайти розв'язки спряженої системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 2x_1\delta_1; \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 + 2x_2\delta_2. \end{cases} \tag{Б.11}$$

Продиференціюємо останнє рівняння системи (Б.11) за часом та враховуючи перше рівняння (Б.11) отримаємо:

$$\ddot{\psi}_2 = -2x_1\delta_1 + 2u\delta_2. \tag{Б.12}$$

Надалі двічі продиференціюємо вираз (Б.7) за часом та підставимо у отриманий вираз (Б.12). В результаті будемо мати:

$$\ddot{u} = \frac{\ddot{\psi}_2}{2\delta_3} = \frac{-2x_1\delta_1 + 2u\delta_2}{2\delta_3}. \tag{Б.13}$$

Враховуючи, що $\ddot{u} = \overset{IV}{\delta}$ і $u = \ddot{x}$ запишемо рівняння (Б.13) у такому вигляді:

$$\overset{IV}{x} - \ddot{x}\frac{\delta_2}{\delta_3} + x\frac{\delta_1}{\delta_3} = 0. \tag{Б.14}$$

Рівняння (Б.14) є рівнянням Ейлера-Пуассона для функціоналу (Б.3).

Для знаходження оптимального керування як функції фазових змінних динамічної системи використаємо метод динамічного програмування. Основне функціональне рівняння Беллмана прийме такий вигляд:

$$\min_u \left\{ \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} u + \delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + \delta_3 u^2 \right\} = 0, \tag{Б.15}$$

де S - функція Беллмана.

Мінімум правої частини рівняння (Б.9) будемо шукати по параметру керування u для чого продиференціюємо її за u та прирівняємо отримане до нуля:

$$2\delta_3 u + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0. \tag{Б.16}$$

Знайдемо з рівняння (Б.16) керування u:

$$u = -\frac{1}{2\delta_3}\frac{\partial S}{\partial x_2} \tag{Б.17}$$

та підставимо отримане у рівняння (Б.15) в результаті чого будемо мати:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}x_2 - \frac{1}{4\delta_3}(\frac{\partial S}{\partial x_2})^2 + \delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + = 0. \tag{Б.18}$$

Рівняння (Б.18) є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Будемо шукати його розв'язок у вигляді квадратичної форми:

$$S = A_1 x_1^2 + A_2 x_1 x_2 + A_3 x_2^2. \tag{Б.19}$$

Візьмемо частинні похідні з виразу (Б.19) за параметрами x_1 та x_2:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = 2A_1 x_1 + A_2 x_1, \tag{Б.20}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = A_2 x_1 + 2A_3 x_2. \tag{Б.21}$$

Підставимо вирази (Б.20) і (Б.21) у рівняння (Б.18) і отримаємо:

$$x_1^2(\delta_1 - \frac{A_2^2}{4\delta_3}) + x_2^2(\delta_2 + A_2 - \frac{A_3^2}{\delta_3}) + x_1 x_2(2A_1 - \frac{A_2 A_3}{\delta_3}) = 0. \tag{Б.22}$$

Рівняння (Б.22) буде справедливим у тому випадку коли вирази у дужках будуть рівні нулю, оскільки $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$. Тому рівняння (Б.22) можна замінити на систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_1 - \dfrac{A_2^2}{4\delta_3} = 0, \\ \delta_2 + A_2 - \dfrac{A_3^2}{\delta_3} = 0, \\ 2A_1 - \dfrac{A_2 A_3}{\delta_3} = 0. \end{cases} \tag{Б.23}$$

Розв’язок системи рівнянь (Б.23) буде мати два дійсних та два комплексних кореня. Оберемо один дійсний, який не приводить до втрати стійкості системи.

Підставивши отримані корені у вираз (Б.17) отримаємо функцію оптимального керування у вигляді синтезу:

$$u = -\frac{\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3}}{\delta_3}x_1 - \frac{\sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3})\delta_3}}{\delta_3}x_2. \tag{Б.24}$$

Розглянемо рівняння Беллмана (Б.15). Виконаємо перетворення цього рівняння:

$$\min_u(-1)\left\{\left(-\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)x_2 + \left(-\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)u - \delta_1 x_1^2 - \delta_2 x_2^2 - \delta_3 u^2\right\} = 0 \tag{Б.25}$$

або

$$\max_u\left\{\left(-\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)x_2 + \left(-\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)u - \delta_1 x_1^2 - \delta_2 x_2^2 - \delta_3 u^2\right\} = 0. \tag{Б.26}$$

