

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І
ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ДИНАМІКА Й ОПТИМІЗАЦІЯ МАШИН

Київ 2018

Рекомендовано вченою радою Національного університету біоресурсів і природокористування України (протокол № 3 від 24 жовтня 2018 р.)

Укладачі

Ловейкін Вячеслав Сергійович,
Ромасевич Юрій Олександрович,
Кульпін Руслан Анатолійович

Рецензенти

Чаусов Микола Георгійович, доктор технічних наук, професор, лауреат премії НАН України, професор кафедри механіки Національного університету біоресурсів і природокористування України.

Гайдайчук Віктор Васильович, доктор технічних наук, професор, Заслужений діяч науки і техніки України, завідувач кафедри механіки Київського національного університету будівництва і архітектури.

Кузьмінець Микола Петрович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної, інженерної графіки та дизайну Національного транспортного університету.

Ловейкін В.С.

Ло 68 Динаміка й оптимізація машин / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич, Р.А. Кульпін. – К.: ЦП «Компринт», 2018. - 310 с.

В навчальному посібнику розглядаються методи розв'язування задач динаміки та оптимізації режимів руху машин і механізмів. Поряд з загальними методами динаміки механізмів і машин наведено розв'язки задач нелінійних систем. Суттєву увагу приділено виявленню фізичної природи динамічним явищам в машинах і способам їх усунення. Значна увага приділена розв'язку задач з оптимізації режимів руху, які до мінімуму зводять дію динамічних навантажень в елементах механізмів і машин.

Навчальний посібник призначений для студентів магістратури дослідницької спеціалізації за напрямком 133 «Галузеве машинобудування», а також може бути корисним для аспірантів та слухачів підвищення кваліфікації.

ВСТУП

В представленому навчальному посібнику розглядаються загальні питання динаміки та оптимізації режимів руху машин і механізмів.

Основною проблемою при проектуванні машин і механізмів є створення таких їхніх складових частин і систем в цілому, щоб машини були достатньо продуктивними та надійними в роботі, споживали незначну кількість енергії і виконували технологічні та транспортні операції з наперед заданою точністю. Усі перераховані властивості технологічних та транспортних машин можуть бути досягнуті тільки за рахунок вибору їхніх раціональних конструктивних схем, а також оптимальних параметрів і режимів руху приводних механізмів.

Без глибокого розуміння динамічних процесів, що проходять під час руху машин і механізмів вирішити поставлену проблему не представляється можливим. Тому в навчальному посібнику розглянуті основні задачі динаміки машин та динамічні характеристики, за допомогою яких ці задачі можуть бути вирішені. Зокрема розглянуті пружні та дисипативні властивості машин, розподілення мас їхніх елементів, формування зовнішніх навантажень на робочі органи та характеристики приводних механізмів. Більш детально представлено нерівномірний рух машин на прикладі процесу пуску. Розглянуто пришвидшений рух машини в процесі запуску та наведено визначення динамічних навантажень на елементи приводного механізму. Важливого значення набувають процеси побудови еквівалентних динамічних моделей, за допомогою яких розв'язуються аналітичними та чисельними методами задачі динаміки машин. Показано визначення динамічних навантажень з одним та двома робочими органами машини.

Наведено динамічні моделі машин з нелінійною функцією положення ланок та нелінійними характеристиками приводних механізмів. При розрахунку нелінійних механічних систем не вдається отримати результати у

вигляді аналітичних залежностей, тому рекомендовано використовувати чисельні методи у вигляді комп'ютерних програм.

Друга частина навчального посібника присвячена вирішенню задач оптимізації режимів руху механізмів і машин з використанням досить простих динамічних моделей. Значна увага приділена критеріям оптимізації та методам знаходження їхніх екстремальних значень. Наведено приклади оптимізації режимів руху механізмів за різними критеріями під час виконання перехідних процесів (пуск, гальмування та реверсування). Розглянуті задачі параметричної, функціональної та функціонально-параметричної оптимізації механізмів і машин на конкретних прикладах.

Для оптимізації режимів руху механізмів і машин використано кількісну оцінку перехідних процесів у вигляді інтегральних динамічних критеріїв, які відображають процес руху у вигляді середніх або середньоквадратичних значень витрат певних механічних характеристик. Ці критерії відображають небажані властивості машин і механізмів під час їхнього руху, тому підлягають мінімізації. Оскільки наведені критерії є інтегральними функціоналами, які залежать від різних функцій та параметрів режимів руху машин і механізмів, то відповідний вибір цих залежностей та параметрів дозволяє мінімізувати функціонали і, як наслідок, покращити ті або інші властивості.

Представлена книга може бути використана як навчальний посібник і практичне керівництво до застосування методів динамічного аналізу механізмів і машин та оптимізації їхніх режимів руху. Вона буде корисна інженерам-конструкторам та дослідникам, які спеціалізуються в напрямку з динаміки та оптимізації машин, студентам та аспірантам, що навчаються за напрямками з галузевого машинобудування та інженерної механіки.

Навчальний посібник складається зі вступу, дев'яти розділів та списку використаної літератури. Перший розділ написаний усіма авторами. Вступ і розділи із другого по дев'ятий написані проф. Ловеїкіним В.С. та доц. Ромасевичем Ю.О.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИНАМІКИ МАШИН

1.1. Задачі динаміки машин

У зв'язку зі зростанням швидкостей руху елементів машин, роль динамічних розрахунків неперервно підвищується. Задача створення достатньо міцної та неметалоємної машини, здатної протидіяти зовнішнім статичним і динамічним навантаженням є досить актуальною. Особливо це відноситься для випадків, коли дія навантажень є найбільш несприятливою. Тому при динамічних розрахунках машин необхідно враховувати багато чинників, які раніше, при обмежених швидкостях могли не враховуватись. В зв'язку з цим останнім часом переходять від статичних методів розрахунку до динамічних, при яких машина розглядається комплексно, як єдина електро- або гідромеханічна система. Діючі на таку систему зовнішні навантаження визначаються не тільки опором на робочому органі, але і законами зміни рушійних сил як функції часу або швидкості. Така практика отримала особливе розповсюдження в машинах, які приводяться в рух електродвигунами або гідродвигунами, механічні характеристики яких досить добре виражаються аналітичними залежностями [1].

Оскільки деформації пружної системи машини досить незначні в порівнянні з переміщенням її робочого органу, то при розрахунках на міцність приводний механізм та трансмісію довгий час приймали абсолютно жорсткими, тобто вважали, що врахування їх є несуттєвими для аналізу роботи машини в цілому. Разом з тим, збільшення швидкостей окремих елементів і машини в цілому, а в ряді випадків і не стабільність сил опору на їхніх робочих органах привели до виникнення в пружних системах машин коливальних процесів, нехтувати якими стало неможливо. При цьому виявилось, що навіть малі деформації елементів пружної системи, які викликані як вільними, так і вимушеними коливаннями, не кажучи вже про

резонансні процеси, можуть привести до появи напружень не тільки співставними зі статичними, але й в ряді випадків значно їх перевищують.

Як приклад розглянемо еволюцію поступового уточнення методів розрахунку вантажопідйомних машин. При малих швидкостях підйому вантажу можна знехтувати динамічними навантаженнями на робочому органі (канатному барабані) і визначити міцність усіх елементів системи, а також потужність приводного двигуна, виходячи тільки від дії статичних навантажень. Однак, по мірі збільшення швидкостей підйому, динамічні складові вирости до таких величин, що нехтування ними вже не гарантувало достатньої надійності конструкції. Ці динамічні складові спочатку визначали наближено і зводили до передумови, що запуск машини проходить рівноприскорено протягом обмеженого часу (3-5с), який приймали без достатніх обґрунтувань. Наступний етап уточнення розрахунків вимагав розгляду динамічної системи машини, включаючи і приводний механізм, як єдине ціле, де поряд з чисто механічними параметрами (вага вантажу, жорсткість канатів) враховували і пускові характеристики електроприводу, що дозволило скласти загальні динамічні рівняння запуску машини, приймаючи її механічну систему абсолютно жорсткою. Наступним етапом була відмова від останнього припущення і врахувались вже і пружні деформації, які мають місце як в жорстких (валах, передачах), так і в гнучких (канатах) елементах вантажопідйомних машин.

Машини слід розглядати як єдині електромеханічні системи, причому в динамічній розрахунковій схемі (моделі) повинні бути враховані наступні чинники:

- 1) сили опору на робочому органі, які в ряді випадків є нестабільними і змінюються в значних межах (наприклад, прокатні стани, преси, машини для добування корисних копалин, сільськогосподарські машини тощо);
- 2) електричні характеристики приводного двигуна; для досить короткочасних процесів в машинах деяких типів статичні характеристики

двигуна, що враховують залежність обертового моменту від кутової швидкості, виявляються недостатніми і повинні бути замінені динамічними;

3) характеристики проміжних елементів; гідравлічних муфт, пружних муфт, пружин, пасових передачах тощо;

4) пружні характеристики елементів трансмісії машин (валів, зубчастих коліс).

Врахування механічних характеристик електродвигунів, зокрема досить розповсюджених асинхронних двигунів, як і характеристик гідромуфт, приводить до суттєвої нелінійності отримуваних динамічних рівнянь, що ускладнює доведення розв'язків до кінцевих результатів. Тому в ряді випадків приходить замінити криві характеристик двигунів системою спряжених прямих або замість точного рівняння характеристик застосовувати наближення, при якому безпосереднє інтегрування стає можливим.

Викладене відноситься, головним чином, до процесу запуску машин, але зовсім не втрачає свого значення і для процесів усталеного руху та гальмування. Пояснюється це тим, що абсолютно постійний опір на робочому органі машини практично не зустрічається, тому неперервне коливання цього опору (доходить для деяких машин до 300% від середнього значення в обидві сторони) викликає неперервні динамічні напруження в трансмісії машини. Однак, навіть в тих випадках, коли статичний опір на робочому органі може бути прийнятий з деякими наближеннями стабільним, він сам по собі ще не визначає статичних напружень в деталях машин. Справа в тому, що внутрішнє тертя в машинах часто викликає значне підвищення статичного опору. В цих випадках задачею досліджень є виявлення таких форм деталей машин, при яких тертя може бути зведене до мінімуму. Не менш важливим також є визначення достовірної величини сил тертя та їхнього характеру зміни при зміні швидкості руху. Ще більш суттєвим для оцінки міцності машин є процеси гальмування та реверсування, дослідження яких ускладнюється великим різноманіттям гальмівних механізмів, що використовуються в сучасному машинобудуванні.

Задачею прикладної динаміки машин є дослідження процесів руху машин, але не взагалі, а з точки зору отримання результатів, необхідних для вивчення кінематичних, динамічних та міцнісних характеристик машин. Кінцевою метою динаміки машин є визначення вихідних даних для наступних розрахунків міцності машин, їхньої продуктивності та потужності приводних механізмів.

1.2. Основні динамічні характеристики машин

З кінематичної схеми та креслень машини звичайно важко визначити розподілення мас та жорсткості в трансмісії. Складові частини трансмісії рухаються з різними швидкостями, передають різні крутні моменти, жорсткість їхніх перерізів неоднакова, а відповідно, і кути закручування на окремих ділянках різні.

В зв'язку з цим перед складанням рівнянь руху трансмісії машини представляють у вигляді умовної механічної схеми, яку ще називають *зведеною еквівалентною схемою* або *динамічною моделлю* машини. Ця схема (модель) повинна бути дійсно еквівалентною реальній машині чи механізму, тобто достовірно відображати її основні динамічні характеристики. Складання зведеної розрахункової схеми – це досить важливий етап розв'язування задач прикладної динаміки машин. Похибки, внесені на цьому етапі, зводять до мінімуму весь розв'язок задачі та його дослідження.

Питанням побудови зведених розрахункових схем (моделей) машин при динамічних навантаженнях приділено значну увагу в багатьох працях. В більшості з них розглядаються крутильні коливання в різних силових установках. Однак, рекомендації цих робіт не завжди можна безпосередньо переносити для розрахунку динамічних процесів, оскільки в загальному випадку конструкції машин значно відрізняються від конструкцій силових установок.

Так, наприклад, при розрахунку крутильних коливань в дизельних двигунах звичайно нехтують пружною піддатливістю зубчастих передач в

порівнянні з піддатливістю ділянок колінчастого вала, в той час як в трансмісіях машин з електроприводом перша часто значно перевищує піддатливість валів, що мають більший діаметр і меншу довжину.

Крім того, при виборі розрахункової схеми необхідно враховувати особливості зовнішніх сил опору на виконавчому органі. В машинах звичайно мають місце декілька одночасно діючих, але якісно відмінних динамічних процесів. В залежності від розмірів і характеристик, двигуна машини, трансмісії приводу та виконавчого органу, а також від зовнішніх зусиль той або інший процес може приймати домінуюче значення і викликати суттєві перевантаження. Наприклад, при взаємодії робочого органу з твердими включеннями середовища домінуюче значення набуває перехідний процес різкого гальмування робочого органу. Саме цей процес визначає в такому випадку формування зусиль в деталях машин. При цьому роль вимушених коливань та хвильових процесів в тяговому органі є незначною. Навпаки, при співпадінні власних частот трансмісії машини і частот вимушених сил вплив перехідних процесів є незначним і їх можна не враховувати.

Розв'язок задачі про формування зусиль в деталях машин в загальному вигляді при врахуванні всіх динамічних процесів є досить складним і громіздким. Тому для спрощення звичайно виділяють окремий процес і вивчають його, не враховуючи інші. Таке спрощення можна робити тільки в тому випадку, коли воно не вносить суттєвих відхилень в загальну картину явища.

Якщо не врахований процес має вплив на якісну або кількісну сторону дослідження, то необхідно при розв'язуванні задачі вводити додаткові умови. Наприклад, канати та ланцюги, що широко використовуються в машинах, відрізняються тим, що вони можуть передавати лише зусилля при розтягу. При повздовжньому стисканні ці елементи втрачають свою роль пружних зв'язків. Якщо при розрахунках знехтувати цією обставиною, то можна прийти до хибних значень. Необхідно також мати на увазі, що при вивченні

якісно різних процесів еквівалентні схеми конкретної машини можуть бути зовсім різними. Важливою умовою правильного складання зведеної еквівалентної схеми (моделі) є врахування основних динамічних характеристик трансмісії машини, розподілення мас та жорсткостей.

1.2.1. Пружні властивості елементів машини

Миттєва зміна сил опору на виконавчому органі машини не викликає одночасного збільшення зусиль в елементах трансмісії приводу і миттєвого приросту навантаження двигуна. Одночасність зміни навантаження на виконавчому органі та двигуні порушується через пружність трансмісії, що їх з'єднує. Пружна трансмісія зможе передати зміну сили опору на двигуні машини тільки після того, як останній деформує її на відповідну новому навантаженню величину. За тією ж причиною, а також у зв'язку з інерційністю проміжних деталей, прикладення рушійного зусилля при пуску двигуна не викликає миттєвого навантаження трансмісії і виконавчий орган починає працювати з деяким запізненням. Тому в загальному випадку при довільно змінних силах опору закони руху виконавчого органу та двигуна не будуть співпадати, оскільки всі зміни на виконавчому органі будуть передані на двигун з інерційним запізненням і у викривленому вигляді.

Так, наприклад, різкі короточасні збільшення навантаження можуть взагалі практично не передаватись на двигун, оскільки трансмісія не встигає отримувати за час їх дії відповідну деформацію. Така згладжувальна дія трансмісії залежить, очевидно, від величини її жорсткості, яка здійснює суттєвий вплив і на характер зміни зусиль в деталях машини. В зв'язку з цим при розв'язуванні задач динаміки трансмісії машин необхідно розглядати як ланцюги послідовно розміщених пружних елементів.

Коефіцієнтом пружності або піддатливості будь-якої ділянки трансмісії приводного механізму називають відношення величини лінійної деформації (або кута закручування) даної ділянки до величини діючого на нього зусилля (або крутного моменту). Вимірюється величина коефіцієнта

піддатливості ділянки машини відповідно при лінійних деформаціях в Н/Н , при крутильних - рад/Нм .

Величина, зворотна коефіцієнту піддатливості, називається *коефіцієнтом жорсткості*. Вимірюється цей коефіцієнт при лінійних деформаціях в Н/м , а при крутильних - Нм/рад . Визначення коефіцієнта жорсткості ділянок трансмісії не викликає труднощів. Для багатьох типових деталей та вузлів можуть бути використані відомі залежності, які дозволяють враховувати зміни піддатливості від шпонкових пазів, ексцентричних отворів, ступінчастих та конічних переходів, а також піддатливість з'єднувальних муфт, колінчастих валів тощо. Жорсткість більш складних ділянок трансмісії (зубчасті та ланцюгові передачі, виконавчі органи тощо) можуть бути визначені експериментально. Разом з тим величина жорсткості ділянки трансмісії не повністю визначає її значення в динамічних процесах машини. Пружні елементи рівної жорсткості, але розміщені в різних місцях трансмісії не рівнозначні з точки зору динаміки машин. Динамічна значимість пружного елемента визначається величиною потенціальної енергії його деформації. Еквівалентними з точки зору динаміки вважаються пружні елементи, що мають однакову величину потенціальної енергії деформації. В зв'язку з тим, що величина абсолютної жорсткості будь-яких елементів не є показником їхньої динамічної значимості, зручно при побудові еквівалентних схем (моделей) користуватись поняттям зведеної жорсткості ділянки.

Зведена жорсткість ділянки – це крутний момент (або зусилля), який необхідно прикласти до деякого перерізу трансмісії (центру зведення), щоб повернути його на 1рад (або зсунути на 1м) за рахунок деформації цієї ділянки. Центр зведення можна розміщувати в будь-якому місці трансмісії, але частіше всього його вибирають на валу ротора двигуна і всі пружні елементи трансмісії зводять до валу ротора двигуна. Зведена жорсткість ділянки може бути підрахована, якщо відомі абсолютна жорсткість цієї ділянки і параметри кінематики машини. Якщо ділянка трансмісії має

жорсткість C_K , і піддається крутильним деформаціям та закручується на кут φ_K , то потенціальна енергія деформації такого елемента визначається за формулою

$$\Pi = \frac{1}{2} C_K \varphi_K^2. \quad (1.1)$$

Зведений пружний елемент повинен мати таку ж потенціальну енергію, тобто

$$\Pi = \frac{1}{2} C_{\Pi} \varphi_{\Pi}^2, \quad (1.2)$$

де C_{Π} – зведена жорсткість ділянки; φ_{Π} – кут повороту центра зведення за рахунок закручування цієї ділянки на кут φ_K .

Прирівнюючи вирази (1.1) та (1.2), знаходимо

$$C_{\Pi} = C_K \left(\frac{\varphi_K}{\varphi_{\Pi}} \right)^2 = \frac{C_K}{u^2}, \quad (1.3)$$

де u – передатне число між виділеною ділянкою та центром зведення.

Аналогічним чином може бути зведена до будь-якого центру зведена жорсткість канатів, ланцюгів та інших деталей, що піддаються розтягу або стиску. Якщо жорсткість одиниці довжини ланцюга E_0 , то жорсткість відрізка ланцюга довжиною l дорівнює E_0/l . Потенціальна енергія деформації цієї ділянки

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{E_0}{l} x^2, \quad (1.4)$$

де x – лінійна деформація цієї ділянки.

Потенціальна енергія зведеного пружного елемента, що піддається крутильній деформації:

$$\Pi = \frac{1}{2} C_K \varphi_K^2. \quad (1.5)$$

Прирівнюючи вирази (1.4) та (1.5), маємо

$$C_{\Pi} = \frac{E_0}{l} \left(\frac{x^2}{\varphi_{\Pi}} \right)^2. \quad (1.6)$$

Знайдемо зв'язок між x і φ_{Π} . Кут повороту зірочки, викликаний деформацією ланцюга на величину x

$$\frac{x}{R} = \frac{\varphi}{u}, \quad \rightarrow \quad \varphi_{\Pi} = \frac{xu}{R}, \quad (1.7)$$

де R – радіус навівання ланцюга на зірочку, u – передатне число між валом зірочки та центром зведення.

В результаті, отримуємо

$$C_{\Pi} = \frac{E_0 R^2}{lu^2}. \quad (1.8)$$

Підрахувавши зведену жорсткість окремих ділянок, можна знайти зведену жорсткість всієї трансмісії від виконавчого органу до ротора електродвигуна за відомою залежністю для послідовного з'єднання пружних елементів

$$\frac{1}{C_{\Pi}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}, \quad (1.9)$$

де C_n – зведена жорсткість трансмісії; C_i – зведена жорсткість i -ої ділянки; n – кількість виділених ділянок.

Ділянку редуктора, що має певну зведену жорсткість, можна уявити у вигляді відрізка деякого вала постійної жорсткості перерізу, довжина якого обернено пропорційна жорсткості ділянки. Нехай деяка i -та ділянка трансмісії (наприклад, зубчаста передача або вал) мають зведену жорсткість C_i . Таку ж жорсткість має відрізок еквівалентного вала довжиною l_i , яку можна виразити залежністю

$$l_i = G_i l_{0i} / C_i \quad (1.10)$$

де l_{0i} – полярний момент інерції еквівалентного вала; G_i – модуль пружності при зсуві.

Постійну величину $G_i l_{0i}$ зручно прийняти за масштаб, тоді довжина кожної ділянки визначається безпосередньо величиною C_i .

Вал, ділянки якого імітують вузли реальної машини називають еквівалентним валом.

1.2.2. Розподілення мас в трансмісії машини

Значний вплив на розвиток динамічних процесів в машинах мають величина та розподілення мас в трансмісії, виконавчому органі і двигуні, які визначають інерційність вузлів машини. В зв'язку з цим перед побудовою еквівалентної розрахункової схеми (моделі) необхідно вивчити розподілення мас і визначити їхню величину.

Інерційні характеристики елементів, що рухаються поступально, визначаються їхньою масою, а для елементів, що здійснюють обертальний рух, інерційність визначається їхнім моментом інерції. Для деталей простої форми моменти інерції визначаються розрахунковим шляхом, а для складних деталей необхідно використовувати експериментальні методи.

Величина маси або моменту інерції, як і величина жорсткості, не повністю характеризує динамічну значимість тієї або іншої деталі, яка залежить ще і від її розміщення в кінематичному ланцюзі. З точки зору динаміки значимість тієї або іншої маси визначається величиною її кінетичної енергії. Еквівалентними в динамічному відношенні вважаються маси, які мають однакові значення кінетичних енергій. Тому для характеристики розподілення мас в трансмісії машини зручно ввести поняття *зведеної маси ділянки*. Цим терміном позначають величину маси (або момента інерції), яку необхідно розмістити в центрі зведення, щоб отримати кінетичну енергію, рівну кінетичній енергії заданої маси, з припущенням, що трансмісія абсолютно жорстка.

Визначення зведених мас при відомих кінетичних схемах машини не викликає труднощів. Нехай деталь, що обертається з кутовою швидкістю ω_k , має момент інерції відносно вісі обертання I_k , а ланка зведення обертається зі швидкістю ω_n . Прирівнюючи кінетичні енергії деталі та зведеної маси, отримаємо

$$T = \frac{1}{2} I_k \omega_k^2 = \frac{1}{2} I_n \omega_n^2, \quad (1.11)$$

Звідки випливає, що

$$I_n = I_k \left(\frac{\omega_k}{\omega_n} \right)^2 = I_k / u^2. \quad (1.12)$$

Для зведення обертових мас достатньо момент інерції розділити на квадрат передатного числа між цією деталлю та ланкою зведення.

Аналогічно зводяться маси, що рухаються поступально. В цьому випадку маємо

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} I_n \omega_n^2, \quad (1.13)$$

де m і v – відповідно маса та швидкість деталі, що рухається поступально.

З (1.13) отримуємо

$$I_{\pi} = m \left(\frac{v}{\omega_{\pi}} \right)^2. \quad (1.14)$$

Сума зведених моментів інерції всіх ділянок трансмісії, двигуна та виконавчого органу визначає сумарний зведений момент, який є важливою характеристикою приводу машини. Крім того, на динаміку машини впливає не тільки величина зведених мас, але і розподілення їх вздовж пружної трансмісії. Це можна показати у вигляді графіка розподілення зведених мас вздовж еквівалентного вала, який називають *діаграмою мас*.

Для побудови такої діаграми деталі і вузли трансмісії приводу машини необхідно розділити на характерні ділянки (з приблизно постійною по довжині ділянки жорсткістю перерізів і більш менш рівномірним розподілом маси). Визначивши для кожної ділянки зведену жорсткість, відмічають ці ділянки на схемі еквівалентного вала, після чого для кожної з них будують прямокутник, площа якого пропорційна моменту інерції або масі елемента, зведеним до вибраного центра зведення. На ділянках, які відповідають зубчастим передачам, муфтам та іншим деталям, масу потрібно розділити на два зосереджених маховика (зведені маси спряжених зубчастих коліс, розміщених на кінцях ділянки). Побудована таким чином діаграма дозволяє правильно розподілити маси та жорсткості в приводі машини, полегшує вибір розрахункової схеми і оцінку похибок від введених в розрахунок припущень та спрощень.

Необхідно відмітити, оскільки розрахункова схема вибирається з відомими припущеннями, тому немає необхідності з великою точністю визначати зведені жорсткості ділянок редуктора та їх мас. Для більшості деталей можна користуватись наближеними формулами та

експериментальними даними. Пружністю деяких деталей взагалі можна знехтувати.

1.2.3. Спрощення розрахункової схеми машини

Реальні трансмісії машин, як правило, мають значну складність розподілення мас. При цьому маса окремих ділянок може бути як зосередженою, так і розподіленою (канати, довгі вали тощо). В зв'язку з цим діаграмі мас, побудованій для реальної трансмісії, відповідає звичайно досить складна еквівалентна (розрахункова) схема, яка має, як правило, багато ступеней вільності, а також елементи з розподіленими масами. Розв'язок та дослідження рівнянь руху таких складних систем пов'язаний з певними труднощами як розрахункового, так і принципового характеру. Тому доцільно здійснювати спрощення еквівалентних схем, залишаючи виділеними лише найбільш крупні маси і зводити до них маси інших елементів, в тому числі елементи з розподіленими масами. При зведенні мас на еквівалентному валу значну допомогу може подати використання методу Релея, суть якого полягає в тому, що характер деформації системи, яка піддається динамічним впливам, приймається відповідним характеру її деформації при статичному навантаженні. Розглянемо систему, яка має пружний масивний канат з підвішеним до його кінця зосередженим вантажем масою m (рис. 1.1).

Нехай маса одиниці довжини каната дорівнює $q = m_k/L$, а його повна маса m_k і довжина L . Як відомо з курсу теоретичної механіки, дослідження руху подібних систем зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь в частинних похідних і є досить складною і громіздкою задачею. Відомо також, що нехтування масою канату досить спростило б задачу, оскільки система мала б всього одну ступінь вільності. Але таке спрощення вносить в ряді випадків (коли маса канату співставима з масою кінцевого вантажу) значну похибку. Ця похибка може бути значно зменшена, якщо до маси кінцевого вантажу прибавити деяку частину маси каната. Величину цієї

маси не складно підрахувати, якщо відомий закон зміни деформації каната вздовж його довжини.

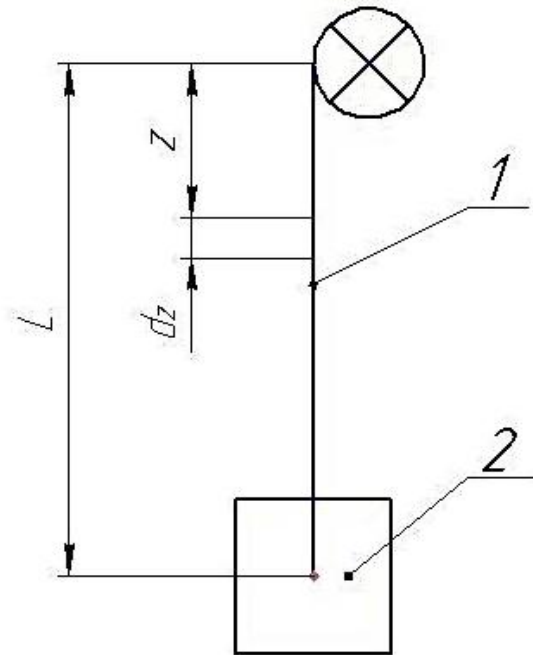


Рис. 1.1. Схема системи із пружного каната і маси

Дійсно, нехай u – переміщення при деформації перерізу каната, розміщеного на відстані z від закріпленого кінця. Тоді кінетична енергія елемента каната довжиною dz визначається залежністю

$$dT_k = \frac{1}{2} \dot{u}^2 dm = \frac{1}{2} \dot{u}^2 q dz. \quad (1.15)$$

Інтегруючи вираз (1.15), знайдемо повну кінетичну енергію каната

$$T_k = \frac{q}{2} \int_0^L \dot{u}^2 q dz. \quad (1.16)$$

Кінетична енергія доданої до кінцевого вантажу маси також повинна дорівнювати величині (1.16), тобто

$$T_k = \frac{m_\partial \dot{x}^2}{2}, \quad (1.17)$$

де m_∂ – маса добавляемого вантажу; x – переміщення кінця канату, де закріплений вантаж.

Прирівнюючи залежності (1.16) та (1.17) будемо мати

$$\frac{1}{2} m_\partial \dot{x}^2 = \frac{1}{2} q \int_0^L \dot{u}^2 dz. \quad (1.18)$$

З рівняння (1.18) маємо

$$m_\partial = \frac{q}{\dot{x}^2} \int_0^L \dot{u}^2 dz. \quad (1.19)$$

Якщо закон $u(z)$ відомий, то визначення інтегралу у виразі (1.19) не має труднощів.

Як вже відмічалось, застосовуючи метод Релея, задаються законом зміни деформації $u(z)$ відповідно характеру деформації при статичному навантаженні. В розглянутому випадку статична деформація каната змінюється за лінійним законом, тому можна записати

$$u = \frac{z}{L} x; \quad \dot{u} = \frac{z}{L} \dot{x}. \quad (1.20)$$

Підставляючи залежність (1.20) у вираз (1.19), отримаємо

$$m_\partial = \frac{q}{\dot{x}^2} \int_0^L \frac{z^2}{L^2} \dot{x} dz = \frac{q \dot{x}^2}{L^2 \dot{x}^2} \int_0^L z^2 dz = \frac{q L^3}{3 L^2} = \frac{q L}{3} = \frac{m_K}{3}. \quad (1.21)$$

Таким чином, для врахування кінетичної енергії каната при коливаннях розглянутої системи достатньо до маси кінцевого вантажу додати одну третину маси каната.

1.2.4. Формування навантажень в елементах машин

Формування навантажень в приводах машин є складним динамічним процесом, який складається з багатьох одночасно діючих, але якісно відмінних процесів. Одночасно зі зміною сил опору переміщенню виконавчого органу машини, які викликають відповідні перехідні процеси в приводі, в самій трансмісії машини розвиваються коливні процеси, пов'язані з періодичними активними збуджуючими силами в зубчастих та ланцюгових зачепленнях та іншими внутрішніми збуреннями. Характер взаємозв'язку між цими процесами, ступінь їхньої суттєвості та необхідність їх врахування при відокремленому дослідженні таких процесів можна обґрунтувати лише на основі вивчення фізики формування навантажень в трансмісії машини.

Розглянемо найпростішу машину, еквівалентна схема якої може бути представлена у вигляді двомасової динамічної моделі (рис. 1.2)

Характерною особливістю навантажень на виконавчих органах більшості машин є їхній неактивний характер. Як правило, відсутні чинники, які приводять до сил, що активно діють на виконавчий орган. Сили опору, як і сили тертя в самому виконавчому органі, починають себе проявляти лише в тому випадку, коли будь-яка зовнішня сила буде намагатись перемістити виконавчий орган машини. При цьому по мірі руху виконавчого органу сили опору будуть певним чином змінюватись і кожному його положенню буде, в загальному випадку, відповідати різна величина сумарної сили опору. Таким чином, сила опору F_o є в більшості випадків деякою функцією переміщення x_p виконавчого органу машини. Як правило, це випадкова функція, оскільки багато чинників, що визначають характер зміни зусиль на виконавчих органах більшості машин, можуть бути оцінені лише статистично. Наявність певної залежності $F_o = F_o(x_p)$ дозволяє на будь-якому нескінченно малому відрізку часу вважати силу опору прямопропорційною переміщенню виконавчого органу (рис. 1.2, б) і імітувати її на еквівалентній схемі у вигляді додаткового пружного елемента, жорсткість C_p якого є функцією x_p і в певний момент часу дорівнює:

$$C_p = \frac{dF_o(x_p)}{dx_p}. \quad (1.22)$$

В такому випадку еквівалентна схема машини приймає вигляд, показаний на рис. 1.2, в. При $\frac{dF_o(x_p)}{dx_p} > 0$ пружина отримує додаткову деформацію, що імітує зростання опору виконавчого органа. Випадок зменшення опору $\left(\frac{dF_o(x_p)}{dx_p} < 0\right)$ можна представити як послаблення попередньо стиснутої пружини, жорсткість якої дорівнює C_p .

Оскільки C_p неперервно змінюється, рух мас системи під дією рушійного зусилля F_p буде нерівномірним і за такого кінематичного збурення, очевидно виникнуть відносні коливання мас двигуна m_∂ та виконавчого органа m_p . З іншої сторони, внутрішні сили, що діють між масами m_p і m_∂ , при наявності додаткового пружного зв'язку C_p будуть викликати переносні переміщення системи. Суттєвість такого роду взаємних зв'язків в значній мірі залежить від співвідношення динамічних параметрів системи (m_p , m_∂ , C_p і C_T).

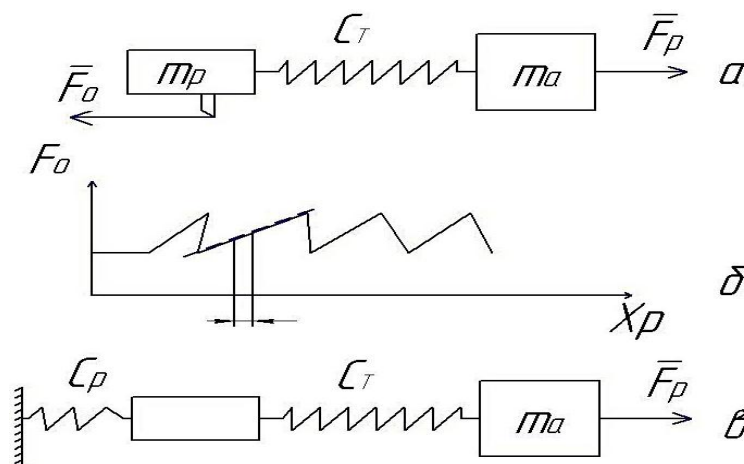


Рис. 1.2. Спрощені еквівалентні схеми машини та характер зміни зусиль на її виконавчому органі

Аналіз результатів експериментів, проведених в різних умовах і на різних машинах, показав, що реальна жорсткість перешкод лежить в межах

$0 \ll C_p \ll 5 \cdot 10^6$ Н/м. З курсів теорії коливань відомо, що власні частоти лінійної двомасової моделі (рис. 1.2, в) знаходяться з наступних залежностей

$$P_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{C_p + C_T}{m_p} + \frac{C_T}{m_\partial} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{C_p + C_T}{m_p} + \frac{C_T}{m_\partial} \right)^2 - \frac{C_T C_p}{m_p m_\partial}}},$$

$$P_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{C_p + C_T}{m_p} + \frac{C_T}{m_\partial} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{C_p + C_T}{m_p} + \frac{C_T}{m_\partial} \right)^2 - \frac{C_T C_p}{m_p m_\partial}}}, \quad (1.23)$$

де P_1, P_2 – власні частоти коливань. Підставивши в ці вирази прийняті вище значення m_p, m_∂ і змінюючи в реальних межах C_p та C_T , побудуємо графіки (рис. 1.3), які показують вплив співвідношення C_p та C_T на власні частоти розглянутої пружної системи. Пунктирними лініями на цих рисунках показані відповідні графіки для спрощених одночастотних систем, схеми яких показані на рис. 1.4. Порівняння кривих на рис. 1.3 показує, що при $C_T \gg C_p$ нижча власна частота розглянутої системи практично дорівнює власній частоті одномасової системи з пружним елементом жорсткістю $C_{пр}$, отриманої в результаті використання методу Релея (рис. 1.4, а). Вища власна частота практично також співпадає з власною частотою вільно рухомої в просторі двомасової системи (рис. 1.4, б).

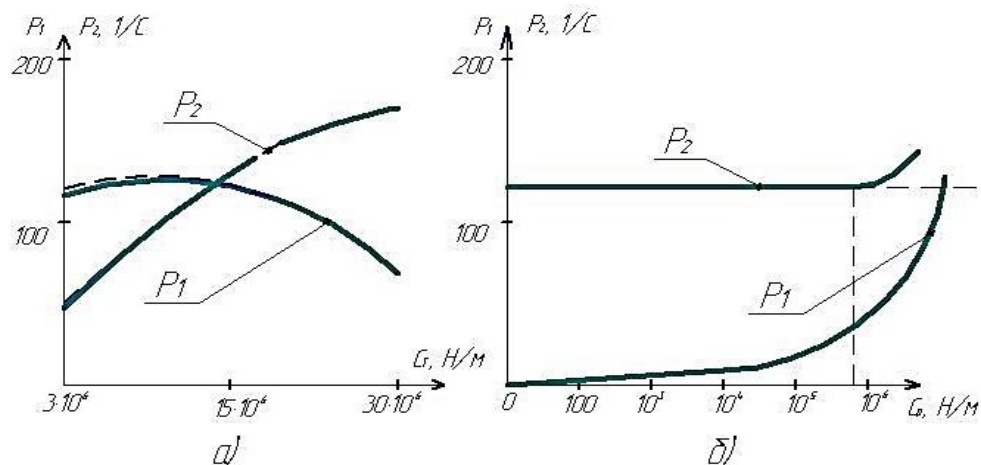


Рис. 1.3. Залежності власних частот коливань зведеної жорсткості:

а) – трансмісії машини; б) – перешкоди

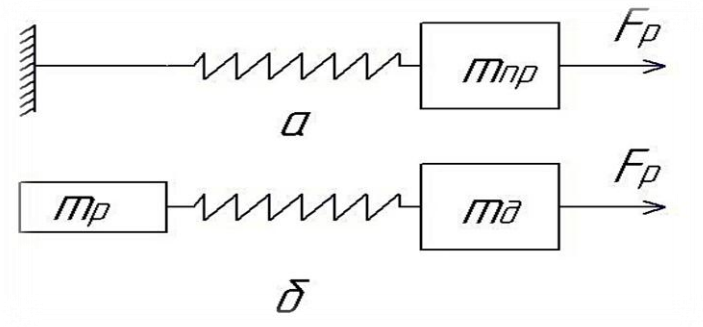


Рис. 1.4. Еквівалентні схеми машин при дослідженні задач динаміки:

а - зовнішньої; б – внутрішньої

Розглянемо вимушені коливання в системі (рис. 1.5), викликані періодичними внутрішніми (тобто діючими всередині трансмісії) силами при попередніх параметрах з амплітудою зовнішнього збурення $F_0 = 10^4 \text{ Н}$.

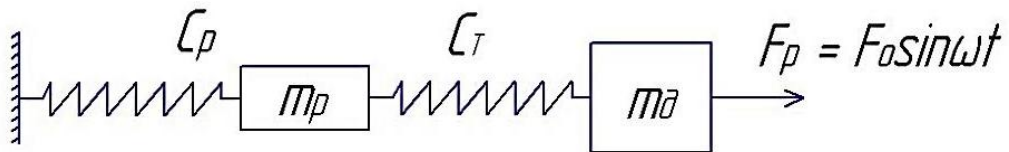


Рис. 1.5. Схема двомасової коливальної системи

З теорії коливань відомо, що для системи показаної на рис. 1.5, амплітуди коливань мас визначаються залежностями

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{F_0(C_T - m_d \omega^2) - F_0 C_T}{(C_p + C_T - m_p \omega^2)(C_T - m_d \omega^2) - C_T^2}; \\ a_d &= \frac{F_0 C_T - F_0(C_p + C_T - m_p \omega^2)}{(C_p + C_T - m_p \omega^2)(C_T - m_d \omega^2) - C_T^2}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

де a_p , a_d – амплітуди коливань мас, що імітують виконавчий орган і двигун відповідно; ω – кругова частота вимушеної сили.

У зв'язку з внутрішніми динамічними властивостями системи амплітуди зусиль в пружних зв'язках, що імітують трансмісію та перешкоду, будуть відрізнятись від прикладеної сили і визначаються з виразів

$$F_p = C_p a_p;$$

$$F_T = C_T(a_\partial - a_p). \quad (1.25)$$

На рис. 1.6 наведені графіки зміни цих зусиль при різних частотах вимушеної сили. Аналіз отриманих залежностей показує, що зусилля F_p практично дорівнює нулю на всьому діапазоні зміни ω за виключенням досить вузьких резонансних зон.

Зусилля F_T змінюється таким же чином, як зусилля в спрощеній моделі (рис. 1.4, б) при розглянутому характері навантаження. Виключенням є лише дуже вузька зона у першому резонансному стані.

Зовсім інший характер мають залежності зміни F'_p і F'_T в тому випадку, коли на систему діє зовнішня періодична сила. Як видно з рис. 1.7, F'_p і F'_T змінюються приблизно так, як зусилля в пружному зв'язку спрощеної одномасової моделі, показаної на рис. 1.4, а, за винятком вузької зони другого резонансного стану.

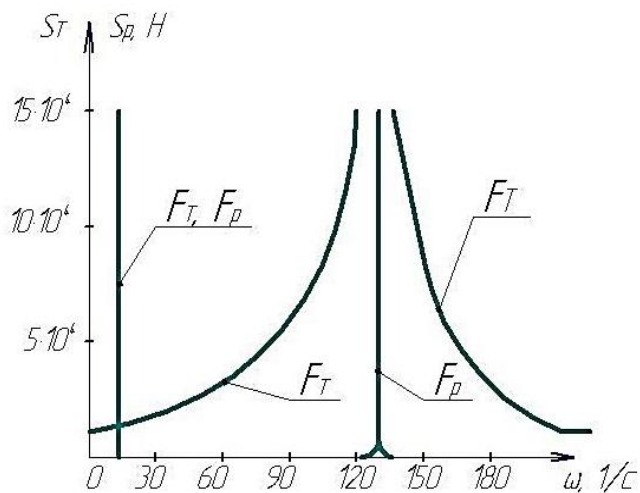


Рис. 1.6. Залежність динамічних зусиль в машині від частоти внутрішньої вимушеної сили

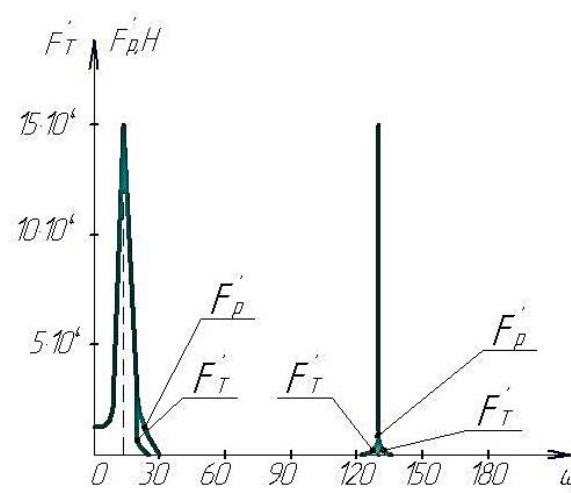


Рис. 1.7. Залежність динамічних зусиль в машині від частоти зовнішньої вимушеної сили

Таким чином, розглянута двомасова пружна система при зовнішньому збуренні веде себе як одномасова (рис. 1.4, а), а при внутрішньому збуренні

практично не відрізняється від вільно рухомої в просторі двомасової однозв'язної системи (рис. 1.4,б).

Аналогічний висновок впливає з розгляду більш складних систем, де між масами m_p і m_θ є ще декілька проміжних мас. В такому випадку переносні переміщення системи від зовнішнього збурення практично співпадають з переміщеннями одномасової зведеної системи при відсутності суттєвих відносних коливань мас системи. Внутрішні вимушені сили викликають тільки відносні коливання, як і в вільно рухомій багатомасовій системі.

Вище досліджена система (рис. 1.2, в) була представлена як спрощена модель машини, тому вибір еквівалентної розрахункової схеми при дослідженні динаміки машин, як впливає з отриманих результатів, необхідно проводити, враховуючи характер процесу, що здійснюється.

При цьому можливі дві основні задачі динаміки – *зовнішня* і *внутрішня*.

До *першої задачі* відносять ті випадки руху, коли основну роль з точки зору формування навантажень відіграють переносні переміщення системи. Типовими для зовнішньої задачі динаміки машин є наступні випадки:

1) процес, викликаний зміною (періодичною або неупорядкованою в часі) середнього значення сил опору на виконавчому органі; сюди також відносяться випадки монотонного наростання середнього значення сил опору, які приводять до стопоріння виконавчого органу машини.

2) процес, який викликаний коливаннями сил опору біля середнього значення.

В обох випадках зміна сил опору представляється на еквівалентній схемі (рис. 1.2, в) як зміна жорсткості перешкоди. Тому в тих випадках, коли $C_T \gg C_p$, при дослідженні цих задач необхідно використовувати одномасову зведену еквівалентну схему (рис. 1.4, а).

До другої задачі відносяться всі ті випадки, коли вирішальне значення, з точки зору формування навантажень, мають відносні коливання мас трансмісії. Типовими в цьому випадку є:

- 1) процеси в яких основне значення мають вільні коливання, наприклад запуск та реверсування машини;
- 2) процеси, в яких головними є вимушені коливання, наприклад згинно-крутильні коливання елементів трансмісії від активних вимушених сил в редукторі та виконавчому органі.

Такий поділ задач динаміки є зручним, оскільки дозволяє суттєво спростити розрахунки при роздільному дослідженні різних динамічних процесів. Разом з тим, при реальних співвідношеннях основних параметрів (m_p , m_θ , C_p і C_T), таке розділення достатньо обґрунтовано фізично.

Необхідно відзначити, що широка різноманітність типів машин не дає можливості зробити наведені висновки загальними. В кожному окремому випадку необхідно перевіряти можливість роздільного вивчення явищ зовнішньої та внутрішньої динаміки. Якщо таке розділення не допустиме, то задачі динамічного дослідження ускладнюються.

РОЗДІЛ 2

НЕРІВНОМІРНИЙ РУХ МАШИНИ

До нерівномірного руху машини відносять процеси пуску, гальмування, реверсування. Розглянемо нерівномірний рух машини на прикладі процесу пуску.

2.1. Основні положення процесу пуску машин

Щоб надати робочому органу машини заданий рух, приводний вал машини, зв'язаний з двигуном, повинен бути виведений з нерухомого стану і, пройшовши період розбігу, набути необхідну кутову швидкість.

Розглянемо питання аналізу процесу розгону машини, протягом якого кутова швидкість приводного валу зростає від нуля до розрахункової величини. В цей період рухомі деталі трансмісії машини рухаються нерівномірно і крім зусиль, що створюються корисним опором на робочому органі та шкідливим опором в самому механізмі, виникають також навантаження від сил інерції. При розгляді динаміки пускових процесів перевагу віддано машинам, що працюють в умовах повторно-короткочасного режиму.

Пришвидшений рух при запуску машини викликається, як правило, зусиллями, що розвиваються двигуном. Лише в деяких випадках, наприклад в лебідках, що працюють в режимі опускання вантажу, пришвидшення створюють сили, що діють на виконавчий орган машини. В зв'язку з цим суттєвий вплив на процес пуску машини має характеристика приводного двигуна. Різновидністю пускового режиму є реверсування, коли рушійне зусилля приводу змінюється не тільки за величиною, але і за напрямком. Найбільш типовими є наступні випадки:

1. Запуск без навантаження, при якому моменти що створюються силами опору, досить малі в порівнянні з рушійним моментом і можуть не враховуватись. Без навантаження запускаються звичайно двигуни

внутрішнього згоряння, електродвигуни металорізальних верстатів та багатьох інших машин.

2.Запуск під повним навантаженням, при якому сили опору можуть вважатись постійними величинами, що характерно для вантажопідйомних машин.

3.Запуск без навантаження з наступним миттєвим прикладанням навантаження, який зустрічається, наприклад, у бурильних машинах.

4.Запуск при поступово наростаючому навантаженні, при якому сила опору є функцією переміщення виконавчого органу. В деяких випадках силу опору можна вважати лінійною функцією часу або прямопропорційною переміщенню виконавчого органу.

В окремих випадках сили опору є настільки великими, що двигун не може розігнати машину і після періоду прискореного руху (за рахунок зазорів в кінематичних парах), наступає різке гальмування, викликане перевантаженням двигуна. Цей процес називають нездійсненим пуском.

Проходження процесу пуску суттєво залежить також від динамічних характеристик машини – розподілення мас та пружних елементів, а також від наявності в кінематичних ланцюгах приводу зазорів, які забезпечують вільний розгін двигуна з наступним різким пришвидшенням рушійних зусиль до виконавчого органу. В зв'язку з цим однією з важливих задач динамічного дослідження пускових режимів є визначення виникаючих динамічних навантажень. Амплітуда динамічних навантажень при запуску в ряді випадків суттєво залежить від величини пружної піддатливості трансмісії, що з'єднує двигун з робочим органом. Тому при визначенні динамічних навантажень машина повинна розглядатись як пружна система.

З іншого боку, нестационарні коливання, що виникають при запуску машини та визначають величину динамічних навантажень, незначно впливають на закон руху машини. Це дозволяє при визначенні тривалості пускових режимів і дослідженні характеру руху машини при запуску з метою спрощення вважати трансмісію абсолютно жорсткою. Однак до вибору

еквівалентних схем (моделей) при дослідженні пускових процесів необхідно підходити обережно, оскільки при цьому може бути допущена суттєва похибка.

2.2. Пришвидшений рух машини при запуску

Розглянемо пришвидшений рух машини, обладнаної короткозамкненим асинхронним електродвигуном.

Машини, що споживають порівняно невелику потужність (до 120 кВт) звичайно приводяться асинхронним двигуном з короткозамкненим ротором. Статична механічна характеристика двигуна цього типу з нормальним ротором представлена на рис. 2.1 і аналітично виражається наступною залежністю [2]:

$$M = \frac{2M_{\max} (1+\varepsilon)}{\frac{s_m}{s} + \frac{s}{s_m} + 2\varepsilon}, \quad (2.1)$$

де $M, M_{\max}$ – рушійний момент на валу двигуна і його максимальне значення відповідно; S, S_m – біжуче ковзання та його критичне значення, що

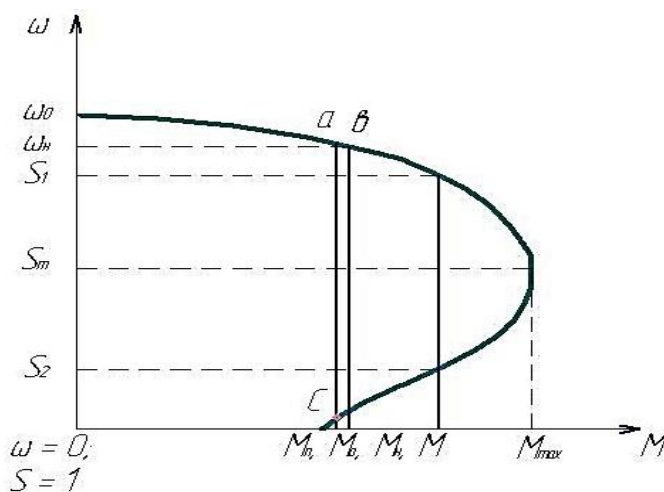


Рис. 2.1. Механічна характеристика короткозамкненого асинхронного двигуна з короткозамкненим ротором

відповідає моменту $M_{\max}$;

$\varepsilon = \frac{x_1}{r_0}$; x_1 – активний опір фази

статора; r_0 – повний реактивний

опір двигуна. Кожному значенню

M (крім $M = M_{\max}$) відповідає

два значення ковзання S_1 і S_2 , які

визначаються як корені рівняння

(2.1) при заданій величині M .

Пусковий момент M_{Π} двигуна

цього типу (при $S = 1$) значно

менший за максимальний $M_{\max}$.

Пуск машини можливий, тільки в тому випадку, коли пусковий момент $M_{\text{п}}$ буде більшим за початковий момент опору M_0 . Для приводу машин, в яких необхідний великий пусковий момент (наприклад, вантажопідйомні крани), асинхронні двигуни з характеристикою, що наведена на рис. 2.1 непридатні. Робоча точка характеристики лежить на верхній гілці (при $S \leq S_m$), при якій можлива стійка робота, тобто автоматична відповідність рушійного моменту двигуна статичному моменту опору.

Рівняння неусталеного режиму роботи двигуна записується в наступному виді:

$$M = M_0 + M_d, \quad (2.2)$$

де в правовій частині рівняння (2.2) проставлена сума статичного моменту M_0 і динамічного моменту опору:

$$M_d = I \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.3)$$

Тут I – зведений до вісі двигуна момент інерції всіх рухомих елементів машини; ω – кутова швидкість обертання ротора; t – час.

Ковзання двигуна S і кутова швидкість ω зв'язані співвідношенням:

$$S = 1 - \frac{\omega}{\omega_0} \text{ або } \omega = \omega_0(1 - S), \quad (2.4)$$

де ω_0 – синхронна кутова швидкість двигуна, тобто кутова швидкість обертання магнітного поля статора.

Номінальне та критичне ковзання визначаються залежностями:

$$S_n = \frac{\omega_n}{\omega_0}; \quad S_m = \frac{\omega_m}{\omega_0}; \quad (2.5)$$

де ω_n, ω_n – відповідно номінальна та критична кутові швидкості ротора електродвигуна.

Критичне ковзання може бути визначене за наближеною формулою

$$S_m = S_n (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}), \quad (2.6)$$

де $\lambda = M_{\max}/M_n$ – кратність максимального моменту, M_n – номінальний момент на валу електродвигуна.