Вираз у фігурних дужках представляє собою функцію Гамільтона, якщо прийняти $-\frac{\partial S}{\partial x_1} = \psi_1$ та $-\frac{\partial S}{\partial x_2} = \psi_2$. Зазначимо, що синтез оптимального керування за допомогою рівняння Беллмана виконувався для відкритої області керування, тобто обмеження (Б.9) не враховувались. Принцип максимуму дозволяє врахувати обмеження і тому оптимальне керування у формі зворотного зв’язку при обмеженнях (Б.9) можна записати таким чином:

$$u = \begin{cases} u_{\max}, \ \textit{якщо} -\dfrac{\sqrt{\delta_1\delta_3}}{\delta_3}x_1 - \dfrac{\sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1\delta_3})\delta_3}}{\delta_3}x_2 \ge u_{\max}; \\ -\dfrac{\sqrt{\delta_1\delta_3}}{\delta_3}x_1 - \dfrac{\sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1\delta_3})\delta_3}}{\delta_3}x_2, \ \textit{якщо}\, u_{\max} \ge -\dfrac{\sqrt{\delta_1\delta_3}}{\delta_3}x_1 - \dfrac{\sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1\delta_3})\delta_3}}{\delta_3}x_2 \ge u_{\min}; \\ u_{\min}, \ \textit{якщо} -\dfrac{\sqrt{\delta_1\delta_3}}{\delta_3}x_1 - \dfrac{\sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1\delta_3})\delta_3}}{\delta_3}x_2 \le u_{\min}. \end{cases} \qquad (\text{Б.27})$$

Побудуємо графіки оптимального процесу (рис. Б.1-Б.2) для таких параметрів системи $\delta_1 = 0{,}2$, $\delta_1 = 0{,}3$, $\delta_1 = 0{,}5$, $u_{\max} = 1$, $u_{\min} = -1$, $\tilde{o}_0 = 0$ м, $v_0 = 1$ м/с.

Використання методів оптимального керування (динамічне програмування та принцип максимуму) дозволяє знайти оптимальне керування динамічною системою у вигляді зворотного зв'язку. Використання лише одного із цих методів не дає бажаного результату: принцип максимуму встановлює „якісну" картину оптимального керування, а динамічне програмування – „кількісну" і лише поєднання цих методів дає бажаний результат.

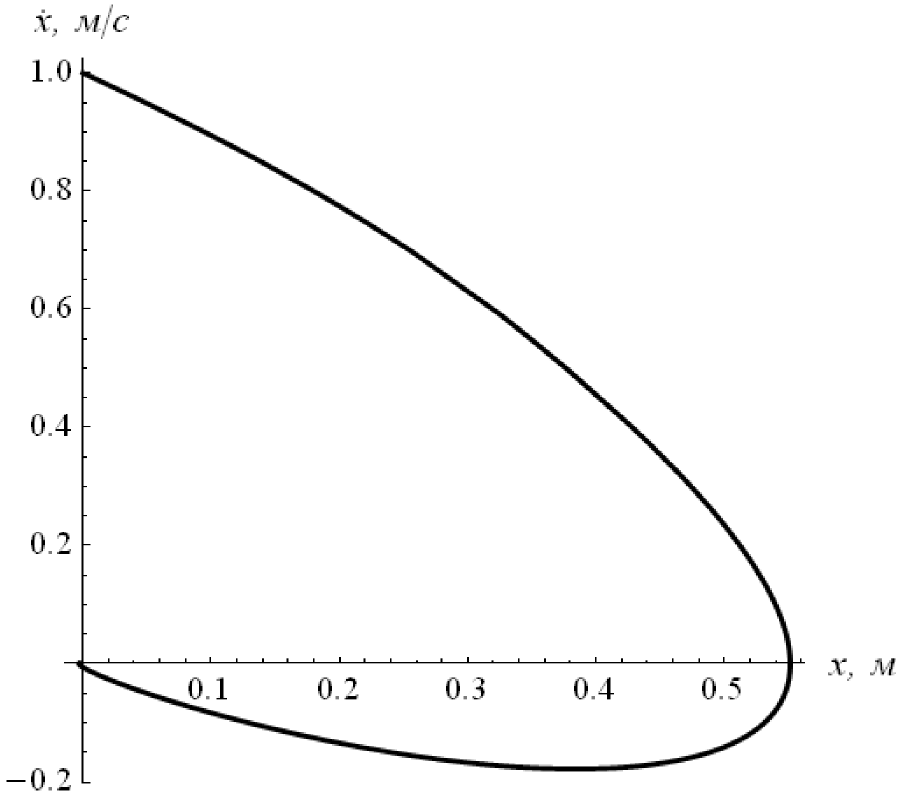


Рис. Б.1. Фазовий портрет руху динамічної системи

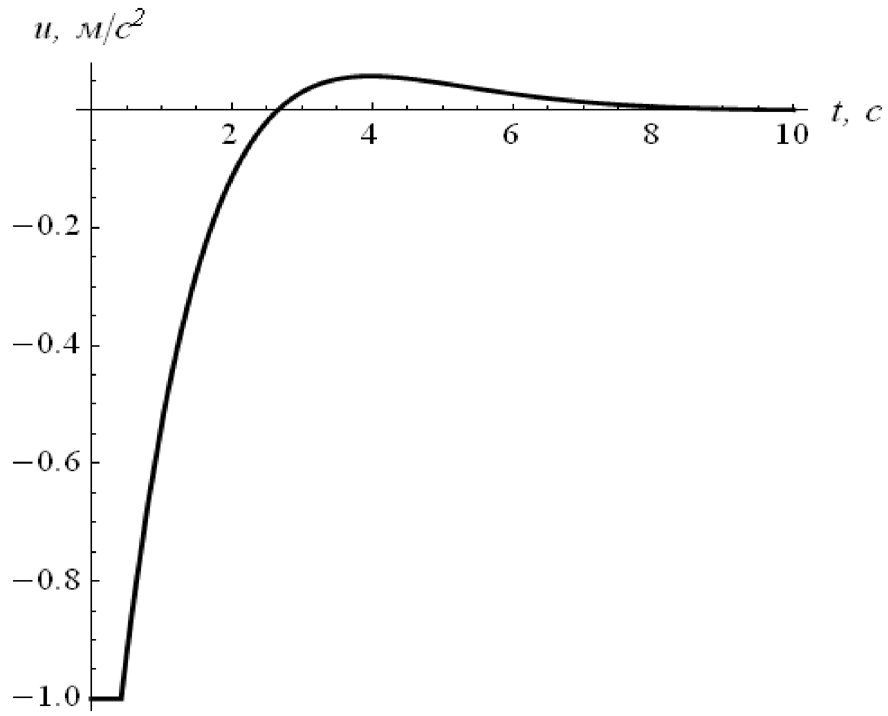


Рис. Б.2. Графік функції оптимального керування динамічною системою

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гермейер Ю.Б. Математическая теория исследования операций / Ю.Б. Гермейер. – М.: Наука, 1971.
2. Берталанфи фон Л. Общая теория систем: Критич. Обзор / фон Л. Берталанфи // Исследования по общей теории систем.– М., 1969.– С. 5 - 29.
3. Богданов А.А. Теория организации или тектология / А.А. Богданов. – М., 1913.
4. Калман Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб.– М.: Мир, 1971.
5. Философский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1983.
6. Михалевич В.С. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем / В.С. Михалевич, В.Л. Волкович.– М.: Наука, 1982.– 286 с.
7. Бусленко Н.П. Лекции по теории сложных систем / Н.П. Бусленко, В.В. Калашников, И.Н. Коваленко.–М.: Сов. радио, 1973.
8. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем / Н.П. Бусленко.– М.: Наука, 1978.
9. Беккер М.Г. Введение в теорию систем "местность-машина" / М.Г. Беккер.– М.: Машиностроение, 1983.– 311 с.
10. Глушков В.М. Моделирование развивающихся систем / В.М. Глушков, В.В. Иванов, В.М. Яненко.– М.: Наука, 1983.– 337 с.
11. Сівко В.Й. Механічне устаткування підприємств будівельних виробів / В.Й. Сівко.– К.: ІСДО, 1994.– 359 с.
12. Яковлев А.С. Советские самолеты / А.С. Яковлев.– М.: Наука, 1975.
13. Венников В.А. Теория подобия и моделирования / В.А. Венников.– М.: Высш. шк., 1976.– 479 с.