Припустимо, що робоча точка двигуна лежить на верхній гілці характеристики (точка a), тобто в цій точці ротор обертається рівномірно, кутове прискорення $d\omega/dt$ і динамічний момент відсутні і статичний момент M_0 дорівнює рушійному моменту M , що розвиває двигун. Нехай момент M_0 збільшився до значення M_0' , тобто став більшим за M . В такому випадку з виразу (2.2) видно, що кутове пришвидшення двигуна стане від'ємним, тобто кутова швидкість ω почне зменшуватись

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M - M_0'}{I} \quad (2.7)$$

Однак при цьому момент M , як видно з рис. 2.1, зростає і в точці В знову настає рівновага M_0' та M ($M = M_0'$), тобто кутове пришвидшення зменшиться до нуля і рух знову буде рівномірним.

Інша картина спостерігається при роботі на не стійкій гілці характеристики в точці С. При постійній величині M_0 рівномірне обертання ротора тут можливе, однак при деякому навіть незначному збільшенні M_0 , коли кутове пришвидшення стане від'ємним і швидкість ω стане зменшуватись, то момент M не збільшиться, як в першому випадку, а зменшується, як показано на рис. 2.1.

Таким чином, чисельник в формулі (2.7) не буде зменшуватись до нуля, а, навпаки, ще більше зростає по абсолютній величині, залишаючись

від'ємним, тобто обертання ротора стане ще більш сповільненим і кутова швидкість впаде до нуля.

Таким чином, двигун з характеристикою наведеною на рис. 2.1 можна встановити для приводів машин тільки в тих випадках, коли запуск здійснюється без навантаження або при малому статичному навантаженні ($M_0 < M_H$), а підвищені значення моменту M_0 виникають вже після розгону ротора двигуна, тобто виходу на верхню гілку характеристики. Ця властивість двигуна визначає в ряді випадків конструкцію машини або технологічного процесу її роботи.

В деяких машинах, наприклад металорізальних верстатах, двигун запускають до того, як робочий орган верстата приступає до різання металу, а процес різання починається, коли робота двигуна вже відповідає стійкій гілці характеристики.

Якщо з умов роботи машини вимагається великий пусковий момент, то можна використати двигун з фазним ротором або короткозамкнений двигун зі спеціальним ротором, механічна характеристика якого вже не описується рівнянням (2.1).

На рис. 2.2 показані механічні характеристики деяких двигунів зі спеціальним ротором. Тут пусковий момент значно збільшується в порівнянні з двигунами, що мають нормальний ротор. Для цих двигунів пропонується така залежність механічної характеристики:

$$\frac{M}{M_{\max}} = \frac{(1+k)S}{k+S}. \quad (2.8)$$

Тут коефіцієнти k визначаються в кожному випадку з умови співпадіння будь-якої точки дійсної та наближеної характеристик.

На рис. 2.2 прийняті позначення: 1,2 – дійсні характеристики; 1',2' – наближені характеристики. Як видно з рис. 2.2, провал характеристики не вдається апроксимувати зручною залежністю, маючи на увазі необхідність

наступного інтегрування, і це, звичайно, вносить деякі відхилення між результатами наближеного розрахунку та фактичним процесом пуску.

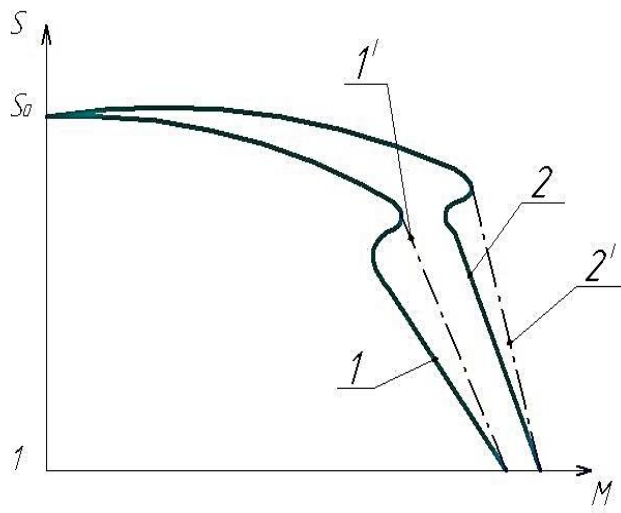


Рис. 2.2. Механічні характеристики короткозамкнених асинхронних двигунів зі спеціальним ротором

Покажемо розв'язування задачі визначення тривалості пуску машини, яка приводиться в рух асинхронним короткозамкненим двигуном. В загальному вигляді розв'язок цієї задачі зводиться до інтегрування рівняння (2.2), яке запишемо в такому виді

$$I \frac{d\omega}{dt} = M - M_0 \quad (2.9)$$

Зі співвідношення (2.4)

випливає, що

$$\frac{d\omega}{dt} = -\omega_0 \frac{ds}{dt}, \quad (2.10)$$

а вираз для рушійного моменту M в загальному вигляді можна записати

$$M = M_{\max} f(S). \quad (2.11)$$

Після підстановки виразів (2.10) і (2.11) в рівняння (2.9) будемо мати

$$I\omega_0 \frac{ds}{dt} = M_0 - M_{\max} f(S). \quad (2.12)$$

Позначимо

$$M_0/M_{\max} = P, \quad (2.13)$$

і рівняння (2.12) розділимо на $M_{\max}$, в результаті чого отримуємо

$$\frac{I\omega_0}{M_{\max}} \frac{ds}{dt} = P - f(S). \quad (2.14)$$

Розділимо змінні в рівнянні (2.14)

$$\frac{M_{\max}}{I\omega_0} dt = \frac{ds}{P - f(S)}. \quad (2.15)$$

Проінтегруємо ліву та праву частини рівняння (2.15), вираз $I\omega_0/M_{\max}$ є не що інше як умовний час пуску машини під дією постійного моменту M_0 від $\omega = 0$ до $\omega = \omega_0$ при $M_0 = 0$, який отримав назву постійна пуску машини:

$$T = \frac{I\omega_0}{M_{\max}}. \quad (2.17)$$

і в кінцевому вигляді маємо:

$$\frac{t}{T} = \int \frac{ds}{P - f(S)} + C, \quad (2.18)$$

де C – постійна інтегрування, яка визначається з початкових умов руху.

Покажемо застосування залежності (2.18) на конкретному прикладі.

Нехай треба визначити тривалість пуску машини з двигуном, характеристика якого описується залежністю (2.1) і показана рис. 2.1. Статичний момент опору на робочому органі приймемо постійним і рівним M_p . Тоді цей момент, зведений до вісі двигуна, визначається залежністю

$$M_0 = \frac{M_p}{u\eta}, \quad (2.19)$$

де u – передатне число від двигуна до робочого органу; η – коефіцієнт корисної дії передач від двигуна.

Рівняння пуску машини (2.18) запишемо з урахуванням виразу (2.1):

$$\frac{t}{T} = \int \frac{ds}{P \frac{2(1+\varepsilon)}{\frac{S}{S_m} + \frac{S_m}{S} + 2\varepsilon}} + C. \quad (2.20)$$

Величину ε приймемо рівною

$$\varepsilon = nS_H, \quad (2.21)$$

де n – коефіцієнт, який залежить від активного та реактивного опору ротора і статора; S_H – номінальне ковзання, яке визначається залежністю

$$S_H = 1 - \frac{\omega_H}{\omega_0}. \quad (2.22)$$

Тут ω_H – номінальна кутова швидкість ротора електродвигуна.

Перепишемо рівняння (2.20) у вигляді

$$\frac{t}{T} = \int \frac{(S^2 + 2\varepsilon S_m S + S_m^2) ds}{P S^2 - 2S_m [\varepsilon(1-P) + 1] + S_m^2 P} + C. \quad (2.23)$$

Для спрощення рівняння (3.23) позначимо

$$\xi = \frac{\varepsilon(1-P) + 1}{P}. \quad (2.24)$$

Після підстановки виразу (2.24) в рівняння (2.23) будемо мати

$$\frac{t}{T} = \frac{1}{P} \int \frac{(S^2 + 2\varepsilon S_m S + S_m^2) ds}{S^2 - 2S_m \xi + S_m^2} + C. \quad (2.25)$$

Інтегруючи вираз (2.25) та визначаючи постійну C з початкової умови, що при $t = 0$; $S = 1$, маємо

$$\frac{t}{T} = \frac{1}{P} \left\{ S - 1 + \frac{2S_m}{P\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[\left(\sqrt{\xi^2 - 1} + \xi \right) \ln \frac{S - S_m P \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)}{1 - S_m P \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\sqrt{\xi^2 - 1} - \xi \right) \ln \frac{S - S_m P \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)}{1 - S_m P \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} \right] \right\}. \quad (2.26)$$

Для прикладу знайдемо залежність відношень ω/ω_0 від t/T при наступних даних: $P = M_0/M_{\max} = 0.2$; $S_m = 0.15$; $S_n = 0.03$; $\varepsilon = 0.15$; $\xi = 5.6$.

Підставляючи ці величини в залежність (2.26), будуємо криву 1,

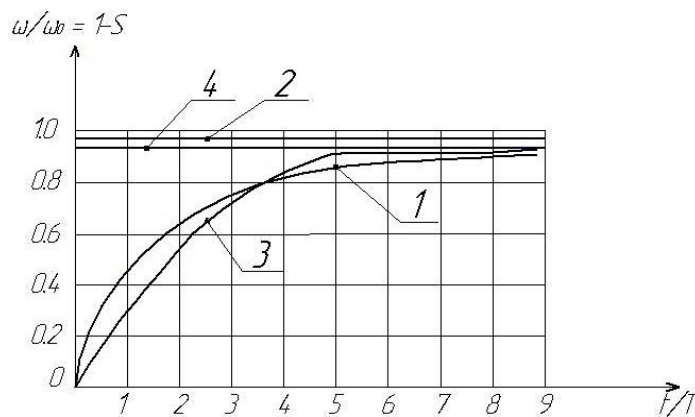


Рис. 2.3. Зміна кутової швидкості асинхронного короткозамкненого двигуна в процесі пуску

показану на рис. 2.3.

Асимптотою до цієї кривої є величина кутової швидкості $\omega' = \omega_0(1 - S')$, де S' - ковзання, що відповідає моменту $M_0 = kM_{\max}$. Визначимо S' як менший корінь квадратного рівняння, до якого приводиться рівняння (2.1):

$$S^2 - 2SS_m[1 + \varepsilon(1 - P)]/P + S_m^2 = 0. \quad (2.27)$$

З рівняння (2.27) при прийнятих вихідних даних $S' = 0.012$. На рис. 2.3 ця асимптота показана прямою 2. Таким чином, теоретично номінальна кутова швидкість ніколи не досягається, але практично вже через незначний час (1...5с) фактична швидкість обертання несуттєво відрізняється від номінальної.

Під тривалістю пуску звичайно розуміють час, протягом якого кутова швидкість ротора зростає від нуля до величини, що відрізняється від номінальної кутової швидкості на 1-2%. В якості другого прикладу

розглянемо запуск машини, що приводиться в рух асинхронним короткозамкненим електродвигуном зі спеціальним ротором, характеристика якого описується рівнянням (2.8). Підставляючи його у вихідну залежність (2.16), перепишемо її в такому вигляді

$$\frac{t}{T} = \int \frac{k+S}{kP+(P-k-1)S} dS + C. \quad (2.28)$$

Інтегруючи і визначаючи постійну C з умови, що при $t = 0$, $S = 1$, будемо мати:

$$\frac{t}{T} = \frac{k(k+1)}{(P-k-1)^2} \ln \frac{(1+k)(P-1)}{kP+(P-k-1)S} - \frac{1-S}{P-k-1}. \quad (2.29)$$

При ті ж вихідних даних, як і в попередньому прикладі, на рис 2.3 побудовано залежності (2.29) крива 3. Асимптотою для неї слугує пряма 4, яка визначається ординатою $S = kP/(k+1-P)$, при якій величина t/T в залежності (2.29) прямує до нескінченності.

Наведений аналітичний розв'язок задачі про тривалість запуску машини з асинхронним короткозамкненим двигуном можливий тільки в тих випадках, коли може бути взятий інтеграл в залежності (2.18). В загальному випадку, коли механічна характеристика двигуна не виражається через елементарні функції, а також коли момент M_0 непостійний, приходиться використовувати чисельні методи інтегрування.

2.3. Динамічні навантаження при пуску машини

2.3.1. Еквівалентна динамічна модель машини

Методика розрахунку динамічних навантажень і величини похибок, що виникають при цьому, визначаються вибором еквівалентної динамічної схеми (моделі) машини. При цьому необхідно враховувати, що спрощення

еквівалентної динамічної моделі веде до збільшення похибок при розрахунках. З іншої сторони, значне ускладнення цих моделей робить розрахункові методики настільки громіздкими, що вони не знаходять широкого практичного застосування.

В більшості випадків при дослідженні пуску одноприводних машин, що мають один виконавчий орган, еквівалентна динамічна модель може бути представлена у вигляді двомасової пружної системи, в якій у вигляді зосереджених мас представляються момент інерції ротора двигуна машини та зведений момент інерції виконавчого органа, а моменти інерції деталей трансмісії, що їх з'єднує, певним чином розподіляються між цими зосередженими масами.

Реальне застосування такої еквівалентної моделі може бути різним. До такої моделі можуть бути зведені трансмісії приводів машин з масивними виконавчими органами, механізми приводу ходової частини та виконавчого органу навантажувальних машин, різні типи вантажопідйомних, будівельних, сільськогосподарських та інших машин. В дійсності в приводі цих машин мають місце значно більш складні розподілення мас, тому значення параметрів еквівалентної динамічної моделі повинні бути вибрані таким чином, щоб динамічні характеристики системи на скільки можливо більш точно відповідали дійсним системам. В цьому відношенні значну допомогу може надати діаграма мас.

Переходити від діаграми мас до розрахункової схеми (моделі) необхідно шляхом використання принципу Релея, суть якого полягає в представленні, що при динамічних процесах характер деформації системи зберігається таким же, як і при статичному навантаженні.

Розглянемо побудову розрахункової динамічної моделі з використанням принципу Релея на прикладі машини, діаграма мас якої має вигляд, показаний на рис. 2.4, а. Характер деформації такої системи при статичному навантаженні залежить від того, чи зможуть сили опору на виконавчому органі викликати його зворотній рух (як, наприклад, в

механізмі підйому вантажопідйомних машин) чи сили опору мають реактивний характер (наприклад, сили тертя, опір різанню тощо) і проявляють себе тільки в тому випадку, коли зовнішнє зусилля двигуна старається зрушити виконавчий орган.

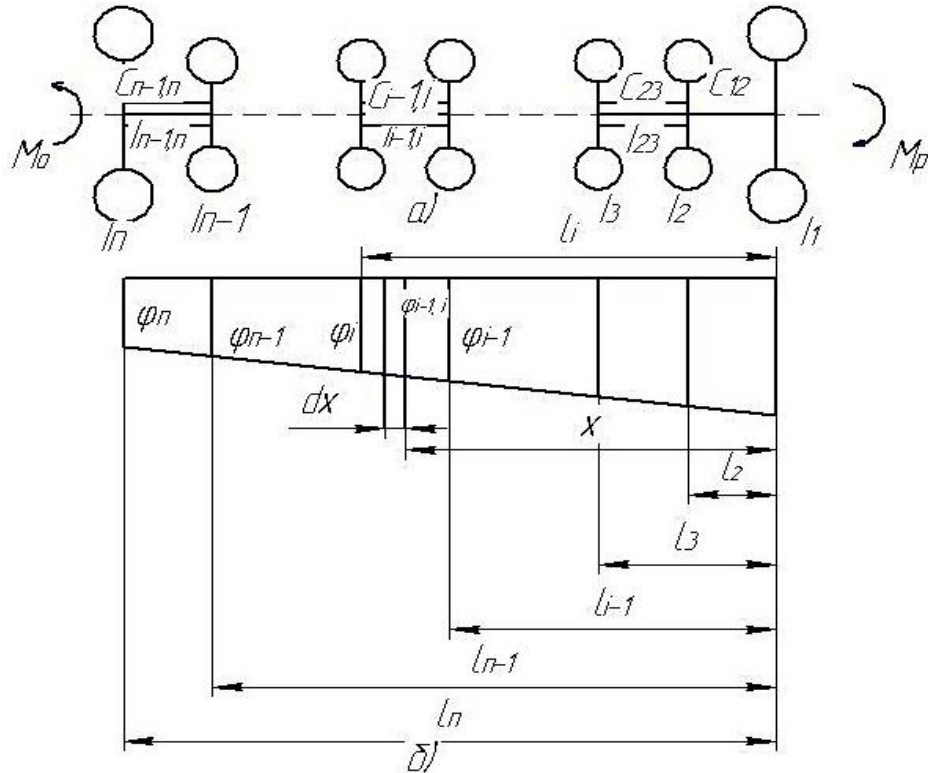


Рис. 2.4. Діаграма мас (а) і характер деформації (б) трансмісії машини при статичному навантаженні

Розглянемо, як найбільш типовий, другий випадок. Тоді, відповідно рис. 2.4, б, отримаємо наступні співвідношення:

для зосереджених мас

$$\varphi_i = \varphi_1 - \frac{\varphi_1 - \varphi_n}{l_n} l_i = \varphi_1 \left(1 - \frac{l_i}{l_n}\right) + \varphi_n \frac{l_i}{l_n}; \quad (2.30)$$

для ділянок з розподіленими масами

$$\varphi_{i-1, i} = \varphi_1 \left(1 - \frac{x}{l_n}\right) + \frac{x}{l_n} \varphi_n, \quad (2.31)$$

де φ_1 – зведений кут повороту ротора двигуна; φ_n – зведений кут повороту виконавчого органу машини; φ_i – зведений кут повороту i -ої ділянки трансмісії, виділеної у вигляді зосередженої маси; $\varphi_{i-1,i}$ – зведений кут повороту x -го перерізу i -ої ділянки трансмісії з розподіленим масами.

Кінетична енергія системи визначається наступним виразом

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \dot{\varphi}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n I_{i-1,i} \dot{\varphi}_{i-1,i}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \left[\dot{\varphi}_1 \left(1 - \frac{l_i}{l_n} \right) + \dot{\varphi}_n \frac{l_i}{l_n} \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \frac{I_{i-1,i}}{l_i - l_{i-1}} \int_{l_{i-1}}^{l_i} \left[\dot{\varphi}_1 \left(1 - \frac{x}{l_n} \right) + \dot{\varphi}_n \frac{x}{l_n} \right]^2 dx. \quad (2.32)$$

Знайдемо інтеграл у виразі (2.32)

$$\int_{l_{i-1}}^{l_i} \left[\dot{\varphi}_1 \left(1 - \frac{x}{l_n} \right) + \dot{\varphi}_n \frac{x}{l_n} \right]^2 dx = \dot{\varphi}_1^2 \left(\frac{l_i^3 - l_{i-1}^3}{3l_n^2} - \frac{l_i^2 - l_{i-1}^2}{l_n} + l_i - l_{i-1} \right) + \dot{\varphi}_n^2 \frac{l_i^3 - l_{i-1}^3}{3l_n^2} + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_n \frac{l_i - l_{i-1}}{l_n}. \quad (2.33)$$

Після підстановки виразу (3.33) в залежність (3.32) маємо

$$T = \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} \left[\sum_{i=1}^n I_i \left(1 - \frac{l_i}{l_n} \right)^2 + \sum_{i=2}^n \frac{I_{i-1,i}}{l_i - l_{i-1}} \left(\frac{l_i^3 - l_{i-1}^3}{3l_n^2} - \frac{l_i^2 - l_{i-1}^2}{l_n} + l_i - l_{i-1} \right) \right] + \frac{\dot{\varphi}_n^2}{2} \left[\sum_{i=1}^n I_i \frac{l_i^2}{l_n^2} + \sum_{i=2}^n \frac{I_{i-1,i}}{l_i - l_{i-1}} \cdot \frac{l_i^3 - l_{i-1}^3}{3l_n^2} \right] + \frac{\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_n}{2} \left[2 \sum_{i=1}^n I_i \frac{l_i}{l_n} \left(1 - \frac{l_i}{l_n} \right) + \sum_{i=1}^n I_{i-1,i} \frac{l_i^2 - l_{i-1}^2}{l_n(l_i - l_{i-1})} \right]. \quad (2.34)$$

Враховуючи те, що довжина відрізків еквівалентного вала зворотно пропорційна зведеній жорсткості відповідній частині трансмісії, зробимо заміну $l_i = M_c / C_i$. Тут $1/C_i = \sum_{j=1}^i 1/C_{i-1,j}$, M_c масштабний коефіцієнт. Приймаючи $C_n = C$ і підставляючи вище наведені залежності у вираз кінетичної енергії (2.34), отримаємо

$$\begin{aligned}
T = & \frac{\dot{\phi}_1^2}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n I_i \left(1 - \frac{C}{C_i} \right)^2 + \sum_{i=2}^n I_{i-1,i} \left[1 - C \left(\frac{1}{C_i} + \frac{1}{C_{i-1}} \right) + \frac{C^2(1/C_i^3 - 1/C_{i-1}^3)}{3(1/C_i - 1/C_{i-1})} \right] \right\} + \\
& + \frac{\dot{\phi}_n^2}{2} \left[\sum_{i=1}^n I_i \frac{C}{C_i^2} + \sum_{i=2}^n I_{i-1,i} \frac{C^2(1/C_i^3 - 1/C_{i-1}^3)}{3(\frac{1}{C_i} - \frac{1}{C_{i-1}})} \right] + \frac{\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_n}{2} [2 \sum_{i=1}^n I_i \frac{C}{C_i} \left(1 - \frac{C}{C_i} \right) + \\
& + \sum_{i=2}^n I_{i-1,i} \left(\frac{1}{C_i} + \frac{1}{C_{i-1}} \right)].
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Зробивши заміни

$$\begin{aligned}
I_\partial = & \sum_{i=1}^n I_i \left(1 - \frac{C}{C_i} \right)^2 + \sum_{i=2}^n I_{i-1,i} \left[1 - C \left(\frac{C}{C_i} + \frac{1}{C_{i-1}} \right) + \frac{C^2(\frac{1}{C_i^3} - \frac{1}{C_{i-1}^3})}{3(\frac{1}{C_i} - \frac{1}{C_{i-1}})} \right]; \\
I_p = & \sum_{i=1}^n I_i \frac{C^2}{C_i} + \sum_{i=2}^n I_{i-1,i} \frac{C^2(\frac{1}{C_i^3} - \frac{1}{C_{i-1}^3})}{3(\frac{1}{C_i} - \frac{1}{C_{i-1}})};
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$I_{\partial p} = 2 \sum_{i=1}^n I_i \frac{C}{C_i} \left(1 - \frac{C}{C_i} \right) + \sum_{i=2}^n I_{i-2,i} C \left(\frac{1}{C_i} + \frac{C}{C_{i-1}} \right),$$

отримаємо кінцевий вираз кінетичної енергії системи

$$T = \frac{1}{2} (I_\partial \dot{\phi}_1^2 + I_{\partial p} \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_n + I_p \dot{\phi}_n^2), \tag{2.37}$$

за допомогою якого, використовуючи рівняння Лагранжа другого роду, можна отримати систему диференціальних рівнянь, що описують рух машини в період пуску [3].

2.3.2. Динамічні навантаження в машинах з одним виконавчим органом

При пуску двигуна в трансмісії машини є зазори. Так, наприклад, в процесі пуску лебідки канат, як правило, ослаблений, а в передачах, які знаходяться без навантажень, є зазори в зачепленнях. Тому в процесі пуску машини можна, виділити наступні характерні етапи руху.

1) пришвидшений рух ротора двигуна в зв'язку з наявністю зазорів в кінематичному ланцюгу при нерухомому виконавчому органі;

2) рух ротора двигуна за рахунок пружної деформації трансмісії при нерухомому виконавчому органі до моменту, коли зусилля в трансмісії стане рівне по величині опору;

3) пуск виконавчого органа.

В окремих часткових випадках деякі з цих етапів можуть бути відсутніми. Наприклад, ротор вісьового вентилятора з'єднується з двигуном жорстким валом і зазори в кінематичному ланцюгу в процесі пуску відсутні.

Протягом першого та другого етапів руху ротор двигуна набуває деяку швидкість ω_1 , а трансмісія отримує попередню деформацію, яка відповідає прикладеному до виконавчого органу опору.

При складанні системи диференціальних рівнянь руху машини на третьому етапі пуску можна використати рівняння Лагранжа другого роду. При цьому за узагальнені координати виберемо кутові координати зведених мас, які імітують на еквівалентній динамічній схемі (моделі) ротор електродвигуна та виконавчий орган. Тоді рівняння Лагранжа матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= Q_{\varphi_d} - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_\Pi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_\Pi} &= Q_{\varphi_p} - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_\Pi},\end{aligned}\tag{2.38}$$

де T , Π – відповідно кінетична та потенціальна енергія системи, Q_{φ_d} , Q_{φ_p} – узагальнені сили відповідно зі сторони двигуна та робочого органу, зведені до ротора двигуна.

Потенціальна енергія системи є енергією деформації еквівалентного валу системи, яка виражається наступною залежністю

$$\Pi = \frac{C}{2} \left(\varphi_{\partial} - \varphi_{\Pi} + \frac{M_0}{C} \right)^2, \quad (2.39)$$

де C – зведена жорсткість еквівалентного вала системи.

Візьмемо необхідні для рівнянь (2.38) похідні від виразів кінетичної (3.37) та потенціальної (2.39) енергій систем:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{\Pi}} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} I_{\partial} \dot{\varphi}_1 + I_{\partial p} \dot{\varphi}_n / 2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_n} = I_p \dot{\varphi}_n + I_{\partial p} \dot{\varphi}_1;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = I_{\partial} \ddot{\varphi}_1 + I_{\partial p} \ddot{\varphi}_n / 2; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_n} = I_p \ddot{\varphi}_n + I_{\partial p} \ddot{\varphi}_1;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = C(\varphi_1 - \varphi_n + M_0/C); \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_n} = -C(\varphi_1 - \varphi_n + M_0/C); \quad (2.40)$$

$$Q_{\varphi_1} = M; \quad Q_{\varphi_n} = -M_0,$$

де M – рушійний момент на валу електродвигуна, який визначається за формулою Клосса.

Після підстановки залежностей (3.40) в систему рівнянь (2.38) будемо мати:

$$I_{\partial} \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} I_{\partial p} \ddot{\varphi}_n = M - M_0 - C(\varphi_1 - \varphi_n);$$

$$I_p \ddot{\varphi}_n + \frac{1}{2} I_{\partial p} \ddot{\varphi}_1 = C(\varphi_1 - \varphi_n). \quad (2.41)$$

Тут M_0 – момент сил опору на виконавчому органі, зведений до вісі повороту електродвигуна; $I_\partial, I_{\partial p}, I_p$ – зведені до вісі повороту ротора електродвигуна моменти інерції відповідно ротора електродвигуна, трансмісії та виконавчого органу.

Рушійний момент на валу електродвигуна залежить від зміни кутової швидкості ротора $\dot{\varphi}_1$. Однак завдяки значній жорсткості трансмісії, яка характерна для більшості машин, тривалість третього періоду є досить незначною і кутова швидкість ротора двигуна не встигає суттєво змінитись. Тому в багатьох випадках для попереднього розрахунку динамічних навантажень можна прийняти, що $\Delta M = M - M_0 = \text{const}$.

Для спрощення розв'язку системи (2.41) помножимо перше рівняння системи на I_p , а друге на $I_p \frac{I_\partial + I_{\partial p}/2}{I_p + I_{\partial p}/2}$ і віднімемо від першого рівняння системи друге. В результаті чого будемо мати

$$\begin{cases} I_\partial I_p \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} I_{\partial p} I_p \ddot{\varphi}_n = \Delta M \cdot I_p - I_p C(\varphi_1 - \varphi_n); \\ I_p^2 \frac{I_\partial + I_{\partial p}/2}{I_p + I_{\partial p}/2} \ddot{\varphi}_n + \frac{1}{2} I_{\partial p} I_p \frac{I_\partial + I_{\partial p}/2}{I_p + I_{\partial p}/2} \ddot{\varphi}_1 = I_p \frac{I_\partial + I_{\partial p}/2}{I_p + I_{\partial p}/2} C(\varphi_1 - \varphi_n); \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left(I_\partial I_p - \frac{1}{2} I_{\partial p} I_p \frac{I_\partial + I_{\partial p}/2}{I_p + I_{\partial p}/2} \right) \ddot{\varphi}_1 + \left(\frac{1}{2} I_{\partial p} I_p - I_p^2 \frac{I_\partial + I_{\partial p}/2}{I_p + I_{\partial p}/2} \right) \ddot{\varphi}_n = \\ & = \Delta M I_p - C I_p \left(1 + \frac{I_\partial + I_{\partial p}/2}{I_p + I_{\partial p}/2} \right) (\varphi_1 - \varphi_n); \\ & I_p \left(I_\partial - \frac{1}{2} I_{\partial p} \frac{I_\partial + I_{\partial p}/2}{I_p + I_{\partial p}/2} \right) \ddot{\varphi}_1 + I_p \left(\frac{1}{2} I_{\partial p} - I_p \frac{I_\partial + I_{\partial p}/2}{I_p + I_{\partial p}/2} \right) \ddot{\varphi}_n + \\ & + C I_p \left(1 + \frac{I_\partial + I_{\partial p}/2}{I_p + I_{\partial p}/2} \right) (\varphi_1 - \varphi_2) = I_p \Delta M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{I_{\partial p} I_p + \frac{I_{\partial p} I_p}{2} - \frac{I_{\partial p} I_p}{2} - \frac{I_{\partial p}^2}{4}}{I_p + \frac{I_{\partial p}}{2}} \ddot{\varphi}_1 + \frac{\frac{I_{\partial p} I_p}{2} + \frac{I_{\partial p}^2}{4} - I_{\partial p} I_p - \frac{I_{\partial p} I_p}{2}}{I_p + \frac{I_{\partial p}}{2}} \ddot{\varphi}_n + \\ & + C \frac{I_p + \frac{I_{\partial p}}{2} + I_\partial + \frac{I_{\partial p}}{2}}{I_p + \frac{I_{\partial p}}{2}} (\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta M \end{aligned}$$

$$\frac{I_{\partial p} I_p - \frac{I_{\partial p}^2}{4}}{I_p \frac{I_{\partial p}}{2}} (\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_n) + C \frac{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}}{I_p + \frac{I_{\partial p}}{2}} (\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta M. \quad (2.42)$$

Тепер розділимо ліву і праву частини рівняння (2.42) на коефіцієнт біля старших похідних, в результаті чого отримаємо

$$\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_n + C \frac{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}}{I_p I_{\partial p} - \frac{I_{\partial p}^2}{4}} (\varphi_1 - \varphi_n) = \Delta M \frac{I_p + I_{\partial p} / 2}{I_p I_{\partial} - \frac{I_{\partial p}^2}{4}}. \quad (2.43)$$

Введемо позначення

$$k = \sqrt{C \frac{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}}{I_p I_{\partial p} - \frac{I_{\partial p}^2}{4}}}; \quad \Delta \varphi = (\varphi_1 - \varphi_n). \quad (2.44)$$

Тоді будемо мати

$$\Delta \ddot{\varphi} + k^2 \Delta \varphi = \Delta M \frac{I_p + I_{\partial p} / 2}{I_p I_{\partial} - \frac{I_{\partial p}^2}{4}}. \quad (2.45)$$

Розв'яжемо лінійне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами і правою частиною (3.45) для таких початкових умов руху

$$t = 0, \varphi_1 = 0, \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \varphi_n = 0, \dot{\varphi}_n = 0, \quad (2.46)$$

Запишемо ці умови у відповідності до позначень в рівнянні (2.45)

$$t = 0 : \varphi_1 = 0, \Delta \dot{\varphi} = \omega_1, \quad (2.47)$$

Розв'язок рівняння (2.45) для умов (2.47) має вигляд

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_1}{k} \sin kt + \frac{\Delta M}{C} \frac{I_p + \frac{I_{\partial p}}{2}}{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}} (1 - \cos kt); \quad (2.48)$$

$$\Delta\dot{\varphi} = \omega_1 \cos kt + \frac{\Delta M}{C} k \frac{I_p + \frac{I_{\partial p}}{2}}{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}} \sin kt;$$

$$\Delta\ddot{\varphi} = -\omega_1 k \sin kt + \frac{\Delta M}{C} k^2 \frac{I_p + \frac{I_{\partial p}}{2}}{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}} \cos kt.$$

Тоді крутний момент на валу двигуна визначається наступною залежністю:

$$M_{кр} = M_o + C\Delta\varphi = M_o + \frac{C\omega_1}{k} \sin kt + \Delta M \frac{I_p + \frac{I_{\partial p}}{2}}{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}} (1 - \cos kt). \quad (2.49)$$

Для визначення максимального значення крутного моменту продиференціюємо за часом вираз (2.49) і прирівняємо його до нуля

$$\dot{M}_{кр} = C\Delta\dot{\varphi} = C\omega_1 \cos kt_1 + \Delta M k \frac{I_p + \frac{I_{\partial p}}{2}}{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}} \sin kt_1 = 0.$$

Звідки отримаємо

$$C\omega_1 + \Delta M k \frac{I_p + \frac{I_{\partial p}}{2}}{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}} \operatorname{tg} kt_1 = 0. \quad (2.50)$$

З рівняння (2.50) знаходимо

$$t_1 = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \left[-\frac{C\omega_1 (I_p + I_{\partial p} + I_{\partial})}{I_p + \frac{I_{\partial p}}{2}} \right]. \quad (2.51)$$

Таким чином, максимальні зусилля в трансмісії машини діють в момент часу, коли $\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_n$, що дозволяє враховувати втрати в системі протягом всього інтервалу руху $0 \leq t \leq t_1$.

Підставляючи у вираз (2.49) значення моменту часу $t = t_1$ з формули (2.51) і враховуючи знаки тригонометричних функцій, після перетворень будемо мати:

$$M_{\max} = M_0 + \frac{\Delta M(I_p + \frac{I_{\partial p}}{2})}{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}} + \frac{\frac{C\omega_1^2(I_p I_{\partial} - \frac{I_{\partial p}^2}{4})}{\Delta M(I_p + \frac{I_{\partial p}}{2})} + \frac{\Delta M(I_p + \frac{I_{\partial p}}{2})}{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega_1^2(I_p + I_{\partial p} + I_{\partial})(I_p I_{\partial} - \frac{I_{\partial p}^2}{4})}{\Delta M^2(I_p + \frac{I_{\partial p}}{2})}}}. \quad (2.52)$$

Отримана залежність справедлива при умові, що $\dot{\phi}_1(t_1) \leq \omega_m$.

Для визначення $\dot{\phi}_1(t_1)$ складемо рівняння системи (2.41)

$$(I_{\partial} + I_{\partial p}/2)\ddot{\phi}_1 + (I_p + \frac{I_{\partial p}}{2})\ddot{\phi}_n = M - M_0. \quad (2.53)$$

Тепер проінтегруємо ліву та праву частини цього рівняння за часом, в результаті чого будемо мати

$$(I_{\partial} + I_{\partial p}/2)\dot{\phi}_1 + (I_p + \frac{I_{\partial p}}{2})\dot{\phi}_n = \Delta M t + C, \quad (2.54)$$

де C – постійна інтегрування. Враховуючи, що при $t = 0$, $\dot{\phi}_1 = \omega_1$, а $\dot{\phi}_n = 0$, маємо

$$C = (I_{\partial} + I_{\partial p}/2) \omega_1. \quad (2.55)$$

Підставивши вираз (2.55) в рівняння (2.54), отримаємо

$$(I_{\partial} + I_{\partial p}/2) \dot{\varphi}_1 + (I_{\partial} + I_{\partial p}/2) \dot{\varphi}_n = \Delta M t + (I_{\partial} + I_{\partial p}/2) \omega_1. \quad (2.56)$$

З системи (2.48) можна записати

$$\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_n = \omega_1 \cos kt + \frac{\Delta M}{C} k \frac{I_p + \frac{I_{\partial p}}{2}}{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}} \sin kt. \quad (2.57)$$

З рівняння (2.57) підставимо вираз $\dot{\varphi}_n$ в рівняння (2.56), в результаті чого отримаємо:

$$\begin{aligned} (I_{\partial} + I_{\partial p}/2) \dot{\varphi}_1 + (I_{\partial} + I_{\partial p}/2) \left[\dot{\varphi}_1 - \omega_1 \cos kt - \frac{\Delta M}{C} k \frac{I_p + \frac{I_{\partial p}}{2}}{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}} \sin kt \right] = \\ = \Delta M t + (I_{\partial} + I_{\partial p}/2) \omega_1. \end{aligned}$$

Після перетворень маємо

$$\begin{aligned} (I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}) \dot{\varphi}_1 = \Delta M t + (I_{\partial} + I_{\partial p}/2) \omega_1 + (I_{\partial} + I_{\partial p}/2) \omega_1 \cos kt + \\ + \frac{\Delta M}{C} k \frac{\left(I_{\partial} + \frac{I_{\partial p}}{2}\right)^2}{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}} \sin kt. \end{aligned}$$

З отриманого рівняння знаходимо

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1(t) = \left[\left(I_{\partial} + \frac{I_{\partial p}}{2}\right) \omega_1 + \left(I_{\partial} + \frac{I_{\partial p}}{2}\right) \omega_1 \cos kt + \right. \\ \left. + \Delta M \left(t + \frac{k}{C} \frac{\left(I_{\partial} + \frac{I_{\partial p}}{2}\right)}{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}} \sin kt \right) \right] / (I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}). \quad (2.58) \end{aligned}$$

З проведеного аналізу видно, що процес пуску при постійній різниці рушійних сил і сил опору викликає в трансмісії машини коливання з кутовою частотою k . При наявності в системі сил тертя та інших дисипативних

чинників, ці коливання будуть затухати і машина поступово перейде в усталений режим руху.

Максимальні динамічні навантаження в процесі пуску виникають у трансмісії не зразу, а через деякий час з початку руху виконавчого органу. Максимальна величина крутного моменту в процесі пуску залежить від динамічних параметрів машини ($I_p, I_\partial, I_{\partial p}$ та C), різниці моменту електродвигуна та зведеного моменту опору ΔM , а також від швидкості ω_1 , яку має ротор електродвигуна в процесі пуску виконавчого органу.

Величину кутової швидкості ротора електродвигуна на початку третього етапу пуску можна визначити з залежності

$$\omega_1 = \omega'_1 + \omega''_1, \quad (2.59)$$

де ω'_1 - кутова швидкість, яку ротор двигуна набуває за рахунок зазорів в кінематичному ланцюзі машини; ω''_1 - приріст кутової швидкості, яку набирає ротор двигуна за рахунок пружної деформації трансмісії.

Позначимо сумарний зведений зазор в системі через ψ^* , який є кутом повороту ланки зведення (ротора електродвигуна) за рахунок зазорів в елементах трансмісії.

Тоді, враховуючи, що ротор електродвигуна рухається рівноприскорено під дією моменту двигуна M , який наближено вважаємо постійним, отримуємо

$$\psi = \frac{M t^2}{I_\partial 2}. \quad (2.60)$$

Після цього можна визначити час руху системи за рахунок зазорів в кінематичному ланцюзі системи

$$t_{\text{заз}} = \psi = \frac{M}{I_\partial} t. \quad (2.62)$$

Підставивши в залежність (2.62) вираз (2.61), отримаємо кутову швидкість, яку ротор набирає за рахунок зазорів в кінцевому ланцюзі

$$\omega_1' = \frac{M}{I_\partial} \sqrt{\frac{2 \psi I_\partial}{M}} = \sqrt{\frac{2 \psi M_0}{I_\partial}}. \quad (2.63)$$

Для визначення ω_1'' необхідно дослідити рух системи при початкових умовах: $t = 0$; $\varphi_1 = 0$; $\dot{\varphi}_1 = \omega_1'$. Це дослідження необхідно проводити в тому випадку, коли трансмісія має підвищену піддатливість. Така піддатливість спостерігається у випадках, коли між двигуном та виконавчим органом є канат, довгий ланцюг або пружна муфта.

В цьому випадку рівняння руху має вигляд

$$\ddot{\varphi}_1 + k_1^2 \varphi_1 = M/I_\partial, \quad (2.64)$$

де $k_1 = \sqrt{C/I_\partial}$ – частота власних коливань системи.

Розв'язок рівняння (2.64) представляється залежністю

$$\varphi_1 = \frac{\omega_1'}{k_1} \sin k_1 t + \frac{M}{I_\partial k_1^2} (1 - \cos k_1 t). \quad (2.65)$$

Тривалість попередньої деформації трансмісії t_∂ можна знайти з трансцендентного рівняння

$$\frac{M_0}{C} = \frac{\omega_1'}{k_1} \sin k_1 t_\partial + \frac{M}{I_\partial k_1^2} (1 - \cos k_1 t_\partial). \quad (2.66)$$

Тоді швидкість ω_1'' визначається наступною залежністю

$$\omega_1'' = \dot{\varphi}_1(t_\partial) = \omega_1' \cos k_1 t_\partial + \frac{M}{I_\partial k_1} \sin k_1 t_\partial. \quad (2.67)$$

Розглянемо деякі характерні види пуску машин в умовах експлуатації .

Пуск двигуна під навантаженням відповідає випадку, коли можна прийняти $\omega_1 = 0$, оскільки трансмісії більшості машин мають високу крутильну жорсткість і за час деформації трансмісії на величину M_0/C двигун практично не встигає набрати помітну швидкість. В цьому випадку з виразу (2.52) отримаємо

$$M_{\max} = M_0 + \frac{2\Delta M \left(I_p + I_{\partial p} \right)}{I_p + I_{\partial p} + I_{\partial}}. \quad (2.68)$$

При цьому, чим більший момент інерції виконавчого органу і пусковий момент двигуна, тим більші динамічні навантаження в трансмісії машини в процесі пуску. З іншої сторони, чим більший момент інерції ротора двигуна, тим менші динамічні навантаження в трансмісії машини під час пуску.

Процес пуску машини під навантаженням не є небезпечним для деталей трансмісії, але завжди небезпечний для електродвигуна, оскільки при великих силах опору значно збільшується тривалість пуску, що приводить до перегріву обмоток двигуна пусковими струмами.

У випадку, коли опір на виконавчому органі перевищує зведений пусковий момент електродвигуна, тоді його пуск неможливий. Навантаження в трансмісії при цьому будуть незначними і їхня величина визначається тільки пусковим моментом. Для того, щоб не перегрівати обмотку електродвигуна, його запуск під навантаженням доцільно не здійснювати. Відсутність зовнішнього навантаження на виконавчому органі значно полегшує умови розгону електродвигуна. Запуск без навантаження проходить за десяті долі секунди і не викликає перегріву двигуна.

З точки зору динаміки процес пуску машини без навантаження можна розділити на два етапи: 1) розгін без технологічного навантаження

пов'язаний з тим, зовнішнє навантаження на робочому органі незначне і не приймається до уваги; 2) миттєве або поступове плавне прикладання навантаження до виконавчого органу.

В перший період навантаження в трансмісії порівняно великі, оскільки $\omega_1 > 0$. Другий період може проходити порізно. Якщо сила опору прикладається миттєво і її величина менша за рушійну силу, то процес пуску в подальшому, в основному, аналогічний пуску під навантаженням. Поступове плавне прикладання навантаження зменшує динамічні навантаження. Якщо момент опору стає більшим, ніж рушійний момент електродвигуна, то до останнього додається динамічний момент, який реалізує накопичену в першому періоді кінетичну енергію ротора двигуна. Зусилля в деталях трансмісії при цьому можуть бути значно більшими ніж ті, що виникають від пускового моменту двигуна, і є великою небезпекою для міцності деталей машини. В граничному випадку наростання сил опору веде до гальмування та «перекидання» двигуна (пуск в цьому випадку не відбувається) і, як наслідок, сильно перевантажується трансмісія. Найбільшу небезпеку представляють випадки запуску двигуна при наявності значних зазорів в кінематичному ланцюзі, коли $\omega_1 \gg 0$.

Більш складне дослідження процесу пуску при врахуванні залежності рушійного моменту електродвигуна від швидкості обертання ротора. Більшість двигунів мають нелінійні механічні характеристики, а в деяких випадках взагалі не вдається записати точний математичний вираз залежності моменту на валу двигуна від швидкості його обертання.

Враховуючи те, що інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку є ускладненим, доцільно скористатись заміною природної механічної характеристики на певній ділянці похилою прямою

$$M_1 = M_n + \phi_1/k, \quad (2.69)$$

де M_n – пусковий момент двигуна; k – тангенс кута нахилу до горизонталі прямої, що замінює деяку ділянку механічної характеристики.

В цьому випадку система рівнянь руху набуває такий вигляд:

$$\begin{cases} I_{\partial} \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} I_{\partial p} \ddot{\varphi}_n - \frac{1}{k} \dot{\varphi}_1 + C(\varphi_1 - \varphi_n) = \Delta M; \\ I_p \ddot{\varphi}_n + \frac{1}{2} I_{\partial p} \ddot{\varphi}_1 - C(\varphi_1 - \varphi_n), \end{cases} \quad (2.70)$$

де $\Delta M_1 = M_n - M_0$.

Оскільки в реальних умовах $1/k \ll C$ і врахування нахилу механічної характеристики практично незначно уточнює загальне рішення системи (2.70), але дає суттєве уточнення частинного розв'язку, оскільки приріст моменту за час пуску може бути значним. Враховуючи це, можна запропонувати для використання на практиці спрощену методику, при якій розрахунок ведеться за формулою (2.52), але замість ΔM необхідно використовувати залежність

$$\Delta M_2 = M_1(\omega_1) - M_0,$$

де $M_1(\omega_1)$ визначається безпосередньо з характеристик двигуна.

2.3.3. Динамічні навантаження в машинах з двома виконавчими органами

Існують машини, в яких один двигун приводить в рух два виконавчих органи, кожний з яких має свою незалежну пружну трансмісію

В такому випадку еквівалентна динамічна схема (модель) машини в процесі пуску має вигляд, показаний на рис. 2.5. Тут прийняті такі позначення: I_1 – зведений до осі повороту двигуна момент інерції першого виконавчого органу і віднесеного до нього частини передавального механізму; I_2 – момент інерції ротора двигуна і зведених до нього частин передавальних механізмів виконавчих органів; I_3 – зведений до осі повороту двигуна момент інерції другого виконавчого органу і віднесених до нього

частин передавального механізму; C_1, C_2 – зведені до осі повороту двигуна жорсткості відповідно першого та другого передавальних механізмів; ψ_1, ψ_2

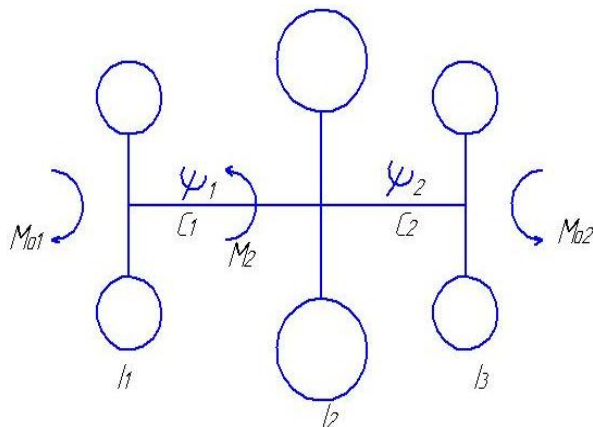


Рис. 2.5. Динамічна модель машини з двома виконавчими органами

– зведені до осі повороту двигуна кути повороту відповідно першого та другого виконавчих органів за рахунок зазорів у відповідних передавальних механізмах.

Розподілення між виділеними зосередженими масами моментів інерції вузлів передавальних механізмів здійснюється шляхом використання принципу Релея, як це

було зроблено раніше.

Оскільки зазори в передавальних механізмах до першого та другого виконавчих органів в загальному випадку різні, то процес пуску машини буде складатись з наступних етапів:

- 1) пришвидшений рух ротора двигуна за рахунок зазорів в передавальних механізмах і виконавчих органах;
- 2) попереднє деформування передавального механізму, зазори в якому були меншими, до величини, яка відповідає моменту опору на цьому виконавчому органі;
- 3) пришвидшений рух ротора двигуна та першого виконавчого органу за рахунок зазорів в передавальному механізмі другого виконавчого органу;
- 4) попереднє деформування передавального механізму другого виконавчого органу до величини, яка відповідає пришвидшеному до нього моменту опору;
- 5) пуск другого виконавчого органу.

Перші два етапи пуску проходять аналогічно, як і в машині з одним виконавчим органом. Четвертий етап в реальних машинах завдяки великій жорсткості передавального механізму досить тривалий, тому його можна не

враховувати. На третьому етапі при прийнятій динамічній моделі машини можна скористатись наступною системою рівнянь

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - C_1(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta M_1, \end{cases} \quad (2.72)$$

де $\Delta M_1 = M_2 - M_{C1}$.

З першого рівняння системи (2.72) виразимо координату φ_2 через координату φ_1 та її другу похідну за часом

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 + \frac{I_1}{C_1} \ddot{\varphi}_1; \\ \dot{\varphi}_2 &= \dot{\varphi}_1 + \frac{I_1}{C_1} \ddot{\varphi}_1; \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_1 + \frac{I_1}{C_1} \overset{IV}{\tilde{\varphi}}_1.$$

Підставимо в друге рівняння системи (2.72) вираз (2.73), в результаті чого отримуємо

$$\begin{aligned} I_2 \left(\ddot{\varphi}_1 + \frac{I_1}{C_1} \overset{IV}{\tilde{\varphi}}_1 \right) + I_1 \ddot{\varphi}_1 &= \Delta M_1; \\ \frac{I_1 I_2}{C_1} \overset{IV}{\tilde{\varphi}}_1 + (I_1 + I_2) \ddot{\varphi}_1 &= \Delta M_1; \end{aligned} \quad (2.74)$$

Розділивши усі члени рівняння (2.74) на коефіцієнти біля найстаршої похідної і зробивши заміну

$$k = \sqrt{\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}} C; \quad B = \frac{\Delta M_1}{I_1 I_2} C, \quad (2.75)$$

будемо мати

$${}^{IV}\tilde{\varphi}_1 + k^2 \ddot{\varphi}_1 = B, \quad (2.76)$$

Вважаючи, що третій етап руху є нетривалим і момент двигуна на ньому змінюється незначно, то можна прийняти, що $B = \text{const}$. Тоді розв'язок рівняння (2.76) представляємо як суму повного розв'язку однорідного рівняння та часткового розв'язку повного рівняння, тобто

$$\varphi_1 = \varphi_1^* + \omega_1^{**}. \quad (2.77)$$

Однорідне рівняння має вигляд

$${}^{IV*}\tilde{\varphi}_1 + k^2 \ddot{\varphi}_1^* = 0. \quad (2.78)$$

Для розв'язку рівняння (2.78) складемо характеристичне рівняння

$$r^4 + k^2 r^2 = 0;$$

$$r^2(k^2 + r^2) = 0. \quad (2.79)$$

Корені рівняння (2.79) мають вигляд

$$r_1 = r_2 = 0;$$

$$r_{3,4} = \mp ki. \quad (2.80)$$

Виходячи з коренів (2.79) та (2.80), повний розв'язок однорідного рівняння (2.78) має вигляд

$$\varphi_1^* = C_1 + C_2 t + C_3 \sin kt + C_4 \cos kt. \quad (2.81)$$

Частковий розв'язок повного рівняння шукаємо у вигляді:

$$\varphi_1^* = A_1 + A_2 t + A_3 t^2;$$

$$\dot{\varphi}_1^* = A_2 + 2A_3 t;$$

$$\ddot{\varphi}_1^* = 2A_3;$$

$$\ddot{\varphi}_1^* = \overset{IV}{\tilde{\varphi}}_1^* = 0.$$

Тоді:

$$2k^2 A_3 = B.$$

$$\text{Звідки: } A_3 = \frac{B}{2k^2}; A_2 = A_1 = 0.$$

Загальний розв'язок рівняння (2.76) має вигляд:

$$\varphi_1 = C_1 + C_2 t + \frac{B}{2k^2} t^2 + C_3 \sin kt + C_4 \cos kt;$$

$$\dot{\varphi}_1 = C_2 + \frac{B}{k^2} t + C_3 k \cos kt - C_4 k \sin kt; \quad (2.82)$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{B}{k^2} - C_3 k^2 \sin kt - C_4 k^2 \cos kt;$$

$$\ddot{\varphi}_1 = -C_3 k^3 \cos kt + C_4 k^3 k \sin kt;$$

З початкових умов

$$t = 0 : \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dot{\varphi}_1 = 0, \dot{\varphi}_2 = \omega_1. \quad (2.83)$$

$$t = 0 : \varphi_1 = 0, \dot{\varphi}_1 = 0, \ddot{\varphi}_1 = 0, \ddot{\varphi}_1 = \frac{\omega_1}{I_1} C_1. \quad (2.84)$$

Знаходимо постійні

$$0 = C_1 + C_4;$$

$$0 = C_2 + C_3 k;$$

$$0 = \frac{B}{k^2} - C_4 k^2;$$

$$\frac{\omega_1}{I_1} C_1 = C_3 k^3 .$$

$$C_3 = \frac{C_1 \omega_1}{I_1 k^3}; \quad C_4 = \frac{B}{k^4};$$

$$C_2 = -C_3 k = -\frac{C_1 \omega_1}{I_1 k^3};$$

$$C_1 = -C_4 = -\frac{B}{k^4}.$$

Тоді повний розв'язок рівняння представляється залежностями

$$\varphi_1 = \frac{B}{k^4} (\cos kt - 1) + \frac{C_1 \omega_1}{I_1 k^3} (\sin kt - kt) + \frac{B}{2k^2} t^2. \quad (2.85)$$

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{B}{k^2} \sin kt + \frac{C_1 \omega_1}{I_1 k^2} (\cos kt - 1) + \frac{B}{k^2} t; \quad (2.86)$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{B}{k^2} (1 - \cos kt) - \frac{C_1 \omega_1}{I_1 k} \sin kt; \quad (2.87)$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{B}{k} \sin kt - \frac{C_1 \omega_1}{I_1} \cos kt; \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \frac{B}{k^2} (\cos kt - 1) \left(\frac{1}{k^2} - \frac{I_1}{C_1} \right) + \frac{\omega_1}{k} \sin kt \left(\frac{C_1}{I_1 k^2} - 1 \right) + \frac{B}{2k^2} t^2 - \\ & - \frac{C_1 \omega_1}{I_1 k^2} t; \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{B}{k} \sin kt \left(\frac{1}{k^2} - \frac{I_1}{C_1} \right) + \omega_1 \cos kt \left(\frac{C_1}{I_1 k^2} - 1 \right) + \frac{B}{k^2} t - \frac{C_1 \omega_1}{I_1 k^2}; \quad (2.91)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -B \left(\frac{1}{k^2} - \frac{I_1}{C_1} \right) \cos kt - \omega_1 k \left(\frac{C_1}{I_1 k^2} - 1 \right) \sin kt + \frac{B}{k^2}. \quad (2.92)$$

Прирівнявши $\varphi_2 = \psi_1 - \psi_2$, з рівняння (2.90) визначимо тривалість третього етапу t_3

$$\begin{aligned} \psi_1 - \psi_2 = & \frac{B}{k^2} (\cos kt_3 - 1) \left(\frac{1}{k^2} - \frac{I_1}{C_1} \right) + \frac{\omega_1}{k} \sin kt_3 \left(\frac{C_1}{I_1 k^2} - 1 \right) + \\ & + \frac{B}{2k^2} t_3^2 - \frac{C_1 \omega_1}{I_1 k^2} t_3. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Трансцендентне рівняння (2.93) може бути розв'язане чисельним методом.