14. Брумберг В.А. Аналитические алгоритмы небесной механики / В.А. Брумберг.– М.: Наука, 1980.– 205 с.
15. Соболь И.М. Метод Монте-Карло / И.М. Соболь.– М.: Наука, 1966.– 87 с.
16. Ловейкин В.С. Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин / В.С. Ловейкин.– К.: УМК ВО, 1990.– 168 с.
17. Горский Б.Е. Методика составления операторов передачи движения / Б.Е. Горский, В.С. Ловейкин // Горные, строительные и дорожные машины.– К.: Техніка, 1979.– Вып. 28.– С. 99 - 105.
18. Самарский А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1987.– 288 с.
19. Растригин Л.А. Введение в идентификацию объектов управления / Л.А. Растригин, Н.Е. Маджаров.– М.: Энергия, 1977.– 215 с.
20. Барабанчук В.И. Планирование эксперимента в технике / В.И. Барабанчук.– К.: Техніка, 1984.– 200 с.
21. Корн Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика) / Г.Корн. – М.: Наука, 1972.– 544 с.
22. Назаренко И.И. Прикладные задачи теории вибрационных систем / И.И. Назаренко.– К.: ИСИО.– 216 с.
23. Чубук Ю.Ф. Вибрационные машины для уплотнения бетонных смесей / Ю.Ф. Чубук, И.И. Назаренко, В.Н. Гарнец.– К.: Вища шк., 1985.– 168 с.
24. Розанов Ю.А. Случайные процессы / Ю.А. Розанов.– М.: Наука, 1979.– 183 с.
25. Молчанов А.А. Моделирование и проектирование сложных систем / А.А. Молчанов.– К.: Вища шк., 1988.– 317 с.
26. Ризкин И.Х. Машинный анализ и проектирование технических систем / И.Х. Ризкин.– М.: Наука, 1985.– 160 с.
27. Одрин В.М. Морфологический анализ систем / В.М. Одрин, С.С. Картавов. – К.: Наукова думка, 1977.– 148 с.

28. Основы автоматического управления /. Под ред. В.С. Пугачева. – М.: Физматгиз, 1963. – 648 с.
29. Хедли Д. Нелинейное и динамическое программирование / Д. Хедли. – М.: Мир, 1967. – 508 с.
30. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю.П. Петров. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.
31. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
32. Рыбалев А.Н. Теория автоматического управления. Оптимальные системы. Теоретические сведения с примерами решения задач и задания к практическим и лабораторным работам / А.Н. Рыбалев. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2006. – 107 с.
33. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.В. Мищенко. – М.: Наука. 1976. – 392 с.
34. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев.– М.: Наука, 1988. – 552 с.
35. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – под. ред. Воробьева Н.Н. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.
36. Фельдбаум А.А. Методы теории автоматического управления / А.А. Фельдбаум, А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1971. – 744 с.
37. Тараненко В.Т. Прямой вариационный метод в краевых задачах динамики полета / В.Т. Тараненко, В.Г. Момоджи. – М.: Машиностроение, 1986. – 127 с.
38. Краснов М.Л. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения / М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев. – М.: Наука, 1973. – 191 с.
39. Бутов В.Г. Исследование вариационных задач прямими методами / В.Г. Бутов. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. – №3. – С. 373-386.

40. Сеньо П.С. Прямые интервальные методы решения вариационных задач и задач оптимального управления / П.С. Сеньо. // Динамические системы. – 2004. – Вып. 18. – С. 44-50.
41. Страховский Р.И. Изохронно-итеративный метод решения задач оптимального управления / Р.И. Страховский. // Методы оптимизации автоматических систем. Сборник статей под ред. Цыпкина Я.З. – М.: Энергия, 1972. – С. 223-237.
42. Барский И.Л. Локальная интерполяция в прямых методах вариационного исчисления / И.Л. Барский, И.А. Румянцев, Ю.А. Флеров. – М.: Вычислительный цент АН СССР, 1982. – 56 с.
43. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1971. – 424 с.
44. Черноусько Ф.Л. Вариационные задачи механики и управления (Численные методы) / Ф.Л. Черноусько, Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1973. – 107 с.
45. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс (первод с англ. В.И. Агошкова, В.А. Василенко, В.В.Шайдурова). – М.: Мир, 1977. – 351 с.
46. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р.П. Федоренко. – М.: Наука, 1978. – 488 с.
47. Miele A. Sequential gradient-restoration algorithm for optimal control problems with nondifferential constraints / Miele A., Damoulakis J.N., Cloutier J.R., Tietze J.L. // JOTA. – 1974. – №2. – P. 13.
48. Хитрик В.Э. Методы динамической оптимизации механизмов машин-автоматов / В.Э. Хитрик. – Л.: из-во Ленинградского ун-та, 1974. – 116 с.
49. Формалев В.Ф. Численные методы / В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников. – М.: Физматлит, 2004. – 400 с.

ЗМІСТ

Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О.

ТЕОРІЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