Підставляючи $t = t_3$ в залежності (2.85), (2.86), (2.92) знайдемо $\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_2$ в момент часу закінчення третього етапу руху.

Тепер розглянемо рух машини на п'ятому етапі, на якому рівняння руху мають вигляд:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - C_1(\varphi_1 - \varphi_2) + C_2(\varphi_2 - \varphi_3) = \Delta M_2; \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 - C_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0, \end{cases} \quad (2.94)$$

де $\Delta M_2 = M_2 - M_{o1} - M_{o2}$.

Оскільки більшість двигунів мають нелінійні механічні характеристики і аналітичний розв'язок рівнянь в такому випадку є ускладненим або взагалі неможливим, тому рекомендуємо розв'язувати їх чисельними методами в залежності від виду механічної характеристики.

В системі (2.94) вирівнюючи коефіцієнти при похідних і віднімаючи з другого рівняння перше та третє, отримаємо:

$$\begin{cases} I_1 I_2 \Delta \ddot{\varphi}_{21} + C_1(I_1 + I_2) \Delta \varphi_{21} + C_2 I_1 \varphi_{23} = I_1 \Delta M_2; \\ I_2 I_3 \Delta \ddot{\varphi}_{23} + C_1 I_3 \Delta \varphi_{21} + C_2(I_2 + I_3) \Delta \varphi_{23} = I_3 \Delta M_2. \end{cases} \quad (2.95)$$

Розв'язок рівняння (2.95) шукаємо при таких початкових умовах:

$$t = 0; \Delta \varphi_{21} = \Delta \varphi_{210}; \Delta \varphi_{23} = 0; \Delta \dot{\varphi}_{21} = \Delta \dot{\varphi}_{210}; \Delta \dot{\varphi}_{23} = \Delta \dot{\varphi}_{230}.$$

Закони зміни крутних моментів в трансмісії виконавчих органів визначаємо за такими залежностями:

$$\begin{aligned} M_{12} &= M_{o1} + C_1 \Delta \varphi_{21}; \\ M_{23} &= M_{o2} + C_2 \Delta \varphi_{23}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Як приклад для розрахунку рекомендовано використати числові параметри конкретної технологічної машини: $M = 1700 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $M_{o1} = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $M_{o2} = 600 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $I_1 = 0.2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $4.0 \text{ кг} \cdot \text{м}$; $I_3 = 0.4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $C_1 = 7000 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}$; $C_2 = 10000 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}$.

РОЗДІЛ 3

МОДЕЛІ МЕХАНІЗМІВ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МАШИН

3.1. Загальні положення математичного моделювання руху механізмів вантажопідйомних машин

Для опису руху механічних систем найчастіше застосовують рівняння Лагранжа другого роду, які отримують безпосередньо з варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського [4] за умови, що члени, які характеризують енергію й роботу, виражені через узагальнюючі координати. Такі рівняння мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, k = 1, \dots, s, \quad (3.1)$$

де $T = T(t, q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$ – кінетична енергія системи, яка є функцією часу t та узагальнених координат і швидкостей $q_k, \dot{q}_k (k = 1, \dots, s)$; S – кількість узагальнених координат; $Q_k - k$ – та $(k = 1, \dots, s)$ узагальнена сила, яка відповідає узагальнюючій координаті $q_k (k = 1, \dots, s)$.

У теорії керування вантажопідйомних машин більшість механізмів розглядається як моделі плоских механічних систем. Тому на основі рівнянь Лагранжа другого роду (3.71) складено рівняння руху плоскої механічної системи. У загальному випадку плоска механічна система має ланки, які виконують лише поступальний, лише обертальний і сумісний поступальний і обертальний (плоский) рухи. Для такої системи кінематична енергія має вигляд

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l+m} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + \frac{1}{2} J_i \sum_{j=1}^{m+n} J_i \dot{\varphi}_j^2, \quad (3.2)$$

де l, m, n - кількість ланок, що виконують рух відповідно поступальний, плоский і обертальний; $m_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i$ - маса i -ої ($i=1, \dots, l+m$) ланки системи і координати її центра мас; $\varphi_i, \dot{J}_i$ - кутова координата j -ої ланки системи і її момент інерції відносно осі обертання для ланок, що виконують обертальний рух, і відносно центра мас для ланок, що виконують плоский рух.

Плоску систему сил, що діють на ланки плоских механізмів вантажопідйомних машин, можна замінити системою сил, прикладених у центрах мас ланок системи, і парами сил (моментами) відносно цих центрів. Тоді узагальнюючі сили визначаються із суми елементарних робіт:

$$Q_k \delta q_k = \sum_{i=1}^{l+m} (F_{xi} \delta x_i + F_{yi} \delta y_i) + \sum_{j=1}^{m+n} M_j \delta \varphi_j, k = 1, \dots, s,$$

де F_{xi}, F_{yi} - складові за координатними осями рівнодійної всіх сил, прикладених до центра мас i -ї ($i=1, \dots, l+m$) ланки системи; M_j - момент усіх сил j -ї ($j=1, \dots, m+n$) ланки системи відносно осі обертання для ланок, що виконують обертальний рух, і відносно центра мас для ланок, що виконують плоский рух.

Плоску систему сил, що діють на ланки плоских механізмів вантажопідйомних машин, можна замінити системою сил, прикладених у центрах мас ланок системи, і парами сил (моментами) відносно цих центрів. Тоді узагальнюючі сили визначаються із суми елементарних робіт:

$$Q_k \delta q_k = \sum_{i=1}^{l+m} (F_{xi} \delta x_i + F_{yi} \delta y_i) + \sum_{j=1}^{m+n} M_j \delta \varphi_j, k = 1, \dots, s,$$

де F_{xi}, F_{yi} - складові за координатними осями рівнодійної всіх сил, прикладених до центра мас i -ї ($i=1, \dots, l+m$) ланки системи; M_j - момент усіх

сил $j - \bar{i}$ ($j=1, \dots, m+n$) ланки системи відносно осі обертання для ланок, що виконують обертальний рух, і відносно центра мас для ланок, що виконують плоский рух.

Виразивши варіації координат ланок $\delta x_i, \delta y_i, \delta \varphi_i$ через варіації узагальнюючих координат δq_k , дістанемо:

$$Q_k \delta q_k = \left[\sum_{i=1}^{l+m} (F_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{yi} \frac{\partial y_i}{\partial q_k}) + \sum_{j=1}^{m+n} M_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \right] \delta q_k, k = 1, \dots, s,$$

де $\partial x_i / \partial q_k, \partial y_i / \partial q_k, \partial \varphi_i / \partial q_k$ - оператори передачі руху першого порядку, що пов'язують швидкості координат $i - \bar{i}$ ($i=1, \dots, l+m$) $j - \bar{j}$ ($j=1, \dots, m+n$) ланок з узагальнюючими координатами q_k ($k=1, \dots, s$).

З отриманого співвідношення знаходимо узагальнюючі сили:

$$Q = \sum_{i=1}^{l+m} \left[F_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{yi} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right] + \sum_{j=1}^{m+n} M_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k}, k = 1, \dots, s. \quad (3.3)$$

Підставивши вирази (3.2) і (3.3) у рівняння (3.1), дістанемо диференціальні рівняння руху плоскої механічної системи зі скінченною кількістю ступенів вільностей в матричному вигляді:

$$\|A\| = \left\{ \ddot{q} \right\} = \{B\}, \quad (3.4)$$

де $\|A\|$ - квадратна матриця коефіцієнтів біля узагальнюючих прискорень; $\left\{ \ddot{q} \right\}$ - матриця-стовпець узагальнюючих прискорень; $\{B\}$ - матриця-стовпець правих частин диференціальних рівнянь.

У рівнянні (3.4) елементи матриць $\|A\|$ і $\{B\}$ визначаються такими залежностями:

$$a_{k,r} = \sum_{i=1}^{l+m} m_i \left[\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial q_r} \right] + \sum_{j=1}^{m+n} J_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_r}, k, r = 1, \dots, s; \quad (3.5)$$

$$b_k = \sum_{i=1}^{l+m} \left[F_{xi} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{yi} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \right] + \sum_{j=1}^{m+n} M_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} - \sum_{p=1}^s \sum_{v=1}^s \dot{q}_p \dot{q}_v \times \\ \times \left[\sum_{i=1}^{l+m} m_i \left[\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_p \partial q_v} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_p \partial q_v} \right] + \sum_{j=1}^{m+n} J_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial q_p \partial q_v} \right], k = 1, \dots, s, \quad (3.6)$$

де $\frac{\partial^2 x_i}{(\partial q_p \partial q_v)}, \frac{\partial^2 y_i}{(\partial q_p \partial q_v)}, \frac{\partial^2 \varphi_j}{(\partial q_p \partial q_v)}$ - оператори передачі руху другого порядку i - ї ($i = 1, \dots, l + m$) і j - ї ($j = 1, \dots, m + n$) ланок.

У загальному випадку рівняння (3.4) з урахуванням елементів матриць (3.5) і (3.6) є системою звичайних нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, які не завжди вдається аналітично проінтегрувати.

Отримані диференціальні рівняння руху плоскої механічної системи можна використовувати для складання рівнянь руху окремих механізмів вантажопідійомних машин.

Для цього в конкретній динамічній моделі механізму вибирають узагальнюючі координати, складають оператори передачі руху для кожної ланки цієї моделі та підставляють у рівняння (3.4) з урахуванням елементів матриць (3.5) і (3.6).

3.2. Математична модель руху стрілової системи крана

Складемо рівняння руху стрілової системи крана в процесі зміни вильоту вантажу (рис. 3.1).

Стрілову систему крана подамо у вигляді голономної механічної системи з абсолютно твердими ланками і двома ступенями вільностей. Узагальнюючими координатами візьмемо кутові координати стріли в

основному русі та відхилення вантажного каната від вертикалі в площині зміни вильоту v у коливальному русі вантажу. При цьому вважатимемо, що вантаж 1 рухається по горизонталі вздовж осі x , а стріла 2 повністю врівноважена рухомою противагою 3 , яка рухається вздовж осі y .

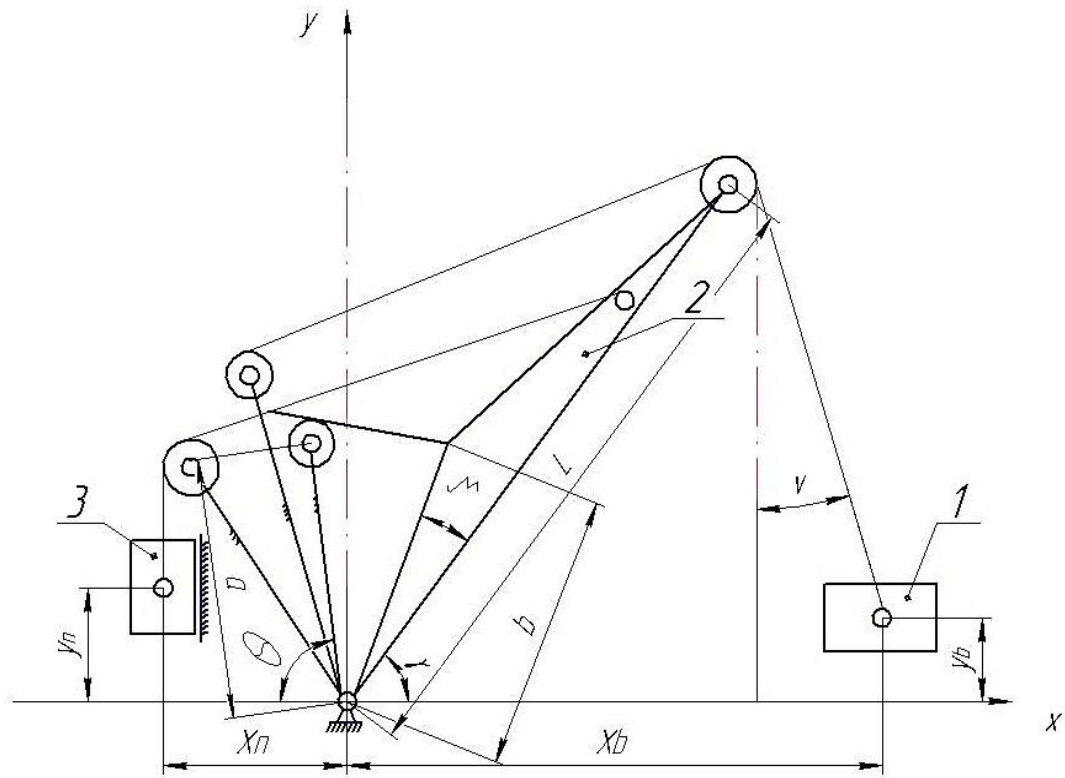


Рис. 3.1. Схема стрілової системи крана при зміні вильоту вантажу

Згідно з прийнятою динамічною моделлю за допомогою рівнянь руху плоскої механічної системи складено математичну модель руху стрілової системи, що виражається узагальненими диференціальними рівняннями:

$$\begin{cases} a_{11} \ddot{a} + a_{12} \ddot{v} = b_1; \\ a_{21} \ddot{a} + a_{22} \ddot{v} = b_2, \end{cases} \quad (3.77)$$

де

$$a_{11} = J_p \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial a} \right]^2 + J_c + m_n \left[\left[\frac{\partial x_a}{\partial a} \right]^2 + \left[\frac{\partial y_n}{\partial a} \right]^2 \right] + m_b \left[\left[\frac{\partial x_b}{\partial a} \right]^2 + \left[\frac{\partial y_b}{\partial a} \right]^2 \right];$$

$$a_{12} = a_{21} = m_b \left[\frac{\partial x_b}{\partial a} \frac{\partial x_b}{\partial v} + \frac{\partial y_b}{\partial a} \frac{\partial y_b}{\partial v} \right];$$

$$\begin{aligned}
b_1 = & M \frac{\partial \varphi_p}{\partial a} + M_c + F_{nx} \frac{\partial x_b}{\partial a} + F_{ny} \frac{\partial y_b}{\partial a} + F_{bx} \frac{\partial x_b}{\partial a} + F_{by} \frac{\partial y_b}{\partial a} - \\
& - a^2 \left[J_p \frac{\partial \varphi_p}{\partial a} \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial a^2} + m_n \left[\frac{\partial x_n}{\partial a} \frac{\partial^2 x_n}{\partial a^2} + \frac{\partial y_n}{\partial a} \frac{\partial^2 y_n}{\partial a^2} \right] + m_b \left[\frac{\partial x_b}{\partial a} \frac{\partial^2 x_b}{\partial a^2} + \frac{\partial y_b}{\partial a} \frac{\partial^2 y_b}{\partial a^2} \right] \right] - \\
& - 2 \dot{a} \dot{v} m_b \left[\frac{\partial x_b}{\partial a} \frac{\partial^2 x_b}{\partial a \partial v} + \frac{\partial y_b}{\partial a} \frac{\partial^2 y_b}{\partial a \partial v} \right] - \dot{v}^2 m_b \left[\frac{\partial x_b}{\partial a} \frac{\partial^2 x_b}{\partial v^2} + \frac{\partial y_b}{\partial a} \frac{\partial^2 y_b}{\partial v^2} \right]; \\
b_2 = & F_{bx} \frac{\partial x_b}{\partial v} + F_{by} \frac{\partial y_b}{\partial v} - a^2 m_b \left[\frac{\partial x_b}{\partial v} \frac{\partial^2 x_b}{\partial v^2} + \frac{\partial y_b}{\partial v} \frac{\partial^2 y_b}{\partial v^2} \right] - \\
& - 2 a^2 \dot{v} m_b \left[\frac{\partial x_b}{\partial v} \frac{\partial^2 x_b}{\partial v \partial a} + \frac{\partial y_b}{\partial v} \frac{\partial^2 y_b}{\partial v \partial a} \right] - \dot{v}^2 \left[\frac{\partial x_b}{\partial v} \frac{\partial^2 x_b}{\partial v^2} + \frac{\partial y_b}{\partial v} \frac{\partial^2 y_b}{\partial v^2} \right];
\end{aligned} \tag{3.8}$$

де M, M_c - рушійний момент на валу двигуна і момент статичних сил опору, що діють на стрілу відносно осі її повороту; $F_{bx}, F_{by}, F_{nx}, F_{ny}$ - проекції сил, що діють на вантаж та противагу, відповідно горизонтальні та вертикальні.

Як приклад визначимо оператори передачі руху приводу, які входять у вирази (3.75):

$$\begin{aligned}
d = & \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\theta + \mu + \alpha)}; \\
\frac{\partial \varphi_p}{\partial a} = & - \frac{iab}{Rd} \sin(\theta + \mu + \alpha); \\
\frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial a^2} = & - \frac{ab}{\partial^2} \left[\frac{id}{R} \cos(\theta + \mu + \alpha) - \frac{\partial \varphi_p}{\partial a} \sin(\theta + \mu + \alpha) \right],
\end{aligned} \tag{3.9}$$

де i - передаточне відношення від приводного колеса ротора двигуна; R - радіус приводного колеса рейкового механізму приводу.

Аналогічно виразам (3.9) визначаються оператори передачі руху інших ланок [5].

3.3. Математичні моделі руху візка та механізму повороту баштового крана

Розглянемо також двомасову модель крана (рис. 3.2), що складається з візка масою m_1 вантажу масою m_2 , підвищеного на гнучкому канаті довжиною l . На візок діють рушійна сила $F(t)$ зусилля статичного опору W . Вважаємо, що канат нерозтяжний, невагомий і абсолютно гнучкий, маса вантажу зосереджена в одній точці, коливання вантажу малі й відбуваються лише в площині руху візка [6-10].

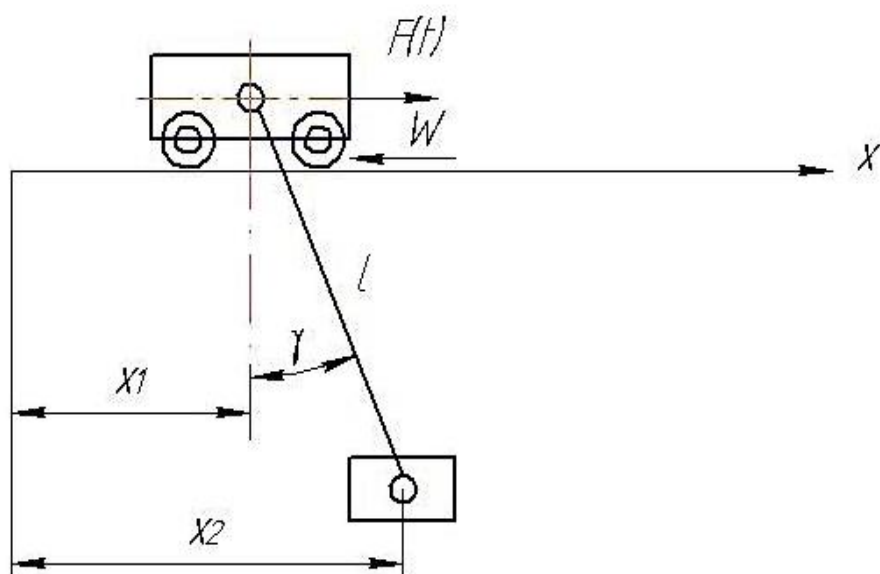


Рис. 3.2. Динамічна модель руху візка з вантажем на гнучкому підвісі

Оскільки візок з вантажем розглядаємо як плоску механічну систему, то для отримання рівнянь руху можна використати рівняння (3.4) з урахуванням виразів (3.3), (3.5), (3.6). У результаті дістаємо

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F(t) - W \operatorname{sign} \dot{x}_1 - \frac{m_2 g}{l} (x_1 - x_2); \\ m_2 \ddot{x}_2 = -\frac{m_2 g}{l} (x_1 - x_2). \end{cases} \quad (3.10)$$

Аналогічно можна отримати диференціальні рівняння руху інших кранових механізмів, які можна розглядати як плоскі механічні системи.

Розглянемо механізм повороту баштового крана як двомасову систему «кран-вантаж» (рис. 3.3).

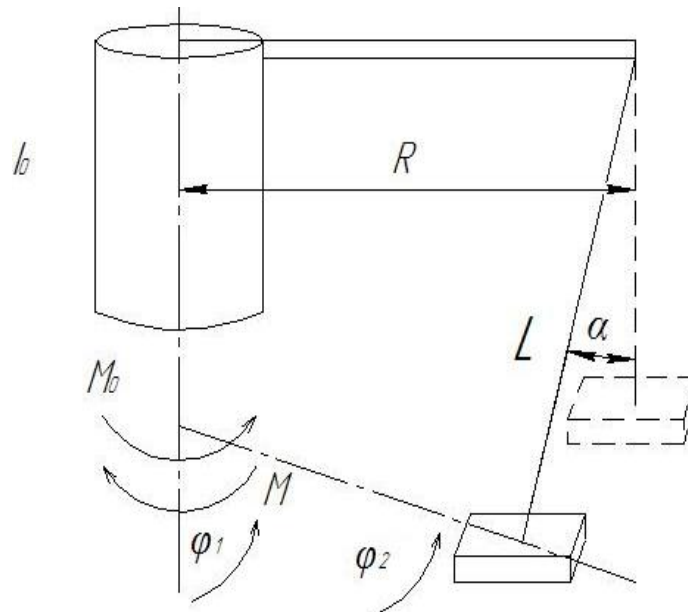


Рис. 3.3. Динамічна модель механізму повороту баштового крана

В моделі за узагальнені координати прийняті кутові координати стріли φ_1 і вантажу φ_2 . Прийнятій динамічній моделі механізму повороту однозначно відповідають диференціальні рівняння руху, які отримано на основі рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\begin{aligned} I \ddot{\varphi}_1 + \frac{mR^2 g (\varphi_1 - \varphi_2)}{L} &= M - M_0; \\ \ddot{\varphi}_2 - \frac{g (\varphi_1 - \varphi_2)}{L} &= 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

де I_0 - зведений до осі повороту крана момент інерції приводного механізму та стрілової системи; m - маса вантажу; L - довжина гнучкого підвісу вантажу; M, M_0 - відповідно, рушійний момент приводу та момент сил опору, зведені до осі повороту крана; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ - прискорення вільного падіння.

РОЗДІЛ 4

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

4.1. Постановка задачі оптимального керування

Задача оптимального керування формулюється як варіаційна, в основі якої лежить метод проб і порівнянь. При цьому крім об'єкта керування задаються обмеження на керування і фазовий вектор, крайові умови і критерій оптимальності.

Об'єкт керування - це машина, механізм або їх модель. Об'єкт керування характеризується тим, що на нього чиниться запрограмований керуючий вплив, який реалізується людиною-оператором або автоматизованою системою. У розглядуваному випадку об'єктом керування може бути вантажопідйомна машина або її окремі механізми, а керуючим впливом є рушійні або гальмівні сили приводних механізмів.

Маніпулюючи керуючим впливом у припустимих межах (ресурсів керування), ми тим самим визначаємо рух об'єкта, яким керуємо. Для кранових механізмів ресурсами керування є максимальні та мінімальні рушійні й гальмівні сили приводних механізмів. Досить часто наші можливості керування об'єктом лімітуються не лише ресурсами керування, а й тим, що в процесі руху об'єкт не повинен потрапляти в стани, які фізично неприпустимі в конкретних умовах експлуатації. Так, при роботі приводного механізму не припускається перегрівання обмоток електродвигуна. Такі обмеження на стан об'єкта не залежать від властивостей самого об'єкта, а є допоміжними і визначаються конкретними умовами експлуатації тих чи інших механізмів вантажопідйомних машин.

Керуючи тим чи іншим об'єктом, ми завжди маніпулюємо керуючим впливом з метою досягнення згідно із заданим початковим станом - реалізації поставленої нами мети керування. Якщо йдеться про механізм переміщення мостового крана, то режим роботи приводного двигуна і гальмівного пристрою слід розрахувати так, щоб забезпечити переміщення моста на

задану відстань за мінімальний час або при фіксованому часі досягти мінімуму енергетичних витрат.

Як правило, існує безліч способів керування об'єктом з метою досягнення бажаного результату. З огляду на це постає завдання не просто в якийсь спосіб реалізувати мету керування, а знайти саме той з них, який деякою мірою буде найкращим, оптимальним. Звичайно, для цього ми повинні мати критерій якості, який дасть змогу визначити, який із способів керування найкращий. У кожному конкретному випадку це певний критерій, що залежить як від виду об'єкта, так і від умов його експлуатації. Так, для мостового перевантажувача основним критерієм є тривалість циклу, а для монтажних мостових кранів - точність виконання монтажних операцій, яка визначається точністю посадки вантажу.

Сформулюємо поставлену задачу оптимального керування мовою математичних формул. Для цього спочатку дамо точний математичний опис об'єкта керування.

Стан об'єкта описується у фіксований момент часу n числами $x_1, \dots, x_n$ - фазовими координатами. Ці числа зручно вважати компонентами фазового вектора (фазового стану) $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Отже, стан об'єкта в кожний момент часу можна зобразити у вигляді точки (кінець фазового вектора, що виходить з початку координат) n - вимірною послідовного простору R^n який називають фазовим простором об'єкта. Наприклад, для механічного об'єкта зі скінченною кількістю ступенів вільностей фазовий вектор x складається з узагальнених координат $q_1, \dots, q_s$ та узагальнених швидкостей $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$ ($n=2s$). Таким фазовим вектором можна описати кожний механізм вантажопідйомної машини або машину в цілому при одночасній роботі кількох механізмів.

Рух об'єкта полягає в тому, що його фазові координати змінюються зі зміною часу t , тобто фазовий вектор є вектором-функцією незалежної змінної t . У процесі руху об'єкта фазова точка $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ описує у

фазовому просторі деяку криву - фазову траєкторію. Для механічних об'єктів фазова траєкторія $x(t)$ має бути неперервною функцією часу.

Нехай у фазовому просторі R^n задано деяку множину X - сукупність усіх фазових станів, в які об'єкту керування дозволяється потрапляти. Тоді в процесі руху об'єкта його стан $x = (x_1, \dots, x_n)$ у кожний момент часу має задовольняти умову, яку називають обмеженням на фазові координати (фазовими обмеженнями):

$$x \in X \quad (4.1)$$

Найбільший інтерес становить випадок, коли множина x замкнена, а фазова траєкторія проходить по її межі.

Керівна дія описується у фіксований момент часу r числами $u_1, \dots, u_r$ параметрами керування, тобто вектором керування $u = (u_1, \dots, u_r)$. Отже, керівну дію об'єкта в кожний момент часу можна подавати у вигляді точки (кінець керуючого вектора, що виходить з початку координат) r - вимірного послідового простору R^r .

Система керування об'єкта характеризується множиною допустимих керувань U , тобто сукупністю функцій $U(t)$, серед яких дозволяється вибирати як керування і серед яких добирають оптимальні.

У будь-якому об'єкті керівна дія не може бути довільною виходячи з конструктивних особливостей об'єкта, обмеженості ресурсів керування, особливостей умов експлуатації об'єкта і небезпечності зміни його нормальної роботи. Це означає, що в просторі R^r параметрів керування вказується деяка множина U , яку називають областю керування, і в будь-який момент часу точка $u = (u_1, \dots, u_r)$ має належати цій множині U :

$$u \in U \quad (4.2)$$

Найтиповішим є випадок, коли область керування U обмежена і замкнена (останнє означає, що параметри керування можуть набувати крайніх значень).

Крім обмеження на значення вектора керування в кожний момент часу слід знати допустимий характер зміни цього вектора зі зміною часу. Звичайно функцію керування розглядають у вигляді кусково-неперервних вектор-функцій $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$, тобто таких в яких кожна компонента $u_i(t)$ на відрізку визначення має скінченну кількість точок розриву першого роду (рис.3.1).

Множиною допустимих керувань U приймають сукупність кусково-неперервних функцій часу, які в кожний момент часу задовольняють умову (3.2). Кожну таку функцію $u(t)$ називають допустимим керуванням, яке стисло записують у такому вигляді:

$$u(t) \in U. \quad (4.3)$$

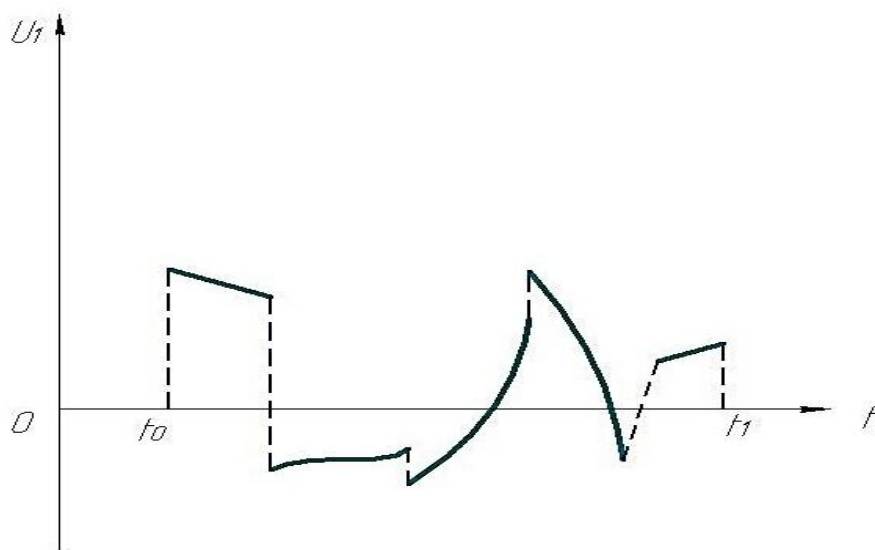


Рис.4.1. Характер зміни функції керування

Щоб знати, як фазова траєкторія об'єкта визначається за вибраним керуванням і відомим початковим фазовим станом

$$x(t_0) = x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0}), \quad (4.4)$$

де t_0 - початковий момент часу (завжди можна вважати $t_0 = 0$), слід знати закон руху об'єкта, який описує динамічні властивості розглядуваної системи.

Законом руху є співвідношення

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (4.5)$$

де $f(x, u)$ – відома n – вимірна вектор-функція $f(x, u) = (f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r))$, конкретний вигляд якої

визначається конструктивними особливостями об'єкта або умовами розглядуваної реальної задачі.

Якщо вибрано допустиме керування $u(t)$, $t \geq t_0$, то, підставляючи його в праву частину рівняння (4.5), дістаємо нормальну систему диференціальних рівнянь у векторній формі

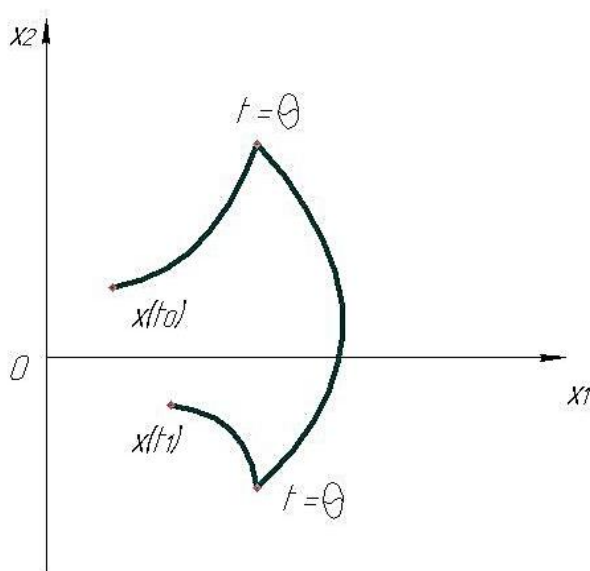


Рис. 3.2. Фазова траєкторія руху об'єкта

$$\dot{x} = f(x, u(t)) \quad (4.6)$$

розв'язком яких при

початкових умовах (4.4) є траєкторія $x(t)$, $t \geq t_0$.

До вигляду (3.6) рівняння руху зводяться в разі керування механічними об'єктами зі скінченною кількістю ступенів вільностей. У такому вигляді записують рівняння руху всіх кранових механізмів.

Детермінованість об'єкта керування означає, що вибір керування $u(t)$, $t \geq t_0$ має однозначно визначати траєкторію $x(t)$, $t \geq t_0$.

Для цього достатньо вважати, що вектор-функція $f(x, t)$ і всі часткові похідні $\partial f_i / \partial x_j$ ($i, j = 1, \dots, n$) є неперервними за сукупністю аргументів. У

моменти розриву якоїсь із компонент керування слід виконувати «стикування» розв'язків рівняння (3.6), тобто випускати розв'язок на ділянці неперервності після моменту розриву з кінця траєкторії на ділянці неперервності до цього моменту. На рис.3.2 показано фазову траєкторію, яка відповідає керуванню $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$, із розривами першого роду в моменти g_1 і g_2 . Отже, траєкторія $x(t)$, що відповідає допустимому керуванню $u(t)$, є неперервною, а її похідна $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ - кусково-неперервною. Якщо ця траєкторія в кожному момент задовольняє умову (4.1), то пару векторів-функцій $(u(t), x(t))$ називають допустимим процесом.

Для об'єктів керування рухом задача формулюється так: керування $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$ переводить об'єкт (4.5) зі стану x_0 у стан x_1 , якщо це керування допустиме (тобто $u(t) \in U$) а відповідна йому траєкторія $x(t)$ - розв'язок задачі (3.4), (3.6) визначена на тому самому відрізку часу $t_0 \leq t \leq t_1$, у кожному момент $t \in [t_0, t_1]$ задовольняє умову і в момент t_1 потрапляє у фазовий стан x_1 (тобто $x_1 = x(t_1)$). При цьому відрізок $t_0 \leq t \leq t_1$ є скінченним: $t_1 < \infty$. Якщо керування $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$ переводить об'єкт (4.5) із початкового стану x_0 у деякий стан $x_1 \in M$ (мета керування - деяка множина M тих станів, які є для нас бажаними), то кажуть, що керування реалізує мету керування в момент t_1 .

Задача керування рухом об'єкта (4.5) полягає в тому, щоб знайти якесь припустиме керування, що реалізує мету. Іншими словами, необхідно знайти таку функцію $u(t) \in U$, що визначається на ділянці $t_0 \leq t \leq t_1$, де t_1 невідоме, щоб керування (3.6) мало розв'язок $x(t)$, який задовольняє умови (4.1), (4.4) і кінцеву умову

$$x(t_1) \in M, \quad (4.7)$$

Задача керування зводиться до розв'язання крайової задачі (4.5), (4.4), (4.7) за умов (4.1) і (4.3). Проте загальної теорії розв'язання подібних крайових задач не існує. Тому розв'язати задачі керування тим чи іншим об'єктом і фактично знайти керування, що реалізує мету, дуже важко.

Якщо множина M складається з однієї точки, то це задача з фіксованим правим кінцем траєкторії, а якщо з кількох ($< n$, але > 0), то задача називається задачею з рухомим правим кінцем.

При розв'язанні задачі керування найтипівішою є ситуація з нескінченною кількістю розв'язків. У цьому разі існує нескінченна кількість керувань, що реалізують мету, і всі вони з цієї точки зору рівноправні. У такому разі може бути поставлена задача оптимального керування.

Нехай крім об'єкта керування і поставленої мети керування дано критерій якості, який має вигляд

$$I(u) = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u) dt, \quad (4.8)$$

де $F(x, u)$ - відома скалярна функція, неперервна разом з усіма частинними похідними $\partial F / \partial x_i, i = 1, \dots, n$, за сукупністю аргументів.

Критерій якості дає змогу кожному керуванню $u(t), t_0 \leq t \leq t_1$, що реалізує мету керування (у момент t_1), поставити у відповідність визначене число: для цього в праву частину формули (4.8) замість u слід підставити функцію $u(t)$, замість x - відповідну траєкторію $x(t)$, замість верхньої межі інтегрування взяти момент реалізації мети керування і розрахувати оптимальний визначений інтеграл.

Верхню межу інтегрування у формулі (4.8) наперед не задано, вона залежить від вибору керування, що реалізує мету, і визначається зі співвідношення (4.7). При цьому функціонал (4.8) (функція, що залежить від

функції) визначається не на всіх допустимих керуваннях, а лише на тих, що реалізують мету керування.

Задача оптимального керування об'єктом (4.5) полягає в тому, щоб знайти таке керування, що реалізує мету, для якого функціонал (4.8) набуває найменшого (найбільшого) можливого значення. Якщо критерій (4.8) характеризує бажані властивості об'єкта, то він максимізується, а якщо небажані - то мінімізується. Керування, що є розв'язком цієї задачі, називають оптимальним, а відповідну йому траєкторію - оптимальною. Іноді задачу формулюють так: мінімізувати (максимізувати) функціонал (4.8) на розв'язках рівняння (4.5), що відповідають допустимим керуванням і задовольняють крайові умови (4.4), (4.70) і фазове обмеження (4.1).

Типовим є частинний випадок функціоналу (4.8) при $F(x,u) \in I$. Тоді $I(u) = t_1 - t_0$ і критерієм якості є час, потрібний для реалізації мети керування.

Задачею оптимальної швидкодії називають задачу знаходження керування, що реалізує мету за мінімальний час.

У розглянутих задачах на час реалізації мети не накладалося жодних обмежень. Проте досить часто доводиться розглядати випадок, коли час руху задано (вказано не лише початковий момент t_0 , а й кінцевий момент t_1). Тому кажуть про задачу з фіксованим часом. У цьому разі до стандартного прийому вводиться ще одна фазова координата x_{n+1} , зміна якої описується співвідношенням:

$$\dot{x}_{n+1} = 1, x_{n+1}(t_0) = t_0 \quad (4.9)$$

(тобто $x_{n+1}(t) = t$), і в $(n+1)$ - вимірному фазовому просторі R^{n+1} векторів $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ об'єкт керування описується рівняннями:

$$\dot{x} = f(x,u), f(x,u) = (f_1(x,u), \dots, f_n(x,u), f_{n+1}(x,u)), f_{n+1}(x,u) = 1. \quad (4.10)$$

При розв'язуванні задач оптимального керування зустрічаються також випадки, які відрізняються від наведеного раніше алгоритму постановки таких задач. По-перше, область керування може бути різною в різні моменти часу і для різних фазових станів, так що замість умови (4.2) виникає загальніша умова для будь-якого моменту часу t . По-друге, самі обмеження на можливі значення керування можуть мати інший вигляд, ніж (4.2). Так, «ресурси» керування часто записують в інтегральній формі

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2 dt \leq \mu, \quad (4.11)$$

де $\|u(t)\|$ - евклідова норма вектора; $\mu > 0$ - задане число.

По-третє, як керування іноді доводиться вибирати функції іншої природи - наприклад, кусково-сталі, нерозривні, що інтегруються з квадратом, та ін.

Так само фазові обмеження можуть мати вигляд, що відрізняється від (4.1), наприклад, задаватися нерівностями типу $F(u, t), x(t) \geq 0$, які мають виконуватися в будь-який момент часу.

4.2. Розв'язання задач методом класичного варіаційного числення

4.2.1. Класифікація задач оптимального керування

Сформульована раніше задача оптимального керування належить до варіаційних задач, розв'язанням яких займається розділ математики, що дістав назву «варіаційне числення». Величину $I(u)$, що визначається залежністю (3.8), називають функціоналом. На відміну від функції, наприклад, $f(x)$, числові значення якої задаються на множині значень аргументу x , числові значення функціонала $I(u)$ задаються на множині можливих керувань $U(t)$. Як вже відомо, задача знаходження оптимального керування зводиться до того, щоб із множини допустимих керувань U

добрати таке, при якому функціонал $I(u)$ набуває мінімального числового значення.

При розв'язанні задач оптимального керування критерій (3.6), крайові умови, обмеження, що накладаються на систему, та інші можуть мати різний вигляд. З огляду на це задачі оптимального керування поділяють на групи.

1. За виглядом обмежень задачі бувають:

а) класичного типу, коли обмеження задаються у вигляді рівнянь

$$\varphi_k(t, x, u) = 0, k = 1, \dots, m; \quad (4.12)$$

б) некласичного типу, коли обмеження задаються у вигляді нерівностей

$$\varphi_k(t, x, u) \leq 0, k = 1, \dots, m. \quad (4.13)$$

До класичного типу належать також ізопериметричні задачі, тобто задачі з ізопериметричними обмеженнями:

$$\int_{t_0}^{t_1} f_{n+j}(t, x, u) dt = b_j, j = 1, \dots, l. \quad (4.14)$$

Уведенням допоміжних змінних від ізопериметричних обмежень (4.14) завжди можна позбавитися. Достатньо замість цих обмежень в умову задачі ввести такі рівняння і крайові умови:

$$\dot{x}_{n+j} = f_{n+j}(t, x, u); x_{n+j}(t_0) = 0; x_{n+j}(t_1) = b_j, j = 1, \dots, l. \quad (4.15)$$

Формально задачі некласичного типу введенням допоміжних змінних можна перетворити на задачі класичного типу. Справді, обмеження (4.13) можна замінити обмеженнями типу рівнянь

$$\varphi_k(t, x, u) + u_{n+k}^2 = 0, k = 1, \dots, m. \quad (4.16)$$

Задачі оптимального керування некласичного типу можуть мати обмеження вигляду

$$\int_{t_0}^{t_1} f_{n+s}(t, x, u) dt \leq C_s, s = 1, \dots, p. \quad (4.17)$$

Уведенням допоміжних змінних ці обмеження можна замінити на співвідношення

$$\dot{x}_{n+s} = f_{n+s}(t, x, u); x_{n+s}(t_0) = 0; x_{n+s}(t_1) = C_s, s = 1, \dots, p. \quad (4.18)$$

Отже, усі розглянуті задачі з різними обмеженнями можна звести до класичного типу.

2. За виглядом крайових умов розрізняють задачі:

а) із фіксованими кінцями, коли кожна з множин X_0 і X_1 складається з однієї точки ($x(t_0) = x_0; x(t_1) = x_1$, де x_0, x_1 - задані точки);

б) із рухомим правим кінцем (X_1 складається більш ніж з однієї точки), із рухомим лівим кінцем (X_0 складається більш ніж з однієї точки) і з рухомими кінцями (обидва кінці рухомі);

в) із вільним правим кінцем (X_1 збігається за всім фазовим простором, тобто на правий кінець жодних обмежень не накладено).

3. За часом початку і завершення процесу розрізняють задачі:

а) із фіксованим часом, коли моменти початковий t_0 і кінцевий t_1 фіксовані;

б) із нефіксованим часом, коли один із моментів t_0 або t_1 не фіксовано.

4. За критерієм оптимальності розрізняють:

а) задачу Больца; при цьому критерій має вигляд

$$\dot{I} = G[x(t_0), x(t_1), t_0, t_1] + \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u) dt; \quad (4.19)$$

б) задачу Лагранжа; при цьому критерій має вигляд

$$\dot{I} = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u) dt; \quad (4.20)$$

в) задачу Майєра; при цьому критерій має вигляд

$$\dot{I} = G[x(t_0), x(t_1), t_0, t_1]. \quad (4.21)$$

Задачу Майєра в частинному випадку, коли функціонал має вигляд $\dot{I} = G(x(t_1), t_1)$ називають задачею термінального керування; якщо функціонал має вигляд $\dot{I} = (t_1 - t_0)$ - задачею максимальної (оптимальної) швидкодії.

Задачі Больца, Лагранжа і Майєра еквівалентні в тому розумінні, що шляхом перетворення змінних можна від однієї задачі перейти до іншої [11].

4.2.2. Метод класичного варіаційного числення

Розглянемо кілька варіаційних задач.

1. *Задача із закріпленими кінцями з фіксованим часом.* Якщо кінці закріплені й час фіксовано, то в класичному випадку задачу оптимального керування в загальному вигляді можна сформулювати як таку задачу Лагранжа:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= f_i(t, x, u), i = 1, \dots, n; \\
\varphi_k(t, x, u) &= 0, k = 1, \dots, l; \\
x_i(t_0) &= x_{0i}; x_i(t_1) = x_{1i}, i = 1, \dots, n; \\
\dot{I} &= \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u) dt \rightarrow \text{extr.}
\end{aligned}
\tag{4.22}$$

Передбачається, що функції $f_i(t, x, u)$, $i = 0, 1, \dots, n$ і $\varphi_k(t, x, u)$, $k = 1, \dots, l$ є неперервними і диференційованими за всіма своїми аргументами, керування $u(t)$ належить до кусково-неперервних функцій, а траєкторія $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ - до кусково-гладких.

Функцію $u(t)$ називають кусково-неперервною на $[t_0, t_1]$, якщо вона неперервна всюди на $[t_0, t_1]$ за винятком скінченної кількості точок, де вона має розриви першого роду. Функцію $x(t)$ називають кусково-гладкою на $[t_0, t_1]$, якщо на $[t_0, t_1]$ вона сама є неперервною, а її похідна - кусково-неперервною.

Керування $u(t)$ з кусково-неперервних функцій називають допустимим, а траєкторію $x(t)$ з кусково-гладких функцій - допустимою. Пару $(u(t), x(t))$ називають допустимою, якщо допустимими є $u(t)$ і $x(t)$.

Розглянемо спочатку найпростішу задачу класичного варіаційного числення:

$$I(y) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, y, \dot{y}) dt; \tag{4.23}$$

$$y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1. \tag{4.24}$$

Вважатимемо, що $y(t)$ є скалярною функцією, що належить до $C^1[t_0, t_1]$ неперервно диференційованих функцій на інтервалі $[t_0, t_1]$. Екстремум функціонала (4.23) шукають серед вказаних функцій, що задовольняють

заданим крайовим умовам (4.24). Такі функції називатимемо допустимими функціями, або допустимими точками у функціональному просторі.

Якщо екстремум функціонала (4.23) досягається в точці $y^*(t)$, то вона задовольняє рівняння Ейлера

$$\frac{\partial f_0(t, y^*, \dot{y}^*)}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0(t, y^*, \dot{y}^*)}{\partial \dot{y}} = 0. \quad (4.25)$$

Допустиму функцію, що задовольняє рівняння Ейлера, називають екстремаллю, або стаціонарною точкою, задачі (4.23), (4.24).

Якщо $\vec{y}(t)$ - векторна функція з елементами $(y_1(t), \dots, y_p(t))$, рівняння Ейлера мають вигляд

$$\frac{\partial f_0}{\partial y_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}_j} = 0, j = 1, 2, \dots, p. \quad (4.26)$$

Система (4.26) є скалярною формою запису векторного рівняння (4.25).

Тепер розглянемо узагальнюючу найпростішу задачу варіаційного числення. У цій задачі функціонали залежать від похідних вищих порядків

$$I(y) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}) dt, \quad (4.27)$$

де f_0 - функція, $n + 2$ рази диференційована за всіма аргументами, $y(t) \in C_n[t_0, t_1]$, а крайові умови мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y^{(n-1)}_0; \\ y(t_1) = y_1, \dot{y}(t_1) = \dot{y}_1, \dots, y^{(n-1)}(t_1) = y^{(n-1)}_1. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Екстремалами функціонала (4.27) при крайових умовах (4.28) будуть інтегральні криві рівняння Ейлера – Пуассона

$$\frac{\partial f_0}{\partial y_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}_j} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial f_0}{\partial y_j^{(n)}} = 0. \quad (4.29)$$

Якщо $\vec{y}(t)$ - векторна функція з елементами $(y_1(t), \dots, y_p(t))$ рівняння Ейлера - Пуассона мають вигляд

$$\frac{\partial f_0}{\partial y_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}_j} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial f_0}{\partial y_j^{(n)}} = 0, (j = 1, \dots, p). \quad (4.30)$$

Після найпростіших задач варіаційного числення розглянемо складнішу задачу Лагранжа:

$$F_i(t, z, \dot{z}) = 0, i = 1, \dots, p; \quad (4.31)$$

$$\varphi_k(t, z) = 0, k = 1, \dots, l; \quad (4.32)$$

$$z(t_0) = z_0, z(t_1) = z_1; \quad (4.33)$$

$$\dot{I} = \int_{t_0}^{t_1} F_0(t, z, \dot{z}) dt, \quad (4.34)$$

де $F_i (i = 0, 1, \dots, p), \varphi_k (k = 1, \dots, l)$ - диференційовані за всіма своїми аргументами функції; Z - вектор-стовпець розміром S .

Ця задача відрізняється від найпростішої варіаційної задачі тим, що на аргументи функціонала крім крайових умов накладено обмеження (4.31), (3.32), і вони вже не є незалежними. Для отримання потрібних умов використаємо прийом Лагранжа

Складемо функцію:

$$L(t, z, \dot{z}, \psi, \lambda) = \sum_{i=1}^p \psi_i F_i + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k + \psi_0 \varphi_0,$$

де $\psi_i, i = 1, \dots, p$ - функції часу; $\lambda_k (k = 1, \dots, l), \psi_0$ - константи.

Цю функцію називають функцією Лагранжа, а функції $\psi_i, i = 1, \dots, p$ і числа $\lambda_k (k = 1, \dots, l)$ та ψ_0 - множниками Лагранжа. Прийом Лагранжа полягає в тому, що задача (4.31) – (4.34) перетворюється на найпростішу задачу варіаційного числення:

$$\dot{I} = \int_{t_0}^{t_1} L(t, z, \dot{z}, \psi, \lambda) dt \rightarrow \text{extr}; \quad (4.35)$$

$$z(t_0) = z_0, z(t_1) = z_1$$

Остання задача має сенс, якщо множники Лагранжа не дорівнюють одночасно нулю. Крім того, якщо $\psi_0 = 0$, то функціонал (4.35) не залежить від початкового функціонала (4.34).

У перетвореній задачі роль незалежного аргументу відіграє вектор $y = (z, \psi, \lambda)$, а роль підінтегральної функції - функція Лагранжа. З урахуванням того, що функція Лагранжа не залежить від похідних $\dot{\psi}, \dot{\lambda}$, рівняння Ейлера набирають вигляду:

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{dz_i} = 0, i = 1, \dots, s; \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_j} = 0, j = 1, \dots, p; \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0, k = 1, \dots, l. \quad (4.37)$$

Рівняння (4.37), як легко перевірити, збігаються з рівняннями (4.31) і (4.32), тому достатньо використати рівняння (4.36) і розв'язати їх разом із рівняннями (4.31) і (4.32) за крайових умов (4.33). Рівняння (4.36) називають рівняннями Ейлера - Лагранжа.

Тепер розглянемо задачу оптимального керування і змінимо запис рівнянь об'єкта

$$f_i(t, x, u) - \dot{x}_i = 0, i = 1, \dots, n; \quad (4.38)$$

$$\varphi_k(t, x, u) = 0, k = 1, 2, \dots, l; \quad (4.39)$$

$$x(t_0) = x_{i0}; x(t_1) = x_{i1}, i = 1, \dots, n; \quad (4.40)$$

$$\dot{I} = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u) dt \rightarrow \min \quad (4.41)$$

Складемо функцію Лагранжа:

$$L = \psi_0 f_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i - \dot{x}_i) + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k.$$

У цій функції роль аргументу z відіграв вектор (x, u) і оскільки в неї не входить похідна $\dot{u}$, то рівняння Ейлера - Лагранжа мають вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{x}_i} &= 0, i = 1, \dots, n; \\ \frac{\partial L}{\partial u_j} &= 0, j = 1, \dots, r.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Рівняння Ейлера - Лагранжа записують також з використанням функції Гамільтона (гамільтоніана)

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i + \sum_{k=1}^l \lambda_k \psi_k.$$

Очевидно,

$$L = H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i,$$

тому з (4.42) отримуємо

$$\psi_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n;\tag{4.43}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, j = 1, \dots, r.\tag{4.42}$$

Рівняння (4.44) називають умовою стаціонарності. Ця умова показує, що на екстремалі гамільтоніан розглядається при кожному фіксованому $t \in [t_0, t_1]$ як функція від керування і задовольняє потрібну умову екстремуму. На оптимальній траєкторії гамільтоніан як функція від керування u досягає максимуму (або точніше верхньої межі) при оптимальному керуванні.

Тепер сформулюємо правило множників Лагранжа. Якщо допустима пара $(u(t), x(t))$ є розв'язком задачі оптимального керування (4.38) – (4.41), то

знайдуться такі не рівні одночасно нулю множники Лагранжа, що ця пара задовольняє рівнянням Ейлера - Лагранжа (4.43), (4.44).

Згідно з цим правилом, щоб знайти оптимальне керування і оптимальну траєкторію, слід розв'язати систему рівнянь (4.36), (4.39), (4.43) і (4.44) за крайових умов (4.40). Рівняння Ейлера - Лагранжа отримано за умови, що керування $u(t)$ є неперервною функцією, а траєкторія $x(t)$ гладка на інтервалі $[t_0, t_1]$. Правило множників Лагранжа залишається таким, що справджується і тоді, коли $u(t)$ належить до кусково-неперервних функцій, а $x(t)$ - до кусково-гладких. Якщо оптимальне керування $u(t)$ має розрив першого роду в якихось точках (ці точки називають кутовими), то воно саме і відповідна йому траєкторія $x(t)$ мають задовольняти вказані раніше рівняння лише в точках неперервності керування. У кутових точках мають виконуватись умови Вейєрштраса – Ердмана:

$$\psi^- = \psi^+; H^- = H^+, \quad (4.45)$$

де індекси «-» і «+» означають відповідно ліву та праву межі відповідних функцій.

Множники Лагранжа входять у рівняння Ейлера - Лагранжа лінійно й однорідно, тому рівняння не змінюються, якщо всі множники помножити на одне й те саме стале число. Тому один зі сталих множників Лагранжа, що не дорівнює нулю, можна прирівняти до будь-якого відмінного від нуля заданого числа. У звичайному випадку ($\psi_0 = 0$) приймають $\psi_0 = -1$.

Для визначення $2n+r+l$ невідомих $x_i (i=1, \dots, n)$, $\psi_i (i=1, \dots, n)$, $u_j (j=1, \dots, r)$ і $\lambda_k (k=1, \dots, l)$ маємо таку саму кількість рівнянь, серед яких $2n$ диференціальних рівнянь, при розв'язанні яких з'являється $2n$ невідомих (сталих інтегрування). Ці невідомі визначаються з крайових умов (3.40), які дають $2n$ співвідношень. Отже, розв'язання варіаційної задачі звелось до розв'язання крайової задачі Коші.

Рівняння Ейлера - Лагранжа є лише потрібними умовами, тобто будь-який розв'язок початкової задачі є екстремаллю, але не кожна екстремаль, що задовольняє граничні умови, може бути розв'язком. Але якщо розв'язок задачі існує й екстремаль, що задовольняє граничні умови, єдина, то ця екстремаль й буде розв'язком.

2. *Задача з руховими кінцями і фіксованим часом.* Якщо кінці рухомі, то в класичному випадку задача оптимального керування відрізняється від задачі (3.36) – (3.41) тим, що змінюються крайові умови і критерій оптимальності може мати будь-який із зазначених у класифікації виглядів, тобто в цьому разі задача оптимального керування може бути і задачею Лагранжа, і задачею Больца, і задачею Майєра. Якщо кінці закріплено і час фіксовано, задача оптимального керування може бути лише задачею Лагранжа.

Розглянемо найпростішу варіаційну задачу з руховими кінцями і фіксованим часом

$$\dot{I} = g_0[y(t_0), y(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, y, \dot{y}) dt, \quad (4.46)$$

функції g_0 і f_0 неперервні та диференційовані за всіма своїми аргументами. Екстремалі функціоналу (3.46) визначають з рівняння Ейлера

$$\frac{\partial f_0}{\partial y_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}_j} = 0, j = 1, 2, \dots, p. \quad (4.47)$$

і умов трансверсальності

$$\left. \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}_j} \right|_{t=t_0} = \frac{\partial g_0}{\partial y_j(t_0)}; \left. \frac{\partial f_0}{\partial \dot{y}_j} \right|_{t=t_1} = \frac{\partial g_0}{\partial y_j(t_1)}, i = 1, \dots, p. \quad (4.48)$$

Отримаємо потрібні умови для задачі оптимального керування:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x, u), i = 1, \dots, n; \quad (4.49)$$

$$\varphi_k(t, x, u) = 0, k = 1, \dots, l; \quad (4.50)$$

$$g_j[x(t_0), x(t_1)] = 0, j = 1, \dots, q < 2n; \quad (4.51)$$

$$\dot{I} = g_0[x(t_0), x(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u) dt. \quad (4.52)$$

Граничні умови (4.51) вважаються незалежними, а функції $g_j[x(t_0), x(t_1)], j = 0, 1, \dots, q$ - неперервними і диференційованими за всіма своїми аргументами. Використовуючи прийоми Лагранжа, перетворюємо цю задачу на найпростішу задачу Больца

$$\dot{I} = G[x(t_0), x(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \psi(t), \lambda) dt,$$

де

$$G = \sum_{j=0}^q v_j g_j; v_0 = \psi_0;$$

$$L = \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i - \dot{x}_i) + \psi_0 f_0 + \sum_{k=1}^l \lambda_k \varphi_k = H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i.$$

Рівняння Ейлера - Лагранжа для цієї задачі збігаються з рівняннями (3.42) або (3.43) і (3.44), а умови трансверсальності мають вигляд

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}; \psi_i(t_1) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_1)}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.53)$$

Якщо початкова точка фіксована, тобто фіксовано всі координати точки $x(t_0)$, то умови трансверсальності (3.53) набирають вигляду

$$\psi_i(t_1) = \partial G / \partial x_i(t_1), i = 1, 2, \dots, n.$$

Якщо частина координат точки $x(t_1)$ також фіксована, то в останній умові $\dot{I}$ пробігає лише значення індексів нефіксованих координат.

У розглянутій задачі правило множників Лагранжа має таке визначення: якщо допустима пара $(u(t), x(t))$ є розв'язком задачі (4.49) – (4.52), то існують такі не рівні одночасно нулю множники Лагранжа, що ця пара задовольняє рівняння Ейлера – Лагранжа (4.43), (4.44) і умови трансверсальності (4.53). Цих співвідношень достатньо, щоб визначити всі невідомі величини.

3. *Задача з нефіксованим часом і рухомими кінцями.* В умову задачі з нефіксованим часом на відміну від задачі (4.49) – (4.52) із фіксованим часом можуть явно входити початкові та кінцеві моменти часу. Задача оптимального керування в цьому разі формулюється так

$$x_i = f_i(t, x, u), i = 1, \dots, n; \quad (4.54)$$

$$\varphi_k(t, x, u) = 0, k = 1, \dots, l; \quad (4.55)$$

$$g_j[x(t_0), x(t_1), t_0, t_1] = 0, j = 1, \dots, q; \quad (4.56)$$

$$\dot{I} = f_0[x(t_0), x(t_1), t_0, t_1] + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u) dt. \quad (4.57)$$

Якщо допустима пара $(u^*(t), x^*(t))$ при $t \in [t_0^*, t_1^*]$ є розв'язком задачі (4.54) – (4.57), то вона буде розв'язком цієї самої задачі при фіксованому часі: $t_0 = t_0^*; t_1 = t_1^*$. Тому розв'язок задачі (4.54) – (4.57) має задовольняти рівняння Ейлера - Лагранжа і умови трансверсальності, причому останні доповнюються співвідношеннями, які враховують варіацію початкового та кінцевого моментів часу, і набувають вигляду

$$\psi_i(t_0) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_0)}; \psi_i(t_1) = -\frac{\partial G}{\partial x_i(t_1)}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.58)$$

$$H|_{t=t_0} = \partial G / \partial t_0, H|_{t=t_1} = -\partial G / \partial t_1. \quad (4.59)$$

Умови (4.56) збігаються з умовами (4.53).

Задачі з рухомими кінцями і нефіксованим часом є найзагальнішими. З них як частинні випадки отримують задачі з фіксованим часом і закріпленими або нерухомими кінцями.

Для цієї задачі правило множників Лагранжа можна сформулювати в такому вигляді: щоб допустима пара $(u(t), x(t))$ стала розв'язком задачі (4.54) – (3.57), мають існувати такі не рівні одночасно нулю множники Лагранжа, що ця пара задовольняє рівняння Ейлера - Лагранжа (4.43), (4.44) в усіх точках неперервності керування і умови трансверсальності (4.58), (4.59). У точках розриву керування виконується умова Вейєрштраса - Ердмана.

4.3. Принцип максимуму Понтрягіна

При пошуку оптимального керування варіаційними методами виникають труднощі, серед яких більшість має принциповий характер

1. За допомогою варіаційних методів можна визначати лише відносні мінімуми і максимуми функціонала $I(u)$, тоді як інтерес становлять абсолютні максимуми і мінімуми.

2.Рівняння Ейлера для багатьох технічних задач є нелінійними, що часто не дає можливості отримати розв'язок варіаційної задачі в явному вигляді.

3.На значення керуючих сигналів керування і фазових координат досить часто вводяться обмеження у вигляді нерівностей, що не дає змоги знаходити оптимальне керування варіаційними методами.

4.Часто оптимальне керування в технічних задачах має розриви. Метод множників Лагранжа не дає змогу визначити кількість і місце розташування точок розриву, і тому в цих випадках він не дає можливості знайти оптимальне керування.

Наведені труднощі сприяли інтенсивному вивченню проблеми оптимальності керування. Л.С.Понтрягін і його учні В.Г.Болтянський, В.Г.Гамкрелідзе і Є.Ф.Міщенко створили теорію оптимального керування, в основі якої лежить сформульований Л.С.Понтрягіним принцип максимуму як необхідна умова екстремуму функціонала за різних обмежень і умов [12].

Розглянемо кілька задач оптимального керування з використанням принципу максимуму.

1. *Задача із закріпленими кінцями і фіксованим часом.* За відсутності фазового обмеження задачу оптимального керування в загальному вигляді можна сформулювати як задачу Лагранжа:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(t, x, u), i = 1, \dots, n, n \in U; \\ x_j(t_0) &= x_{0j}; x_j(t_1) = x_{j1}, j = 1, \dots, n; \\ \dot{I} &= \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u) dt \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Усі функції f_i неперервні і неперервно диференційовні за сукупністю всіх змінних. Ця задача відрізняється від задачі (4.38) – (34.41) тим, що обмеження задається у вигляді включення $u \in U$, де U - допустима множина

значень керувань. Крім того, тут не потрібна гладкість функцій $f_i (i = 1, \dots, n)$ за керуванням u .

Допустимим вважають керування $u(t)$ яке належить до кусково-неперервних функцій із допустимої множини U . Фазову траєкторію $x(t)$ називають допустимою, якщо вона є кусково-гладкою.

Застосуємо до задачі (4.60) прийом Лагранжа. Згідно з ним функція Лагранжа має вигляд

$$L = \psi_0 f_0 + \sum_{i=1}^n \psi_i (f_i - \dot{x}_i) = H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i,$$

де H - гамільтоніан

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i \quad (4.61)$$

Функцією H називають також функцію Понтрягіна. Функції Лагранжа і Понтрягіна мають такий самий вигляд, що й відповідні функції у варіаційних задачах класичного тилу, тільки в ці функції не входять обмеження на керування, які у цьому разі мають вигляд включення $u \in U$. Згідно з прийомом Лагранжа задача (4.60) зводиться до такої задачі:

$$\tilde{I} = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}, u, \psi) dt \rightarrow \max, u \in U; \quad (4.62)$$

$$x_j(t_0) = x_{j0}; x_j(t_1) = x_{j1}; j = 1, \dots, n.$$

Функціонал $\tilde{I}$ максимізується, хоча функціонал $\dot{I}$ в початковій задачі (4.60) слід мінімізувати, оскільки множник ψ_0 при f_0 у неособливому випадку приймають від'ємним ($\psi_0 = -1$).

Якщо $(x^*(t), u^*(t), \psi^*(t))$ є розв'язком задачі (4.62), то вона рівнозначна таким двом

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}, u^*, \psi) dt \rightarrow \max, \\ \tilde{I} &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, x^*, \dot{x}^*, u, \psi^*) dt \rightarrow \max, u \in U.\end{aligned}\tag{4.63}$$

або

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= \int_{t_0}^{t_1} [H(t, x, u^*, \psi) - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i] dt \rightarrow \max, \\ \tilde{I} &= \int_{t_0}^{t_1} [H(t, x^*, u, \psi^*) - \sum_{i=1}^n \psi_i^* \dot{x}_i^*] dt \rightarrow \max, u \in U.\end{aligned}\tag{4.64}$$

за таких самих крайових умов, що й у задачі (4.62).

Функцію $\psi(t)$ називають допустимою, якщо вона, як і $x(t)$, є елементом множини кусково-гладких функцій.

Задача (4.63) є найпростішою задачею варіаційного числення. Для неї потрібні умови (рівняння Ейлера) мають вигляд

$$\psi_i = -\partial H / \partial x_j, j = 1, \dots, n;\tag{4.65}$$

$$\dot{x}_i = \partial H / \partial \psi_i, j = 1, \dots, n.\tag{4.66}$$

Розв'язок задачі (4.64) очевидний: керування $u^*(t)$ забезпечує максимум у цій задачі в тому I лише в тому разі, якщо всюди на $[t_1, t_0]$, крім точок розриву $u^*(t)$, виконується рівність

$$u \in U, \max H(x^*, u, \psi^*, t) = H(x^*, u^*, \psi^*, t). \quad (4.67)$$

Потрібні умови задачі (4.63) разом з умовою (4.67) становлять потрібні умови задачі (4.60), які називають принципом максимуму, або принципом максимуму Понтрягіна. Рівняння (4.66) збігаються з рівняннями об'єкта, тому їх можна не розглядати. Рівняння (4.65) називають спряженими рівняннями, або спряженою системою.

На основі наведених викладок сформульовано принцип максимуму: щоб допустима для задачі (4.60) пара $(u^*(t), x^*(t))$ була її розв'язком, мають існувати такі не нульові константа $\psi_0^* \leq 0$ і розв'язок $\psi^* = (\psi_1^*, \dots, \psi_n^*)$ спряженої системи (4.65) при $u(t) = u^*(t)$, що при будь-яких $t \in [t_0, t_1]$, крім точок розриву $u^*(t)$, $\tilde{H}(u) = H(x^*, u, \psi^*, t)$ досягає максимуму при $u = u^*(t)$.

2. *Задача з рухомими кінцями.* Розглянемо таку задачу Больца:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(t, x, u), i = 1, \dots, n, u \in U; \\ g_j(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1) &= 0, j = 1, \dots, q, \\ \dot{I} &= g_0(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u) dt \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Функції g_j ($j = 0, 1, \dots, q$) неперервні та неперервно диференційовані. Функції f_i ($i = 1, \dots, n$) мають такі самі властивості, як і в задачі (4.60).

Використовуючи прийоми Лагранжа, задачу можна звести до такої:

$$\dot{I} = G + \int_{t_0}^{t_1} (H - \sum_{i=1}^n \psi_i \dot{x}_i) dt \rightarrow \max,$$

де

$$G = \sum_{j=0}^q v_j g_j; v_0 = \psi_0; H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i.$$

За аналогією з попередньою задачею сформулюємо принцип максимуму. Щоб допустима для задачі (4.68) пара $(u^*(t), x^*(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ була її розв'язком, мають:

1) існувати такі не рівні одночасно, нулю константи $\psi_0^* \leq 0$ констант v_j ($j = 1, \dots, q$); розв'язку $\psi^* = (\psi_1^*, \dots, \psi_n^*)$ спряженої системи (4.65) при $u(t) = u^*(t)$ і $x(t) = x^*(t)$, що при будь-якому $t \in [t_0^*, t_1^*]$ крім точок розриву $u^*(t)$ функція $\tilde{H}(u) = H(x^*, u, \psi^*, t)$ досягає максимуму при $u = u^*(t)$;

2) виконуватись умови трансверсальності (4.58), (4.59). Розглянемо зв'язок між принципом максимуму і методом множників Лагранжа. Відмінність функції Понтрягіна (4.61) від гамільтоніана, уведеного в попередньому розділі, полягає в тому, що в ній не враховане обмеження на керування. Спряжені рівняння (4.65) збігаються з рівняннями Ейлера - Лагранжа (4.43), якщо фазові обмеження відсутні (функція φ_k від фазових координат не залежить). Ці рівняння не містять рівнянь Ейлера - Лагранжа (4.44), які визначають умови стаціонарності. Замість них є умови максимуму (4.67). Якщо обмеження на керування задасться у вигляді співвідношень типу рівностей, то за допомогою методу невизначених множників Лагранжа знаходження екстремуму функції з (3.67) дістаємо рівняння Ейлера - Лагранжа, якого не вистачає.

3. *Задача максимальної швидкодії.* Ця задача формулюється так: знайти допустиме керування, яке переводить заданий об'єкт із початкової точки (множини) у кінцеву (кінцеву множину) за мінімальний час. Розробка

принципу максимуму почалася з розв'язування саме цієї задачі. Вона є частинним випадком задачі з рухомими кінцями і нефіксованим часом. Якщо прийняти $t_0 = 0$, то критерій оптимальності матиме вигляд $t_0 = 0$, то критерій оптимальності матиме вигляд $i = t_1$. Тому в цьому разі $g_0 = t_1, f_0 = 0$ і функція Понтрягіна має вигляд

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i$$

Якщо кінці закріплені, то $G = -g_0 = -t_1$ і умови трансверсальності набирають вигляду

$$H|_{t=t_1} = -\partial G / \partial t_1 = 1.$$

Розглянемо задачу максимальної швидкодії, коли об'єкт є лінійним (описується лінійними диференціальними рівняннями):

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^r b_{ij} u_j, i=1, \dots, n; \\ \alpha_j &\leq u_j \leq \beta_j; \alpha_j < 0, \beta_j > 0, j=1, \dots, r; \\ x_i(t_0) &= x_{i0}; x_i(t_1) = 0; i=1, \dots, n; \dot{I} = t_1 \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Задачу (4.69) називають лінійною задачею максимальної швидкодії. У матричній формі рівняння об'єкта набирають вигляду

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

де A - стала матриця, що визначає відображення n - вимірного простору R^n у себе; B - стала матриця, що визначає відображення r - вимірного простору R^n у n - вимірний простір R^n ; x - фазовий вектор, що належить простору R^n ; u - вектор керування, що належить простору R^n .

Для такої системи функція Понтрягіна мав вигляд

$$H = \psi^T (Ax + Bu) = \sum_{i=1}^n \psi_i \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \sum_{j=1}^r b_{ij} u_j \right),$$

де $\psi^T = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ підпорядковується спряженому рівнянню

$$\psi^T = -\partial H / \partial x$$

або спряженій системі

$$\psi = -\partial H / \partial x_i, i = 1, \dots, n.$$

Згідно з принципом максимуму оптимальне керування визначають з умови

$$\max H = \sum_{i=1}^n \psi_i \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \max \sum_{i=1}^n \psi_i \sum_{j=1}^r b_{ij} u_j$$

або

$$\max \sum_{j=1}^r u_j \sum_{i=1}^n b_{ij} \psi_i = \sum_{j=1}^r \max (u_j \sum_{i=1}^n b_{ij} \psi_i),$$

де

$$U = \{u : a_j \leq u_j \leq b_j, j = 1, \dots, r\}.$$

Якщо виконується умова нормальності, то сума перетворюється на нуль лише в ізольованих точках. У цьому разі з останньої тотожності випливає, що координати $u_j^* (j = 1, \dots, r)$ оптимального керування u^* є кусково-сталими і набувають граничних значень a_j або b_j :

$$u_j = \begin{cases} a_j & \text{при } \sum_{i=1}^n b_{ji} \psi_i < 0; \\ b_j & \text{при } \sum_{i=1}^n b_{ij} \psi_i > 0, j=1, \dots, r. \end{cases} \quad (4.70)$$

У частинному випадку, коли обмеження має вигляд $|u| \leq a_j$, дістаємо

$$u_j^* = a_j \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n b_{ij} \psi_i, j = 1, \dots, r.$$

В оптимальному за швидкодією керуванні лінійними об'єктами функції $u_j^*(t), j = 1, \dots, r$ при виконанні умов нормальності набувають лише граничних значень. У загальному випадку ці функції мають довільну кількість точок перемикання, тобто точок переходу з одного граничного значення в інше.

При розв'язанні задач оптимального керування досить часто вводять обмеження на фазові координати. Якщо на деякі фазові координати фазового вектора вводять обмеження, то принцип максимуму в такому вигляді, як сформульовано раніше, не справджується. Формулювання принципу максимуму в цьому разі набагато ускладнюється.

Розглянемо деякі особливості розв'язання задач з обмеженням на фазові координати. Зі збільшенням кількості обмежень, при яких визначають оптимальне керування і траєкторію, розв'язання задачі бажано розглядати в кілька етапів. У разі кількох обмежень може статися, що при одночасному їх урахуванні задача аналітично нерозв'язна, тоді як при їх частинному врахуванні розв'язати її дуже легко. У подібних випадках корисно починати розв'язання зі спрощених задач, які отримують з початкових при відкиданні деяких обмежень. У результаті розв'язування таких задач може виявитись таке:

1. Знайдене оптимальне керування і траєкторія спрощеної задачі задовольняють невраховані обмеження. Це означає, що тимчасово невраховані обмеження є несуттєвими в тому розумінні, що вони не впливають

на розв'язання задачі і взагалі ними можна знехтувати. У цьому разі знайдений розв'язок спрощеної задачі й буде розв'язком початкової.

2. Оптимальні керування і траєкторія жодної спрощеної задачі не задовольняють невраховані обмеження. Ці обмеження є істотними, і задачу слід розв'язувати заново з урахуванням цих обмежень. Але в цьому разі розв'язки спрощених задач бувають корисними, оскільки можуть допомогти при розв'язанні початкової задачі.

Розв'язання задач максимальної швидкодії для більш загального класу нелінійних об'єктів буде показано далі на прикладах механізмів вантажопідйомних машин. При розв'язанні цих задач слід мати рівняння руху механізмів вантажопідйомних машин [13].

РОЗДІЛ 5

КРИТЕРІЇ ОЦІНКИ ЯКОСТІ МАШИН

5.1. Аналіз критеріїв якості

Економічні критерії. Основним, найбільш загальним критерієм якості однорідної продукції (машин певного призначення) є інтегральний показник якості продукції, який можна представити у виді питомих грошових витрат на одиницю ефекту

$$K_H = (Z_C + Z_{\text{Э}}) / \Pi, \quad (5.1)$$

де $Z_C, Z_{\text{Э}}$ – сумарні витрати відповідно на створення (маркетинг, розробку, виготовлення, монтаж, демонтаж, утилізацію й інші одноразові витрати) і експлуатацію (технічне обслуговування, ремонт, заробітна плата обслуговуючого персоналу й інші поточні витрати) продукції (піднімальних машин) ; Π – сумарний корисний ефект від експлуатації чи споживання продукції (наприклад, переміщення вантажів піднімальною установкою в тонно-кілометрах за термін служби до капітального ремонту).

Для вибору найбільш економічного варіанта піднімальної установки для заданої висоти і продуктивності підйому можна скористатися критерієм "мінімум приведених витрат".

Приведені витрати по кожному варіанту піднімальної машини визначаються як сума поточних витрат і капітальних вкладень, приведених до одного року відповідно до нормативного коефіцієнта ефективності

$$\bar{Z}_{\text{ПР}i} = C_i + E_H K_i, \quad (5.2)$$

де $\bar{Z}_{\text{ПР}i}$ – приведені витрати по i -му варіанті; C_i – поточні витрати (собівартість) по i -му варіанту; $E_H = 0,15$ – нормативний коефіцієнт

ефективності капітальних вкладень, K_i – капітальні вкладення по i -му варіанту.

Уведемо критерій "питомі приведені витрати", тобто величину приведених витрат, віднесених до одиниці продукції

$$Z_{\text{пр}i} = (C_i + E_H K_i) / \Pi_i, \quad (5.3)$$

де Π_i – річна продуктивність i -ої піднімальної установки.

Конструктивні критерії. Для піднімальних машин, як і для інших машин, конструктивні критерії можна розділити на позиційні (миттєві), що оцінюють систему у визначеній позиції (у якийсь момент часу циклу), і інтегральні, що характеризують систему за кінцевий проміжок часу (зокрема, за цикл) [14]. До позиційних критеріїв можна віднести геометрію мас, габаритні розміри, потужність, максимальні навантаження чи їхні відносні значення, піки кінематичних і динамічних характеристик чи їхні відхилення від деяких значень і ін. У ряді випадків їхнє використання для вибору раціонального технічного рішення машини і для його оптимізації утруднене тим, що таких критеріїв багато. Раціональні варіанти системи за різними критеріями виходять різними, при оптимізації критерії змінюються в різних напрямках, і виділити серед них головний не завжди вдається.

Інтегральними критеріями оцінки якості машини є продуктивність, швидкодія, витрати енергії і сировини, питома потужність, к.к.д., середнє значення кінематичних і динамічних характеристик, загасання перехідних процесів, імпульс керуючого впливу, коефіцієнт динамічності й ін. Вони різномірні по змісту, і не завжди існують загальні рекомендації, в яких задачах які з цих критеріїв варто застосовувати. Прямі зв'язки між конструктивними й економічними критеріями не завжди вдається установити.

Динамічні критерії. Для оптимізації механічних систем був запропонований ряд динамічних критеріїв. Автори назвали їх по-різному і

надали їм різного змісту: витрати енергії, імпульси сили, продуктивність, силовий режим, загасання в найкоротший час перехідних процесів, розсіювання енергії, характеристики напруженого стану і віброізоляції, керування з мінімальною силою, імпульс керуючого впливу, швидкодія, потужність, середнє прискорення веденої ланки, середньоквадратичні значення кінематичних характеристик ланок, середньоквадратичне за період руху значення динамічної потужності, зусилля в елементах системи і їхні власні частоти коливань, рівень вібрації, співвідношення руху і вистою системи, питома потужність, к.к.д., відхилення від сталих змушених коливань, врівноважування сил інерції, вирівнювання моментів на ведучій ланці, мінімізація реакцій у кінематичних парах, коефіцієнти нерівномірності руху, максимальні значення кінематичних характеристик ланок, рівень пульсації динамічного навантаження, піки потужності, крутих і згинаючих моментів, діапазон регулювання робочих швидкостей, напрацювання на відмовлення, коефіцієнт готовності, коефіцієнт технічного використання й ін. Ряд дослідників рекомендує оптимізувати механічні системи, виходячи з умови стійкості руху.

З розвитком теорії багатокритеріальної оптимізації механічних систем з'явилися комплексні, узагальнюючі критерії, отримані шляхом згортання декількох критеріїв в один, складання комплексного критерію, адекватного заданій системі переваг. Для пошуку оптимальних параметрів системи набув застосування метод Соболя-Статникова, що побудований на таких передумовах:

1. Задачі проектування багатокритеріальні по суті. Існує багато суперечливих конструктивних критеріїв, у поліпшенні яких зацікавлений замовник.

2. До розв'язання задачі оптимізації не вдається, як правило, відшукати область припустимих варіантів розв'язків і звести задачу до однокритеріальної. Не вдається сконструювати єдиний критерій, що досить повно враховував би аспекти і цілі проектування.

3. Постановка і розв'язок задачі оптимального проектування трактується як єдиний процес (на відміну від традиційного розуміння оптимізації, при якому спочатку ставиться задача, а потім за допомогою обраного методу вона розв'язується).

Приведений аналіз показує, які численні і різнобічні сучасні дослідження в області пошуку і розробки динамічних критеріїв оцінки якості механізмів і машин, у тому числі узагальнених критеріїв. Однак універсальні динамічні критерії не були запропоновані.

Рядом авторів зроблена спроба розробки загальних динамічних критеріїв оцінки якості машин і механізмів на основі функціонала дії, що є найбільш універсальною мірою руху чи впливу. У роботі отримані критеріальні дії шляхом уведення під інтеграл, крім кінетичної енергії T чи функції Лагранжа $L=T-\Pi$ (де Π – потенціальна енергія системи), також інших мір руху чи впливу. Такий набір дій характеризує витрати механічних засобів по визначених мірах руху чи впливу (механічної роботи, імпульсу сили, динамічної потужності, енергії-часу й ін.). На основі критеріальних дій розроблені питомі дії, що оцінюють витрати механічних засобів на одиницю корисної ефективності машини і коефіцієнти корисної дії (к.к.д.) за різними мірами руху чи впливу, що показують співвідношення між корисними (мінімально можливими) і повними витратами механічних засобів за час повного циклу руху машини, а також зворотні їм величини – безрозмірні питомі дії.

5.2. Інтегральні динамічні критерії

5.2.1. Зміст і форма критеріїв

У механіці є функції, що включають у себе різні позиційні критерії механічних систем. Це міри руху і впливу: примус, енергія прискорень, кінетична, потенціальна, вільна і повна енергія, кількість руху, кінетичний момент, узагальнені сили, потужність. Однак загальні динамічні критерії

повинні бути інтегральними за формою, тому що позиційні критерії відповідають різним положенням руху системи. Інтегральні критерії можуть дати загальну оцінку системи і їх можна зіставляти з економічними критеріями, які також є інтегральними. Усереднений характер інтегральних критеріїв дозволяє розв'язувати загальні задачі оптимізації. При цьому позиційні критерії застосовуються для розв'язку не менш важливих часткових задач: розрахунків на міцність, коливання, резонанс і ін. Тому як універсальні критерії доцільно застосовувати міри руху чи впливу в інтегральній за часом формі. Така форма в механіці визначена як дія.

Дія, з якої може бути виведений весь математичний апарат механіки і яка еквівалентна диференціальним рівнянням руху механічної системи з заданими початковими умовами, запропонована як універсальний критерій динамічної оцінки систем. Дія охоплює всю математичну модель системи, є математичним об'єктом для розв'язування основної задачі динаміки прямими методами варіаційного числення і містить у собі позиційні критерії. Дія визначає витрати механічних засобів, що мають місце при механічних явищах (русі і спокої). Без витрат механічних засобів не створюється корисний ефект і не виникають шкідливі опори чи впливи. У цьому універсальний характер дії.

Дія як критерій оцінки якості й оптимізації механічної системи є її математичною моделлю, оскільки може замінити собою диференціальні рівняння руху системи; визначає, наскільки система досконала і встановлює параметри, при яких система оптимальна.

Дія характеризує рух механічної системи в цілому за цикл, охоплює всі параметри механічної моделі системи, розділяється по вузлах і деталях і може бути обчислена на підставі проекту системи. Отже, вона має якості, необхідні при проектуванні й оптимізації системи.

Аналіз приведених вище конструктивних інтегральних критеріїв механічних систем показує, що по своїй фізичній сутності вони є окремими випадками дій. Оскільки фізичний зміст дії з різними підінтегральними

функціями в механіці визначений, можна установити, в яких задачах оптимізації який вид дії варто використовувати. У цьому принципова відмінність дій від сумарних критеріїв, створених з часток за допомогою вагових коефіцієнтів.

Дії, що включають у себе конструктивні критерії, можуть бути основою для створення проміжних загальних критеріїв, що зв'язують конструктивні критерії з економічними. Оскільки дії, як і інші інтегральні конструктивні критерії, поглинають пікові значення кінематичних і динамічних характеристик механічної системи, їхнє використання не виключає розрахунку і оптимізації системи за позиційними критеріями, які визначають екстремальні значення цих характеристик.

Дії можуть бути застосовані для вибору раціональної структури і конструкції механічної системи, оптимізації її режиму руху і визначення оптимальних значень тих параметрів, що не входять в обов'язкові види розрахунку й оптимізації за критеріями екстремального характеру (піків характеристик системи). У результаті оптимізації системи за критеріями дії досягається економія витрат механічних засобів і зменшується напруженість динамічного режиму системи: зменшуються навантаження в системі, напруження в її елементах, маси швидкохідних деталей, витрати енергії і т. д. Отже, за допомогою дії вдається при проектуванні поліпшити економічні і конструктивні критерії машин різного класу, у тому числі і піднімальних машин.

5.2.2. Форми критеріїв

Розглянуті критерії оцінюють динаміку за весь цикл руху механізму чи машини і містять у собі їхні статичні і кінематичні характеристики, вони інтегральні за формою, і являють собою функціонали, що виражаються визначеним числом і можуть представлятися в безрозмірному виді.

Критеріальні дії. Являють собою інтеграли за часом з підінтегральними функціями, що виражають міри руху чи впливу механічної

системи:

$$\dot{I} = \int_{t_0}^{t_1} F dt, \quad (5.4)$$

де t – час; t_0, t_1 – початковий і кінцевий моменти часу закінченого циклу руху чи впливу; F – міра руху чи впливу механічної системи чи її елемента.

Різні види критеріальних дій отримані при різних підінтегральних функціях F : примусі Z , енергії прискорень V , кінетичної енергії T , модулях потенціальної енергії $|П|$, функції Лагранжа $|L| = |T - П|$ і Гамільтона $|H| = |T + П|$, приведених узагальнених сил $|Q|$, потужності $|P|$ та ін.

Питомі дії. Представляють витрати механічних засобів на одиницю корисної ефективності і визначаються залежністю:

$$K = \dot{I} / a, \quad (5.5)$$

де $\dot{I}$ – критеріальна дія; a – корисна ефективність системи за час циклу.

При цьому під корисною ефективністю за час циклу розуміють число виконаних операцій, кількість одиниць випущеної продукції і т. д. Різні види питомих дій отримані при різних витратах механічних засобів і різних корисних ефективностях.

Безрозмірні питомі дії. Являють собою частку від розподілу дійсних витрат механічних засобів за час циклу $\dot{I}$ до мінімально можливих (корисних) витрат цих же засобів за той же час $\tilde{I}$, використовуваних системою по її прямому призначенню і виражених у вигляді:

$$K = \dot{I} / \tilde{I}; \quad \dot{I} = \int_{t_0}^{t_1} F dt; \quad \tilde{I} = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{F} dt, \quad (5.6)$$

де $\tilde{F}$ – міра руху чи впливу, що відповідає мінімально можливим витратам

механічних засобів за час циклу, названа функцією мінімальної дії. Функція $\tilde{F}$ має такий же вид і зміст, як і функція F у формулі (5.5).

У загальному випадку для відомих критеріальних дій функція F може залежати від похідної другого порядку за часом від узагальненої координати досліджуваної машини чи механізму. Тому для визначення корисних витрат механічних засобів $\tilde{I}$ необхідно розв'язати варіаційну задачу для функціонала

$$\dot{I}^* = \int_{t_0}^{t_1} F^*(t, q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k) dt \quad (5.7)$$

при заданих граничних умовах, наприклад, $(t_0, q_0, \dot{q}_0)$, $(t_1, q_1, \dot{q}_1)$, що характеризують початковий (при t_0) і кінцевий (при t_1) стан робочих ланок машини чи механізму, що виконують цільову технологічну операцію. Тут: F^* – міра руху чи впливу робочих органів машини, що здійснюють технологічний процес; q_k – сукупність s узагальнених координат системи. Граничні умови визначаються періодичністю процесу.

Розв'язок поставленої варіаційної задачі у формі Ейлера-Лагранжа-Пуассона має вид:

$$\frac{\partial F^*}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \ddot{q}_k} \right) = 0. \quad (5.8)$$

У результаті розв'язку цього диференціального рівняння одержують функції $q_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, s$), що, будучи підставлені у вираз (5.7), дають корисні витрати механічних засобів за час циклу руху.

У залежності від виду витрат механічних засобів $\dot{I}$ і $\tilde{I}$ одержують різні безрозмірні питомі дії, що оцінюють машину чи механізм із тих чи інших інженерних точок зору.

К. к. д. по визначених мірах руху чи впливу являють собою величини, зворотні безрозмірним питомим діям, і визначаються відношенням корисних і повних витрат механічних засобів. К.к.д. по Коріолісу-Понселе являє собою оптимально обчислений к.к.д. у загальноприйнятому дотепер розумінні цього терміна, уведеного Ю. Вейсбахом, тому що корисна робота являє собою мінімально можливі витрати механічної роботи для виконання заданої операції.

К.к.д. показують ступінь раціональності машини чи механізму, їхню здатність до подальшого удосконалювання й економічність. К.к.д., як і безрозмірні питомі дії, дозволяють оцінювати і зіставляти різнотипні машини і механізми з різних інженерних точок зору.

5.3. Критерії якості режимів руху піднімальних машин

З аналізу розглянутих критеріїв видно, що критерії, отримані на основі фундаментального поняття дії, є найбільш загальними динамічними критеріями удосконалювання механізмів і машин, у тому числі і піднімальних машин. Вони універсальні в тому розумінні, що містять у собі геометрію мас, кінематичні характеристики руху і конструктивні параметри системи, діючі сили і відображають її динаміку. Оскільки вони містять у собі часткові критерії, що відображають статику, кінематику і динаміку машини, то на їхній основі сформуємо критерії оцінки якості режимів руху піднімальних машин.

Режими руху піднімальних машин являють собою функціональні залежності переміщень, швидкостей, прискорень і т. д. окремих елементів (ланок) від просторового і часового аргументів протягом усього циклу руху машини (підйом – опускання посудини чи окремої частини –пуск чи зупинка), тому критерій оптимальності повинен мати вид інтегрального функціонала у формі дії. Крім того, процедура порівняння припустимих режимів руху можлива тільки в тому випадку, коли критерій має вид скалярної величини і для кожного режиму приймає конкретне число. У

процесі руху піднімальної машини залежності режимів руху в конкретні моменти часу можуть приймати як додатні, так і від'ємні значення, тому у вирази підінтегральних функцій вони повинні входити в квадратичному виді.

Усім перерахованим вимогам до критеріїв оцінки якості режимів руху піднімальних машин відповідає структура критерію у вигляді дії:

$$I_n[q_k(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F_n \left(t, q_k, \dot{q}_k, \dots, q^{(n)}, a_r, p_i \right) dt, \quad (5.8)$$

де t – час; t_0, t_1 – початковий і кінцевий моменти часу закінченого циклу руху; F_n – енергія прискорення n – 1-го порядку піднімальної машини чи її елемента; $q_k, \dot{q}_k, \dots, q^{(n)}$ – k -та ($k=1, 2, \dots, s$) узагальнена координата системи і її похідні включно до n -го порядку; s – кількість узагальнених координат основного руху; a_r – r -ий ($r=1, 2, \dots, l$) конструктивний параметр машини, що впливає на режим її руху; l – кількість конструктивних параметрів; p_i – i -та ($i=1, 2, \dots, m$) сила опору. Назву енергія прискорень узято за аналогією з записом кінетичної енергії, але вона є цілком умовною і не відповідає відомому поняттю енергії. У функції F_n за аналогією з кінетичною енергією замість швидкостей використовують прискорення різних порядків.

Якщо функція $F_n=1$, одержуємо критерій у вигляді часу руху:

$$I_o = \int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot dt = t_1 - t_0. \quad (5.9)$$

Критерій (5.9) використовується для розв'язання задач оптимального керування рухом піднімальних машин на максимальну швидкодію, що приводять до підвищення продуктивності.

При $n=1$ функція $F_n=F_1=T$ є кінетичною енергією системи і критерій (5.8) оцінює енергетичні витрати на створення руху піднімальної машини з

урахуванням часу руху. Цей критерій відповідає відомій дії по Лагранжу і має вигляд:

$$I_1 = \int_0^{t_1} F_1(t, q_k, \dot{q}_k, a_r) dt. \quad (5.10)$$

При $n=2$ функція $F_n=F_2=V$ є енергією прискорень, що ще називають функцією Гіббса. У цьому випадку критерій (5.8) виражає ефективну потужність руху піднімальної машини і відповідає дії по Аппелю:

$$I_2 = \int_{t_0}^{t_1} F_2(t, q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k, a_r) dt. \quad (5.11)$$

При $n=3$ функція $F_n=F_3=W$ являє собою енергію прискорень другого порядку системи, чи енергію ривків, і критерій (5.8) оцінює ефективне значення динамічних навантажень піднімальної машини, зважене по ривках окремих ланок:

$$I_3 = \int_{t_2}^{t_1} F_3(t, q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k, \dddot{q}_k, a_r) dt. \quad (5.12)$$

У структурних залежностях критеріїв (5.10) – (5.12) не враховуються сили опору (вага вантажів, канатів і сили тертя) руху піднімальної машини, оскільки вони є постійними величинами і на режим руху не мають впливу.

Для оцінки якості режимів руху механізмів піднімальних машин можуть бути використані критерії виду (5.8) з підінтегральними функціями у вигляді енергії прискорень вищих порядків (третього, четвертого і т. д.). Прискорення вищих порядків вивчалися у фундаментальних працях А.П. Сомова, М.Є. Жуковського та ін. Їх враховують при виборі режимів руху механізмів і машин із пружними елементами, для досягнення безперервності

швидкостей і прискорень окремих ланок з метою мінімізації коливань.

Кожний з розглянутих критеріїв оцінює окремі властивості руху піднімальної машини. Для оптимізації режимів руху по декількох критеріях одночасно пропонується комплексний критерій, що включає окремі критерії у вигляді лінійної згортки:

$$K = \sum_{i=0}^n \delta_i K_i = \sum_{i=0}^n \delta_i I_i / \tilde{I}_i, \quad (5.13)$$

де δ_i – i -й ($i=0, 1, \dots, n$) безрозмірний ваговий коефіцієнт, що враховує частку i -го критерія; K_i – i -й ($i=0, 1, 2, \dots, n$) безрозмірний критерій (дія); $\tilde{I}$ – мінімально можливе значення i -го критерію I , що визначається шляхом розв'язку варіаційної задачі для функціонала (5.8) при різних значеннях n .

Сума коефіцієнтів $\sum_{i=0}^n \delta_i = 1$, а кожний з них приймає значення в межах від нуля до одиниці, яке визначають у залежності від вимог, що пред'являються до піднімальної машини, шляхом порівняння абсолютних максимальних значень кінематичних характеристик окремих елементів (наприклад, вантажу) з їхніми припустимими значеннями чи шляхом експертних оцінок.

Якщо в оптимальному режимі руху піднімальної машини необхідно врахувати енергетичні витрати, динамічну складову потужності привода й інтенсивність зміни динамічних навантажень, то комплексний критерій буде мати вигляд

$$K = \int_{t_0}^{t_1} [\delta_1 F_1(t, q_k, \dot{q}_k, a_r) / \tilde{I}_1 + \delta_2 F_2(t, q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k, a_r) / \tilde{I}_2 + (1 - \delta_1 - \delta_2) F_3(t, q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k, \ddot{\ddot{q}}_k, a_r) / \tilde{I}_3] dt, \quad (5.14)$$

де δ_1, δ_2 – безрозмірні вагові коефіцієнти, що оцінюють частку енергетичних витрат і частку динамічної складової потужності привода; $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3$ – мінімально можливі витрати кінетичної енергії-часу, динамічної складової потужності привода й енергії ривків-часу, які необхідні для підйому вантажу піднімальною машиною.

Розглянуті критерії складають основу критеріїв для оптимізації режимів руху піднімальних машин.

5.4. Критерії якості силових перехідних процесів машин

Громіздкість математичного апарату, що описує силові перехідні процеси в головній лінії передач шахтних піднімальних машин, вимагає проводити оцінку критеріїв якості не тільки з погляду їхньої технічної значимості, але і виходячи з обсягу обчислень, необхідних для одержання їхнього чисельного значення. Проаналізуємо з цих позицій ряд критеріїв, що характеризують силові перехідні процеси.

5.4.1. " Максимальне відхилення "

Критерій максимального відхилення r -ої фазової координати характеризує максимальний момент сил пружності в головній лінії передач піднімальної машини [300]. Функціонал, що описує якість перехідного процесу за даним критерієм, записується у вигляді:

$$\varphi_1 = \max_{r=1, 2, \dots, n} \max_{t \in [0, t_1]} \delta_r [x_r(t) - \psi_r(t)], \quad (5.15)$$

де $x_r(t)$ – фазова координата системи; $\psi_r(t)$ – задана функція, що в окремому випадку характеризує стаціонарний силовий стан і може дорівнювати нулю; δ_r – вагові коефіцієнти; t – час; $[0, t_1]$ – проміжок часу, на якому розглядається перехідний процес.

Якщо порядок системи диференціальних рівнянь невеликий і лежить у межах 4-6, то у випадку, коли дисипативними силами в механічній системі можна знехтувати, розв'язок для функціонала ϕ_1 знаходиться в аналітичному виді. Наприклад, виходячи з принципу несприятливої колінеарності векторів, одержимо:

$$\phi_1 = \sum_{r=1}^{n/2} |R_r| + \sum_{r=1}^m Q_r, \quad (5.16)$$

де Q_r – r -ий частковий розв'язок диференціального рівняння, що описує перехідний процес; R_r – r -а відповідна амплітуда при гармонійній складовій загального розв'язку однорідного диференціального рівняння:

$$x_r(t) = \sum_{r=1}^{n/2} R_r \sin(\alpha_r t + \varepsilon_r) + \sum_{r=1}^m Q_r, \quad (5.17)$$

де α_r – уявні частини коренів характеристичного рівняння; ε_r – кут зсуву; m – кількість часткових розв'язків.

У випадку, якщо дисипативними силами не можна знехтувати, аналітичний розв'язок диференціального рівняння, що описує перехідний процес, представляється залежністю:

$$x_r(t) = \sum_{r=1}^n C_r e^{\lambda_r t} + x_r^m(t), \quad (5.18)$$

де λ_r – власні числа; C_r – постійні коефіцієнти, обумовлені з початкових умов; $x_r^m(t)$ – r -та компонента часткових розв'язків.

5.4.2. “ Коефіцієнт динамічності ”

Коефіцієнт динамічності силового перехідного процесу для r -го

пружного зв'язку системи визначається виразом:

$$\varphi_2 = \frac{t \in [0, t_1]^{|\dot{x}_r(t)|}}{|\dot{x}_r^{CT}|}, \quad (5.19)$$

де $\dot{x}_r^{CT}$ – стаціонарне значення фазової координати системи.

При $\dot{x}_r^{CT}=0$ розглядається максимальне відхилення моменту в пружній ланці від нуля. Маючи на увазі, що при постійних зовнішніх збурюваннях $\dot{x}_r^{CT}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{x}(t)$, і виходячи зі стійкості розглянутих механічних систем $\dot{x}_r(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, одержимо:

$$\overrightarrow{\dot{x}^{CT}} = -A^{-1} \overrightarrow{F}. \quad (5.20)$$

Для оптимізації силового перехідного процесу у всій лінії передач піднімальної машини пропонується використовувати наступний функціонал:

$$\varphi_2 = \max_{r=1,2,\dots,n} \delta_r \frac{\max_{t \in [0, t_1]} |\dot{x}_r(t)|}{\dot{x}_r^{CT}}. \quad (5.21)$$

Безпосереднє використання критерію “коефіцієнт динамічності” для оптимізації силових перехідних процесів приводить до чисельного розв’язку систем диференціальних і алгебраїчних рівнянь високого порядку, що веде до значних обчислювальних витрат при великому числі параметрів, що варіюватимуться.

5.4.3. “Час загасання”

Для оптимізації силових процесів за часом загасання одночасно у всіх ланках піднімальної машини пропонується функціонал:

$$\varphi_3 = \max_{r=1,2,\dots,n} \delta_r t_\varepsilon \left\{ t_\varepsilon : \rho(x_r, x_r^{CT}) \leq \varepsilon \text{ при } t > t_\varepsilon \right\}. \quad (5.22)$$

Малий час загасання перехідного процесу особливо важливий при ступінчастому запуску асинхронного електродвигуна, накладенні і знятті механічних гальм і т. д. Безпосереднє обчислення часу загасання вимагає чисельного інтегрування системи диференціальних рівнянь, що пов'язано з витратами машинного часу.

Розглянуті вище критерії мають ясний фізичний зміст і широко застосовуються для оцінки якості силових перехідних процесів при створенні нових і удосконалюванні існуючих машин. Однак їхнє чисельне визначення зв'язане з обчисленнями. Тому розглянемо ряд критеріїв, для обчислення яких вимагаються малі витрати машинного часу.

5.4.4. “Запас стійкості”

Дійсні частини коренів характеристичного рівняння визначають запас стійкості механічної системи. Розглянемо функціонала:

$$\varphi_4 = \max \alpha_i (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.23)$$

який є показником Ляпунова для диференціальних рівнянь, що описують силовий перехідний процес. Мінімізація функціонала (5.23) означає максимізацію модуля, найменшого по абсолютній величині α_i , і підвищення запасу стійкості механічної системи, тому що $\alpha_i < 0$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$, унаслідок стійкості розв'язку диференціальних рівнянь, що описують силовий перехідний процес. На границі при мінімізації всі α_i будуть рівні між собою:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n, \quad (5.24)$$

що є однією з умов оптимальності перехідного процесу по швидкості загасання. Обчислення функціонала (5.23) зводиться до розв'язування характеристичного рівняння, що спрощує процес оптимізації параметрів за критерієм “запас стійкості”.

5.4.5. “Швидкість загасання”

Для оцінки темпу загасання перехідного процесу в лінійних системах з одним ступенем вільності використовується логарифмічний декремент коливань:

$$\varphi_5 = 2\pi|\alpha|/|\beta|, \quad (5.25)$$

де α і β – коефіцієнти дійсної і уявної частин коренів характеристичного рівняння.

Для оцінки швидкості загасання в багатомасових механічних системах піднімальних машин пропонується узагальнений декремент коливань.

$$\varphi_5 = \max_{i=1,2,\dots,n} \alpha_i / \max_{j=1,2,\dots,n} \beta_j. \quad (5.26)$$

Функціонал (5.26) є узагальненням логарифмічного декремента коливань (5.25) для механічних систем з декількома ступенями вільності. Обчислення функціонала (5.17) зводиться до знаходження власних чисел матриці A з використанням чисельних методів.

5.4.6. “Квадратична інтегральна оцінка”

У теорії багатомірних систем автоматичного регулювання широко використовуються узагальнені інтегральні оцінки, що по своєму змісту і формі близькі до інтегральних динамічних критеріїв, описаних у розділах 5.2 і 5.3. Ці оцінки можуть бути представлені інтегральним критерієм

наступного виду:

$$\Phi_6 = \int_0^{\infty} \left[\dot{x}^2 + (T_1 \dot{x})^2 + (T_1 T_2 \ddot{x})^2 + \dots + \left(T_1 T_2 \dots T_s \frac{d^s x}{dt^s} \right)^2 \right] dt. \quad (5.27)$$

Функціонал (5.27) характеризує середню розбіжність реального перехідного процесу і деякого бажаного ідеального процесу по перерегулюванню і тривалості. При цьому ідеальні перехідні процеси можуть бути визначені шляхом мінімізації загальних інтегральних динамічних критеріїв. Вважають, що кращою однотипною багатомірною системою буде та, у якій функціонал Φ_6 найменший. Для систем, описуваних звичайними неоднорідними диференціальними рівняннями з постійними зовнішніми збурюваннями, обчислення функціонала (5.27) зводиться до розв'язування алгебраїчних рівнянь, що спрощує обчислювальні процедури.

Для оцінки силових перехідних процесів у r -ій ланці багатомасової механічної системи з пружними ланками використовуємо інтегральний критерій виду:

$$\Phi_6 = \int_0^{\infty} (a x_r + b \dot{x}_r + c \ddot{x}_r)^2 dt. \quad (5.28)$$

Приймаючи за ідеальний експоненціальний силовий перехідний процес, одержимо, що при $c=0$, $a=\alpha$ і $b=1$ функціонал (5.28) дорівнює нулю за умови:

$$x_r = x_r^0 e^{-\alpha t}, \quad (5.29)$$

де x_r^0 – початкові умови для x_r .

При $c=1$, $b=2\alpha$, $a=\alpha^2$ має місце залежність:

$$x_r = \left[x_r^0 + (\dot{x}_r^0 + \alpha x_r^0) t \right] e^{-\alpha t}, \quad (5.30)$$

де $\dot{x}_r^0$ – початкові значення $\dot{x}_r$.

Експоненціальні функції виду (5.29) і (5.30) приймемо за ідеальні для пружних моментів у лінії передач піднімальних машин. Функціонал (5.28) враховує не тільки амплітуду, але й швидкість і прискорення протікання перехідного процесу. Однак наближення силового перехідного процесу до експонент виду (5.29) і (5.30) може привести при занадто малій величині α до недостатньо інтенсивного перехідного процесу, що для механічних систем небажано. Для одержання оптимального перехідного процесу з високим ступенем крутості експоненти пропонується використовувати функціонал мети наступного виду:

$$\Phi_7 = \frac{\Phi_b}{\alpha^2}. \quad (5.31)$$

Для випадку $c=0$, $a=\alpha$ і $b=1$ функціонал (5.31) визначається залежністю:

$$\Phi_7 = \int_0^\infty \left(x_r + \dot{x}_r / \alpha^2 \right)^2 dt. \quad (5.32)$$

Для випадку $c=1$, $a=\alpha^2$ і $b=2\alpha$ функціонал (5.31) має вигляд:

$$\Phi_7 = \int_0^\infty \left(x_r + 2\dot{x}_r / \alpha + \ddot{x}_r / \alpha^2 \right)^2 dt. \quad (5.33)$$

У загальному випадку для оптимізації силового перехідного процесу у

всіх ланках механічної системи пропонується функціонал наступного виду:

$$\Phi_7 = \int_0^\infty \sum_{r=1}^n \delta_r \left(x_r + 2\dot{x}_r / \alpha_r + \ddot{x}_r / \alpha_r^2 \right)^2 dt. \quad (5.34)$$

При постійних зовнішніх збурюваннях, які розглядаються для піднімальних машин, система диференціальних рівнянь їхніх перехідних процесів приводиться до такого співвідношення

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} \quad (5.35)$$

з еквівалентними початковими умовами

$$\tilde{x}_0 = \bar{x}^0 + A^{-1}\vec{F}. \quad (5.36)$$

У цьому випадку розв'язок системи рівнянь (5.35) визначається залежностями

$$x_r(t) = \tilde{x}_r^0 e^{-\alpha_r t}, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (5.37)$$

Отримані залежності дозволяють досить просто обчислювати інтегральні квадратичні критерії якості, використовуючи методи, викладені в роботі.

5.4.7. “Втрата втомної міцності”, “зниження довговічності”

Несучу здатність шахтних і інших піднімальних машин визначають виходячи з екстремальних навантажень, що, як правило, значно перевищують динамічні навантаження при нормальних експлуатаційних режимах роботи піднімальної установки. Ці динамічні навантаження, в основному, впливають

на втомну міцність і довговічність вузлів шахтної піднімальної машини.

У ряді випадків силові перехідні процеси оцінюються за коефіцієнтом втрати втомної міцності деталей (валів, зубчастих коліс та ін.) і коефіцієнтом втрати довговічності підшипників за формулами. Ці коефіцієнти являють собою відношення довговічності (запасу міцності) деталі при стаціонарних навантаженнях до довговічності (запасу міцності) при динамічних детермінованих навантаженнях і завжди більші одиниці. Оптимальними силовими процесами можна назвати ті, у яких ці коефіцієнти близькі до одиниці.

Обчислення коефіцієнтів втрати втомної міцності і довговічності зводиться до розв'язування диференціальних рівнянь силового перехідного процесу за весь цикл роботи піднімальної машини і підсумовування втомних ушкоджень.

З точки зору мінімальної трудомісткості обчислень при оптимізації силових перехідних процесів у головній лінії передач піднімальних машин необхідно використовувати такі критерії якості, як “запас стійкості”, “швидкість загасання”, “квадратична інтегральна оцінка” та інші інтегральні динамічні критерії, що розглянуті в розділах (5.2) і (5.3).

5.5. Критерії зовнішніх збурювань

До критеріїв зовнішніх збурювань можна віднести рушійні сили привода, сили опору переміщенню піднімальної посудини й ефективну потужність привода (електродвигуна). Оскільки сили опору переміщенню піднімальної посудини в урівноважених піднімальних машинах практично не змінюються, то їх як критерій зовнішніх збурювань тут не розглядаємо.

За критерій рушійних сил привода може бути використане їхнє середньоквадратичне значення, що виражається наступною залежністю:

$$F_{cp} = \sqrt{\frac{1}{t_y} \int_0^{t_y} F_{\partial g}^2(t) dt}, \quad (5.38)$$

де t – час; $t_{\text{э}}$ – ефективний час роботи двигуна; $t_{\text{ц}}$ – час циклу; $F_{\text{дв}}(t)$ – рушійний момент електродвигуна, приведений до осі каната, що намотується на орган навивки (шків тертя, барабан).

Ефективна потужність привода піднімальної машини визначається співвідношенням:

$$P_{\text{эф}} = \frac{F_{\text{сп}} V_{\text{н}}}{\eta_{\text{п}}} = \frac{V_{\text{н}}}{\eta_{\text{п}}} \sqrt{\frac{1}{t_{\text{э}}} \int_0^{t_{\text{ц}}} F_{\text{дв}}(t) dt}, \quad (5.39)$$

де $V_{\text{н}}$ – номінальна швидкість руху піднімальної посудини; $\eta_{\text{п}}$ – коефіцієнт корисної дії від електродвигуна до органа навивки каната [15].

РОЗДІЛ 6

ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМІВ РУХУ МАШИН

Як було відзначено раніше, оптимальний режим руху піднімальної машини може бути представлений діаграмою швидкості підйому вантажу. Звичайно характер зміни цієї діаграми відомий. Тому виникає задача визначення оптимальних параметрів, що визначають режим руху. Так, наприклад, для триперіодної трапецеїдальної діаграми швидкості з ділянками рівноприскореного пуску, усталеного руху із середньою швидкістю і рівноуповільненої зупинки, параметрами, що визначають режим руху, є прискорення пуску a_1 , уповільнення a_3 і швидкість усталеного руху v_m . Для інших типів діаграм швидкості використовуються інші параметри, що можуть доповнювати параметри трапецеїдальної діаграми швидкості.

Вибір тих, чи інших параметрів режиму руху піднімальної машини впливає на її продуктивність, енергетичні витрати, економічність підйому і т.п. Визначимо оптимальні значення параметрів режиму руху, що приводять до мінімізації тих чи інших критеріїв якості піднімальних машин.

6.1. Постановка задачі

Раніше було показано, що за рахунок застосування динамічних гасителів коливаль з оптимальними параметрами коефіцієнт динамічності у валопроводі і канатопроводі піднімальної машини можна знизити практично до одиниці при небажаному типі зовнішніх сил – ступінчастих зовнішніх збурюваннях. У цьому випадку динамічна модель головної лінії передач піднімальної машини може бути з достатнім ступенем точності представлена механічною системою з одним ступенем вільності. Як зовнішні збурювання використовуються кусково задані функції, що змінюються ступінчастому закону, і відповідають вимозі максимальної швидкодії механічної системи. Це дозволяє інтенсифікувати роботу піднімальної машини з урахуванням обмежень на режимні параметри. При цьому вважається, що в піднімальних

установках відомий орган навивки, канати, скіпи і висота підйому. Електропривод і редуктор вибираються як функції вантажних і режимних параметрів.

Як зовнішні збурювання на піднімальну машину діють наступні кусково задані функції, що змінюються по ступінчастому закону.

1. Зовнішня сила, прикладена з боку електродвигуна

$$F_{\partial\partial}(t) = \begin{cases} 0 & , \text{якщо } 0 < t; \\ a_1 m + k Q_{zp} & , \text{якщо } 0 < t \leq t_1; \\ k Q_{zp} & , \text{якщо } t_1 < t < t_2; \\ a_3 m + k Q_{zp} & , \text{якщо } t_2 \leq t \leq t_3; \\ 0 & , \text{якщо } t > t_3, \end{cases} \quad (6.1)$$

де $F_{\partial\partial}(t)$ – рушійний момент двигуна, приведений до осі каната, що навивається на орган навивки; m – приведена до осі каната маса піднімальної установки; t_i ($i=1, 2, 3 \dots$) – періоди руху піднімальної установки.

2. Зовнішня сила, прикладена з боку піднімальних посудин

$$F_{zp}(t) = \begin{cases} 0 & , \text{якщо } t < 0; \\ k Q_{zp} & , \text{якщо } t \geq 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

де $F_{zp}(t)$ – сила технологічного опору, прикладена до осі каната, що навивається на орган навивки.

3. Зовнішня сила, прикладена з боку механічних гальм

$$F_{\text{тор}}(t) = \begin{cases} 0 & , \text{якщо } t < 0; \\ k Q_{zp} & , \text{якщо } t \geq 0; \\ 0 & , \text{якщо } t > 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

де $F_{\text{тор}}(t)$ – сила механічних гальм, приведена до осі каната, що навивається на орган навивки.

Вираз (6.1) описує закономірність зміни зовнішньої сили електродвигуна у випадку триперіодної трапецеїдальної діаграми швидкості. Зовнішня сила $F_{\text{ов}}(t)$ в загальному випадку може бути розглянута як функція режимних параметрів a_1, a_3 і часу t – $F_{\text{ов}} = f(a_1, a_3, t)$. У випадку, якщо розглядається піднімальна установка з заданою висотою підйому, зовнішня сила може бути представлена як функція трьох параметрів $F_{\text{ов}} = f(a_1, a_2, v_n)$. Якщо задана висота і продуктивність піднімальної установки, то сила двигуна може бути представлена як функція двох перемінних $F_{\text{ов}} = f(a_1, a_2)$.

Задача оптимізації зовнішніх збурювань, що діють на головну лінію передач піднімальної установки, розглядається як оптимізація збурювань з боку електродвигуна і формулюється в такий спосіб: необхідно знайти оптимальний закон зміни $\text{opt } F_{\text{ов}} = f(a_1, a_2, v_n)$, який відповідає оптимальним режимним параметрам $\text{opt } a_1, \text{opt } a_3, \text{opt } v_n$, що задовольняють мінімуму деякого функціонала мети при обмеженнях типу нерівностей.

Визначимо по ряду критеріїв (функціоналів мети) ці оптимальні режимні параметри.

6.2. Оптимізація за критерієм “питомі приведені витрати”

Питомі приведені витрати (5.3), що відповідають заданій піднімальній установці, розглядаємо як функцію трьох параметрів v_n, a_1, a_3

$$Z_{\text{пр}} = f(v_n, a_1, a_3). \quad (6.4)$$

В обчисленні приведених витрат враховується вартість армування стовбура, копра, будинку машини, підземного бункера, електромеханічного устаткування піднімальної установки, електроенергії, заробітна плата, витрати на поточний і середній ремонт і ін.

При виборі параметрів піднімальної установки за критерієм (6.4) розглядається задача оптимізації режимних параметрів v_n , a_1 , і a_3 при обмеженнях типу нерівностей. Ця задача формулюється в такий спосіб: для заданої піднімальної установки знайти такі режимні параметри номінальної швидкості v_n , прискорення a_1 і уповільнення a_3 , яким відповідає мінімум функціонала мети “питомі приведені витрати” при обмеженнях на параметри системи типу нерівностей.

Для постановки цієї задачі уведемо вектор $\vec{\omega}_p \in \bar{w}_p$, де $\bar{w}_p$ – замкнута обмежена множина, що визначає область припустимих значень режимних параметрів, $\vec{\omega}_p = (v_n, a_1, a_3)$ – вектор режимних параметрів. Кожному чисельному значенню критерію (6.4) відповідає деяка функція $F_i = f(t)$ – зовнішнє збурювання, прикладене до піднімальної установки.

Уведемо функціонал мети “питомі приведені витрати” $\varphi_p = \varphi_p(\vec{\omega}_p)$, визначений на класі функцій $F(t)$. Тоді задача оптимізації режимних параметрів формулюється так: знайти точку $\vec{\omega}_p^* \in \bar{w}_p$ таку, що

$$\varphi_p(\vec{\omega}_p^*) = \min_{\vec{\omega}_p \in \bar{w}_p} \varphi_p(\vec{\omega}_p) \quad (6.5)$$

при виконанні системи нерівностей:

$$\vec{g}_p(\vec{\omega}_p) \geq 0; \quad \vec{\omega}_p \geq 0, \quad (6.6)$$

де $\vec{g}_p(\vec{\omega}_p)$ – вектор функції обмежень режимних параметрів.

Розглянемо окремий випадок функціонала мети “питомі приведені витрати”, представивши його залежним від одного параметра v_n . Тоді приведені витрати можуть бути виражені у виді полінома другого степеня

$$c + E_n k = b_0 + b_1 v_n + b_2 v_n^2.$$

Складова b_0 містить у собі вартість механічного устаткування піднімальної установки (піднімальної машини, канатів, скіпів), будинку піднімальної машини, копра, канатного армування стовбура і заробітну плату обслуговуючого персоналу. Складова $b_1 v_n$ формується з вартості електроенергії, електроустаткування, підземного бункера. Складова $b_2 v_n^2$ визначається вартістю твердого армування стовбура.

Продуктивність піднімальної установки виражається залежністю

$$\Pi = \frac{3,6 Q_{ep} T_{cym} \cdot n_{pab}}{t_u \bar{\kappa}} = \frac{\bar{d}}{t_u}, \quad (6.7)$$

де $\bar{d} = 3,6 Q_{ep} T_{cym} \cdot n_{pab} / \bar{\kappa}$.

У свою чергу, час циклу t_u піднімальної установки, що працює по триперіодній діаграмі швидкості, може бути приведений до виду

$$t_u = \frac{H_n}{v_n} + \frac{a v_n}{2} + \theta = \frac{2H_n + 2\theta v_n + a v_n^2}{2v_n}, \quad (6.8)$$

де $a = 1/a_1 + 1/a_3 = (a_1 + a_3)/(a_1 a_3)$;

θ – час паузи. У розглянутому випадку вважається, що прискорення a_1 і уповільнення a_3 є заданими величинами.

Тоді остаточний час циклу визначається виразом

$$t_u = (d_0 + d_1 v_n + d_2 v_n^2) / v_n, \quad (6.9)$$

де $d_0 = H_n$; $d_1 = a$; $d_2 = a/2$.

Використовуючи вирази (6.7) і (6.9), визначимо продуктивність піднімальної установки у функції параметра оптимізації

$$\Pi = \frac{\bar{d}v_n}{(d_0 + d_1v_n + d_2v_n^2)}. \quad (6.10)$$

Питомі приведені витрати з урахуванням виразів (6.7) і (6.10) для твердого армування стовбура шахти в загальному виді виражаються залежністю

$$Z_{np} = \frac{c + E_n \kappa}{\Pi} = \frac{\bar{d}_0 + \bar{d}_1v_n + \bar{d}_2v_n^2 + \bar{d}_3v_n^3 + \bar{d}_4v_n^4}{\bar{d}v_n}. \quad (6.11)$$

Для канатного армування стовбура Z_{np} визначається залежністю

$$Z_{np} = \frac{\tilde{d}_0 + \tilde{d}_1v_n + \tilde{d}_2v_n^2 + \tilde{d}_3v_n^3}{\bar{d}v_n}. \quad (6.12)$$

Досліджуючи залежності (6.11) і (6.12) на екстремум, дійдемо висновку, що питомі приведені витрати мають мінімум, якому відповідає оптимальне значення номінальної швидкості підйому $\text{opt } v_n$, визначене як корінь наступних рівнянь:

1) для твердого армування стовбура

$$3\bar{d}_4v_n^4 + 2\bar{d}_3v_n^3 + \bar{d}_2v_n^2 - \bar{d}_0 = 0;$$

2) для канатного армування стовбура

$$2\tilde{d}_3v_n^3 + \tilde{d}_2v_n^2 - \tilde{d}_0 = 0.$$

Проведені дослідження показують, що поверхня відгуку функціонала мети має пологий яружний характер із глобальним мінімумом. Звідси

впливає, що інтенсифікація роботи піднімальної установки раціональна, тому що незначне збільшення питомих приведених витрат приводить до значного збільшення продуктивності.

6.3. Оптимізація за критерієм “час циклу”

Розглянемо задачу оптимізації режимних параметрів v_n , a_1 і a_3 заданої піднімальної установки за критерієм “мінімум часу циклу” при економічних обмеженнях типу нерівностей.

У загальному випадку час циклу роботи піднімальної установки t_u є функцією режимних параметрів v_n , a_1 і a_3 при заданій висоті підйому H_n

$$t_u = f(v_n, a_1, a_3). \quad (6.13)$$

Час циклу складається з наступних складових (рис. 6.1)

$$t_u = t_{p1} + t_1 + t_2 + t_3 + t_{p2} + t_n, \quad (6.14)$$

де t_{p1} , t_{p2} – час руху скіпів у розвантажувальних кривих; t_1 , t_2 , t_3 , – відповідно час рівноприскореного, рівномірного і рівноуповільненого руху піднімальної установки; t_n – час паузи.

Кожному значенню виразу (6.13) відповідає деяка функція $F_i = f(t)$ – зовнішнє збурювання, що прикладається до піднімальної машини.

Формалізуємо поставлену задачу. Уведемо функціонал мети “час циклу” $\varphi_s = f(\vec{\omega}_p)$, визначений на класі функцій $F(t)$. Задача оптимізації режимних параметрів формулюється в такий спосіб: знайти таку точку $\vec{\omega}_p^{**} \in \bar{W}$, що

$$\varphi_s(\vec{\omega}_p^{**}) = \min_{\vec{\omega}_p \in \bar{W}_p} \varphi_s(\vec{\omega}_p) \quad (6.15)$$

при виконанні системи нерівностей

$$\bar{g}(\bar{\omega}_p) \geq 0; \quad \bar{\omega}_p \geq 0. \quad (6.16)$$

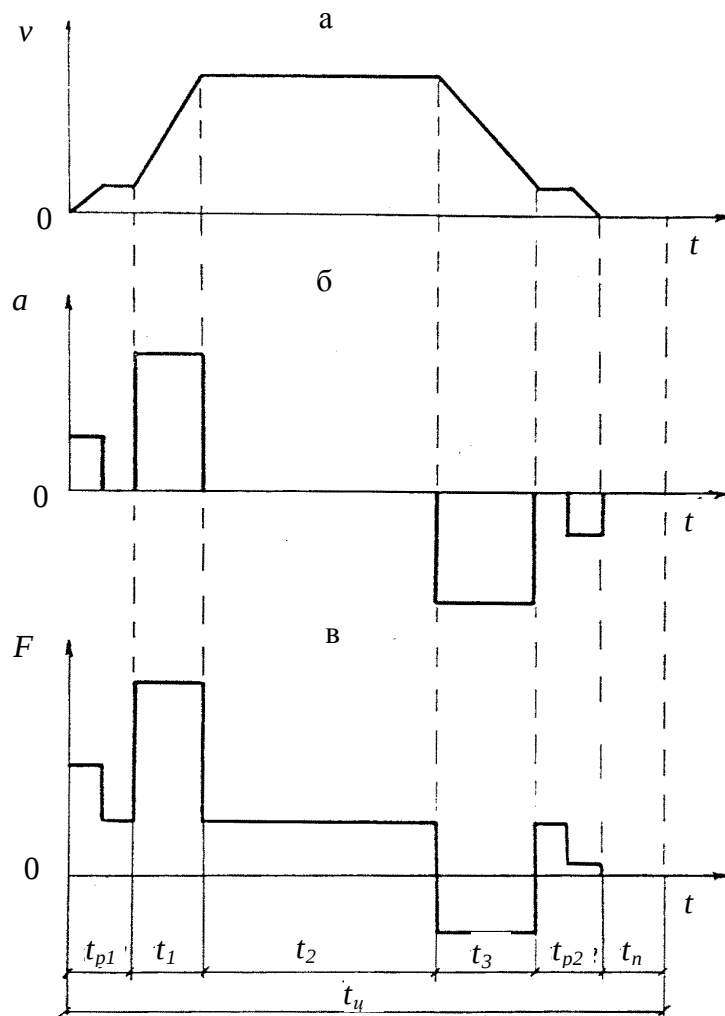


Рис. 6.1 – Типові діаграми роботи шахтної піднімальної машини: а – швидкість; б – прискорення; в – зусилля на ободу органа навивки

Зазначена задача розв'язується уніфікованим яружним методом пошуку глобального екстремуму функціонала. На рис. 6.2 показана поверхня відгуку функціонала мети $\varphi_e = f(\bar{\omega}_p)$ при $a_3 = [a_3] = 0,85 \text{ м/с}^2$ і $H_n = 1038 \text{ м}$.

Оптимальні режимні параметри для розглянутого вище прикладу з твердим армуванням при $H_n = 1300 \text{ м}$ і $Q_{ep} = 18 \text{ т}$ будуть наступними за критерієм “мінімум часу циклу”: $\text{opt } v_n = 15,83 \text{ м/с}$, $\text{opt } a_1^* = 1,46 \text{ м/с}^2$; $\text{opt } a_3^* = 0,896 \text{ м/с}^2$.

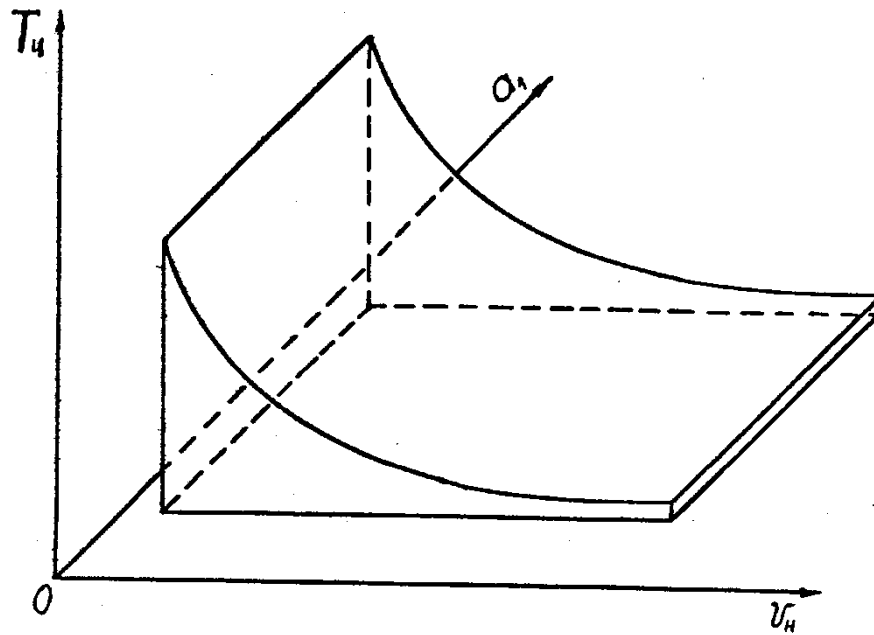


Рис. 6.2. Поверхня відгуку функціонала мети “час циклу” у просторі режимних параметрів швидкості і прискорення

6.4. Оптимізація за критерієм “ефективна потужність”

У практиці проектування часто виникає задача оптимізації режимних параметрів заданої піднімальної установки з заданою річною продуктивністю підйому Π . Цьому випадку відповідає задача оптимізації режимних параметрів за критерієм “мінімум ефективної потужності” з урахуванням обмежень на параметри типу нерівностей.

Для двоскіпової багатоканатної піднімальної установки з рівноважними хвостовими канатами, що працює по семиперіодній трапецеїдальній діаграмі швидкості, з урахуванням формули (6.39) отримано наступний вираз для ефективної потужності двигуна

$$P_{\text{эф}} = \frac{v_y + v_p}{\eta} \sqrt{\frac{F_{p1}^2 t_{p1} + F_{p2}^2 t_{p2} + F_1^2 \frac{v_y}{a_1} + F_2^2 (t_y - v_y \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3}) + F_3^2 \frac{v_y}{a_3} + F_{p3}^2 t_{p3} + F_{p4}^2 t_{p4}}{\alpha (\frac{v_y}{a_1} + \frac{v_y}{a_3} + t_{p1} + t_{p2} + t_{p3} + t_{p4}) + t_y - v_y \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3} + \beta t_n}}, \quad (6.16)$$

де $v_y = v_n - v_p$ – умовна швидкість підйому; v_p – швидкість руху скіпів у завантажувальних кривих; F_{ij} – рушійний момент двигуна, приведений до осі каната у відповідні періоди часу; t_{ij} – періоди руху піднімальної машини; α , σ – коефіцієнти, що враховують погіршення охолодження двигуна в періоди несталої руху і під час паузи:

$$v_y = \frac{2t_y - \sqrt{4t_y^2 - 8H \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3}}}{2 \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3}}. \quad (6.17)$$

З виразів (6.16) і (6.17) видно, що ефективна потужність електродвигуна є функцією двох змінних a_1 і a_3

$$P_{\text{эф}} = f(a_1, a_3). \quad (6.18)$$

Кожному значенню виразу (6.18) відповідає деяка функція $F_i = f(t)$ – рушійне зусилля привода, приведене до органа навивки піднімальної машини.

Розглянемо задачу оптимізації режимних параметрів за критерієм “ефективна потужність” з урахуванням обмежень.

Уведемо функціонал мети “ефективна потужність” $\varphi_{\text{э}} = f(\vec{\omega}_{\text{э}})$, визначений на класі функцій $F(t)$. Тут $\vec{\omega}_{\text{э}} = (a_1, a_3)$ – вектор режимних параметрів ($\vec{\omega}_{\text{э}} \in \vec{\omega}_{\text{э}}$); $\vec{\omega}_{\text{э}}$ – замкнута обмежена множина, що визначає область припустимих значень режимних параметрів.

У розглянутому випадку задача оптимізації режимних параметрів формулюється так : знайти таку точку $\vec{\omega}_{\text{э}}^* \in \vec{\omega}_{\text{э}}$, що

$$\varphi_{\text{э}}(\vec{\omega}_{\text{э}}^*) = \min_{\vec{\omega}_{\text{э}} \in \vec{\omega}_{\text{э}}} \varphi_{\text{э}}(\vec{\omega}_{\text{э}}) \quad (6.19)$$

при виконанні системи нерівностей

$$\bar{g}_s(\vec{\omega}_s) \geq 0; \quad \vec{\omega}_s \geq 0, \quad (6.20)$$

де $\bar{g}_s(\vec{\omega}_s)$ – вектор функції обмежень режимних параметрів.

На рис. 6.3 показана поверхня відгуку функціонала мети $\phi_s = f(\vec{\omega}_s)$ для заданої піднімальної установки при обмеженнях на параметри. З цього рисунка видно, що поверхня відгуку має вид чаші з глобальним мінімумом, а на границі області припустимих параметрів маютьс я і локальні екстремуми.

Для багатоканатної піднімальної установки зі скіпами корисною вантажопідйомністю 25 т, висотою підйому 895 м і добовою продуктивністю 11000 т/добу чисельними методами математичного програмування знайдені наступні оптимальні параметри:

1) з урахуванням обмежень –

$$\min P_{\text{эф}} = 3750 \text{ кВт}, \quad \text{opt } a_1 = 1,2 \text{ м/с}^2, \quad \text{opt } a_3 = 1,2 \text{ м/с}^2$$

2) без урахування обмежень –

$$\min P_{\text{эф}} = 3643 \text{ кВт}, \quad \text{opt } a_1 = 2,06 \text{ м/с}^2, \quad \text{opt } a_3 = 2,06 \text{ м/с}^2$$

У практиці проектування можливі випадки, коли значення мінімуму $P_{\text{эф}} = f(a_1, a_3)$ лежать усередині області обмежень параметрів a_1, a_3 . Для цих випадків можна знайти аналітичний вираз ефективної потужності як функції однієї змінної – номінальної швидкості підйому v_n .

Розглянемо задачу оптимізації режимних параметрів багатоканатних піднімальних установок без обмежень на параметри. Виберемо семиперіодну діаграму швидкості (рис. 6.1). Хвостові канати приймаємо рівноважними головним. Для розв'язування задачі скористаємося загальною методикою академіка М.М. Федорова. Перетворивши чисельник підкореневого виразу (7.16), одержимо:

$$Y = 2Q_{\text{сп}}^2(k^2t + \mu_{\partial} a v_p) + k^2 Q_{\text{сп}}^2 t_y m^2 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{c_1 - t_1} \right), \quad (6.21)$$

де μ_∂ – ступінь масивності піднімальної установки; m – приведена до органа навівки маса піднімальної установки; a – прискорення скіпів при русі в розвантажувальних кривих

$$\mu_\partial = m/Q_{zp}; \quad c_1 = 2(t_y - H_y/v_y),$$

де H_y – умовна висота підйому, що відповідає верхній умовній трапецеїдальній тахограмі.

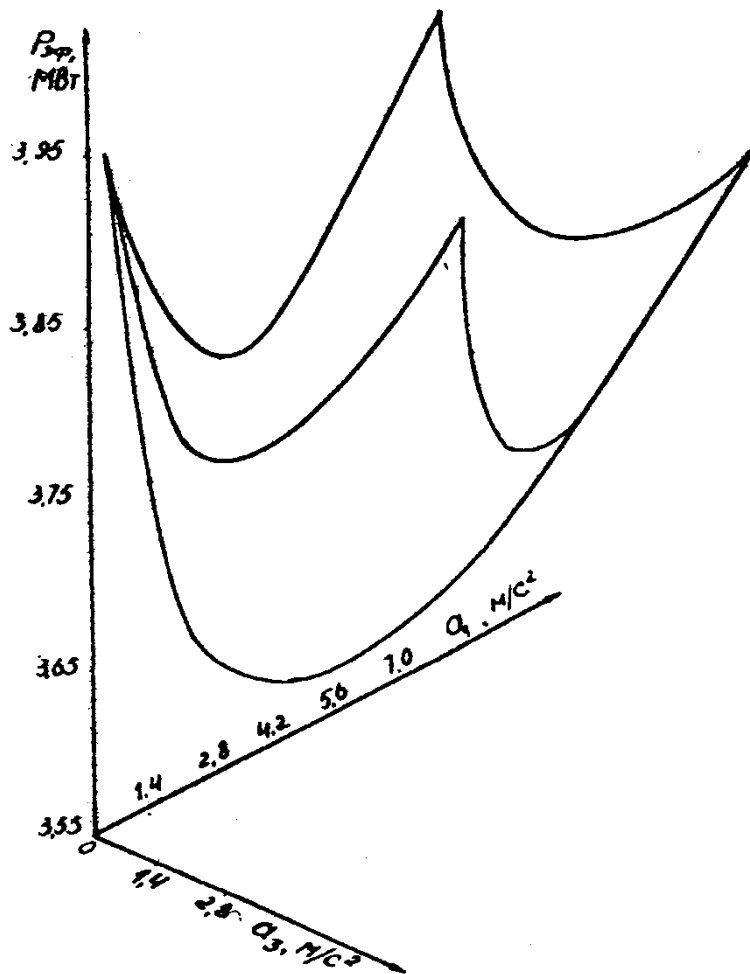


Рис. 6.3. Поверхня відгуку функціонала мети “ефективна потужність” у просторі режимних параметрів прискорення й уповільнення

Розглянемо $Y(t)$ як функцію параметра t_1 . Для вирішення питання про те, при якому співвідношенні тривалостей часу t_1 і t_3 ефективна потужність

двигуна буде мінімальною. Досліджуючи $Y(t_1)$ на екстремум, знайдемо, що $Y(t_1)$ прийматиме мінімальне значення при $t_1 = t_3$.

При виконанні умови $t_1 = t_3$, одержимо

$$\min Y = Q_{cp}^2 k^2 \left[2t + \frac{2\mu_{\delta}^2 a v_p}{k^2} + t_y + \frac{2\mu_{\delta}^2 v_y^3}{k^2(t_y v_y - H_y)} \right]. \quad (6.22)$$

Підставивши вираз (6.22) у вихідне рівняння (6.16) для ефективної потужності, знайдемо

$$P_{\varepsilon\phi} = \frac{H_y Q_{cp}}{t_y} \cdot \frac{k \left(1 + \frac{v_p}{\lambda v_{cp}} \right) \sqrt{c_p \lambda^2 + 0,5 c^2 \frac{\lambda^s}{\lambda - 1}}}{\eta_p \sqrt{c_{\varepsilon} + 1/\lambda}}, \quad (6.23)$$

де $\lambda = v_y t_y / H_y$ – ступінь неповноти верхньої умовної тахограми; c_p – розвантажувальна постійна; c_{ε} – характеристика охолодження двигуна; c – константа динамічного режиму верхньої умовний тахограми;

$v_{cp} = H_y / t_y$ – середня швидкість підйому, віднесена до верхньої умовної тахограми:

$$c_p = \frac{2t}{t_y} + \frac{2\mu_{\delta}^2 a v_p}{k^2 t_y} - 1; \quad (6.24)$$

$$c_{\varepsilon} = \frac{t + t_n/4}{t_y}; \quad c = \frac{2\mu_{\delta} H_y}{k t_y}.$$

Позначивши

$$P = Q_{cp} H_y / t_y, \quad (6.25)$$

де P – ідеальна потужність піднімальної установки, віднесена до верхньої умовної тахограми:

$$\rho = \frac{k \left(1 + \frac{v_p}{\lambda v_{cp}} \right) \sqrt{c_p \lambda^2 + 0,5 c^2 \frac{\lambda^s}{\lambda - 1}}}{\eta \sqrt{c_s + 1/\lambda}}, \quad (6.26)$$

де η – характеристика динамічного режиму, одержимо

$$P_{\phi} = \rho P. \quad (6.27)$$

З виразів (6.25) і (6.26) видно, що для заданої піднімальної установки з заданою висотою і продуктивністю підйому ефективна потужність електродвигуна є функцією швидкості підйому v_y чи λ . Тому розв’язок задачі, пов’язаний з визначення $\min P_{\phi}(v_y)$ зводиться до знаходження $\min \rho(\lambda)$.

Кожному значенню $\rho = f(\lambda)$ відповідає деяка функція $F_i = f(t)$ – зовнішнє збурювання, прикладене до піднімальної машини за умови $t_1 = t_3$.

Формалізуємо постановку цієї задачі оптимізації. Уведемо параметр $\omega_c \in \bar{w}_c$, де $\omega_c = \lambda$ – параметр швидкості підйому, $\bar{w}_c$ – замкнута обмежена множина, що визначає область припустимих значень параметра швидкості підйому. Уведемо функціонал мети $\varphi_c = \varphi_c(\omega_c)$ – “характеристика динамічного режиму”, визначений на класі функцій $F(t)$.

Задачу оптимізації параметра швидкості по мінімуму ефективної потужності електродвигуна сформулюємо так: знайти таку точку $\omega_c^* \in \bar{w}_c$, що

$$\varphi_c(\omega_c^*) = \min_{\omega_c \in \bar{w}_c} \varphi_c(\omega_c) \quad (6.28)$$

при виконанні умови $1 < \omega_c \leq 2$.

Розглянутий метод оптимізації режимних параметрів можна користатися тільки в тому випадку, коли буде виконана умова нековзання канатів у періоди рівноприскореного і рівноуповільненого руху й умова неперевантаження припустимого перевантаження електродвигуна.

Знайдемо припустиме значення λ_c з умови нековзання канатів

$$\frac{H_y}{t_y^2} \lambda_c^2 - a_{1(3)}^{\partial} \lambda_c + a_{1(3)}^{\partial} = 0, \quad (6.29)$$

де $a_{1(3)}^{\partial}$ – припустиме прискорення (уповільнення) з умови нековзання канатів по шківу.

Припустиме значення λ_n з умови перевантаження електродвигуна визначається рівнянням

$$0,5c \lambda_n^3 + \lambda_n^2 - \left(1 + \frac{v_y \eta_p \rho \gamma_{\partial B}}{v_n k} \right) \lambda_n + \frac{v_y \eta_p \rho \gamma_{\partial B}}{v_n k} = 0, \quad (6.30)$$

де $\gamma_{\partial B}$ – перевантажувальна здатність електродвигуна.

Отже, повинна виконуватися умова

$$\lambda_c \leq \text{opt } \lambda \leq \lambda_n. \quad (6.31)$$

Розглянемо приклад. Для заданої піднімальної установки: $\Pi_{\text{сут}} = 3000$ т/добу, $H_n = 853$ м, $Q_{\text{зр}} = 12$ т, $Q_m = 12$ т, машина ЦШ2,25*4, $\bar{k} = 1,5$, $t_{\text{сут}} = 12$ годин, $\gamma_{\partial B} = 2,0$, $\mu_{\partial B} = 0,73$, $t_n = 16$ с, $v_p = 0,5$ м/с, $a = 1,0$ м/с², $f = 0,3$, $\alpha = 180^\circ$, оптимальний параметр $\text{opt } \lambda = 1,056$, у той час як припустимі значення λ наступні: $\lambda_c = 1,085$, $\lambda_n = 1,06$. Оскільки умова (6.31) не виконується, то для зазначеної піднімальної установки не можуть бути реалізовані оптимальні режимні параметри за критерієм “характеристика динамічного режиму”. Для задоволення умови (6.31) необхідно збільшити

коефіцієнт тертя f канатів об шків чи збільшити кут обхвату α і вибрати електродвигун з більшою перевантажувальною здатністю $\gamma_{\text{дв}}$.

6.5. Оптимізація по інтегральних динамічних критеріях

Для оптимальних режимних параметрів піднімальної машини за цими критеріями розглянемо триперіодну трапецеїдальну діаграму. Ця діаграма характеризується трьома режимними параметрами a_1 , a_3 – прискоренням і уповільненням відповідно на ділянках пуску і зупинки; v_n – номінальною швидкістю на ділянці усталеного руху.

Співвідношення між висотою підйому H , часом циклу руху t_u без врахування часу розвантаження і паузи і режимними параметрами трапецеїдальної діаграми визначається з залежності

$$H = \int_0^{t_1} a_1 t dt + \int_{t_1}^{t_u - t_3} v_n dt + \int_{t_u - t_3}^{t_u} [v_n - a_3(t + t_3 + t_u)] dt, \quad (6.32)$$

де t – час; $t_1 = v_n/a_1$ – час пуску; $t_3 = v_n/a_3$ – час зупинки.

Проінтегрувавши вираз (7.32), одержимо

$$H = v_n t_u - v_n^2 \frac{a_1 + a_3}{2a_1 a_3}. \quad (7.33)$$

Розглянемо задачу, у якій задана висота підйому H і час циклу t_u . Необхідно визначити режимні параметри a_1 , a_3 і v_n .

Спочатку використовуємо інтегральний критерій (5.10), який для піднімальної машини з одним ступенем вільності, представлено приведеною до органа навивки масою m , визначається залежністю

$$\dot{I}_1 = \int_0^{t_u} T dt = \int_0^{t_u} \frac{1}{2} m v^2 dt = \frac{1}{2} m \left[\int_0^{t_1} a_1^2 t^2 dt + \int_{t_1}^{t_u - t_3} v_n^2 dt + \int_{t_u - t_3}^{t_u} [v_n - a_3(t + t_3 + t_u)]^2 dt \right], \quad (6.34)$$

де T – кінетична енергія піднімальної машини; v – функція швидкості піднімальної машини протягом усього циклу руху.

Проінтегрувавши залежність (6.34), одержимо

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{2} m v_n^2 \left(\frac{H}{v_n} + \frac{v_n}{3} \cdot \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3} \right). \quad (6.35)$$

Параметр v_n визначається з виразу (6.33), як розв'язок квадратного рівняння. У результаті цього розв'язку маємо

$$v_{n1,2} = \frac{a_1 a_3}{a_1 + a_3} t_y \left[1 - \sqrt{1 - 2 \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3} \cdot \frac{H}{t_y^2}} \right]. \quad (6.36)$$

Кожному значенню (6.35) з урахуванням виразу (6.36) відповідає функція $F_i = f(t)$ – зовнішнє збурювання, приведене до маси m .

Формалізуємо поставлену задачу. Уведемо функціонал мети $\varphi_T = f(\vec{\omega}_T)$, визначений на класі функцій $F_i(t)$. Тоді задача оптимізації режимних параметрів формулюється в такий спосіб: знайти таку точку $\vec{\omega}_T^* \in \overline{w}_T$, що

$$\varphi_T(\vec{\omega}_T^*) = \min_{\vec{\omega}_T^* \in \overline{w}_T} \varphi_T(\vec{\omega}_T) \quad (6.37)$$

при виконанні системи нерівностей

$$\vec{g}(\vec{\omega}_T) \geq 0; \quad \vec{\omega}_T \geq 0,$$

де $\vec{g}(\vec{\omega}_T)$ – вектор функції обмежень режимних параметрів.

Поставлена задача має аналітичний розв'язок. Досліджуємо на екстремум критерій (6.35) з урахуванням виразу (6.36) і обмежень на максимальні значення прискорення $0 < a_1 \leq [a_1]$ й уповільнення $0 < a_3 \leq [a_3]$.

Тут $[a_1]$ і $[a_3]$ – припустимі значення прискорення a_1 і уповільнення a_3 .

Для визначення оптимального значення прискорення орт a_1 візьмемо частинну похідну від критерію (6.35) по параметру a_1 і прирівняємо її до нуля, у результаті чого, одержимо

$$\frac{\partial \dot{I}_1}{\partial a_1} = \frac{1}{2} m \left[\left(H + v_n^2 \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3} \right) \frac{\partial v_n}{\partial a_1} - \frac{v_n^3}{3 a_1^2} \right] = 0 .$$

Отримане рівняння справедливе, коли вираз в квадратних дужках дорівнює нулю, тобто

$$\left(H + v_n^2 \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3} \right) \frac{\partial v_n}{\partial a_1} - \frac{v_n^3}{3 a_1^2} = 0 . \quad (6.39)$$

Для розв'язку рівняння (6.39) знайдемо частинну похідну $\partial v_n / \partial a_1$ від виразу (6.36)

$$\frac{\partial v_{n1,2}}{\partial a_1} = \frac{a_3}{a_1 + a_3} \left[\frac{a_3 t_y}{a_1 + a_3} \left(1 - \sqrt{1 - 2 \frac{H}{t_y^2} \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3}} \right) \pm \frac{H}{a_1 t_y \sqrt{1 - 2 \frac{H}{t_y^2} \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3}}} \right] . \quad (6.40)$$

Після підстановки залежностей (6.36) і (6.40) у рівняння (6.39) одержимо

$$\begin{aligned} & \frac{a_3}{a_1 + a_3} \left\{ \left[H + \frac{a_3 t_y}{a_1 + a_3} \left(1 - \sqrt{1 - 2 \frac{H}{t_y^2} \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3}} \right) \right]^2 \times \right. \\ & \quad \times \left[\frac{a_3 t_y}{a_1 + a_3} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2 \frac{H}{t_y^2} \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3}} \right) \pm \frac{H}{a_1 t_y} \left(1 - 2 \frac{H}{t_y^2} \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3} \right)^{-1/2} \right] - \end{aligned}$$

$$-\frac{a_1^3 a_3^2}{(a_1 + a_3)} t_y^2 \left[1 - \sqrt{1 - 2 \frac{H}{t_y^2} \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3}} \right]^3 = 0. \quad (6.41)$$

Рівняння (6.41) справедливе, коли один із співмножників дорівнює нулю.

Розглянемо випадок, коли

$$\frac{a_3}{a_1 + a_3} = 0. \quad (6.42)$$

Рівняння (6.41) має рішення, коли $a_1 \rightarrow \infty$. Однак на параметр a_1 накладається обмеження $a_1 \leq [a_1]$. Тому $\text{opt } a_1 = [a_1]$.

Аналогічним чином розв'язана задача по визначенню оптимального значення уповільнення a_3 .

$$\frac{\partial \dot{I}_1}{\partial a_3} = \frac{1}{2} m \left[\left(H + v_n^2 \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3} \right) \frac{\partial v_n}{\partial a_3} - \frac{v_n^3}{3 a_1^2} \right] = 0. \quad (6.43)$$

Для розв'язку цього рівняння знайдемо частинну похідну $\frac{\partial v_n}{\partial a_3}$ від функції

(6.36)

$$\frac{\partial v_{n1.2}}{\partial a_3} = \frac{a_1}{a_1 + a_3} \left[\frac{a_1 t_y}{a_1 + a_3} \left(1 - \sqrt{1 - 2 \frac{H}{t_y^2} \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3}} \right) \pm \frac{H}{a_3 t_y} \left(1 - 2 \frac{H}{t_y^2} \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (6.44)$$

Підставивши залежності (6.36) і (6.44) у рівняння (6.36), будемо мати

$$\begin{aligned}
& \frac{a_1}{a_1 + a_3} \left\{ \left[H + \frac{a_1 a_3}{a_1 + a_3} t_y^2 \left(1 - \sqrt{1 - 2 \frac{H}{t_y^2} \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3}} \right)^2 \right] \times \right. \\
& \quad \times \left[\frac{a_1}{a_1 + a_3} t_y \left(1 \pm \sqrt{1 - 2 \frac{H}{t_y^2} \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3}} \right) - \frac{H}{a_3 t_y} \left(1 - 2 \frac{H}{t_y^2} \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] - \\
& \quad \left. - \frac{a_1^2 a_3^3}{(a_1 + a_3)^2} t_y^3 \left[1 - \sqrt{1 - 2 \frac{H}{t_y^2} \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3}} \right]^3 \right\} = 0. \tag{6.45}
\end{aligned}$$

Як і раніше розглянемо випадок, коли перший співмножник дорівнює нулю

$$\frac{a_1 a_3}{a_1 + a_3} = 0.$$

Розв'язком цього рівняння буде $a_3 \rightarrow \infty$.

На параметр a_3 накладається обмеження $a_3 \leq [a_3]$. Тому оптимальне значення уповільнення за розглянутим критерієм буде дорівнювати припустимому значенню, тобто $\text{opt } a_3 = [a_3]$.

Тепер визначимо оптимальні значення режимних параметрів за критерієм (6.11), який являє собою середнє значення динамічної складової потужності [415], необхідної для розгону приведеної маси m до швидкості v_n

$$\dot{I}_2 = \int_0^{t_y} V dt = \int_0^{t_y} \frac{1}{2} m a^2(t) dt = \frac{1}{2} m \left[\int_0^{t_1} a_1^2 dt + \int_{t_1}^{t_y - t_3} 0 dt + \int_{t_y - t_3}^{t_y} a_3^2 dt \right], \tag{6.46}$$

де V – “енергія” прискорень піднімальної машини; $a(t)$ – функція прискорення приведеної маси піднімальної машини протягом усього циклу руху.

Проінтегрувавши залежність (6.46), будемо мати

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{2} m(a_1 + a_3) v_n. \quad (6.47)$$

У цій задачі необхідно знайти такі значення параметрів режиму руху піднімальної машини, які мінімізують критерій (6.47).

Кожному значенню критерію (6.47) з урахуванням виразу (6.36) відповідає функція $F_i = f(t)$, яка являє собою зовнішнє збурювання, приведене до маси m .

Формалізуємо цю задачу. Уведемо функціонал мети $\varphi_v = f(\vec{\omega}_v)$, визначений на класі функцій $F_i(t)$. Тепер задачу оптимізації режимних параметрів сформулюємо так: знайти таку точку $\vec{\omega}_v^* \in \vec{\omega}_v$, що

$$\varphi_v(\vec{\omega}_v^*) = \min_{\vec{\omega}_v^* \in \vec{\omega}_v} \varphi_v(\vec{\omega}_v) \quad (6.48)$$

при виконанні наступної системи нерівностей

$$\vec{g}(\vec{\omega}_v) \geq 0; \quad \vec{\omega}_v > 0, \quad (6.49)$$

де $\vec{g}(\vec{\omega}_v)$ – вектор функції обмежень режимних параметрів.

Як і попередня задача, ця задача також має аналітичний розв'язок. Досліджуємо критерій (6.47) на екстремум з урахуванням виразів (6.36) і обмежень на швидкість сталого руху $0 < v_n \leq [v_n]$, прискорення $0 < a_1 \leq [a_1]$ й уповільнення $0 < a_3 \leq [a_3]$. Тут $[v_n]$ – припустиме значення на швидкість усталеного руху, а $[a_1]$ і $[a_3]$, як і раніше, припустимі значення прискорення й уповільнення.

Для визначення оптимального значення прискорення $\text{opt } a_1$ знайдемо частинну похідну від виразу критерію (6.47) по параметру a_1 і прирівняємо її до нуля

$$\frac{\partial \dot{I}_2}{\partial a_1} = \frac{1}{2} m \left[v_n + (a_1 + a_3) \frac{\partial v_n}{\partial a_1} \right] = 0. \quad (6.50)$$

Після підстановки в рівняння (6.50) залежностей (6.36) і (6.40), будемо мати

$$a_1 = \frac{H}{t_u^2} \frac{4(a_1/a_3 + 1)a_1/a_3 + 1}{2a_1/a_3}. \quad (6.51)$$

Аналогічно для визначення оптимального значення уповільнення $\text{opt } a_3$ знайдемо частинну похідну від функціонала (6.47) по параметру a_3 і прирівняємо її до нуля. У результаті чого з урахуванням залежностей (7.36) і (6.44), одержимо

$$a_3 = \frac{H}{t_u^2} \frac{4(a_3/a_1 + 1)a_3/a_1 + 1}{2a_3/a_1}. \quad (6.52)$$

Розв'язуючи спільно рівняння (6.51) і (6.52) одержимо оптимальні значення режимних параметрів $\text{opt } a_1$ і $\text{opt } a_3$ за критерієм мінімального значення динамічної складової потужності привода піднімальної машини. Так, для випадку коли $a_1 = a_3$ маємо

$$\text{opt } a_1 = \text{opt } a_3 = 4,5 H/t_u^2. \quad (7.53)$$

У ряді випадків вводиться обмеження на номінальну швидкість сталого руху $v_n \leq [v_n]$.

У цьому випадку необхідно перевірити зазначене обмеження. Для цього обчислені з рівнянь (6.51) і (6.52) оптимальні за критерієм (6.47) значення прискорення a_1 і уповільнення a_3 підставляють у залежність (6.36) і знаходять номінальну швидкість сталого руху приведеної маси піднімальної

машини, яка відповідає цим параметрам. Якщо виявиться, що отримане значення швидкості $v_n \leq [v_n]$, то за оптимальні режимні параметри $\text{opt} a_1$ і $\text{opt} a_3$ приймаються параметри, визначені з рівнянь (6.51) і (6.52). Якщо ж виявиться, що $v_n > [v_n]$, то необхідно задатися граничним значенням нормальної швидкості усталеного руху $v_n = [v_n]$ і для цього значення швидкості обчислити значення режимних параметрів a_1 і a_3 , які у даній постановці задачі будуть вважатися оптимальними за критерієм (6.47).

При врахуванні обмежень на прискорення a_1 і уповільнення a_3 , тобто $0 < a_1 \leq [a_1]$ і $0 < a_3 \leq [a_3]$, обчислюються значення режимних параметрів a_1 і a_3 з рівнянь (6.51) і (6.52), і якщо зазначені обмеження виконуються, то за оптимальні режимні параметри вибираються отримані значення, а якщо зазначені умови не виконуються, тобто $a_1 > [a_1]$ і $a_3 > [a_3]$, то за оптимальні параметри приймаються граничні значення $\text{opt} a_1 = [a_1]$ і $\text{opt} a_3 = [a_3]$.

Розглянемо приклад. Для піднімальної установки з висотою підйому $H = 1000$ м і заданим часом циклу руху $t_1 = 100$ с визначити оптимальні режимні параметри, які мінімізують динамічну складову потужності привода при обмеженні на нормальну швидкість сталого руху $v_n \leq 11,5$ м/с.

Нехай $a_1/a_3 = 1$, тоді за формулою (6.53) визначаємо оптимальні режимні параметри без врахування обмежень на нормальну швидкість сталого руху. У результаті одержуємо $\text{opt} a_1 = \text{opt} a_3 = 0,45$ м/с². Цим значенням режимних параметрів відповідає нормальна швидкість сталого руху $v_n = 15,0$ м/с. Однак це значення швидкості не відповідає обмеженню, що накладається на швидкість усталеного руху. Тому за оптимальну швидкість усталеного руху необхідно прийняти її максимально припустиме значення, тобто $\text{opt} v_n = 11,5$ м/с. Цьому значенню нормальної швидкості сталого руху відповідають значення прискорення $a_1 = 0,882$ м/с² і уповільнення $a_3 = 0,882$ м/с², які у даній задачі є оптимальними за критерієм (6.47) [15].

РОЗДІЛ 7

ФУНКЦІОНАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМІВ РУХУ МАШИН

7.1. Загальні положення оптимізації режимів руху

Більшість піднімальних машин знаходиться в безупинному циклічному русі при виконанні транспортних операцій. Тому вибір оптимальних рішень руху є однією з основних задач при їхньому проектуванні. Правильно обрані режими руху машини в цілому і її окремих елементах дозволяють знизити енергетичні витрати, підвищити надійність і продуктивність, поліпшити їх ергономічні показники.

При виборі режимів руху конкретних піднімальних машин необхідно чітко визначити технологічні операції, які вони виконують. Для кожної з цих операцій вибираються траєкторії руху робочих елементів машини й основних технологічних параметрів, що визначаються з завдання на проектування.

Для ряду вантажних піднімальних машин технологічними параметрами є річна продуктивність A і висота підйому H , потім визначаються вантажопідйомність піднімальної машини і тривалість циклу її роботи. Будь-які інші вихідні дані при проектуванні піднімальної машини на початковій стадії невідомі.

Так, у роботі отримані наступні апроксимаційні поліноми другого порядку для вугільних скіпових багатоканатних піднімальних машин:

а) для критерію "мінімум питомих приведених витрат":

$$\text{opt}Q = 3,19 \cdot 10^3 - 2,59H + 2,64 \cdot 10^{-3}A + 1,64 \cdot 10^{-3}H^2 + 6,30 \cdot 10^{-6}HA + 5,77 \cdot 10^{-10}A^2;$$

б) для комплексного критерію "мінімум часу циклу" при відхиленні питомих приведених витрат від мінімального значення не більше, ніж на 10%:

$$\text{opt}Q = 3,83 \cdot 10^3 - 2,78H + 4,48 \cdot 10^{-4}A + 1,22 \cdot 10^{-3}H^2 + 5,20 \cdot 10^{-6}HA + 9,98 \cdot 10^{-10}A^2,$$

де A – річна продуктивність піднімальної установки, т/рік; H – висота підйому, м; Q – корисний вантаж у скіпі, кг.

Поліноми отримані при коефіцієнті нерівномірності і резерву піднімальної установки $k=1,5$, тривалості роботи піднімальної установки на добу $T=18$ годин, числі робочих днів в рік $n=300$, у межах зміни параметрів: $700 \text{ м} \leq H \leq 1700 \text{ м}$; $0,18 \cdot 10^6 \leq A \leq 6,6 \cdot 10^6 \text{ т/рік}$.

Для інших значень k^* , T^* , n^* оптимальна вантажопідйомність скіпів визначається за формулою:

$$\text{Opt } Q^* = (E/E^*) \text{opt } Q,$$

де $E = n/k$; $E^* = n^* T^* / k^*$.

Звичайно піднімальну машину (піднімальна посудина, канати, орган навивки, гальма, редуктор, електродвигун, систему керування) підбирають шляхом порівняння багатьох варіантів. Тому режими її руху визначаються ітераційним шляхом у кілька етапів.

На початковій стадії проектування визначаються режими руху для виконавчих елементів за даними технологічних параметрів на проектування. У цьому випадку динамічна модель машини представляється одномасовою моделлю з урахуванням основного руху машини. Формування критерію для оцінки режиму руху здійснюється на основі функції мети машини і вимог, що висуваються до неї. Тут можуть бути використані часткові критерії чи їхня лінійна згортка у виді комплексного критерію. У результаті мінімізації критеріїв одержують оптимальні режими руху виконавчого елемента. Ці режими руху є основою для розрахунку і проектування елементів конкретної піднімальної машини від двигуна до виконавчого елемента. Вибирається тип і потужність двигуна, визначаються основні характеристики міцності, інерційності, жорсткості, дисипації й інші характеристики піднімальної машини, тобто розробляється її проект.

На другій стадії визначається режим руху машини з урахуванням

характеристик її основних елементів. Тут динамічна модель машини враховує всі основні елементи від двигуна до виконавчого елемента і їхні силові, інерційні, жорсткісні і дисипативні характеристики. Такий оптимальний режим руху піднімальної машини є основою для розробки системи керування двигуном і гальмовим пристроєм, а також для остаточного динамічного розрахунку її елементів.

7.2. Методика функціональної оптимізації режимів руху

У попередньому розділі розглянуті приклади оптимізації режимних параметрів відомої діаграми швидкості піднімальної машини, тобто для відомої функціональної залежності режиму руху підбиралися значення параметрів, що мінімізували ті чи інші критерії якості піднімальних машин.

У цьому розділі передбачається визначати оптимальні функціональні залежності режимів руху, що мінімізують загальні динамічні критерії, приведені в п'ятому розділі.

Виходячи з загальних положень оптимального проектування машин і механізмів пропонується така методика функціональної оптимізації режимів руху піднімальних машин. Ця методика включає ряд задач, які необхідно розв'язувати при оптимізації режимів руху:

- 1) ідеалізація піднімальної машини у виді однієї чи декількох динамічних схем (моделей);
- 2) побудова обґрунтованої математичної моделі чи ієрархії моделей піднімальної машини;
- 3) визначення вектора критеріїв якості, які враховують всі основні фізичні процеси, що проходять при русі піднімальної машини;
- 4) визначення множини допустимих варіантів функціональних залежностей режимів руху піднімальної машини;
- 5) вибір найбільш доцільної функціональної залежності режиму руху піднімальної машини для тих чи інших умов експлуатації.

Перші три задачі докладно описані раніше в попередніх розділах. Дві

останні задачі залежать від обраних критеріїв оцінки якості режимів руху піднімальних машин і вимагають спеціального розгляду.

У п'ятому розділі показано, що найбільш загальними критеріями, які досить повно можуть відображати динамічне удосконалювання піднімальних машин, є критерії, отримані на основі дій. Ці критерії являють собою інтегральні функціонали, що залежать від режиму руху піднімальної машини. Режим руху, по кожному з таких критеріїв, є оптимальним тоді, коли він доставляє цьому критерію мінімальне значення. Тому задача вибору найбільш сприятливого режиму руху за визначеним критерієм зводиться до задачі мінімізації інтегральних функціоналів.

Для оцінки енергетичних витрат використовується критеріальна дія по Лагранжу, яка для вибору функціональної залежності режиму руху представляється в наступному виді:

$$\dot{I}_T = \int_0^{t_1} T(t, q_k, \dot{q}_k) dt, \quad (7.1)$$

де t – час; t_1 – тривалість циклу руху піднімальної машини; T – кінетична енергія піднімальної машини; q_k – k -а ($k=1,2,\dots,s$) узагальнена координата піднімальної машини.

Умовою мінімуму критерію (7.1) є рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \quad k=1,2,\dots,s. \quad (7.2)$$

У результаті розв'язку рівняння (7.2) будуть отримані залежності узагальнених координат q_k від часу t , тобто $q_k = q_k(t)$. Ці залежності і будуть представляти найбільш сприятливі функціональні залежності режимів руху піднімальних машин, які до мінімуму зводять енергетичні витрати. Найчастіше функціональні залежності режимів руху виражаються функціями

зміни швидкостей $\dot{q}_k = \dot{q}_k(t)$, прискорень $\ddot{q}_k = \ddot{q}_k(t)$ чи ривків $\ddot{\ddot{q}}_k = \ddot{\ddot{q}}_k(t)$ основного руху піднімальних машин.

Середня величина динамічної складової потужності привода піднімальної машини оцінюється дією по Аппелю, яка для оптимізації режиму руху може бути представлена в такій формі

$$\dot{I}_V = \int_0^{t_1} V(t, q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k) dt, \quad (7.3)$$

де V – "енергія прискорень" піднімальної машини.

Критерій (7.3) досягає мінімуму на функціях, що є розв'язком рівняння Пуассона

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \ddot{q}_k} \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (7.4)$$

Отримані в результаті розв'язку цього рівняння залежності $q_k = q_k(t)$ будуть виражати оптимальний динамічний режим руху піднімальної машини.

Критеріальна дія по ривку для оцінки режимів руху піднімальних машин виражається функціоналом

$$\dot{I}_W = \int_0^{t_1} W(t, q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k, \ddot{\ddot{q}}_k) dt, \quad (7.5)$$

де W – "енергія ривків" піднімальної машини.

Умовою мінімуму критерію (7.5) є рівняння Пуассона виду

$$\frac{\partial W}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \ddot{q}_k} \right) + \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial W}{\partial \ddot{\ddot{q}}_k} \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (7.6)$$

Розв'язавши рівняння (7.6), одержимо часові функції узагальнених координат $q_k = q_k(t)$, які являють собою оптимальний ривковий режим руху піднімальної машини, що показує характер зміни динамічних навантажень.

Найбільш загальний критерій для оцінки режимів руху піднімальних машин може бути представлений у наступному виді

$$\dot{I}_F = \int_0^{t_1} F_n \left(t, q_k, \dot{q}_k, \dots, q_k^{(n)} \right) dt, \quad (7.7)$$

де F – "енергія прискорень" $n-1$ -го порядку піднімальної машини.

Мінімум функціоналу (7.7) надає найбільш загальний вид рівняння Пуассона

$$\frac{\partial F_n}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F_n}{\partial \dot{q}_k} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial F_n}{\partial \ddot{q}_k} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial F_n}{\partial q_k^{(n)}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (7.8)$$

У результаті розв'язку рівнянь (7.8) знайдемо функції $q_k = q_k(t)$ і їхні похідні $\dot{q}_k = \dot{q}_k(t)$, $\ddot{q}_k = \ddot{q}_k(t)$, $\ddot{\ddot{q}}_k = \ddot{\ddot{q}}_k(t)$, які визначають функціональні залежності режимів руху піднімальних машин, що мінімізують амплітуди коливань їхніх елементів.

Отримані в результаті мінімізації різних критеріїв функціональні залежності оптимальних режимів руху піднімальних машин представляють досить велику гаму режимів руху. Наступним етапом є вибір серед отриманих оптимальних режимів за різними критеріями найбільш сприятливих для тієї чи іншої піднімальної машини.

Задача вибору остаточного варіанта режиму руху неоднозначна і

викликає значних труднощів при розгляді конкретних піднімальних машин. Спочатку з отриманого набору оптимальних режимів руху за різними критеріями для конкретної машини відкидаються ті режими, що не задовольняють заданим обмеженням. Наприклад, обмеженням на максимальні значення кінематичних характеристик (швидкостей, прискорень, ривків і т.д.) чи іншим обмеженням: потужності, енергії, максимальних динамічних навантажень і т.д. Після цього проводиться динамічний аналіз піднімальної машини, яка реалізує оптимальні режими руху, що залишилися.

Для порівняльної оцінки піднімальної машини з різними оптимальними режимами руху повинні використовуватися критерії, що досить добре відчуються проектувальником і які підтвердили попереднім досвідом свою практичну придатність. Так, для піднімальних машин такими критеріями є: потужність привода, максимальні значення кінематичних характеристик ланок, максимальні значення динамічних навантажень у пружних елементах, коефіцієнт динамічності й інші критерії, що розглянуті в розділі 5. Як показують практичні результати динамічного аналізу конкретних піднімальних машин, ці критерії не суперечать загальним динамічним критеріям, а є для них лише частковою характеристикою.

На базі вирішених практичних задач розроблена методика виконання операцій при динамічному аналізі піднімальних машин з різними оптимальними режимами руху. Спочатку на основі того чи іншого оптимального режиму руху шляхом розв'язування першої задачі динаміки по відомих законах руху окремих ланок визначається необхідний рушійний момент привода, що реалізує розглянутий оптимальний режим руху піднімальної машини. При цьому модель піднімальної машини повинна відповідати моделі, при якій визначався розглянутий оптимальний режим руху. Другим етапом є складання більш детальної, чим при визначенні оптимального режиму руху, динамічної і математичної моделей піднімальної машини, у яких повинні бути відображені всі основні характеристики, що

цікавлять дослідника.

Після складання математичної моделі здійснюється розв'язок диференціальних рівнянь, які описують рух піднімальної машини. У ряді випадків не вдаються аналітично проінтегрувати ці рівняння, тому можуть бути використані чисельні методи й ЕОМ. У результаті розв'язку диференціальних рівнянь руху піднімальної машини знаходять закони зміни узагальнених координат. За цим законами обчислюються різні критерії оцінки якості піднімальних машин з тими чи іншими оптимальними режимами руху.

У результаті порівняння обчислених критеріїв для різних режимів руху піднімальної машини вибирається остаточний варіант її режиму руху.

7.3. Оптимізація режимів руху на початковій стадії проектування

Як відзначалося раніше, на початковій стадії проектування піднімальну машину можна представити як вертикальне переміщення деякої маси m уздовж осі x на висоту H за наперед заданий час руху t_u . Для такої динамічної моделі визначимо оптимальні режими руху за частковими критеріями енергетичних витрат, середньої динамічної складовий потужності привода, інтенсивності зміни динамічних навантажень у часі й іншими одиничними критеріями, а також за комплексним критерієм.

7.3.1. Синтез швидкісного режиму руху

Критерієм енергетичних витрат для руху матеріальної точки є інтегральний функціонал (7.1), у якого за підінтегральну функцію використовується кінетична енергія

$$T = \frac{m \dot{x}^2}{2}, \quad (7.9)$$

де $\dot{x}$ – координата швидкості вертикального переміщення матеріальної точки.

У результаті мінімізації інтегрального функціонала (7.1) з підінтегральною функцією T з виразу (7.9) одержимо оптимальний енергетичний режим руху. Умовою мінімуму такого функціонала є рівняння (7.2), які для розглянутого випадку дають

$$\ddot{x} = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, одержимо:

$$\dot{x} = A_1; \quad x = A_0 + A_1 t, \quad (7.10)$$

де A_0, A_1 – постійні інтегрування, що визначаються з крайових умов руху. Для початкових умов періоду руху піднімальної машини $t=0, x=0$ і його кінцевих умов $t=t_{\text{ц}}$ і $x=H$, маємо:

$$x = H \bar{t}; \quad \dot{x} = V_{\text{cp}} = \frac{H}{t_{\text{ц}}} = \text{const}; \quad \ddot{x} = 0, \quad (7.11)$$

де $\bar{t} = \frac{t}{t_{\text{ц}}}$ – координата відносного часу руху піднімальної машини; V_{cp} – середня за час циклу швидкість руху піднімальної машини.

Оптимальним енергетичним чи швидкісним режимом вертикального руху піднімальної машини, представленою матеріальною точкою, є рух з постійною середньою швидкістю на всій ділянці руху (рис. 7.1).

Однак на практиці такий режим руху протягом усього циклу руху піднімальної машини реалізувати не можна, тому що в ньому не міститься ділянок розбігу і вибігу, без яких не може бути циклічного руху. Цей режим руху доцільно використовувати на ділянці усталеного руху піднімальної машини.

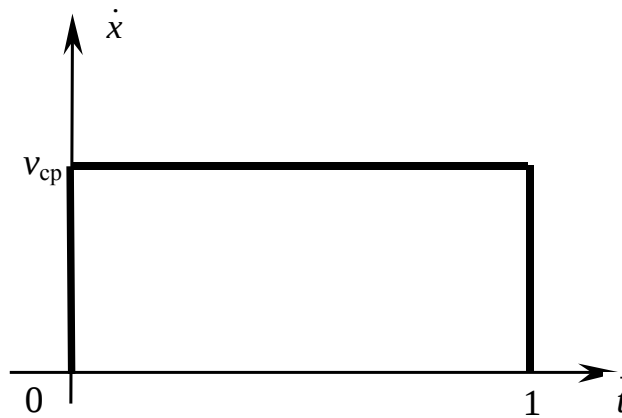


Рис. 7.1. Графік зміни швидкості при оптимальному енергетичному режимі руху приведеної маси піднімальної машини

Використовуючи залежності (7.11), по формулі (7.9) знаходимо кінематичну енергію матеріальної точки $\tilde{T}$, що відповідає оптимальному швидкісному режиму руху

$$\tilde{T} = \frac{mV_{cp}^2}{2}. \quad (7.12)$$

Після підстановки виразу (7.12) в інтеграл (7.1) знайдемо мінімально можливе значення енергетичного критерію для вертикального переміщення приведеної маси піднімальної машини

$$\min \tilde{I}_T = \frac{mHV_{cp}}{2}. \quad (7.13)$$

7.3.2. Синтез динамічного режиму руху

Критерієм динамічної складової потужності привода є інтегральний функціонал (7.3) з підінтегральною функцією – "енергія прискорень", яка для матеріальної точки визначається залежністю

$$V = \frac{m\ddot{x}^2}{2}, \quad (7.13)$$

де $\ddot{x}$ – координата прискорення вертикального руху матеріальної точки з масою m .

Для визначення оптимального динамічного режиму руху матеріальної точки необхідно вирішити варіаційну задачу для інтегрального функціонала з підінтегральною функцією (7.13). Умовою мінімуму такого функціонала є рівняння (7.4), у яких узагальнені координати q_k , швидкості $\dot{q}_k$ і прискорення $\ddot{q}_k$ замінені відповідно на координату x , швидкість $\dot{x}$ і прискорення $\ddot{x}$ приведеної маси m піднімальної машини. У результаті проведення заміни і відповідних операцій диференціювання одержимо диференціальне рівняння четвертого порядку

$$x^{IV} = 0. \quad (7.14)$$

Розв'язок рівняння (7.14) дає:

$$\begin{aligned} x &= B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3; \\ \dot{x} &= B_1 + 2B_2 t + 3B_3 t^2; \\ \ddot{x} &= 2B_2 + 6B_3 t, \end{aligned} \quad (7.15)$$

де B_0, B_1, B_2, B_3 – постійні інтегрування, що залежать від крайових умов руху.

Для початкових умов періоду руху приведеної маси піднімальної машини $t=0, x=0, \dot{x}=0$ і його кінцевих умов $t=t_u, x=H$ і $\dot{x}=0$, одержимо:

$$\begin{aligned} x &= H(3-2\bar{t})\bar{t}^2; \\ \dot{x} &= 6H(1-\bar{t})\bar{t}/t_u; \\ \ddot{x} &= 6H(1-2\bar{t})/t_u^2. \end{aligned} \quad (7.16)$$

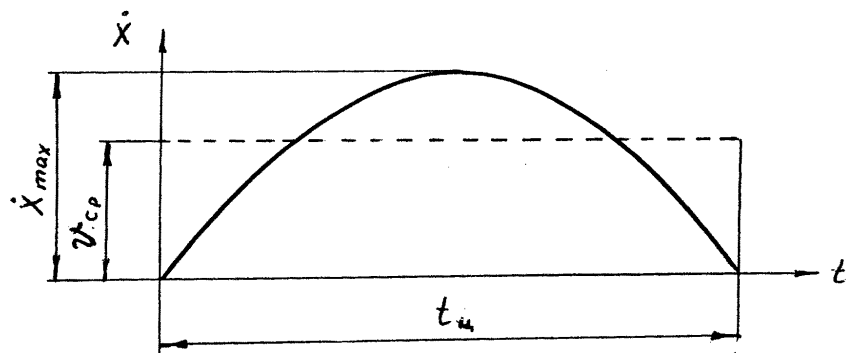
Оптимальним динамічним режимом є рух матеріальної точки на всій ділянці зі швидкістю, що змінюється за параболічним законом (рис. 7.2, а), прискоренням, що змінюється за лінійним законом (рис. 7.2, б) і постійним ривком (рис. 7.2, в). На відміну від оптимального швидкісного режиму, оптимальний динамічний режим руху можна здійснити на практиці протягом усього циклу руху піднімальної машини. Однак при такому режимі руху, у порівнянні з оптимальним енергетичним режимом, зростають у 2,25 рази енергетичні витрати, що йдуть на розгін і зупинку піднімальної машини. Тут досить великі значення прискорень у початковий і кінцевий моменти руху. Вони в два рази перевершують значення прискорень при режимі руху з постійним прискоренням і уповільненням, що широко використовується в практиці піднімальних машин. Цей режим доцільно застосовувати в тих випадках, коли необхідно до мінімуму звести потужність привода піднімальної машини. Оптимальний динамічний режим не придатний для піднімальних машин, яким потрібно досить точна зупинка і плавне рушення з місця в процесі пуску, тобто для машин, що транспортують пасажирів.

За допомогою залежностей (7.16) і виразу (7.13) визначена функція "енергії прискорень" $\tilde{V}$, що відповідає оптимальному динамічному режиму на всій ділянці руху:

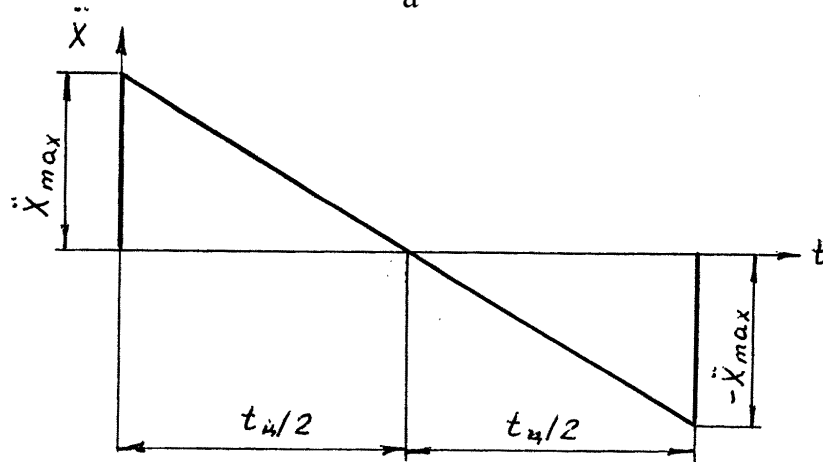
$$\tilde{V} = 18mH^2(2\bar{t} - 1)^2 / t_y^4.$$

Підставивши останнє співвідношення в підінтегральний вираз функціонала (7.3), знайдемо мінімально можливе значення динамічної складової потужності привода:

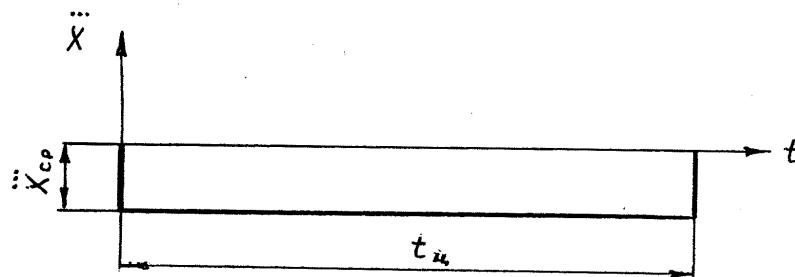
$$\min \tilde{I}_V = 6mH^2 / t_y^3. \quad (7.17)$$



а



б



в

Рис. 7.2 Графіки зміни швидкості (а), прискорення (б) і ривка (в) при оптимальному потужнісному динамічному режимі руху матеріальної точки

Порівнюючи динамічну складову потужності привода для приклада, для трапецеїдальної діаграми швидкості з оптимальними режимними параметрами, обчисленими по формулі (7.53), з динамічною складовою потужності привода, обчисленою за формулою (7.17) для цього ж приклада бачимо, що в останньому випадку потужність зменшується на 12,5%.

Таким чином, можна зробити висновок, що визначення оптимальних

функціональних режимів руху дає значну економію засобів (у даному випадку потужності) у порівнянні з параметричною оптимізацією для заздалегідь обраної функціональної залежності режиму руху.

У ряді випадків при оптимізації режиму руху піднімальної машини не потрібно знати режим протягом усього циклу руху, а лише на окремих його ділянках. До таких ділянок відносяться ділянки пуску і гальмування піднімальної машини. Визначення оптимальних динамічних режимів руху приведеної маси на цих ділянках здійснюється за допомогою залежностей (7.15), але з іншими крайовими умовами.

При пуску приведеної маси m зі стану спокою до нормальної швидкості усталеного руху V_H крайовими умовами є: початкові $t=0$, $x=0$, $\dot{x}=0$; кінцеві $-t=t_{II}$, $\dot{x}=V_H$, $\ddot{x}=0$.

Для цих крайових умов оптимальний динамічний режим пуску приведеної маси піднімальної машини визначається залежностями:

$$\begin{aligned}x &= V_H \bar{t}^2 \left(1 - \frac{\bar{t}}{3}\right) t_{II}; \\ \dot{x} &= V_H \bar{t} (2 - \bar{t}); \\ \ddot{x} &= 2V_H (1 - \bar{t}) / t_{II},\end{aligned}\tag{7.18}$$

де $\bar{t} = \frac{t}{t_{II}}$ – координата відносного часу пуску; t_{II} – тривалість пуску.

Оптимальний динамічний режим пуску являє собою режим руху приведеної маси піднімальної машини зі зміною кінематичних характеристик, представлених на рис. 7.3. Тут, як і в оптимальному динамічному режимі для всього циклу руху, представленому на рис. 7.2, у початковий момент пуску прискорення максимальне, а наприкінці дорівнює нулю. Тому цей режим пуску не рекомендується для машин, де потрібне плавне рушення з місця.

При оптимальному динамічному режимі пуску приведеної маси піднімальної машини мінімально можливі витрати динамічної складовий

потужності привода, отримані з урахуванням залежностей (7.18), визначаються залежністю

$$\min \tilde{I}_V = \frac{2}{3} m V_H^2 / t_n. \quad (7.19)$$

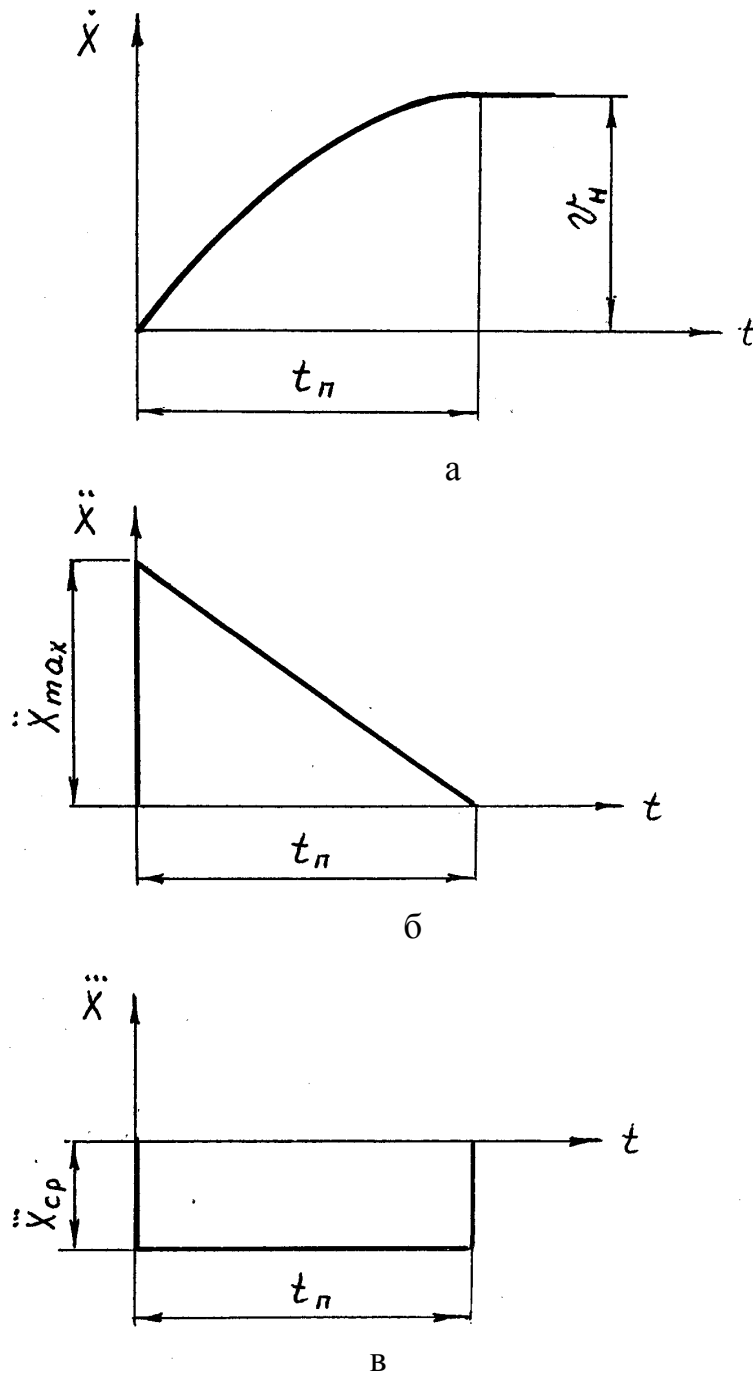


Рис.7.3. Графіки зміни швидкості (а), прискорення (б) і ривку (в) при оптимальному динамічному режимі руху матеріальної точки в процесі пуску

При гальмуванні приведеної маси піднімальної машини від сталої

швидкості до повної зупинки крайовими умовами руху є: початкові – $t=0$, $\dot{x} = V_H$, $\ddot{x} = 0$; кінцеві – $t=t$, $x=H$, $\dot{x} = 0$.

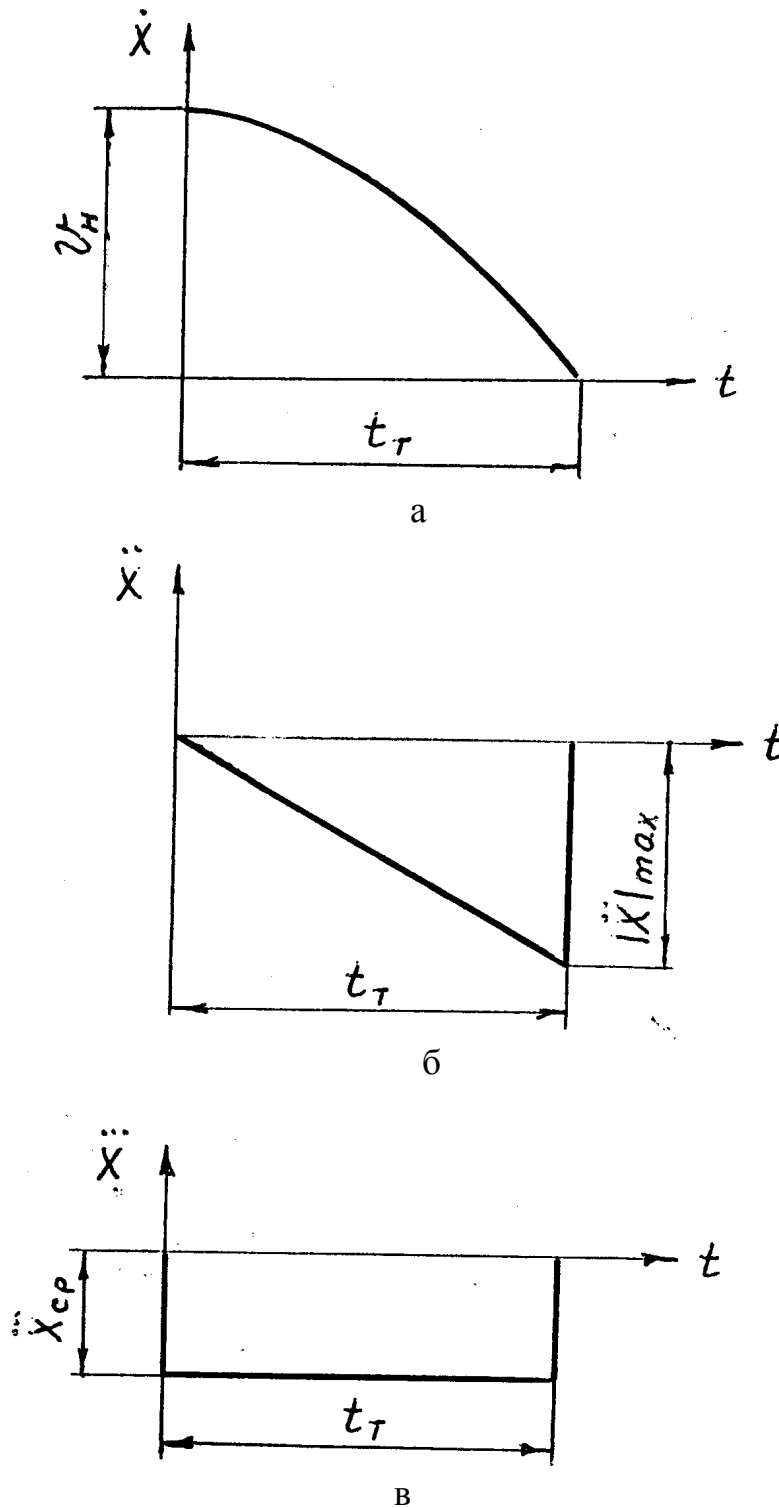


Рис. 7.4. Графіки зміни швидкості (а), прискорення (б) і ривку (в) при оптимальному динамічному режимі руху матеріальної точки в процесі гальмування

Ці крайові умови дають наступні зміни кінематичних характеристик у процесі гальмування приведеної маси піднімальної машини:

$$\begin{aligned}x &= H - V_H t_T \left(\frac{2}{3} - \bar{t} + \frac{\bar{t}^3}{3} \right); \\ \dot{x} &= V_H (1 - \bar{t}^2); \\ \ddot{x} &= -2V_H \bar{t} / t_T,\end{aligned}\tag{7.20}$$

де $\bar{t} = \frac{t}{t_T}$ – координата відносного часу гальмування; t_T – тривалість гальмування.

Оптимальний динамічний режим гальмування відповідає закону руху матеріальної точки з масою m , що показаний на рис. 7.4. У цьому режимі гальмування максимальне значення прискорення знаходиться в кінцевій точці руху, тому він не застосовний для машин, де потрібно точне позиціонування. Це викликано тим, що різкий стрибок прискорення в момент зупинки машини викликає коливання в її пружних елементах. Тому після зупинки машини її елементи будуть здійснювати коливання і точність позиціонування може бути недостатньою. Крім того, ці коливання приводять до підвищеного втомного зношування елементів машини, що значно знижує її надійність. Оптимальний динамічний режим гальмування дає мінімально можливе значення динамічної потужності на гальмування, яка визначається за допомогою залежностей (7.20) наступним виразом

$$\min \tilde{I}_V = \frac{2}{3} m V_H^2 / t_T.\tag{7.21}$$

Можуть бути визначені оптимальні динамічні режими руху піднімальної машини і для інших умов. Наприклад, ступінчастий пуск і гальмування, коли швидкість руху приведеної маси m наростає й убиває не

поступово, а з деяким інтервалом. Спочатку зі стану спокою машина набирає визначену швидкість, потім якийсь час рухається з постійним значенням цієї швидкості, а після цього знову набирає швидкість до визначеної величини.

Аналогічна картина відбувається і зі зниженням швидкості. Це так звані шести- і семиперіодні діаграми швидкості руху піднімальних машин.

У цьому випадку необхідно лише використовувати відповідні крайові умови при зміні швидкості руху і по системі залежностей (7.15) визначити режими руху, що відповідають оптимальному динамічному режиму руху приведеної маси піднімальної машини в тому чи іншому перехідному процесі.

Оптимальний динамічний процес – це такий режим руху піднімальної машини, що до мінімуму зводить динамічну складову потужності привода. Однак при цьому режимі можуть виникати динамічні навантаження, які перевершують навантаження, що виникають при інших режимах руху. Прикладом таких навантажень можуть бути навантаження коливального характеру в пружних елементах. Тому для позбавлення таких явищ для піднімальних машин необхідні і інші режими руху, які мінімізують динамічні навантаження коливального характеру.

7.3.3. Синтез ривкового режиму руху

Критерієм інтенсивності зміни динамічних навантажень є функціонал (7.5) з підінтегральною функцією – "енергія ривків", яка для приведеної маси піднімальної машини визначається залежністю

$$W = \frac{m \ddot{x}^2}{2}, \quad (7.22)$$

де $\ddot{x}$ – функція ривка (швидкості зміни прискорення) вертикального руху приведеної маси m .

Для визначення оптимального ривкового режиму руху приведеної маси

піднімальної машини необхідно мінімізувати інтегральний функціонал з підінтегральною функцією, яка визначається виразом (7.22). Умовою мінімуму такого функціоналу є рівняння (7.6), у яких узагальнені координати q_k і їхні похідні $\dot{q}_k, \ddot{q}_k$ і $\ddot{q}_k$ замінені на координату приведеної маси x і її похідні $\dot{x}, \ddot{x}$ і $\ddot{x}$ відповідно.

Після проведення описаних заміन отримане диференціальне рівняння шостого порядку

$$x^{VI}=0. \quad (7.23)$$

У результаті розв'язування цього рівняння, маємо:

$$\begin{aligned} x &= C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + C_4 t^4 + C_5 t^5; \\ \dot{x} &= C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 + 4C_4 t^3 + 5C_5 t^4; \\ \ddot{x} &= 2C_2 + 6C_3 t + 12C_4 t^2 + 20C_5 t^3, \end{aligned} \quad (7.24)$$

де $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ – постійні інтегрування, що визначаються з крайових умов.

Для початкових умов періоду руху приведеної маси $t=0, x=0, \dot{x}=0, \ddot{x}=0$ і його кінцевих умов $t=t_y, x=H, \dot{x}=0, \ddot{x}=0$, знаходимо:

$$\begin{aligned} x &= H(6\bar{t} - 15\bar{t} + 10) \bar{t}^3; \\ \dot{x} &= 30H(\bar{t}^2 - 2\bar{t} + 1) \bar{t}^2 / t_y; \\ \ddot{x} &= 60H(2\bar{t}^2 - 3\bar{t} + 1) \bar{t} / t_y^2; \end{aligned} \quad (7.25)$$

$$\ddot{x} = 60H(6\bar{t}^2 - 6\bar{t} + 1)/t_u^3,$$

де $\bar{t} = \frac{t}{t_u}$ – відносна координата часу руху на протязі всього періоду підйому.

Для отриманого режиму руху важливо знати моменти часу, коли $\ddot{x}$ приймає максимальне значення.

Ці моменти часу визначаються з умови $\ddot{x} = 0$, яка дає: максимальне значення прискорення при $\bar{t} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)/2$, а мінімальне – при $\bar{t} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)/2$.

Оптимальним ривковим (по прискореннях другого порядку) режимом руху приведеної маси піднімальної машини є рух, кінематичні характеристики якого представлені на рис. 7.5.

Як і оптимальний динамічний режим, оптимальний ривковий режим руху приведеної маси m може бути реалізований на практиці.

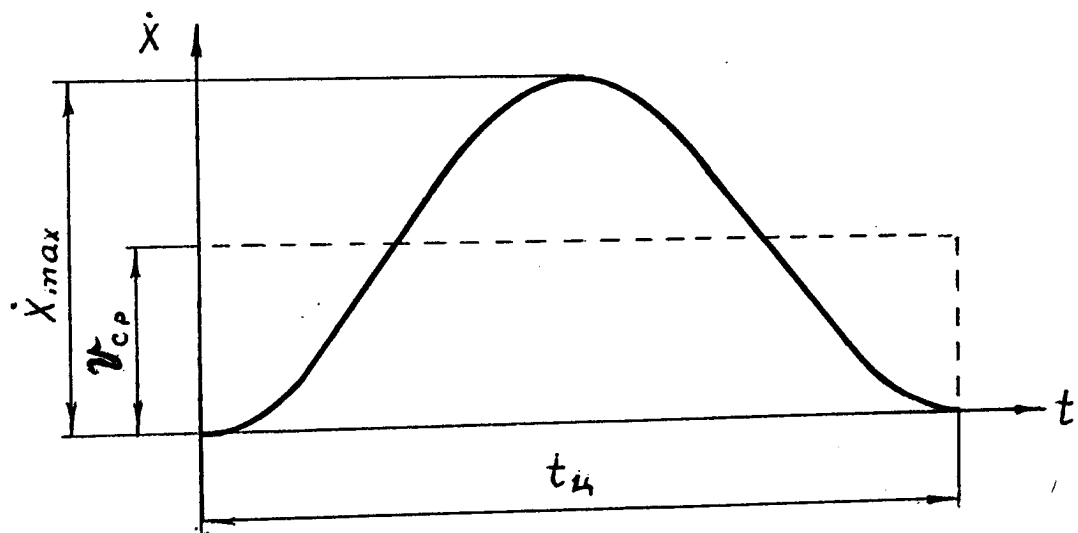
Цей режим руху забезпечує плавну зміну прискорення в процесі руху. При цьому в крайніх положеннях прискорення дорівнює нулю, що забезпечує плавне рушання з місця і точну зупинку наприкінці руху.

Однак при оптимальному ривковому режимі руху значно зростають енергетичні витрати.

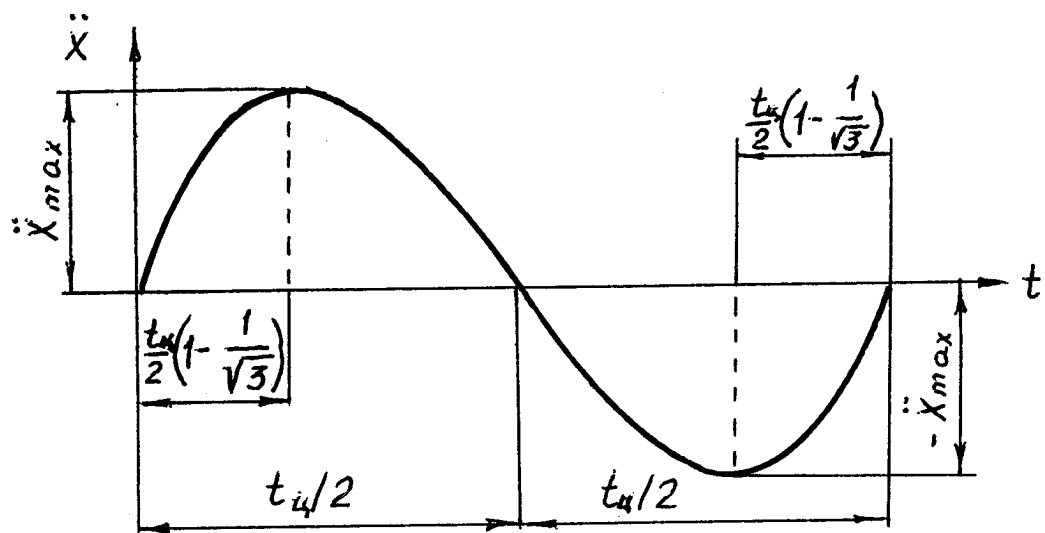
Причиною тому є найбільше максимальне значення швидкості при цьому режимі в порівнянні з раніше розглянутими.

Мінімально можливе значення функціонала (7.5) для "енергії ривків" (7.22) і режиму руху (7.25) визначається залежністю

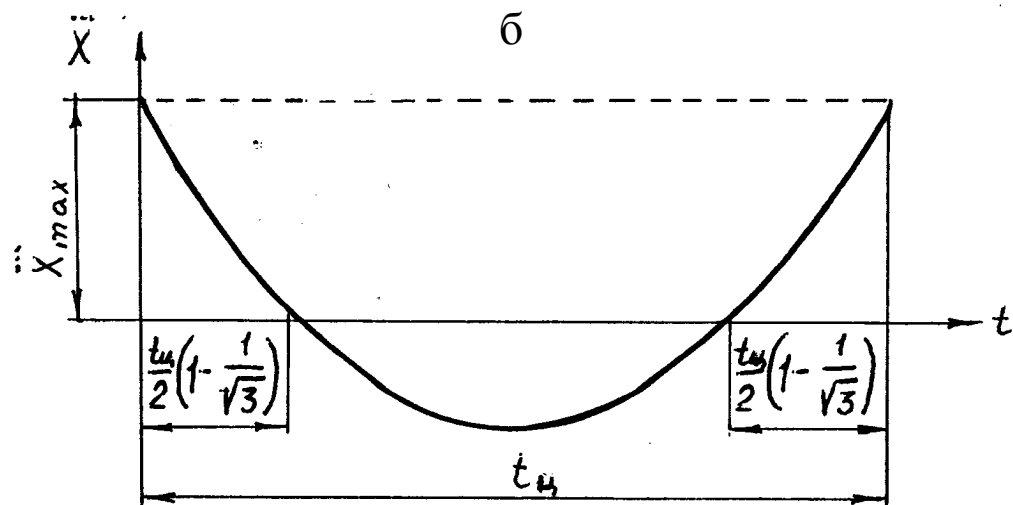
$$\min \tilde{I}_w = 360mH^2/t_u^5. \quad (7.26)$$



a



б



в

Рис. 7.5 – Графіки зміни швидкості (а), прискорення (б) і ривку (в) при оптимальному ривковому режимі руху в процесі пуску

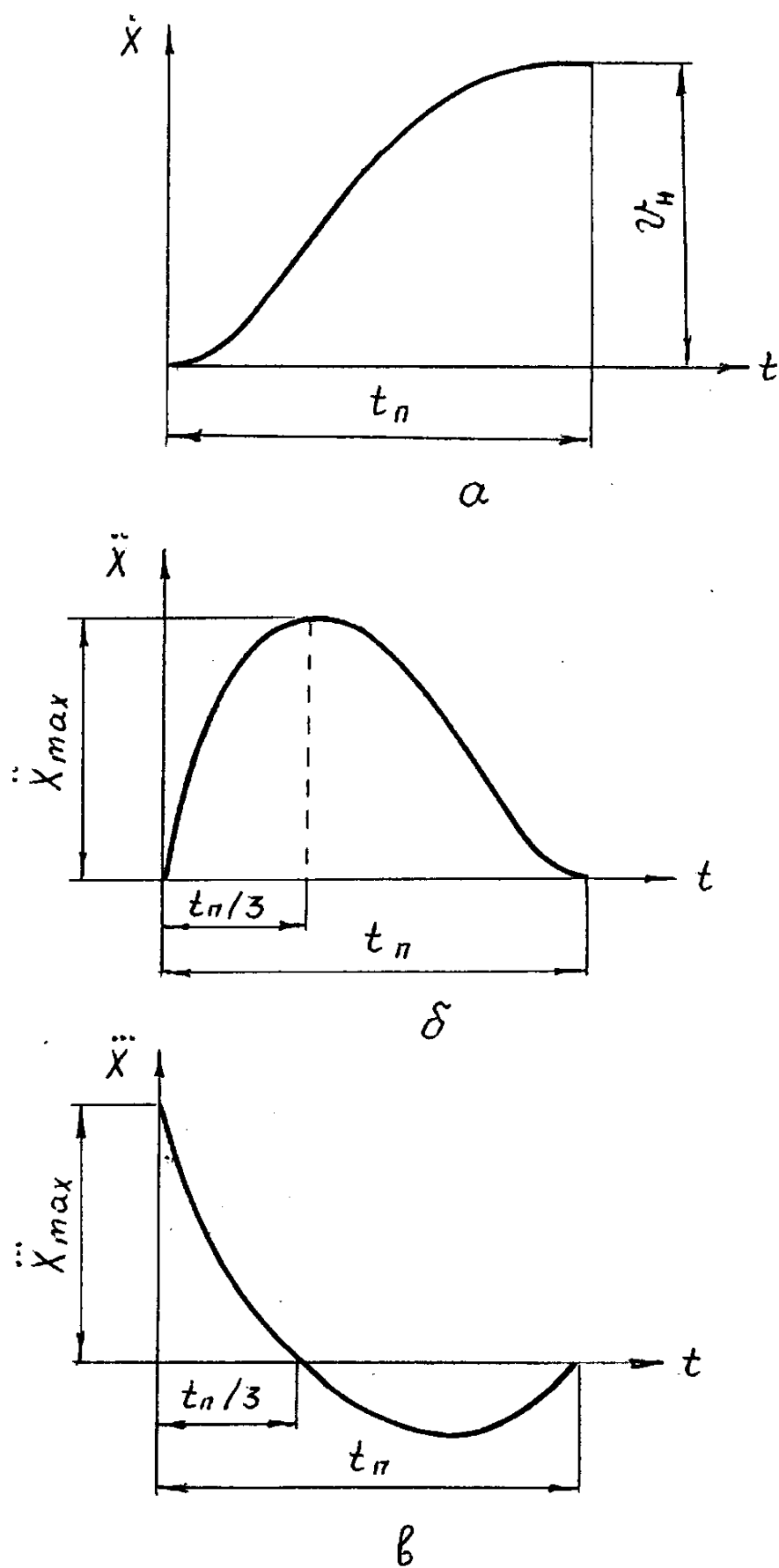


Рис. 7.6. Графіки зміни швидкості (а), прискорення (б) і ривку (в) при оптимальному ривковому режимі руху в процесі пуску

Для визначення оптимального ривкового режиму руху приведеної маси піднімальної машини при пуску зі стану спокою до номінальної швидкості усталеного руху V_H крайовими умовами є: початкові $t=0$, $x=0$, $\dot{x}=0$, $\ddot{x}=0$; кінцеві – $t=t_n$, $\dot{x}=V_H$, $\ddot{x}=0$, $\dddot{x}=0$. Ці крайові умови дають:

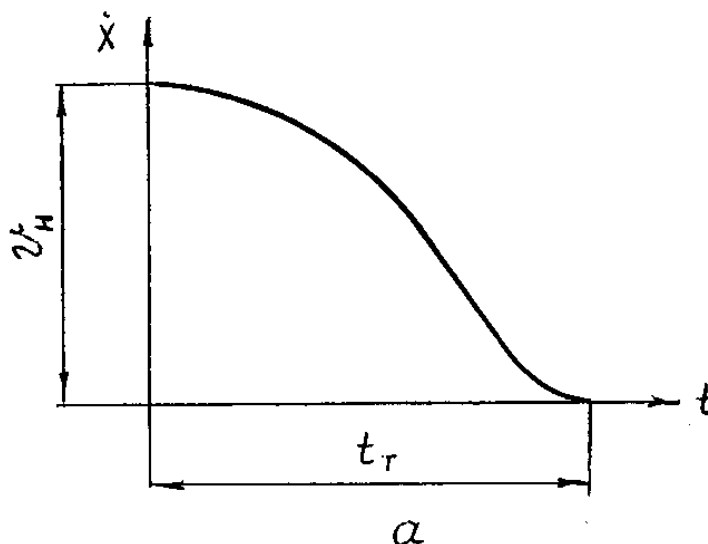
$$x = 2V_H(1 - \bar{t} + 0,3\bar{t}^2)\bar{t}^3 t_n;$$

$$\dot{x} = V_H(6 - 8\bar{t} + 3\bar{t}^2)\bar{t}^2; \quad (7.27)$$

$$\ddot{x} = 12V_H(1 - 2\bar{t} + \bar{t}^2)\bar{t} / t_n;$$

$$\dddot{x} = 12V_H(1 - 4\bar{t} + 3\bar{t}^2) / t_n^2,$$

де $\bar{t} = \frac{t}{t_n}$ – відносна координата часу в процесі пуску.



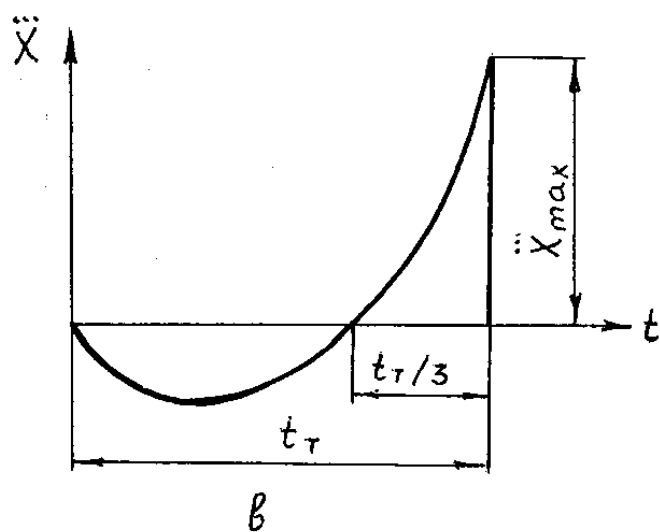
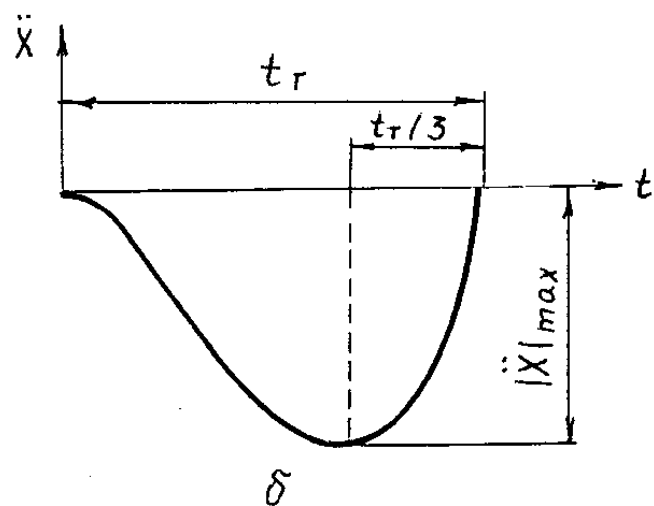
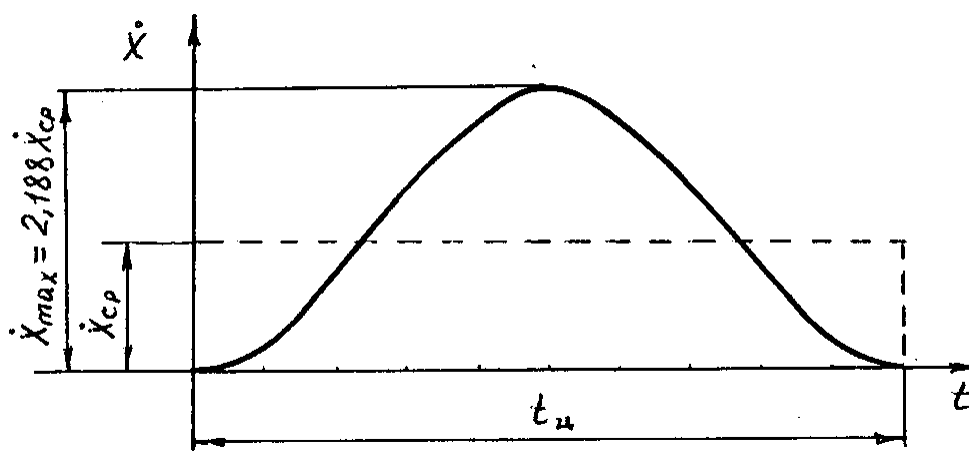


Рис. 7.7. Графіки зміни швидкості (а), прискорення (б) і ривку (в) при оптимальному ривковому режимі руху в процесі гальмування



а

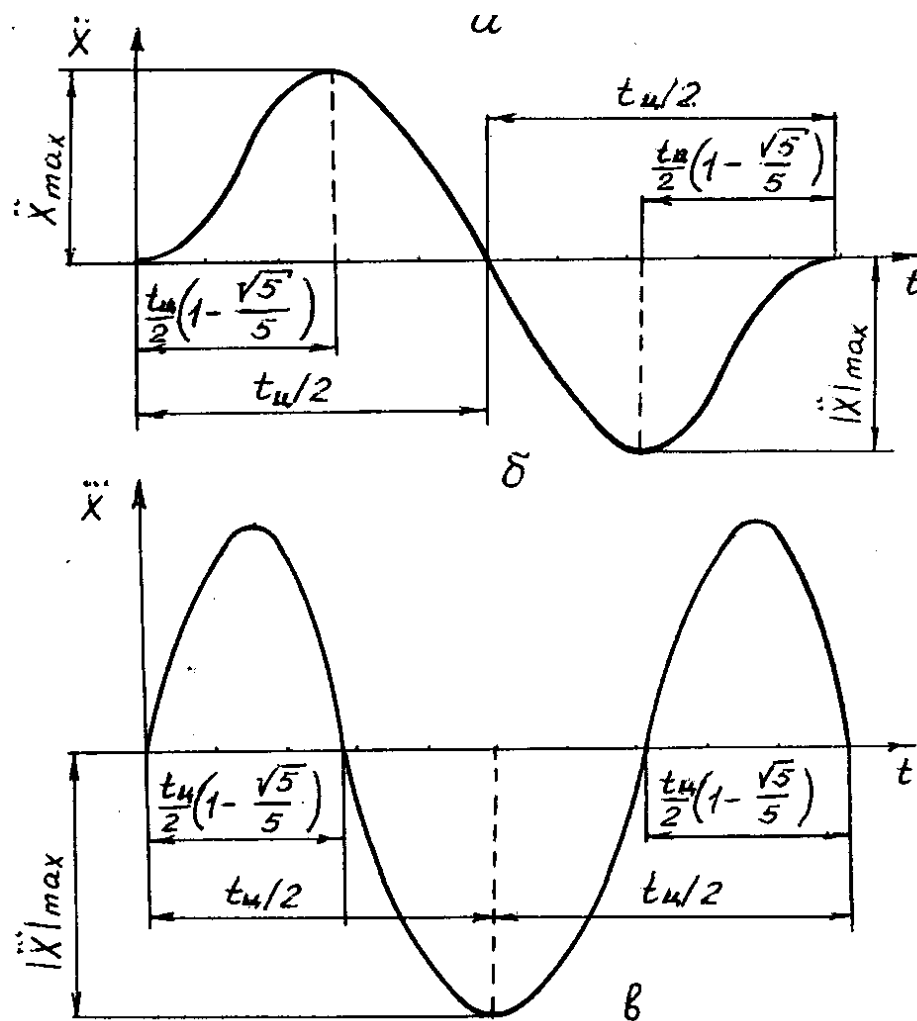


Рис. 7.8. Графіки зміни швидкості (а), прискорення (б) і ривку (в) при оптимальному за прискоренням третього порядку режимі руху матеріальної точки m

Прискорення цього режиму пуску здобуває максимальне значення в момент часу $\bar{t} = \frac{1}{3}$, який визначається з умови $\ddot{x} = 0$. Графіки зміни кінематичних характеристик оптимального ривкового режиму пуску представлені на рис. 7.6. З цих графіків видно, що прискорення в процесі пуску змінюється досить плавно й у крайніх положеннях дорівнюють нулю. Цей режим пуску може бути використаний для випадку плавного пуску, який до мінімуму знижує коливання на ділянці усталеного руху піднімальної машини.

При оптимальному ривковому режимі пуску матеріальної точки з

приведеною масою мінімально можливе значення функціонала (7.5) з урахуванням залежностей (7.27) визначається виразом

$$\min \tilde{I}_w = 9/6 m V_H^2 / t_n^3. \quad (7.28)$$

У процесі гальмування приведеної маси піднімальної машини від номінальної швидкості усталеного руху до повної зупинки застосовуються наступні крайові умови: початкові – $t=0$, $\dot{x} = V_H$, $\ddot{x} = 0$, $\dddot{x} = 0$; кінцеві – $t=t_T$, $x=H$, $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$. Цим крайовим умовам відповідає оптимальний ривковий режим гальмування, який визначається залежностями:

$$\begin{aligned} x &= H - V_H \left(0,6 - \bar{t} + \bar{t}^4 - 0,6\bar{t}^5 \right) t_T; \\ \dot{x} &= V_H \left(1 - 4\bar{t}^3 + 3\bar{t}^4 \right); \\ \ddot{x} &= 12V_H (\bar{t} - 1) \bar{t}^2 / t_T; \\ \dddot{x} &= 12V_H (3\bar{t} - 2) \bar{t} / t_T^2, \end{aligned} \quad (7.29)$$

де $\bar{t} = \frac{t}{t_T}$ – координата відносного часу гальмування.

Прискорення при оптимальному ривковому режимі гальмування приймає максимальне значення в момент часу $t = (2/3) t_T$.

Оптимальним ривковим режимом гальмування приведеної маси піднімальної машини є режим, представлений залежностями (7.29) і показаний на рис. 7.7. Такий режим гальмування може бути використаний тоді, коли необхідно підвищити точність позиціювання піднімальної посудини і мінімізувати коливання. Для цього режиму руху приведеної маси

мінімально можливе значення функціонала (7.5) з урахуванням залежностей (7.29) має вид

$$\min \tilde{I}_w = 9,6 m V_H^2 / t_T^3. \quad (7.30)$$

7.3.4. Синтез режимів руху по прискореннях вищих порядків

Розглянемо як приклад оптимізацію режиму руху приведеної маси піднімальної машини за критерієм (7.7) з підінтегральною функцією у виді "енергії прискорень третього порядку", яка для вертикального переміщення матеріальної точки визначається залежністю

$$F_4 = \frac{1}{2} m (x^{IV})^2, \quad (7.31)$$

де x^{IV} – прискорення третього порядку вертикального переміщення приведеної маси m .

Умовою мінімуму критерію (7.7) з підінтегральною функцією (7.31) є рівняння Пуассона (7.8), у яких функція F_n замінена на вираз (7.31), а узагальнені координати q_k і їхні похідні за часом до четвертого порядку включно на координату приведеної маси x і її похідні. У результаті зазначених заміन маємо

$$x^{VIII} = 0. \quad (7.32)$$

Розв'язок цього диференціального рівняння дає:

$$x = D_0 + D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3 + D_4 t^4 + D_5 t^5 + D_6 t^6 + D_7 t^7;$$

$$\dot{x} = D_1 + 2D_2 t + 3D_3 t^2 + 4D_4 t^3 + 5D_5 t^4 + 6D_6 t^5 + 7D_7 t^6;$$

$$\ddot{x} = 2D_2 + 6D_3t + 12D_4t^2 + 20D_5t^3 + 30D_6t^4 + 42D_7t^5; \quad (7.33)$$

$$\ddot{x} = 6D_3 + 24D_4t + 60D_5t^2 + 120D_6t^3 + 210D_7t^4;$$

$$x^{IV} = 24D_4 + 120D_5t + 360D_6t^2 + 840D_7t^3,$$

де $D_0, D_1, \dots, D_7$ – постійні інтегрування, що визначаються з крайових умов.

Для початкових умов руху приведеної маси піднімальної машини, коли $t=0$, $x=0$, $\dot{x}=0$, $\ddot{x}=0$, $\ddot{x}=0$ і його кінцевих умов, коли $t=t_u$, $x=H$, $\dot{x}=0$, $\ddot{x}=0$, $\ddot{x}=0$, одержуємо:

$$x = H(35 - 84 \cdot \bar{t} + 70 \cdot \bar{t}^2 - 20 \cdot \bar{t}^3) \cdot \bar{t}^4;$$

$$\dot{x} = 140H(1 - 3 \cdot \bar{t} + 3 \cdot \bar{t}^2 - \bar{t}^3) \cdot \bar{t}^3 / t_u; \quad (7.34)$$

$$\ddot{x} = 420H(1 - 4 \cdot \bar{t} + 5 \cdot \bar{t}^2 - 2 \cdot \bar{t}^3) \cdot \bar{t}^2 / t_u^2;$$

$$\ddot{x} = 840 \cdot H(1 - 6 \cdot \bar{t} + 10 \cdot \bar{t}^2 - 5 \cdot \bar{t}^3) \cdot \bar{t} / t_u^3,$$

де $\bar{t} = \frac{t}{t_u}$ – відносна координата часу протягом усього циклу руху.

Графіки зміни кінематичних характеристик, описаних залежностей (7.34), оптимального по прискореннях третього порядку руху приведеної маси m показані на рис. 7.8.

З цього рисунка видно, що всі представлені кінематичні характеристики мають плавну зміну протягом усього циклу руху.

Ривки в крайніх положеннях плавно змінюються до нульового

значення, а це значить, що такий режим руху не викликає ні твердих, ні м'яких ударів у механізмах і практично відсутні коливання ланок машини.

Для визначення оптимального по прискореннях третього порядку режиму руху приведеної маси в процесі пуску зі стану спокою до номінальної швидкості усталеного руху крайовими умовами є: початкові – $t=0, x = \dot{x} = \ddot{x} = \ddot{\ddot{x}} = 0$; кінцеві – $t=t_n, \dot{x} = V_n, \ddot{x} = \ddot{\ddot{x}} = x^{IV} = 0$.

Ці крайові умови визначають наступні вирази кінематичних характеристик оптимального по прискореннях третього порядку режиму руху приведеної маси:

$$\begin{aligned} x &= V_n [5 - 9\bar{t} + 6\bar{t}^2 - (10/7)\bar{t}^3] \bar{t}^4 t_n; \\ \dot{x} &= V_n (20 - 45\bar{t} + 36\bar{t}^2 - 10\bar{t}^3) \bar{t}^3; \\ \ddot{x} &= 60V_n (1 - 3\bar{t} + 3\bar{t}^2 - \bar{t}^3) \bar{t}^2 / t_n; \\ \ddot{\ddot{x}} &= 60V_n (2 - 9\bar{t} + 12\bar{t}^2 - 5\bar{t}^3) \bar{t} / t_n^2, \end{aligned} \tag{7.35}$$

де $\bar{t} = \frac{t}{t_n}$ – координата відносного часу в процесі пуску.

Графіки оптимального по прискореннях третього порядку режиму пуску приведеної маси піднімальної машини представлені на рис. 7.9.

З цих графіків видно, що функція ривка в процесі пуску змінюється досить плавно й у крайніх положеннях дорівнює нулю. Такий режим пуску дозволяє усувати коливання в пружних елементах піднімальної машини.

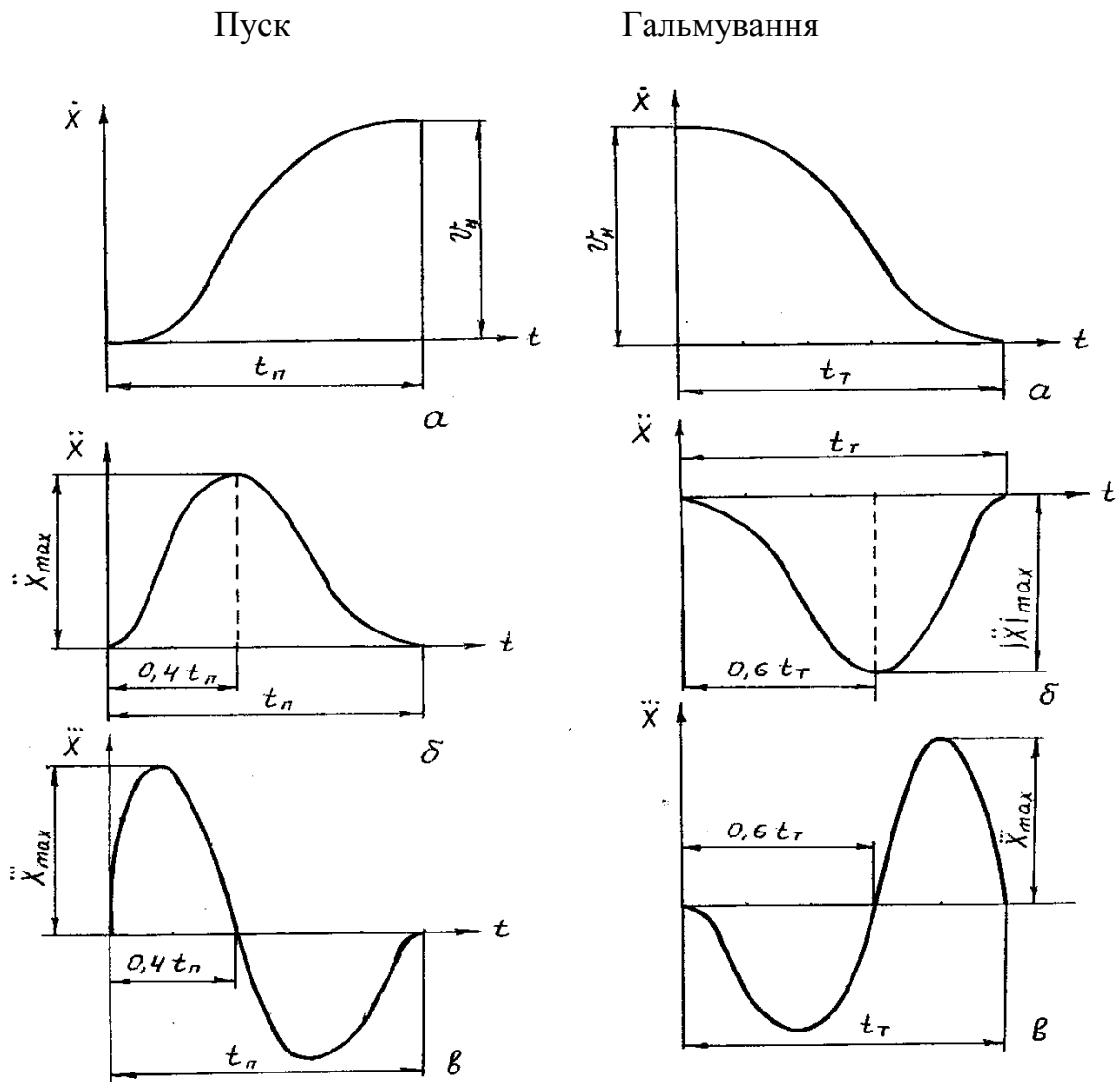


Рис. 7.9. Графіки зміни швидкості (а), прискорення (б) і ривку (в) при оптимальному за прискоренням третього порядку режимі руху m в процесі пуску і гальмування

Для визначення оптимального по прискоренням третього порядку режиму гальмування приведеної маси від сталої швидкості до повної зупинки використовуються наступні умови: початкові – $t=0$, $\dot{x} = V_n$, $\ddot{x} = \ddot{\ddot{x}} = \ddot{x}^{IV} = 0$; кінцеві – $t=t_T$, $x=H$, $\dot{x} = \ddot{x} = \ddot{\ddot{x}} = 0$. Цим граничним умовам відповідають наступні вирзи кінематичних характеристик оптимального по прискоренням третього порядку режиму руху:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V_n \left[1 - (15 - 24\bar{t} + 10\bar{t}^2) \bar{t}^4 \right]; \\ \ddot{x} &= -60V_n (1 - 2\bar{t} + \bar{t}^2) \bar{t}^3 / t_T; \\ \ddot{x} &= -60V_n (3 - 8\bar{t} + 5\bar{t}^2) \bar{t}^2 / t_T^2,\end{aligned}\tag{7.36}$$

де $\bar{t} = \frac{t}{t_m}$ – координата відносного часу в процесі гальмування.

За допомогою виразів (7.36) побудовані графіки залежностей, що визначають оптимальний за прискореннями третього порядку режим гальмування приведеної маси піднімальної машини (рис. 7.9.). Цей режим необхідно використовувати в тому випадку, коли в процесі гальмування необхідно мінімізувати коливання в елементах піднімальної машини.

Визначення оптимальних режимів руху приведеної маси піднімальної машини по прискореннях четвертого і більш високих порядків здійснюється аналогічно тому, як визначалися оптимальні режими руху більш низьких порядків. Оптимальні режими руху по прискореннях вищих порядків використовуються в тих випадках, коли в пружних ланках піднімальних машин, виникають коливання і їх необхідно звести до мінімуму.

7.3.5. Синтез режимів руху за комплексним критерієм

Розглянемо визначення комплексного оптимального режиму руху приведеної маси піднімальної машини при переміщенні її на висоту H за час t_u .

Для цього складемо вираз комплексного інтегрального критерію, що враховує енергетичні витрати, динамічну складову потужності привода й інтенсивність зміни динамічних навантажень, зважених по прискореннях. Комплексний критерій представимо у виді суми часткових безрозмірних критеріїв з ваговими коефіцієнтами, загальний вид якого представлений

залежністю (7.13). Використовуючи для приведеної маси піднімальної машини кінетичну енергію (7.9), "енергію прискорень" (7.13) і "енергію ривків" (7.22), а також мінімально можливі витрати кінетичної енергії-часу (7.13), динамічної складової потужності привода (7.17) і інерційних навантажень, зважених по ривках протягом усього циклу руху (7.26), одержимо

$$K = \int_0^{t_u} \left\{ \left[\delta_1 \dot{x}^2 + \delta_2 \ddot{x}^2 t_u^2 / 12 + (1 - \delta_1 - \delta_2) \ddot{x}^2 t_u^4 / 720 \right] t_u / H^2 \right\} dt, \quad (7.37)$$

де δ_1, δ_2 – безрозмірні вагові коефіцієнти, що враховують відповідно частку енергетичних витрат і динамічної складової потужності привода.

Підставивши підінтегральний вираз критерію (7.37) замість функції F_n у рівняння Пуассона (7.8), одержимо диференціальне рівняння, яке визначає умови комплексного оптимального режиму руху приведеної маси піднімальної машини, що враховує спільний вплив енергетичних витрат, динамічної складової потужності привода й інтенсивності зміни динамічних навантажень у часі

$$x^{VI} - n_1 x^{IV} / t_u^2 + n_2 \ddot{x} / t_u^4 = 0, \quad (7.38)$$

де $n_1 = 60 \delta_2 / (1 - \delta_1 - \delta_2)$; $n_2 = 720 \delta_1 / (1 - \delta_1 - \delta_2)$.

При розв'язку рівняння (7.38) необхідно розглядати два випадки:

1) коли $n_1 \geq 2\sqrt{n_2}$;

2) коли $n_1 < 2\sqrt{n_2}$.

У результаті розв'язування рівняння (7.38) для першого випадку, одержимо:

$$x = A_1 e^{P_1 \bar{t}} + A_2 e^{-P_1 \bar{t}} + A_3 e^{P_2 \bar{t}} + A_4 e^{-P_2 \bar{t}} + A_5 \bar{t} + A_6;$$

$$\dot{x} = [P_1(A_1 e^{P_1 \bar{t}} - A_2 e^{-P_1 \bar{t}}) + P_2(A_3 e^{P_2 \bar{t}} - A_4 e^{-P_2 \bar{t}}) + A_5]/t_y; \quad (7.39)$$

$$\ddot{x} = [P_1^2(A_1 e^{P_1 \bar{t}} + A_2 e^{-P_1 \bar{t}}) + P_2^2(A_3 e^{P_2 \bar{t}} - A_4 e^{-P_2 \bar{t}})]/t_y^2;$$

$$\ddot{x} = [P_1^3(A_1 e^{P_1 \bar{t}} - A_2 e^{-P_1 \bar{t}}) + P_2^3(A_3 e^{P_2 \bar{t}} - A_4 e^{-P_2 \bar{t}})]/t_y^3.$$

$$\text{Тут } P_1 = \sqrt{\left(n_1 + \sqrt{n_1^2 - 4n_2}\right)/2}; \quad ; P_2 = \sqrt{\left(n_1 - \sqrt{n_1^2 - 4n_2}\right)/2};$$

$$\bar{t} = \frac{t}{t_y} - \text{відносна координата часу};$$

$A_1, A_2, \dots, A_6$ – постійні інтегрування, які при початкових умовах періоду руху $t = 0, x = 0, \dot{x} = 0, \ddot{x} = 0$ і його кінцевих умов – $t = t_y, x = H, \dot{x} = 0, \ddot{x} = 0$ визначаються наступними залежностями:

$$\begin{aligned} A_4 &= H / \left\{ \left(e^{-P_2} + P_2 - 1 + P_2^2 \left[\left(e^{P_1} - e^{-P_2} \right) \left(e^{P_1} - e^{-P_1} - 2P_1 \right) / \left(e^{P_1} - e^{-P_1} \right) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - e^{P_1} + P_1 + 1 \right] / P_1^2 - \left\{ e^{P_2} - P_2 - 1 + P_2^2 \left[\left(e^{P_1} - e^{P_2} \right) \left(e^{P_1} - e^{-P_1} - 2P_1 \right) / \left(e^{P_1} - e^{-P_1} \right) - \right. \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - e^{P_1} + P_1 + 1 \right] / P_1^2 \right\} \{ 1 - e^{-P_2} + P_2 \left[\left(e^{P_1} - e^{-P_2} \right) \left(e^{P_1} + e^{-P_1} - 2 \right) / \left(e^{P_1} - e^{-P_1} \right) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - e^{P_1} + 1 \right] / P_1 \right\} \{ e^{P_2} - 1 + P_2 \left[\left(e^{P_1} - e^{-P_2} \right) \left(e^{P_1} + e^{-P_1} - 2 \right) / \left(e^{P_1} - e^{-P_1} \right) - e^{P_1} + 1 \right] / P_1 \} \right\}; \\ A_3 &= \frac{-A_4 \{ 1 - e^{-P_2} + P_2 \left[\left(e^{P_1} - e^{-P_2} \right) \left(e^{P_1} + e^{-P_1} - 2 \right) / \left(e^{P_1} - e^{-P_1} \right) - e^{P_1} + 1 \right] / P_1 \}}{e^{P_2} - 1 + P_2 \left[\left(e^{P_1} - e^{-P_2} \right) \left(e^{P_1} + e^{-P_1} - 2 \right) / \left(e^{P_1} - e^{-P_1} \right) - e^{P_1} + 1 \right] / P_1}; \\ A_2 &= \frac{-P_2 [A_3 (e^{P_1} - e^{P_2}) + A_4 (e^{P_1} - e^{P_2})]}{P_1^2 (e^{P_1} - e^{-P_1})}; \end{aligned} \quad (7.40)$$

$$A_1 = -A_2 - P_2^2 (A_3 + A_4) / P_1^2;$$

$$A_5 = P_1 (A_2 - A_1) + P_2 (A_4 - A_3);$$

$$A_6 = -A_1 - A_2 - A_3 - A_4.$$

Для випадку, коли $n < 2\sqrt{n_2}$, кінематичні характеристики приведеної маси m мають вид:

$$\begin{aligned} x &= e^{r\bar{t}}(B_1 \sin k\bar{t} + B_2 \cos k\bar{t}) + e^{-r\bar{t}}(B_3 \sin k\bar{t} + B_4 \cos k\bar{t}) + B_5 \bar{t} + B_6; \\ \dot{x} &= \{e^{r\bar{t}}[B_1(r \sin k\bar{t} + k \cos k\bar{t}) + B_2(r \cos k\bar{t} - k \sin k\bar{t})] - \\ &\quad - e^{-r\bar{t}}[B_3(r \sin k\bar{t} - k \cos k\bar{t}) + B_4(r \cos k\bar{t} + k \sin k\bar{t})] + B_5\} / t_y; \\ \ddot{x} &= \{ \{e^{r\bar{t}}\{B_1[(r^2 - k^2) \sin k\bar{t} + 2rk \cos k\bar{t}] + \\ &\quad + B_2[(r^2 - k^2) \cos k\bar{t} - 2rk \sin k\bar{t}]\} + \\ &\quad + e^{-r\bar{t}}\{B_3[(r^2 - k^2) \sin k\bar{t} - 2rk \cos k\bar{t}] + \\ &\quad + B_4[(r^2 - k^2) \cos k\bar{t} + 2rk \sin k\bar{t}]\}\} \} / t_y^2; \\ \ddot{\ddot{x}} &= \{ \{e^{r\bar{t}}\{B_1[r(r^2 - 3k^2) \sin k\bar{t} - k(k^2 - 3r^2) \cos k\bar{t}] + \\ &\quad + B_2[k(k^2 - 3r^2) \sin k\bar{t} + r(r^2 - 3k^2) \cos k\bar{t}]\} - \\ &\quad - e^{-r\bar{t}}\{B_3[r(r^2 - 3k^2) \sin k\bar{t} + k(k^2 - 3r^2) \cos k\bar{t}] + \\ &\quad + B_4[k(k^2 - 3r^2) \sin k\bar{t} - r(r^2 - 3k^2) \cos k\bar{t}]\}\} \} / t_y^3. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Тут $r = \sqrt[4]{n_2} \cos \alpha / 2$; $\alpha = \arctg \sqrt{4n_2 / n_1^2 - 1}$; $k = \sqrt{n_2} \sin \alpha / 2$;

$B_1, B_2, \dots, B_6$ – постійні інтегрування, які визначаються з тих же граничних умов, що й $A_1, A_2, \dots, A_6$.

Постійні інтегрування B_2, B_3 і B_4 визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} a_{11}B_2 + a_{12}B_3 + a_{13}B_4 &= 0; \\ a_{21}B_2 + a_{22}B_3 + a_{23}B_4 &= 0; \end{aligned} \quad (7.42)$$

$$a_{31}B_2 + a_{32}B_3 + a_{33}B_4 = 0,$$

де a_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$) – постійні коефіцієнти при невідомих B_2, B_3 і B_4 , які визначаються наступними залежностями:

$$a_{11} = e^r \left\{ (r^2 - k^2) \cos k - 2rk \sin k - \frac{r^2 - k^2}{2rk} [(r^2 - k^2) \sin k + 2rk \cos k] \right\};$$

$$a_{12} = e^r [(r^2 - k^2) \sin k + 2rk \cos k] + e^{-r} [(r^2 - k^2) \sin k - 2rk \cos k];$$

$$a_{13} = -e^r \frac{r^2 - k^2}{2rk} [(r^2 - k^2) \sin k + 2rk \cos k] + e^{-r} [(r^2 - k^2) \cos k + 2rk \sin k];$$

$$a_{21} = \frac{r^2 - k^2}{2r} - r - e^r \left[\frac{r^2 - k^2}{2rk} (r \sin k + k \cos k) - r \cos k + k \sin k \right]; \quad (7.43)$$

$$a_{22} = e^r (r \sin k + k \cos k) - e^{-r} (r \sin k - k \cos k) - 2k;$$

$$a_{23} = \frac{r^2 - k^2}{2r} + r - e^r \frac{r^2 - k^2}{2rk} (r \sin k + k \cos k) - e^{-r} (r \cos k + k \sin k);$$

$$a_{31} = \frac{r^2 - k^2}{2r} - r - 1 - e^r \left[\frac{r^2 - k^2}{2rk} \sin k - \cos k \right];$$

$$a_{32} = (e^r + e^{-r}) \sin k - 2k;$$

$$a_{33} = \frac{r^2 - k^2}{2r} + r - 1 - e^r \frac{r^2 - k^2}{2rk} \sin k + e^r \cos k.$$

Система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь (7.42) з урахуванням коефіцієнтів (7.43) може бути розв'язана, наприклад, методом Крамера чи іншим методом розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Інші постійні інтегрування визначаються залежностями:

$$B_1 = B_3 - (B_2 + B_4) \frac{r^2 - k^2}{2rk};$$

$$B_5 = -(B_1 + B_3)k - (B_2 - B_4)r; \quad (7.44)$$

$$B_6 = -B_2 - B_4.$$

У виразах кінематичних характеристик приведеної маси, визначених як залежностями (7.39), так і (7.41) входять вагові коефіцієнти δ_1 і δ_2 . Ці коефіцієнти можуть приймати значення в області, обмеженій осями ординат $\delta_1=0$, абсцис $\delta_2=0$ і прямої АВ – $\delta_2=1-\delta_1$ (рис. 7.10). Ця область розділена на дві зони 1 і 2, границя між який описується рівнянням

$$\delta_2 = \frac{2}{3} \sqrt{\delta_1 \left\{ 1 - \delta_1 - \frac{2}{3} \sqrt{\delta_1 \left[1 - \delta_1 - \frac{2}{3} \sqrt{\delta_1 (1 - \delta_1)} \right]} \right\}}. \quad (7.45)$$

Якщо значення вагових коефіцієнтів знаходяться в зоні 1, то рух приведеної маси піднімальної машини описується рівняннями (7.39), а якщо в зоні 2, то – (7.41). Отримані раніше часткові оптимальні режими руху відповідають наступним точкам на площині вагових коефіцієнтів (рис. 7.10): А – енергетичний режим; В – динамічний режим; С – рівковий режим.

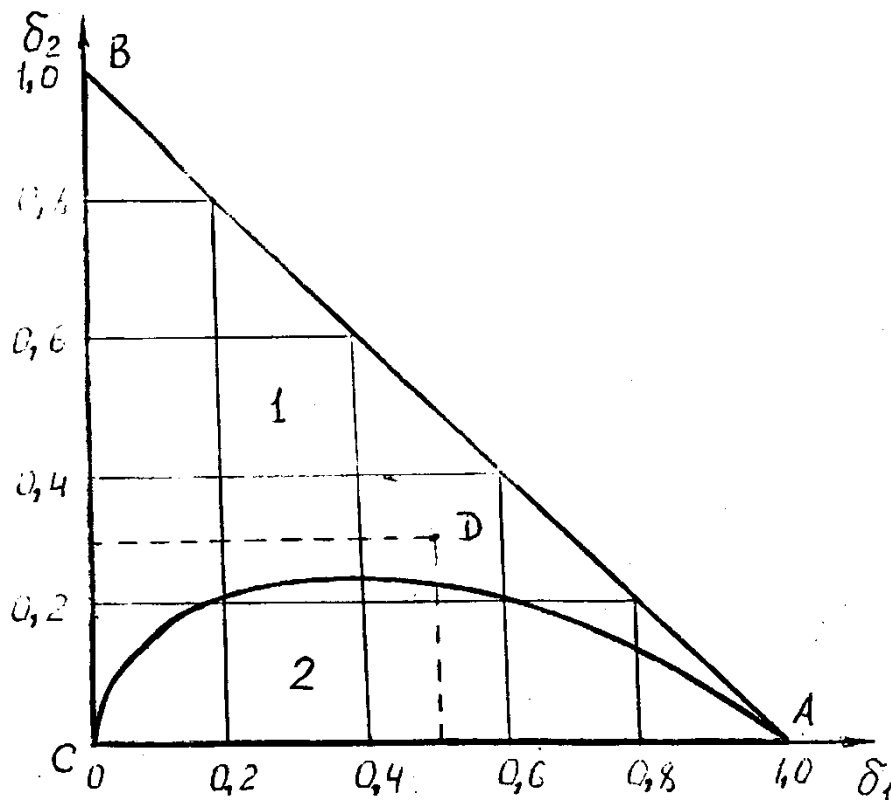


Рис. 7.10. Область існування вагових коефіцієнтів

Якщо при дослідженні режиму руху піднімальної машини викликають інтерес енергетичні і ривкові характеристики, то вагові коефіцієнти вибираються на відрізку AC осі абсцис, тобто $\delta_2=0$, а δ_1 може приймати значення від 0 до 1. При врахуванні тільки динамічних і ривкових характеристик коефіцієнти вагомості вибираються на ділянці BC осі ординат, а при врахуванні енергетичних і динамічних характеристик – на відрізку AB прямої $\delta_2=1-\delta_1$.

Для кожної конкретної піднімальної машини значення вагових коефіцієнтів δ_1 і δ_2 можуть бути визначені шляхом зіставлення максимальних значень відповідних кінематичних характеристик з їх припустимими значеннями. Наприклад, для приведеної маси піднімальної машини можуть бути зіставлені максимальні значення швидкості $\dot{x}_{\max}$ і ривка $\ddot{x}_{\max}$ з їх припустимими значеннями V_M і b_M . Розглянемо алгоритм визначення коефіцієнтів δ_1 і δ_2 для випадку, коли рух приведеної маси описується

залежностями (7.39). Швидкість, визначена виразом (7.39), приймає максимальне значення в момент часу $t = t_y / 2$, ривок – при $t = 0$. Виходячи з цих даних, одержуємо систему двох трансцендентних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \left[P_1 (A_1 e^{P_1/2} - A_2 e^{-P_1/2}) + P_2 (A_3 e^{P_2/2} - A_4 e^{-P_2/2}) + A_5 \right] / t_y = V_m; \\ & \left[P_1^3 (A_1 - A_2) + P_2 (A_3 - A_4) \right] / t_y^3 = b_m. \end{aligned} \quad (7.46)$$

У системі рівнянь (7.46) невідомими параметрами є P_1 і P_2 , які можуть бути визначені, наприклад методом варіації параметра. За значеннями P_1 і P_2 знаходимо:

$$n_1 = P_1^2 P_2^2; \quad n_2 = P_1^2 P_2^2, \quad (7.47)$$

а по n_1 і n_2 –

$$\begin{aligned} \delta_2 &= 720 n_2 / [(n_1 + 60)(n_2 + 720)]; \\ \delta_1 &= 1 - [(n_1 + 60) / n_1] \delta_2. \end{aligned} \quad (7.48)$$

При визначенні комплексних оптимальних режимів руху піднімальних машин у перехідних процесах (пуск, гальмування) у комплексному критерії не враховується складова енергетичних витрат, тому що вони практично не впливають на режими руху на цих ділянках. Для вертикального переміщення приведеної маси піднімальної машини на ділянках перехідних процесів з урахуванням виразів (7.13), (7.19), (7.21), (7.22), (7.28), (7.30) комплексний критерій має вигляд

$$K = \frac{3}{4} \cdot \frac{t_{п(т)}^2}{V_H^2} \int_0^{t_{п(т)}} \left[\delta \ddot{x}^2 + \frac{5}{72} (1 - \delta) t_1 \ddot{x}^2 \right] dt, \quad (7.49)$$

де $t_{п(т)}$ – тривалість перехідного процесу (пуску чи гальмування); δ – ваговий коефіцієнт, що враховує частку динамічної складовий потужності привода.

Умовою мінімуму інтегрального функціонала (7.49) є рівняння Пуассона (7.6), у яких функція W замінена на підінтегральний вираз критерію (7.49), а узагальнені координати $\dot{q}_k, \ddot{q}_k$ і $\ddot{q}_k$ на $x, \dot{x}, \ddot{x}$ і $\ddot{x}$. Після зазначених заміन і підстановок одержимо диференціальне рівняння для визначення оптимального комплексного режиму перехідного процесу приведеної маси піднімальної машини

$$n^{VI} - \frac{n}{t_{P(T)}} x^{IV} = 0, \quad (7.50)$$

де $n = \sqrt{72\delta/[5(1-\delta)]}$. розв'язавши рівняння (7.50), одержимо:

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cdot e^{nt} + C_2 \cdot e^{-nt} + C_3 \cdot \bar{t}^3 + C_4 \cdot \bar{t}^2 + C_5 \cdot \bar{t} + C_6; \\ \dot{x} &= [n \cdot (C_1 \cdot e^{nt} - C_2 \cdot e^{-nt}) + 3 \cdot C_3 \cdot \bar{t}^2 + 2 \cdot C_4 \cdot \bar{t} + C_5] / t_{P(T)}; \\ \ddot{x} &= [n^2 \cdot (C_1 \cdot e^{nt} - C_2 \cdot e^{-nt}) + 6 \cdot C_3 \cdot \bar{t} + 2 \cdot C_4] / t_{P(T)}^2; \\ \ddot{x} &= [n^3 \cdot (C_1 \cdot e^{nt} - C_2 \cdot e^{-nt}) + 6 \cdot C_3] / t_{P(T)}^3, \end{aligned} \quad (7.51)$$

де $\bar{t} = t/t_{P(T)}$ – координата відносного часу перехідного процесу; $C_1, C_2, \dots, C_6$ – постійні інтегрування, що визначаються з крайових умов руху.

Для комплексного режиму руху приведеної маси піднімальної машини на ділянках пуску і гальмування використовуються такі ж крайові умови, як і при визначенні оптимального ривкового режиму на цих ділянках, які дають:

при пуску –

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{V_H t_{II}}{n} \left/ \left\{ \frac{e^{-n}(n+1)-1}{e^n(n-1)+1} \left[e^n \cdot \left(1 - \frac{n^2}{2} \right) - n - 1 \right] - e^{-n} \cdot \left(1 - \frac{n^2}{2} \right) - n + 1 \right\} \right.; \\
C_1 &= C_2 \cdot \frac{e^{-n}(n+1)-1}{e^n(n-1)+1}; \quad C_3 = -\frac{n^3}{6} \cdot (C_1 e^n - C_2 e^{-n}); \\
C_4 &= -\frac{n^2}{2} \cdot (C_1 + C_2); \quad C_5 = -n \cdot (C_1 - C_2),
\end{aligned} \tag{7.52}$$

а при гальмуванні –

$$\begin{aligned}
C_2 &= -\frac{V_H \cdot t_T}{n} \left/ \left[\frac{e^{-n} - n + 1}{e^n - n - 1} \cdot (n^2 + n - e^n + 1) + n^2 - n - e^{-n} + 1 \right] \right.; \\
C_1 &= -C_2 \cdot \frac{e^{-n} - n + 1}{e^n - n - 1}; \quad C_3 = -\frac{n^3}{6} \cdot (C_1 - C_2); \\
C_4 &= -\frac{n^2}{2} (C_1 + C_2); \quad C_5 = V_H - n(C_1 - C_2); \\
C_6 &= H - V_H \cdot t_T + C_1 \cdot \left(\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + n - e^n \right) - C_2 \cdot \left(\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + n - e^{-n} \right).
\end{aligned} \tag{7.53}$$

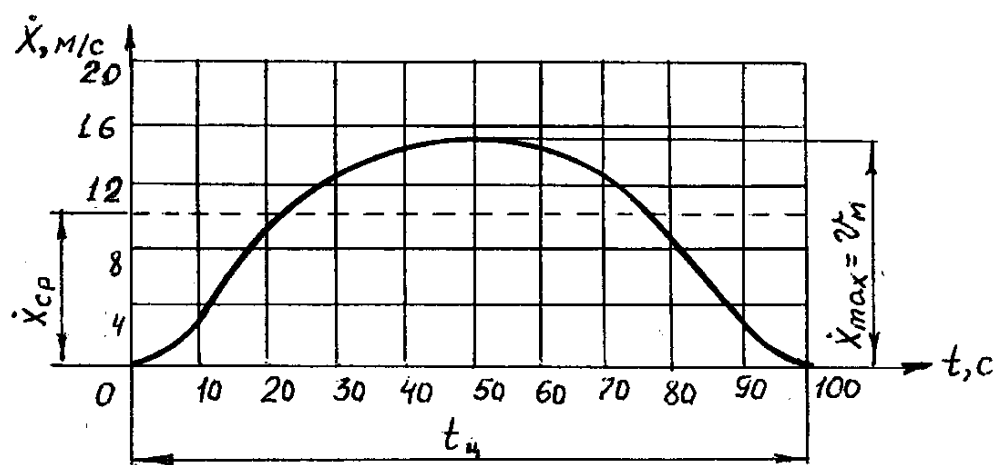
З розглянутих комплексних оптимальних режимів руху приведеної маси піднімальної машини видно, що ці режими дозволяють мінімізувати енергетичні витрати, динамічну складову потужності привода й інтенсивність зміни в часі динамічних навантажень з одночасним регулюванням цих факторів у залежності від пропонованих вимог. Зниження динамічних навантажень і інтенсивностей їхньої зміни в часі приводить до зменшення амплітуди коливань елементів піднімальної машини, що дозволяє підвищити її надійність і точність виконання технологічних операцій підйому й опускання.

Визначимо оптимальний комплексний режим руху піднімальної машини протягом усього циклу руху тривалістю $t_{\text{ц}}=100$ с при підйомі посудини на висоту $H=1000$ м при обмеженнях на швидкість руху $V_M=15$ м/с і ривок $b_M=0,08$ м/с³. З рівнянь (7.46) з урахуванням постійних інтегрування (7.40) знаходимо: $P_1=7,75$ і $P_2=5,48$; з (7.47) – $n_1=90$ і $n_2=1800$;

з (7.48) – $\delta_1=0,5$ і $\delta_2=0,3$. Цим значенням вагових коефіцієнтів відповідає точка D на рис. 7.10, яка належить зоні 1. Тому кінематичні характеристики комплексного оптимального режиму руху приведеної маси піднімальної машини обчислюються залежностями (7.39) з урахуванням постійних інтегрування, визначених виразами (7.40).

За результатами обчислень побудовані графіки (рис. 7.11) комплексного оптимального режиму руху приведеної маси піднімальної машини, представленого кінематичними характеристиками. При тій же тривалості циклу руху машини $t_{\text{ц}}=100$ с і інших значеннях δ_1 і δ_2 побудовані графіки (рис. 7.12): оптимального енергетичного режиму (криві – 1, $\delta_1=1$, $\delta_2=0$); оптимального динамічного режиму (криві – 2, $\delta_1=0$, $\delta_2=1$); оптимального ривкового режиму (криві – 3, $\delta_1=\delta_2=0$).

Оптимальний енергетичний режим руху забезпечує найменше максимальне значення швидкості, але, як відзначалося раніше, його не можна здійснити на практиці для піднімальних машин, що здійснюють циклічний рух. Наблизитися до такого режиму руху можна шляхом скорочення до мінімуму тривалості ділянок пуску і гальмування. При надмірному скороченні цих ділянок можуть значно зрости динамічні навантаження. Тому при виборі режимів руху піднімальних машин необхідно враховувати ці навантаження.



а

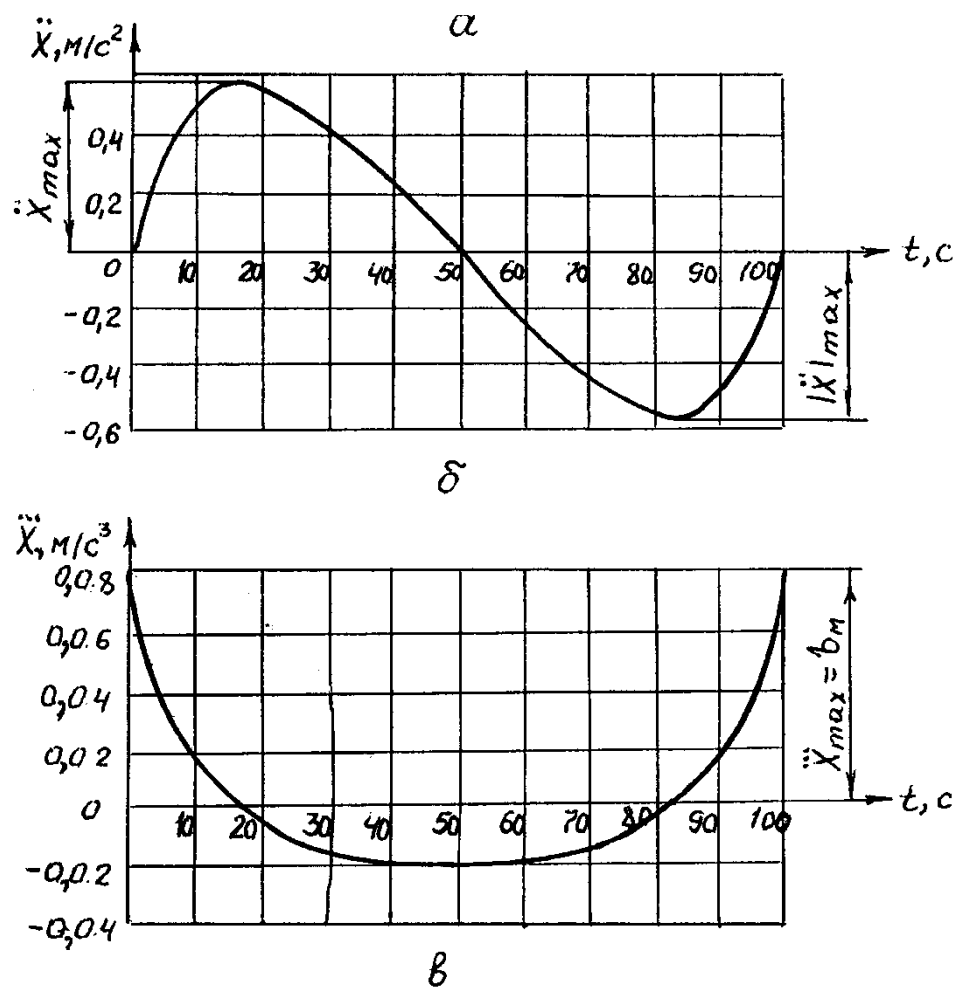


Рис. 7.11. Графіки зміни швидкості (а), прискорення (б) і ривка (в) піднімальної машини при оптимальному комплексному режимі руху

Оптимальний динамічний режим руху реалізується на практиці, але при ньому на початку і наприкінці циклу руху миттєво наростають (убувають) прискорення і приймають максимальні значення. Це є небажаним, тому що стрибкоподібна зміна прискорення збуджує в механічній передачі привода значні коливання. У зв'язку з цим оптимізація режимів руху піднімальних машин повинна здійснюватися з урахуванням інтенсивності зміни прискорень (ривків).

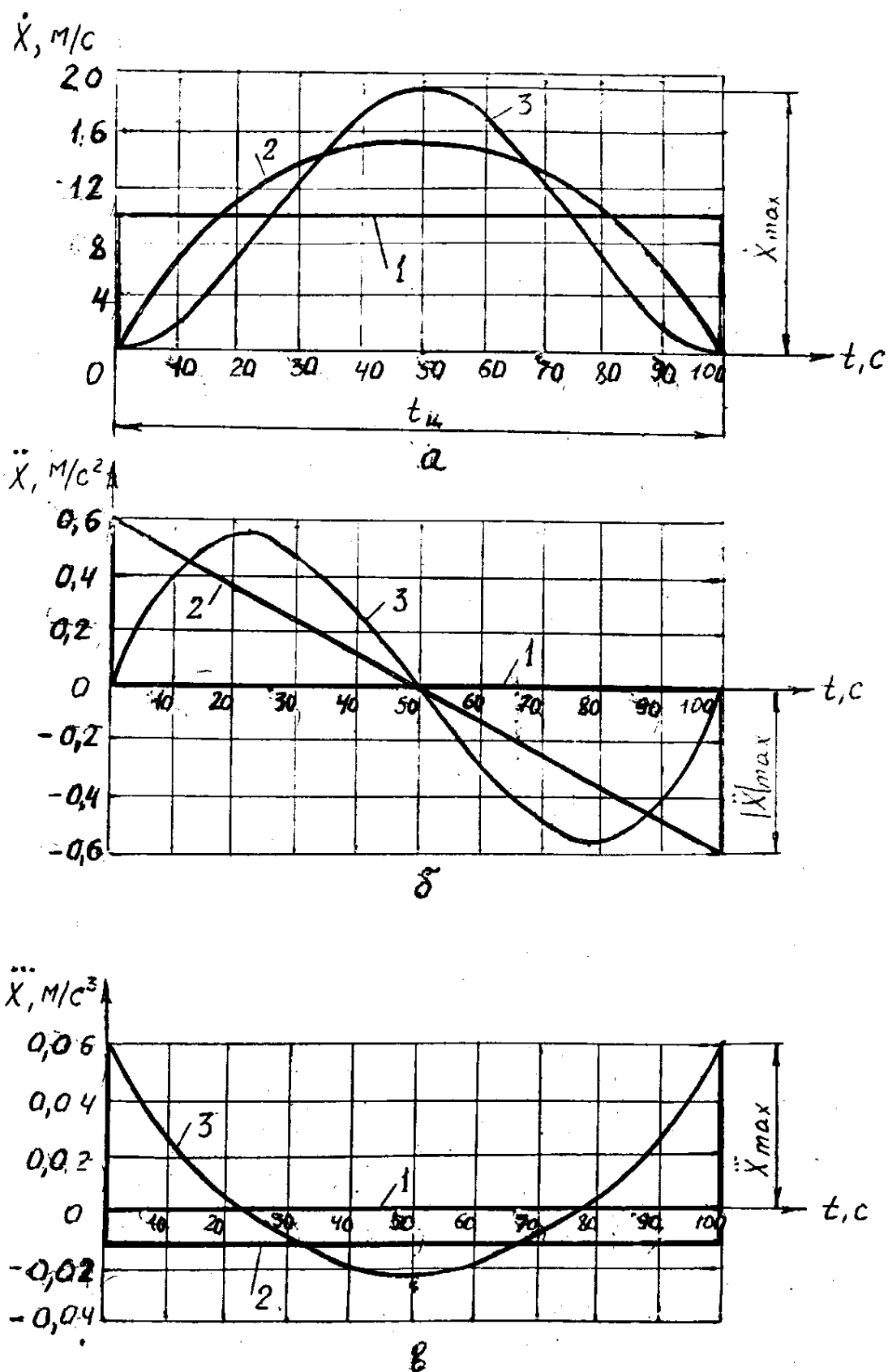


Рис. 7.12. Графіки зміни швидкості (а), прискорення (б) і ривка (в) піднімальної машини при оптимальних режимах руху: 1 - енергетичному; 2 - динамічному; 3 - рівковому

Оптимальний ривковий режим руху піднімальної машини дозволяє досягти нульових значень прискорень на початку і наприкінці циклу і плавної їхньої зміни протягом усієї ділянки руху, що дає можливість на порядок знизити амплітуду коливань у пружних ланках у порівнянні зі стрибкоподібною зміною прискорення.

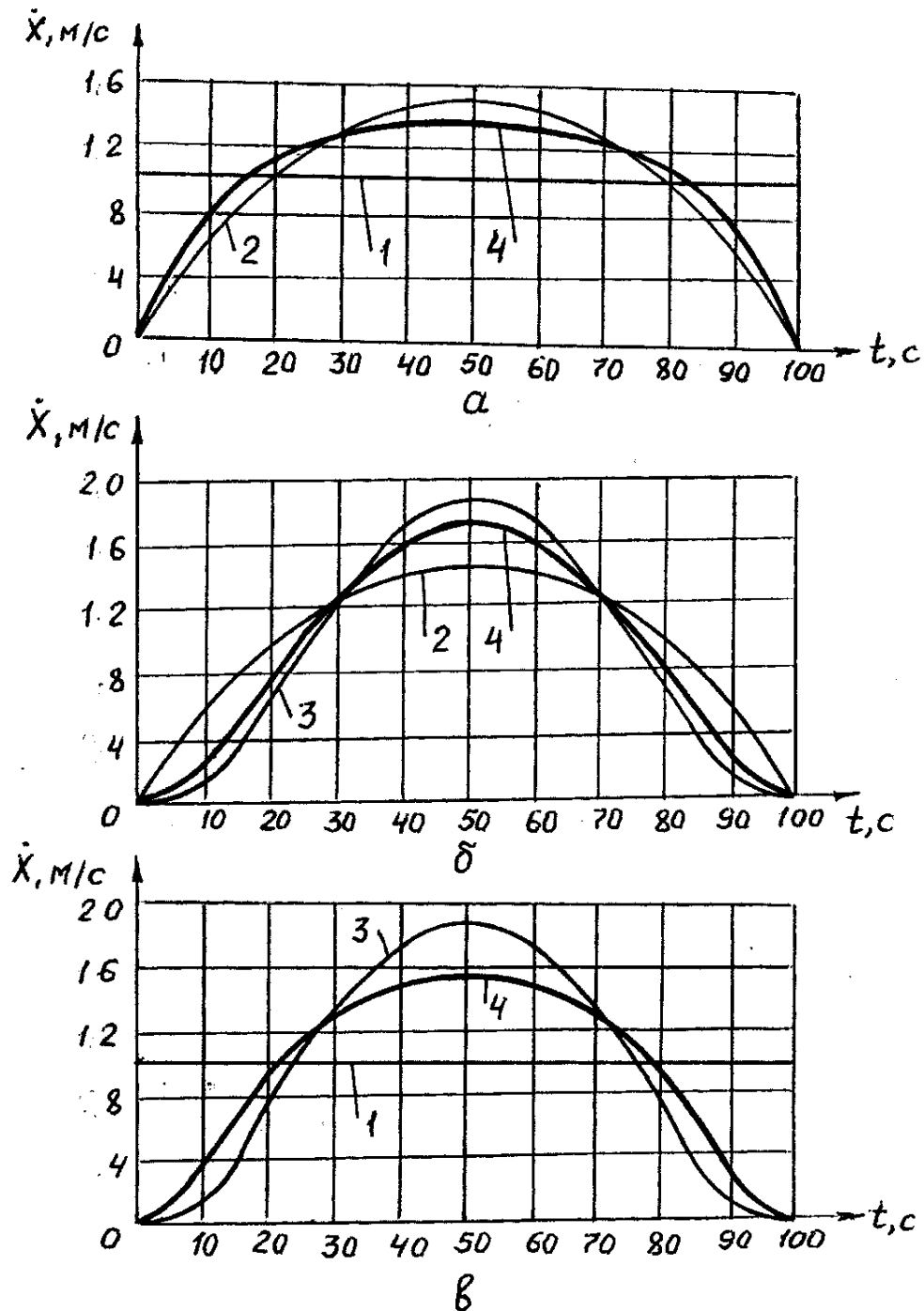


Рис. 7.13. Графіки зміни швидкостей комплексного оптимального режиму руху піднімальної машини (криві 4) при одночасному врахуванні

характеристик: а - енергетичних (пряма 1) і динамічних (крива 2); б - динамічних (крива 2) і ривкових (крива 3); у - енергетичних (пряма 1) і ривкових (крива 3)

Однак при такому режимі руху значно зростають енергетичні витрати через значне збільшення максимального значення швидкості.

Аналіз часткових оптимальних режимів руху піднімальних машин показує, що поліпшення одних показників приводить до погіршення інших. Тому найбільш сприятливим варто визнати комплексний оптимальний режим руху, що може забезпечити різні прискорення, включаючи і нульові, на початку і наприкінці руху, і плавну їхню зміну протягом усього циклу. Це видно на прикладі комплексного оптимального режиму руху піднімальної машини (рис. 7.11). Крім того, цей режим руху дозволяє врахувати в потрібних пропорціях вплив енергетичних витрат, динамічної складової потужності привода й інтенсивності зміни в часі динамічних навантажень.

З розглянутого режиму руху піднімальної машини видно, що характер комплексного оптимального режиму руху залежить від значень вагових коефіцієнтів. Покажемо, як змінюється комплексний оптимальний режим руху, коли один з факторів (енергетичні витрати, динамічна складова потужності привода чи інтенсивність зміни в часі динамічних навантажень) не враховується. Для цього побудуємо графіки зміни швидкостей приведеної маси піднімальної машини, які відповідають можливим варіантам сполучення двох факторів комплексних оптимальних режимів руху (рис. 7.13, криві – 4). З цих графіків видно, що швидкості таких оптимальних режимів руху знаходяться між швидкостями часткових оптимальних режимів: енергетичним (пряма – 1) і динамічним (крива – 2), коли $\delta_1 + \delta_2 = 1$ (рис. 7.13, а); динамічним і ривковим (крива – 3) – $\delta_1 = 0$ (рис. 7.13, б); ривковим і енергетичним – $\delta_2 = 0$ (рис. 7.13, в). Якщо в розглянутих комплексних оптимальних режимах руху віддати перевагу якому-небудь одному фактору, то одержимо один із часткових оптимальних режимів.

Приведені на рис. 7.13 графіки дозволяють оцінити вплив вагових коефіцієнтів на комплексний оптимальний режим руху.

Збільшення коефіцієнта δ_1 приводить до зниження максимального значення швидкості, але збільшує прискорення на початку і наприкінці циклу руху. Це видно з крутості зміни швидкості комплексного оптимального режиму руху в ці моменти (рис. 7.13, а).

При наближенні до оптимального енергетичного режиму руху прискорення в крайніх положеннях значно зростають і прагнуть до нескінченності. Чим менше $\delta_1 + \delta_2$, тим повільніше наростає прискорення, тобто зменшується інтенсивність зміни динамічних навантажень, але значно зростає максимальне значення швидкості.

При $\delta_1 = \delta_2 = 0$ (оптимальний рівковий режим руху) максимальне значення швидкості зростає до $1,85 \dot{x}_{cp}$. Для прикладу відзначимо, що при оптимальному динамічному режимі руху максимальне значення швидкості дорівнює $\dot{x}_{max} = 1,5 \cdot \dot{x}_{cp}$, а при оптимальному енергетичному режимі – $\dot{x}_{max} = \dot{x}_{cp}$.

У ряді випадків на кінематичні характеристики елементів піднімальної машини вводяться певні обмеження. Так, для піднімальної машини з номінальною швидкістю сталого руху $V_H = 10$ м/с при обмеженні на максимальне прискорення й уповільнення піднімальної посудини на ділянках несталого руху $a_M \leq 0,8 \text{ м/с}^2$ визначимо оптимальні комплексні режими пуску і гальмування.

Розглянемо випадок, коли частка динамічної складовий потужності привода в комплексному критерії (7.49) складає $\delta = 0,5$. Цьому значенню δ відповідає $n = 3,79$.

Для розглянутих параметрів руху піднімальної машини визначені мінімальні тривалості ділянок пуску і гальмування $t_{\Pi} = t_T = 22,5$ с.

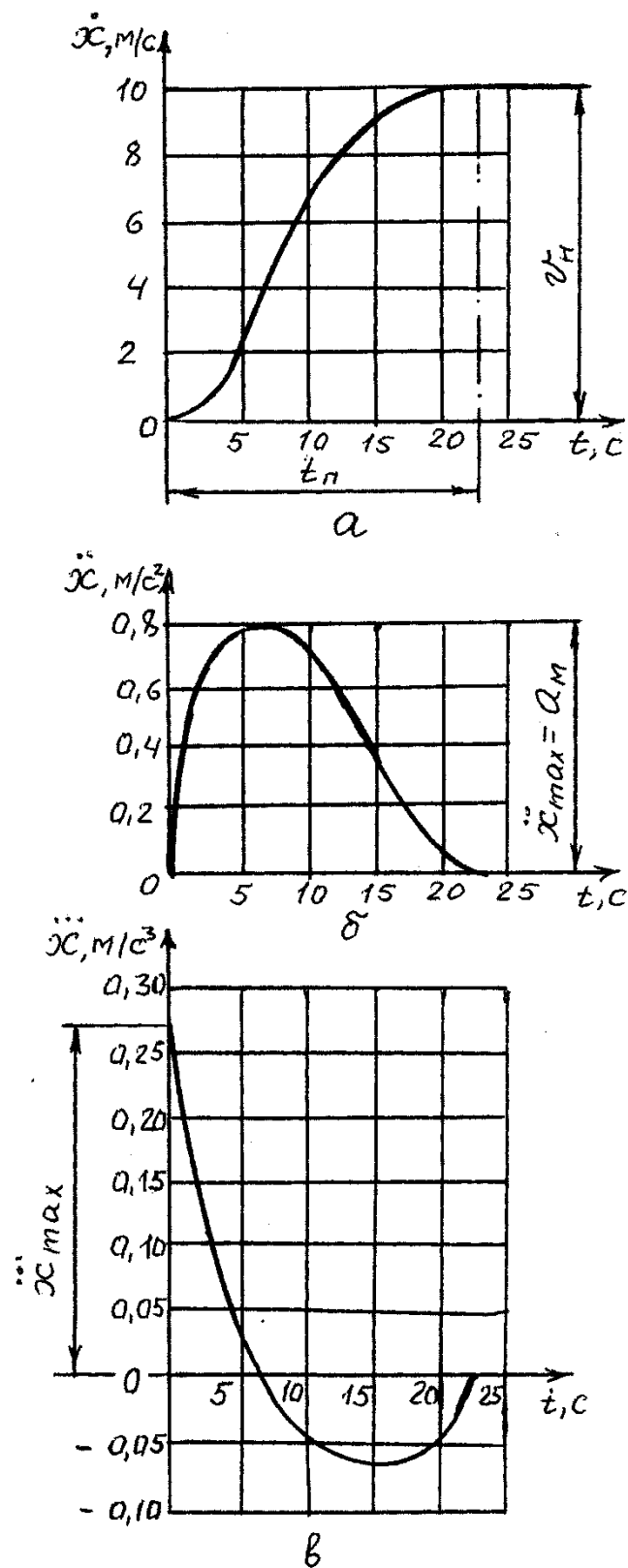


Рис. 7.14. Графіки зміни швидкості (а), прискорення (б) і ривка (в) оптимального комплексного режимів руху приведеної маси піднімальної машини в процесі пуску

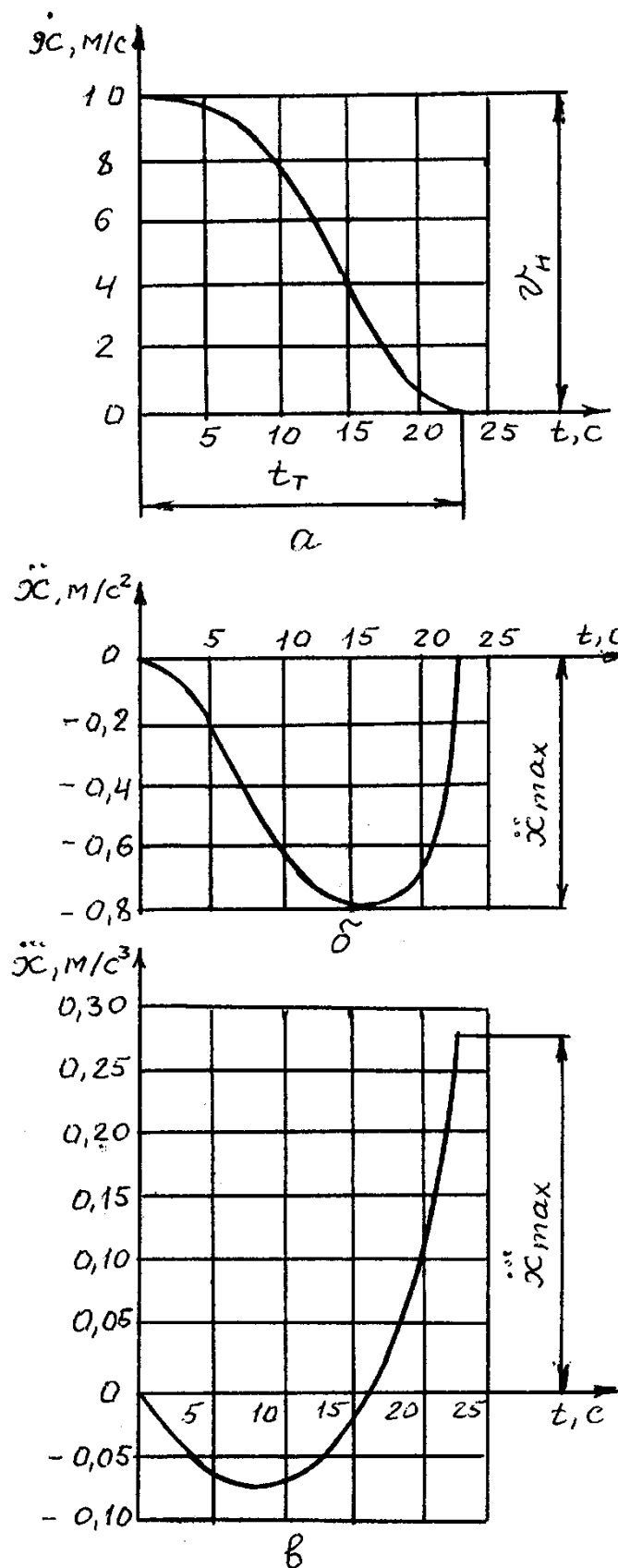


Рис. 7.15. Графіки зміни швидкості (а), прискорення (б) і ривка (в) оптимального комплексного режимів руху приведеної маси піднімальної машини в процесі гальмування

По цих даних за допомогою залежностей (7.51) і постійних інтегрування (7.52) і (7.53) побудовані графіки зміни кінематичних характеристик комплексних оптимальних режимів пуску (рис. 7.14) і гальмування (рис. 7.15) приведеної маси піднімальної машини.

7.4. Оптимізація режимів руху на кінцевій стадії проектування

На кінцевій стадії проектування піднімальної машини відомі її структурна і кінематична схеми, розміри і масові характеристики елементів, тип приводного двигуна і його характеристики і т.д. Це дозволяє вибирати режим руху піднімальної машини з урахуванням її конструктивних параметрів, отриманих на попередніх стадіях проектування. При цьому динамічна модель машини вибирається досить повною, щоб були враховані основні елементи і їхні властивості. У цілому методика визначення оптимального режиму руху машини на кінцевій стадії проектування аналогічна тій, котра застосовується на початковій стадії проектування й описана раніше. Розходження полягає лише в більш повній динамічній моделі на кінцевій стадії проектування і, як наслідок цього, використання більш складних математичних моделей з наступними досить громіздкими обчисленнями.

У ряді випадків на кінцевій стадії проектування піднімальних машин необхідно враховувати пружні коливання ланок, тому що вони впливають на динамічні навантаження, що виникають у процесі руху. При синтезі режимів руху з урахуванням коливань ланок піднімальних машин необхідно вибирати таку динамічну модель, у якій були б враховані координати основного руху і координати ланок, що беруть участь у коливальному русі.

Як приклад розглянемо головну ланку піднімальної машини – канатопровод, який можна представити дискретними масами, з'єднаними пружними елементами. Така модель може бути використана для дослідження режимів руху на динамічні навантаження в канатах. При цьому зміною довжини канатів у процесі руху можна знехтувати і розглядати їх

постійної довжини, тому що при оптимізації режимів руху перехідних процесів розглядаються відносно малі періоди часу в порівнянні з повним циклом роботи підйому. Дослідження динамічних навантажень у канатопроводі може проводитися при абсолютно твердому валопроводі, тому що піддатливість ланок валопровода приблизно на порядок менша піддатливості каната і практично не впливає на максимальні навантаження в ньому. При дослідженні перехідних процесів у лінії передач піднімальної машини врахування дисипативних сил у валопроводі обов'язкове, оскільки коливання високої частоти у валопроводі загасають раніше, ніж амплітуда коливань нижчої частоти, формована канатами, досягає свого максимуму. У той же час дисипативні сили в канатах під час проходження перехідних процесів можуть не враховуватися, тому що тут процес загасання коливань більш повільний.

Аналіз динаміки перехідних процесів у канатах показує, що для оптимізації режимів руху можуть бути використані тримасові чи двомасові динамічні моделі. До органа навивки приводяться моменти інерції ротора двигуна, муфт, зубчастих коліс і валів редуктора. Хвостовий канат може бути імітований невагомою пружною ланкою з жорсткістю хвостового каната і дискретною масою на його кінці рівною $2/5$ маси хвостового каната, а до піднімального – приєднується $2/3$ маси хвостового каната.

Головний канат також імітується невагомою пружною ланкою зі своєю жорсткістю і з дискретною масою піднімальної посудини з вантажем на кінці, до якої приєднується $1/3$ маси головного каната. До органа навивки також приєднується $1/3$ маси головного каната, якщо вузол першої форми коливань лежить біля барабана.

Якщо жорсткість короткого каната значно більша жорсткості довгого каната, то для приведення маси канатів довгої гілки можна знехтувати піддатливістю короткого каната і використовувати динамічну модель із двома дискретними масами, з'єднаними пружними елементами, жорсткість якого дорівнює жорсткості довгого каната (рис. 7.16).

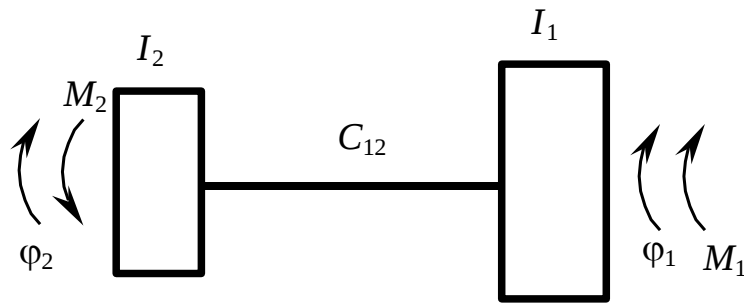


Рис. 7.16. Динамічна модель піднімальної машини для вивчення перехідних процесів у канатопроводі

У цій моделі врахований основний рух привода, здійснюваний рушійним моментом M_1 при наявності опору M_2 від ваги вантажу і канатів. За основну координату обрана координата першої приведенної маси φ_1 , а різниця цієї координати і координати другої приведенної маси φ_2 буде представляти коливальний процес у розглянутій системі.

Рівняння руху такої системи мають вид:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 &= M_1 - C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2); \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 &= C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) - M_2. \end{aligned} \quad (7.54)$$

З другого рівняння системи (7.54) знаходимо:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I_2}{C_{12}} \ddot{\varphi}_2 + \frac{M_2}{C_{12}}. \quad (7.55)$$

Диференціюючи за часом вираз (7.55) з урахуванням того, що $M_2 = \text{const}$, одержимо:

$$\Delta\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = \frac{I_2}{C_{12}} \ddot{\varphi}_2; \quad (7.56)$$

$$\Delta\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = \frac{I_2}{C_{12}} \ddot{\varphi}_2; \quad (7.57)$$

$$\Delta\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2 = \frac{I_2}{C_{12}} \ddot{\varphi}_2. \quad (7.58)$$

Залежності (7.55) – (7.58) оцінюють коливальний процес у канаті. Зменшити коливання в системі можна шляхом зведення до мінімуму максимальних чи середньоквадратичних значень переміщень $\Delta\varphi$, швидкостей $\Delta\dot{\varphi}$, прискорень $\Delta\ddot{\varphi}$ і т.д.

Визначимо режими руху піднімальної посудини, і приводного механізму, що забезпечують мінімальні середньоквадратичні відхилення кінематичних характеристик (7.55) – (7.58). Середньоквадратичне відхилення переміщень можна записати у виді інтегрального функціонала

$$\Delta\varphi_{cp} = \left[\frac{1}{t_{п(т)}} \int_0^{t_{n(m)}} \frac{1}{C_{12}^2} (I_2 \ddot{\varphi}_2 + M_2)^2 dt \right]^{1/2}, \quad (7.59)$$

де t – час; $t_{п(т)}$ – тривалість перехідного процесу (пуску чи гальмування) піднімальної машини.

Умовою мінімуму функціонала (7.59) є рівняння (7.4), у яких функція V замінена на підінтегральний вираз розглянутого функціонала, а $\ddot{q}_k$ – на $\ddot{\varphi}_2$. У результаті для процесу пуску одержимо:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \omega_n \bar{t}^2 \left(1 - \frac{\bar{t}}{3} \right) t_n; \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_n \bar{t} (2 - \bar{t}); \\ \ddot{\varphi}_2 &= 2\omega_n \frac{1 - \bar{t}}{t_n}; \end{aligned} \quad (7.60)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -2 \frac{\omega_n}{t_n^2},$$

де $\omega_n = \frac{V_n}{R}$ – кутова швидкість органа навивки; R – радіус органа навивки;

$\bar{t} = \frac{t}{t_n}$ – координата відносного часу пуску.

Як впливає із системи (7.60), для мінімізації середньоквадратичного відхилення переміщень необхідно, щоб друга приведена маса (піднімальна посудина з канатами) здійснювала режим руху, що відповідає оптимальному динамічному режиму.

Використовуючи залежності (7.55) – (7.58), визначимо режим руху першої приведеної маси (ротора двигуна, муфт, зубчастих коліс і валів редуктора, органа навивки):

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \omega_n t_n \left[\bar{t}^2 - \frac{\bar{t}^3}{3} + 2 \frac{I_2}{C_{12} t_n^2} (1 - \bar{t}) \right] + \frac{M_2}{C_{12}}; \\ \dot{\varphi}_1 &= \omega_n \left[2\bar{t} - \bar{t}^2 - 2 \frac{I_2}{C_{12} t_n^2} \right]; \\ \ddot{\varphi}_1 &= 2 \frac{\omega_n}{t_n} (1 - \bar{t}).\end{aligned}\tag{7.61}$$

Режим (7.61) руху першої приведеної маси не може бути реалізований на практиці, оскільки для його здійснення необхідно, щоб перша маса на початку руху ($\bar{t} = 0$) мала переміщення $\frac{2I_2\omega_n}{C_{12}t_n} + \frac{M_2}{C_{12}}$ і швидкість $-\frac{2I_2\omega_n}{C_{12}t_n^2}$, що не відповідає початковим і кінцевим умовам руху.

Для забезпечення мінімального середньоквадратичного відхилення

швидкостей приведених мас необхідно мінімізувати функціонал

$$\Delta \dot{\phi}_{cp} = \left[\frac{1}{t_{п(тг)}} \int_0^{t_{п(т)}} \left(\frac{I_2}{C_{12}} \ddot{\phi}_2 \right)^2 dt \right]^{1/2}. \quad (7.62)$$

Умовою мінімуму функціонала (7.62) є рівняння (7.6), у яких функція W замінена на підінтегральний вираз критерію (7.62), а $\ddot{q}_k$ – на $\ddot{\phi}_2$. Після проведення зазначених заміни і відповідних диференціювань у рівнянні (7.6) для процесу пуску будемо мати:

$$\begin{aligned} \phi_2 &= 2\omega_n t_n (1 - \bar{t} + 0,3\bar{t}^2) \bar{t}^3; \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_n (6 - 8\bar{t} + 3\bar{t}^2) \bar{t}^2; \\ \ddot{\phi}_2 &= 12\omega_n (1 - 2\bar{t} + \bar{t}^2) \bar{t} / t_n; \\ \ddot{\phi}_2 &= 12\omega_n (1 - 4\bar{t} + 3\bar{t}^2) / t_n^2; \\ \phi_2^{IV} &= 24\omega_n (3\bar{t} - 2) / t_n^3. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Отриманий оптимальний режим руху другої приведеної маси відповідає оптимальному рівковому режиму руху. Режим руху першої приведеної маси визначається через залежності (7.55 – 7.58) з використанням виразів системи (7.63), які дають:

$$\phi_1 = 2\omega_n t_n \left[0,3\bar{t}^5 - \bar{t}^4 + \bar{t}^3 + 6 \frac{I_2}{C_{12} t_n^2} (\bar{t}^3 - 2\bar{t}^2 + \bar{t}) \right] + \frac{M_2}{C_{12}};$$

$$\dot{\phi}_1 = \omega_n \left[3\bar{t}^4 - 8\bar{t}^3 + 6\bar{t}^2 + 12 \frac{I_2}{C_{12}t_n^2} (3\bar{t}^2 - 4\bar{t} + 1) \right]; \quad (7.64)$$

$$\ddot{\phi}_1 = \frac{12\omega_n}{t_n} \left[\bar{t}^3 - 2\bar{t}^2 + \bar{t} + 2 \frac{I_2}{C_{12}t_n^2} (3\bar{t} - 2) \right].$$

Отриманий оптимальний режим руху першої приведенної маси також не може бути реалізований на практиці, тому що відповідно до цього режиму руху перша маса в крайніх положеннях повинна мати швидкість руху, яка не відповідає крайовим умовам.

Мінімум середньоквадратичного відхилення прискорень розглянутих мас визначається шляхом мінімізації наступного функціонала

$$\Delta\ddot{\phi}_{cp} = \left[\frac{1}{t_{n(T)}} \int_0^{t_{n(T)}} \left(\frac{I_2}{C_{12}} \phi_2^{IV} \right)^2 dt \right]^{1/2}. \quad (7.56)$$

У результаті мінімізації функціонала (7.65) для процесу пуску розглянутої системи, одержимо:

$$\phi_2 = \omega_n t_n \left[5 - 9\bar{t} + 6\bar{t}^2 - \frac{10}{7}\bar{t}^3 \right] \bar{t}^4;$$

$$\dot{\phi}_2 = \omega_n \left[20 - 45\bar{t} + 36\bar{t}^2 - 10\bar{t}^3 \right] \bar{t}^3;$$

$$\ddot{\phi}_2 = 60 \frac{\omega_n}{t_n} (1 - 3\bar{t} + 3\bar{t}^2 - \bar{t}^3) \bar{t}^2; \quad (7.66)$$

$$\ddot{\phi}_2 = 60 \frac{\omega_n}{t_n^2} (2 - 9\bar{t} + 12\bar{t}^2 - 5\bar{t}^3) \bar{t};$$

$$\varphi_2^{IV} = 120 \frac{\omega_n}{t_n^3} (1 - 9\bar{t} + 48\bar{t}^2 - 10\bar{t}^3).$$

Режим руху (7.66) другої приведеної маси розглянутої системи відповідає оптимальному по прискореннях третього порядку режиму руху. Цей режим руху реалізується на практиці при наступному законі руху першої приведеної маси:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \omega_n t_n \left[\bar{t}^2 \left(5 - 9\bar{t} + 6\bar{t}^2 - \frac{10}{7}\bar{t}^3 \right) + 60 \frac{I_2}{C_{12} t_n^2} (1 - 3\bar{t} + 3\bar{t}^2 - \bar{t}^3) \right] \bar{t}^2 + \frac{M_2}{C_{12}}; \\ \dot{\varphi}_1 &= \omega_n \left[\bar{t}^2 (20 - 45\bar{t} + 36\bar{t}^2 - 10\bar{t}^3) + 60 \frac{I_2}{C_{12} t_n^2} (2 - 9\bar{t} + 12\bar{t}^2 - 5\bar{t}^3) \right] \bar{t}; \\ \ddot{\varphi}_1 &= 60 \frac{\omega_n}{t_n} \left[\bar{t}^2 (1 - 3\bar{t} + 3\bar{t}^2 - \bar{t}^3) + 2 \frac{I_2}{C_{12} t_n^2} (1 - 9\bar{t} + 18\bar{t}^2 - 10\bar{t}^3) \right].\end{aligned}\quad (7.67)$$

На відміну від раніше знайдених режимів руху розглянутої моделі піднімальної машини, останній режим руху реалізується на практиці. При цьому режимі руху крайові умови координат і швидкостей першої і другий приведених мас збігаються. Це значить, що після закінчення процесу пуску в системі не будуть виникати коливальні процеси.

Для піднімальної машини, модель якої представлена на рис. 7.16 і має наступні параметри: $I_1 = 29,23 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $I_2 = 5,37 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $M_2 = 32,0 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $C_{12} = 0,64 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}$; $\omega_n = 6,28 \text{ рад/с}$; $t_n = 20 \text{ с}$, побудовані графіки відхилень координат, швидкостей і прискорень першої і другої приведених мас, які відповідають мінімуму середньоквадратичного відхилення прискорень (рис. 7.17). З приведених графіків видно, що між координатами, швидкостями і прискореннями приведених мас маються відхилення, але між

ними відсутні коливальні процеси при пуску.

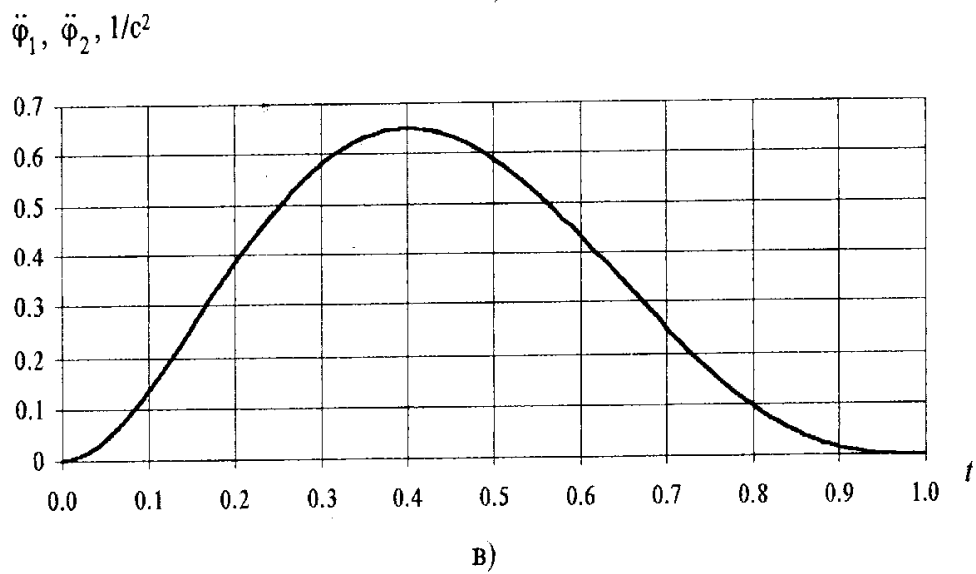
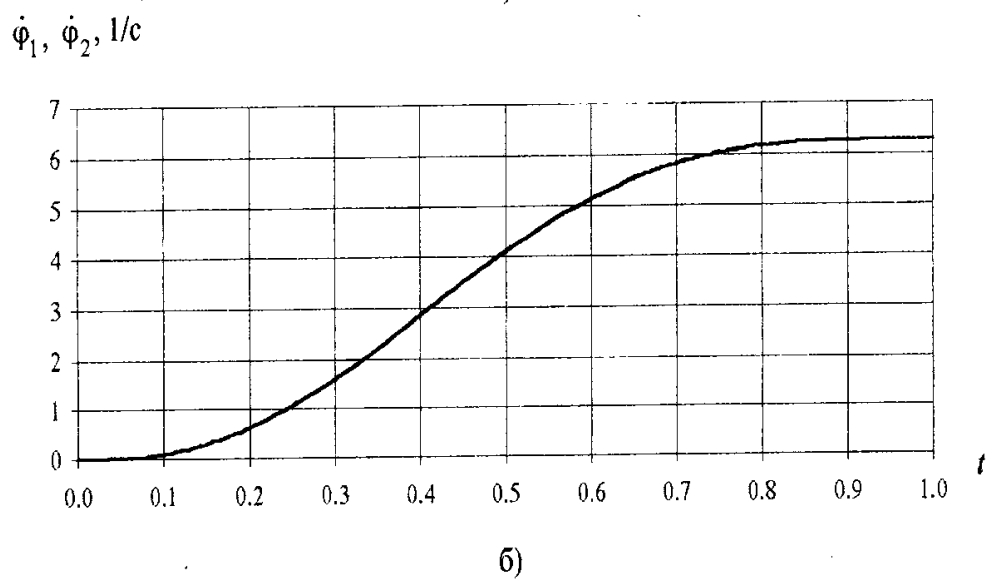
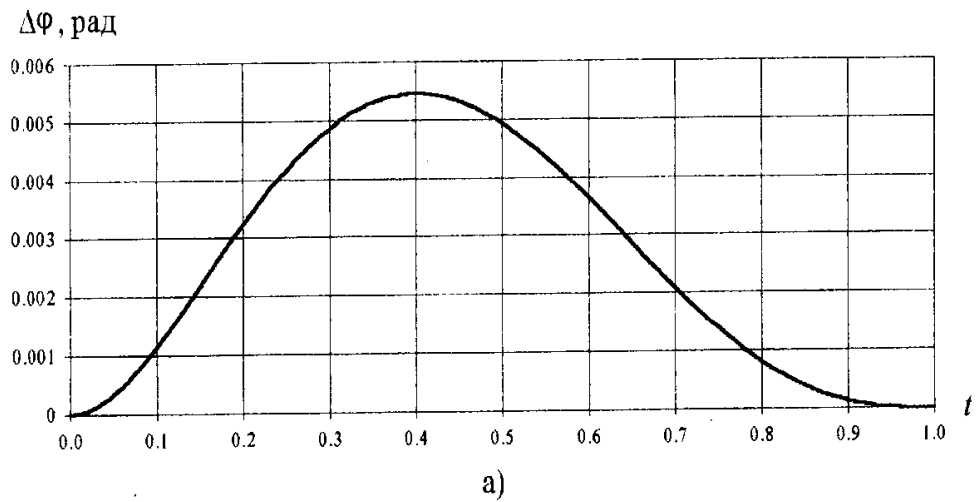


Рис. 7.17. Графіки відхилень координат, швидкостей і прискорень першої і другої приведених мас піднімальної машини, що відповідають мінімуму середньоквадратичного відхилення прискорень

Для забезпечення мінімального середньоквадратичного відхилення ривків (прискорень другого порядку) приведених мас динамічної моделі піднімальної машини, представленої на рис. 7.16, необхідно мінімізувати функціонал

$$\Delta \ddot{\varphi}_{cp} = \left[\frac{1}{t_{II(T)}} \int_0^{t_{II(T)}} \left(\frac{I_2^V}{C_{12}} \varphi_2 \right)^2 dt \right]^{1/2}. \quad (7.68)$$

Мінімум цього функціонала досягається на функціях $\varphi_2(t)$, які є розв'язком рівняння (7.8), у якому функція F_n замінена на підінтегральний вираз критерію (7.68), а координати q_k і їхні похідні на координату φ_2 і її похідні. У результаті розв'язування такого рівняння ($\varphi_2 = 0$) для крайових умов руху другої приведеної маси в процесі пуску: $t=0$, $\varphi_2=0$, $\dot{\varphi}_2=0$, $\ddot{\varphi}_2=0$, $\varphi_2^{IV}=0$ і $t=t_n$, $\dot{\varphi}_2=\omega_n$, $\ddot{\varphi}_2=0$, $\ddot{\ddot{\varphi}}_2=0$, $\varphi_2^{IV}=0$, $\varphi_2^V=0$,

одержимо:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \omega_n t_n \left(14 - \frac{112}{3} \bar{t} + 40 \bar{t}^2 - 20 \bar{t}^3 + \frac{35}{9} \bar{t}^4 \right) \bar{t}^5; \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_n \left(70 - 224 \bar{t} + 280 \bar{t}^2 - 160 \bar{t}^3 + 35 \bar{t}^4 \right) \bar{t}^4; \\ \ddot{\varphi}_2 &= 280 \frac{\omega_n}{t_n} \left(1 - 4 \bar{t} + 6 \bar{t}^2 - 4 \bar{t}^3 + \bar{t}^4 \right) \bar{t}^3; \\ \ddot{\ddot{\varphi}}_2 &= 280 \frac{\omega_n}{t_n^2} \left(3 - 16 \bar{t} + 30 \bar{t}^2 - 24 \bar{t}^3 + 7 \bar{t}^4 \right) \bar{t}^2; \end{aligned} \quad (7.69)$$

$$\varphi_2^{IV} = 1680 \frac{\omega_n}{t_n^3} (1 - 8\bar{t} + 20\bar{t}^2 - 20\bar{t}^3 + 7\bar{t}^4) \bar{t},$$

Отриманий режим руху (7.69) для другої приведеної маси піднімальної машини відповідає оптимальному по прискореннях четвертого порядку режиму руху. Цьому режиму руху відповідає наступний режим руху першої приведеної маси:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \omega_n t_n \left[\bar{t}^2 \left(14 - \frac{112}{3} \bar{t} + 40 \bar{t}^2 - 20 \bar{t}^3 + \frac{35}{9} \bar{t}^4 \right) + \right. \\ \left. + 280 \frac{I_2}{C_{12} t_n^2} (1 - 4\bar{t} + 6\bar{t}^2 - 4\bar{t}^3 + \bar{t}^4) \right] \bar{t}^3; \\ \dot{\varphi}_1 = \omega_n \left[\bar{t}^2 (70 - 224\bar{t} + 280\bar{t}^2 - 160\bar{t}^3 + 35\bar{t}^4) + \right. \\ \left. + 280 \frac{I_2}{C_{12} t_n^2} (3 - 16\bar{t} + 30\bar{t}^2 - 24\bar{t}^3 + 7\bar{t}^4) \right] \bar{t}^2; \end{aligned} \quad (7.70)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 = 280 \frac{\omega_n}{t_n} \left[\bar{t}^2 (1 - 4\bar{t} + 6\bar{t}^2 - 4\bar{t}^3 + 4\bar{t}^4) + \right. \\ \left. + 6 \frac{I_2}{C_{12} t_n^2} (1 - 8\bar{t} + 20\bar{t}^2 - 20\bar{t}^3 + 7\bar{t}^4) \right] \bar{t}. \end{aligned}$$

Оптимальні режими руху (7.69) і (7.70), що відповідають першій і другій приведеним масам розглянутої моделі піднімальної машини, як і попередній режим, реалізуються на практиці.

По тих же даних, що і для попереднього режиму, побудовані графіки відхилення координат швидкостей і прискорень першої і другої приведених мас піднімальної машини (рис. 7.18). З приведених графіків видно, що отриманий режим руху зберігає переваги попереднього режиму й усуває його недоліки. Прискорення першої маси на початку і наприкінці циклу руху плавно наростають і плавно убують. Крім того, в останнього оптимального

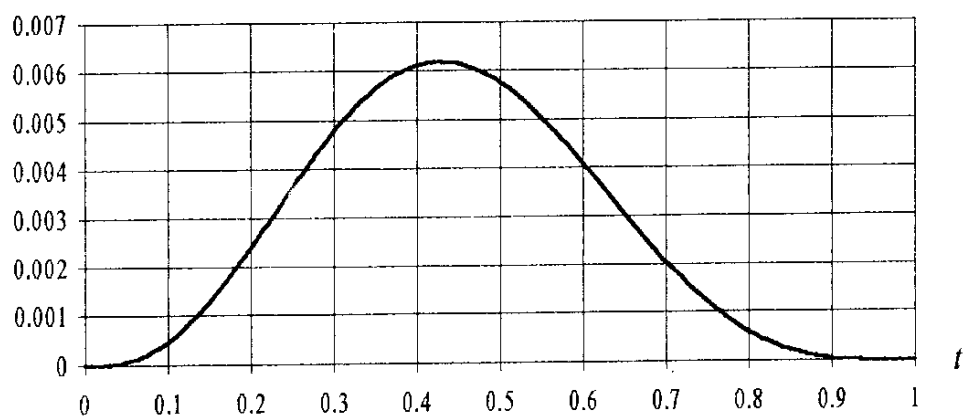
режиму руху знижується максимальне значення прискорення першої маси.

Порівнюючи кінематичні характеристики оптимальних режимів руху приведених мас (рис. 7.16) за різними критеріями, можна зробити висновок, що відхилення їхніх координат, швидкостей і прискорень в останньому режимі зменшилися в порівнянні з попереднім оптимальним режимом. Оптимізація режимів руху приведених мас піднімальної машини за критеріями відхилення середньоквадратичних значень прискорень більш високих порядків приводить до зменшення відхилень відповідних кінематичних характеристик першої і другої маси. Однак повного збігу цих характеристик досягти не можна, тому що між кінематичними характеристиками першої і другої мас існує цілком визначений зв'язок, який визначається залежностями (7.55)–(7.58). Цей збіг може бути досягнуто тільки на ділянці сталого руху, коли обидві маси здійснюють рівномірний рух.

Оптимальний режим руху піднімальних машин із пружними елементами визначається критерієм оцінки якості режиму руху. Тому основним етапом у розв'язуванні цих задач є вибір критерію, по якому здійснюється оптимізація режиму руху. Для динамічних моделей піднімальних машин, у кінематичному ланцюзі яких мається один пружний елемент, оптимізація режиму руху повинна проводитися за критерієм, що містить відхилення як мінімум прискорень першого порядку. Для більш якісного проходження перехідного процесу можуть бути використані критерії з відхиленнями прискорень більш високих порядків.

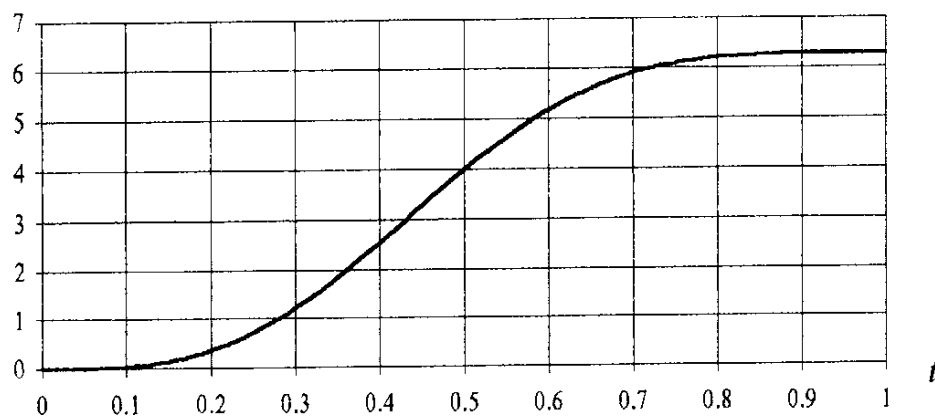
Для двох пружних елементів у кінематичному ланцюзі динамічної моделі піднімальної машини повинний використовуватися критерій, що містить відхилення як мінімум прискорень другого порядку. У динамічних моделях з більшим числом пружних елементів критерій оптимальності визначається аналогічно, як це показано для систем з одним і двома пружними елементами.

$\Delta\Phi$, рад



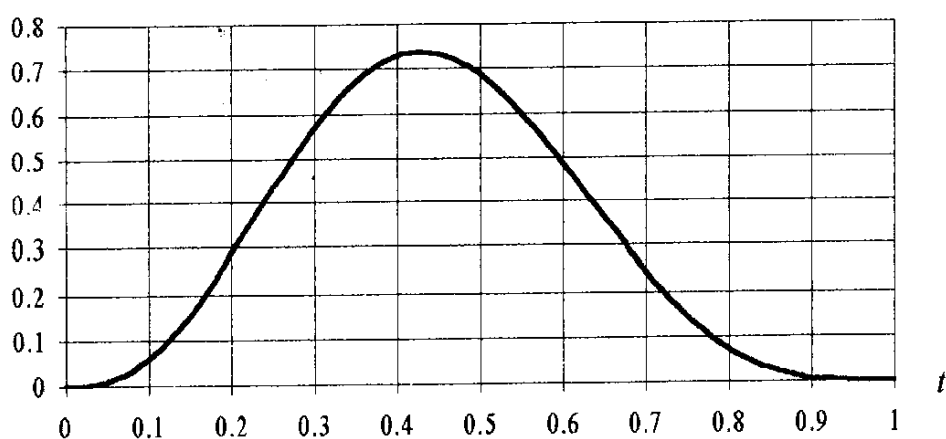
а)

$\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$, 1/c



б)

$\ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_2$, 1/c²



в)

Рис. 7.18. Графіки відхилень координат, швидкостей і прискорень першої і другої приведених мас піднімальної машини, що відповідають мінімуму середньоквадратичного відхилення прискорень другого порядку

Запропонована методика синтезу оптимальних режимів руху піднімальних машин із пружними елементами дозволяє цілеспрямовано вибирати режими руху, що зводять до мінімуму динамічні навантаження, які виникають у пружних елементах у процесі руху, усувати коливання одних елементів відносно інших і т.д. Крім того, оптимальні режими руху дозволяють знизити динамічну складову потужності привода і мінімізувати енергетичні витрати. На основі оптимальних режимів руху піднімальних машин вибираються найбільш раціональні конструкції приводних механізмів і системи їхнього керування, що дозволяють реалізувати ці режими руху.

7.5. Аналіз оптимальних режимів руху піднімальних машин

Як було показано раніше, одним зі шляхів зменшення динамічних навантажень у пружних елементах піднімальних машин є вибір необхідних режимів руху приводного механізму на ділянках перехідних процесів. Розглянемо вплив різних режимів на динамічні навантаження в пружних елементах піднімальних машин. Для визначення динамічних навантажень у пружному елементі, наприклад канаті, у першому наближенні з достатнім ступенем точності може бути використана двомасова модель (рис. 7.16). Як показують раніше проведені дослідження, динамічні навантаження, визначені в пружному елементі за допомогою двомасової моделі, на 5–10% відрізняються від дійсних динамічних навантажень. Оскільки тут визначається вплив різних режимів руху на величину динамічних навантажень, а не визначаються самі навантаження, то використання двомасової динамічної моделі є виправданим. Якщо виникає потреба визначення більш точного впливу режиму руху на динамічні навантаження в пружному елементі піднімальної машини, то можуть бути використані моделі з більшою кількістю мас. Такі моделі піднімальних машин раніше розглядалися. Так, наприклад, тримасова динамічна модель дає точність визначення динамічних навантажень у межах 3-5%. Однак моделі з меншою кількістю мас дають можливість значно спростити математичні залежності й

одержати розв'язки в аналітичній формі. У приведеній тримасовій моделі піднімальної машини (рис. 7.16) не враховується загасання коливань в канатах, оскільки воно відбувається протягом значного проміжку часу.

Для розв'язування рівнянь (7.54), що описують динаміку розглянутої двомасової моделі, запишемо їх у виді одного рівняння четвертого порядку. З урахуванням того, що рушійний момент привода, приведений до органа навивки, визначається залежністю $M_1=(I_1+I_2)\varepsilon +M_2$, будемо мати:

$$\varphi_2^{IV} + \omega^2 \ddot{\varphi}_2 = \omega^2 \varepsilon, \quad (7.71)$$

де $\omega = \sqrt{\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right) C_{12}}$ – частота власних коливань обраної двомасової динамічної моделі піднімальної машини; $\varepsilon = \varepsilon(t)$ – функція прискорення досліджуваного режиму руху приводного механізму піднімальної машини, що визначається режимом руху приводного механізму.

Розглянемо декілька можливих режимів руху приводного механізму на ділянці пуску:

- 1) режим руху з постійним прискоренням, який мінімізує величину рушійного моменту привода;
- 2) оптимальний динамічний режим руху з лінійною зміною прискорення, який мінімізує динамічну складову потужності привода;
- 3) оптимальний ривкової режим руху зі зміною прискорення по кривій третього порядку;
- 4) оптимальний по прискоренням другого порядку режим руху зі зміною прискорення по кривій п'ятого порядку.

Останні два режими руху дають плавну зміну прискорень приводного механізму, що забезпечує зменшення коливань динамічних навантажень у пружних елементах.

Покажемо вплив цих режимів руху на характер зміни і максимальні

значення динамічних навантажень у канаті при підйомі посудини під час пуску. Зміна динамічної складової зусилля M_{12} у пружному елементі визначається з другого рівняння системи (7.54) і щодо положення статичної рівноваги має вид:

$$M_{12} = C(\varphi_1 - \varphi_2) = I_2 \ddot{\varphi}_2. \quad (7.72)$$

$$\text{Перший режим} - \varepsilon = \frac{\omega_n}{t_n} = \text{const} \quad (7.73)$$

відповідає постійному пусковому моменту на валу двигуна, де ω_n – номінальна кутова швидкість органа навивки піднімальної машини; t_n – тривалість пуску.

Розв'язуючи рівняння (7.71) з урахуванням залежності (7.73) і початкових умов руху відносно положення статичної рівноваги: $t=0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$, одержимо:

$$\varphi_2 = \omega_n t_n \left(\frac{\bar{t}^2}{2} - \frac{1 - \cos k \bar{t}}{k^2} \right), \quad (7.74)$$

де $\bar{t} = \frac{t}{t_n}$ – координата відносного часу пуску; $k = \omega t_n$.

Двічі диференціюючи за часом залежність (7.74), будемо мати:

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_n \left[\bar{t} - \frac{1}{k} \sin k \bar{t} \right]; \quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{\omega_n}{t_n} (1 - \cos k \bar{t}). \quad (7.75)$$

Підставивши останню залежність системи (7.75) у вираз (7.72), одержимо співвідношення для визначення динамічного навантаження в канаті під час руху приводного механізму з постійним прискоренням

$$M_{12} = I_2 \frac{\omega_n}{t_n} (1 - \cos k \bar{t}). \quad (7.76)$$

Залежність (7.76) досягає максимального значення в моменти часу, коли $\cos k \bar{t} = -1$, тобто коли $\bar{t} = \pi(1 + 2n)/k$ і дорівнює $M_{12 \max} = 2I_2 \omega_n / t_n$. Тут n приймає значення 0, 1, 2, і т.д.

З отриманої залежності видно, що динамічне навантаження в пружному елементі при русі з постійним прискоренням у два рази перевершує таке ж навантаження в абсолютно твердому елементі.

Другий режим – $\varepsilon = \frac{\omega_n}{t_n} (1 - \bar{t})$ відповідає лінійній зміні пускового моменту.

У результаті розв'язку рівняння (7.71) з урахуванням залежності (7.75) і тих же початкових умов руху, що і при першому режимі, відносно положення статичної рівноваги, маємо:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \omega_n t_n \left[\bar{t}^2 \left(1 - \frac{\bar{t}}{3} \right) + \frac{2}{k^2} \left(\cos k \bar{t} - \frac{1}{k} \sin k \bar{t} + \bar{t} - 1 \right) \right]; \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_n \left[2\bar{t} - \bar{t}^2 + \frac{2}{k^2} (1 - k \sin k \bar{t} - \cos k \bar{t}) \right]; \\ \ddot{\varphi}_2 &= 2 \frac{\omega_n}{t_n} \left[1 - \bar{t} - \cos k \bar{t} + \frac{1}{k} \sin k \bar{t} \right]. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Після підстановки прискорення другої приведенної маси із системи (7.77) у залежність (7.72) знайдемо вираз для визначення динамічного навантаження в канаті при оптимальному динамічному режимі руху приводного механізму

$$M_{12} = 2I_2 \frac{\omega_H}{t_n} \left(1 - \bar{t} \cos k \bar{t} + \frac{1}{k} \sin k \bar{t} \right). \quad (7.78)$$

Вираз (7.78) досягає стаціонарних значень у моменти часу, коли $\cos k \bar{t} = -1$, тобто при $\bar{t} = \frac{\pi(1+2n)}{k}$. В ці моменти часу $\sin k \bar{t} = 0$, а $\bar{t}$ приймає мінімальне значення, коли $n=0$. Виходячи з приведених розумінь, знаходимо максимальне значення динамічної складової зусилля в канаті, яке визначається залежністю

$$\max M_{12} = 2I_2 \frac{\omega_H}{t_n} \left(2 - \frac{\pi}{k} \right).$$

Оскільки для реальних конструкцій піднімальних машин величина k на порядок більша чим величина π , то максимальне значення динамічної складової зусилля в канаті, визначене за допомогою останньої залежності, приблизно в чотири рази перевершує таке ж зусилля в абсолютно твердому елементі при режимі постійного прискорення.

Третій режим — $\varepsilon = 12 \frac{\omega_H}{t_n} (\bar{t} - 2\bar{t} + \bar{t}^3)$ відповідає зміні пускового моменту по кривій третього порядку.

Розв'язавши рівняння (7.71) з урахуванням залежності (7.78) і початкових умов, що використовувалися раніше, одержимо:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= 12 \frac{\omega_H}{t_n} \left[\left(1 - \frac{6}{k^2} \right) \left(\frac{1}{k^3} \sin k \bar{t} - \frac{\bar{t}}{k^2} + \frac{\bar{t}^3}{6} \right) - \frac{4}{k^4} (1 - \cos k \bar{t}) + 2 \frac{\bar{t}^2}{k^2} - \frac{\bar{t}^4}{6} + \frac{\bar{t}^5}{20} \right]; \\ \dot{\varphi}_2 &= 12 \omega_H \left[\left(1 - \frac{6}{k^2} \right) \left(\frac{1}{k^2} \cos k \bar{t} - \frac{1}{k^2} + \frac{\bar{t}^2}{2} \right) - \frac{4}{k^3} \sin k \bar{t} + 4 \frac{\bar{t}}{k^2} - \frac{2}{3} \bar{t}^3 + \frac{1}{4} \bar{t}^4 \right]; \quad (7.79) \\ \ddot{\varphi}_2 &= 12 \frac{\omega_H}{t_n} \left[\left(1 - \frac{6}{k^2} \right) \left(\bar{t} - \frac{1}{k} \sin k \bar{t} \right) - \frac{4}{k^2} \cos k \bar{t} + \frac{4}{k^2} - 2 \bar{t}^2 + \bar{t}^3 \right]. \end{aligned}$$

Використавши останню залежність системи (7.79), визначимо динамічну складову зусилля в пружному елементі за аналогією з раніше визначеними зусиллями для попередніх режимів руху. У результаті цього будемо мати

$$M_{12} = 12I_2 \frac{\omega_n}{t_n} [f_1(\bar{t}) + f_2(\bar{t})], \quad (7.80)$$

де $f_1(\bar{t})$, $f_2(\bar{t})$ – монотонна і коливальна складові змінного коефіцієнта при динамічній складовій зусилля в пружному елементі, які визначаються залежностями:

$$f_1(\bar{t}) = \frac{4}{k^2} + \left(1 - \frac{6}{k^2}\right)\bar{t} - 2\bar{t}^2 + \bar{t}^3; \quad (7.81)$$

$$f_2(\bar{t}) = -\frac{1}{k} \left[\left(1 - \frac{6}{k^2}\right) \sin k\bar{t} + \frac{4}{k} \cos k\bar{t} \right]. \quad (7.82)$$

На монотонну функцію (7.81) накладається функція (7.82), що здійснює коливання з частотою ω .

Спочатку визначимо максимум функції. Для цього візьмемо похідну від зазначеної функції по аргументу $\bar{t}$ і прирівняємо її до нуля. У результаті цього одержимо квадратне рівняння

$$3\bar{t}^2 - 4\bar{t} + 1 - \frac{6}{k^2} = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, одержимо:

$$\bar{t}_1 = \frac{2 - \sqrt{1 + \frac{18}{k^2}}}{3}; \quad \bar{t}_2 = \frac{2 + \sqrt{1 + \frac{18}{k^2}}}{3}.$$

Оскільки $\bar{t}$ не може бути більше одиниці, то корінь $\bar{t}_2$ не відповідає умовам даної задачі. Дійсним є корінь $\bar{t}_1$. Цьому значенню аргументу, як показують подальші дослідження, відповідає максимум функції (7.81). Після підстановки значення $\bar{t} = \bar{t}_1$ в залежність (7.81) знайдемо максимальне значення функції $f_1(\bar{t})$.

Прирівнюючи похідну по $\bar{t}$ від функції (7.82) до нуля, будемо мати:

$$4 \sin k \bar{t} - \left(k - \frac{6}{k}\right) \cos k \bar{t} = 0.$$

З цього рівняння знаходимо:

$$\sin k \bar{t} = \pm \frac{k - \frac{6}{k}}{\sqrt{16 + \left(k - \frac{6}{k}\right)^2}}; \quad \cos k \bar{t} = \pm \frac{4}{\sqrt{16 + \left(k - \frac{6}{k}\right)^2}}.$$

Аналізуючи співвідношення (7.82) з урахуванням останніх залежностей, знайдемо амплітуду коливань функції (7.82)

$$\max f_2 = \frac{1}{k^2} \sqrt{16 + \left(k - \frac{6}{k}\right)^2}. \quad (7.83)$$

Такого значення (7.83) функція (7.82) досягає в моменти часу:

$$\bar{t}_{2i} = \frac{1}{k} \left(-\arccos \frac{4}{\sqrt{16 + \left(k - \frac{6}{k}\right)^2}} + 2\pi i \right), \quad (7.84)$$

$$i = 1, 3, 5, \dots, 2n + 1$$

Для існуючих конструкцій піднімальних машин максимальне значення функції (7.81) значно більше величини (7.83). Якщо серед значень (7.84) знайдуться моменти часу, що збігаються з моментом $\bar{t}_1$, то функція (7.80) досягає найбільшого з усіх можливих значень.

Четвертий режим –

$$\varepsilon = 60 \frac{\omega_n}{t_n} (1 - 3\bar{t} + 3\bar{t}^2 - \bar{t}^3) \bar{t}^2 \quad (7.85)$$

відповідає зміні пускового моменту по кривій п'ятого порядку.

Після розв'язування рівняння (7.71) з урахуванням виразу (7.85) за аналогією з попередніми режимами руху приводного механізму визначена залежність динамічної складової зусилля в пружному елементі при оптимальному по прискореннях другого порядку режимі пуску піднімальної машини

$$M_{12} = 60I_2 \frac{\omega_n}{t_n} \left\{ \frac{2}{k^2} \left[\left(1 - \frac{36}{k^2}\right) \cos k\bar{t} - \frac{9}{k^2} \left(3 - \frac{20}{k^2}\right) \sin k\bar{t} \right] + \left(1 - \frac{36}{k^2}\right) \left(\bar{t}^2 - \frac{2}{k^2}\right) + \right. \quad (7.86)$$

$$\left. + \left(3 - \frac{20}{k^2}\right) \left(\frac{6}{k^2} - \bar{t}\right) \bar{t} + 3\bar{t}^4 - \bar{t}^5 \right\}.$$

В отриманій залежності (7.86) на функцію, що монотонно змінюється, накладається коливальна функція, амплітудне значення якої визначається за аналогією з попереднім режимом руху. У цьому режимі руху піднімальної машини амплітудне значення коливальної складової зусилля в пружному

елементі для більшості піднімальних машин на порядок менше в порівнянні з таким же амплітудним значенням попереднього оптимального режиму пуску. Тому серед усіх розглянутих оптимальних по тому чи іншому критерію режимів пуску піднімальної машини останній режим забезпечує найбільш плавну зміну динамічних навантажень у канаті.

Аналогічним чином можуть бути проаналізовані оптимальні за різними критеріями режими руху в процесі пуску і гальмування піднімальної машини і їхній вплив на динамічні складові зусиль в інших пружних елементах (муфтах, валопроводі і т.д.).

На основі отриманих залежностей динамічних складових зусиль у пружних елементах (наприклад, канаті) піднімальної машини для кожного з оптимальних по тому чи іншому критерію режиму руху (пуску чи гальмування) може бути визначена залежність коефіцієнта зміни динамічної складової зусиль у тому чи іншому пружному елементі протягом тієї чи іншої ділянки руху. Цей коефіцієнт являє собою відношення динамічної складової зусилля в пружному елементі до такого ж зусилля при русі машини з постійним прискоренням (уповільненням) без врахування пружності елементів. Для розглянутої моделі піднімальної машини в процесі пуску цей коефіцієнт має вигляд

$$K = \frac{M_{12}}{I_2 \frac{\omega_H}{t_H}}. \quad (7.87)$$

Для піднімальної машини, представленої двомасовою динамічною моделлю (рис. 7.16) з параметрами: $I_1 = 29,23 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $I_2 = 5,37 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $M_2 = 32,0 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $C_{12} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}$; $\omega_H = 6,28 \text{ рад/с}$; $t_H = 20 \text{ с}$ побудовані графіки залежності коефіцієнта зміни динамічних навантажень у канаті для чотирьох різних режимів руху приводного механізму в процесі пуску (рис. 7.19).

Аналіз цих графіків показує, що найбільше максимальне значення коефіцієнта зміни динамічних навантажень спостерігається в другому режимі пуску і досягає величини, близької до чотирьох. При цьому розглянутий режим пуску має найбільшу амплітуду коливань динамічної складової зусилля в канаті. Однак цей режим пуску піднімальної машини забезпечує найменшу динамічну складову потужності привода.

Найменше максимальне значення коефіцієнта зміни динамічних навантажень досягнуто при третьому режимі пуску і його значення не перевищує двох. Цей режим пуску приблизно в два рази знижує коефіцієнт зміни динамічних навантажень у порівнянні з другим режимом руху й у порівнянні з цим же режимом приблизно на порядок має меншу амплітуду коливань динамічних навантажень.

При четвертому режимі пуску піднімальної машини максимальне значення коефіцієнта зміни динамічних навантажень незначно перевищує два, однак при цьому режимі руху амплітуда коливань динамічних навантажень найменша. Вона менша приблизно на порядок, у порівнянні з третім режимом пуску приводного механізму, і на два порядки, у порівнянні з першим і другим режимами пуску. Практично цей режим пуску приводного механізму усуває коливання динамічних навантажень у канатах піднімальної машини.

Третій і четвертий режими пуску приводного механізму дають максимальні значення коефіцієнта зміни динамічних навантажень приблизно однієї і тієї ж величини, що і перший режим пуску (біля двох), що традиційно використовується в існуючих приводах піднімальних машин і забезпечує їхню максимальну швидкодію. Однак перший режим пуску піднімальних машин дає значну амплітуду коливань динамічних навантажень, яка із усіх розглянутих режимів руху не перевищує значень цього показника тільки для другого режиму руху.

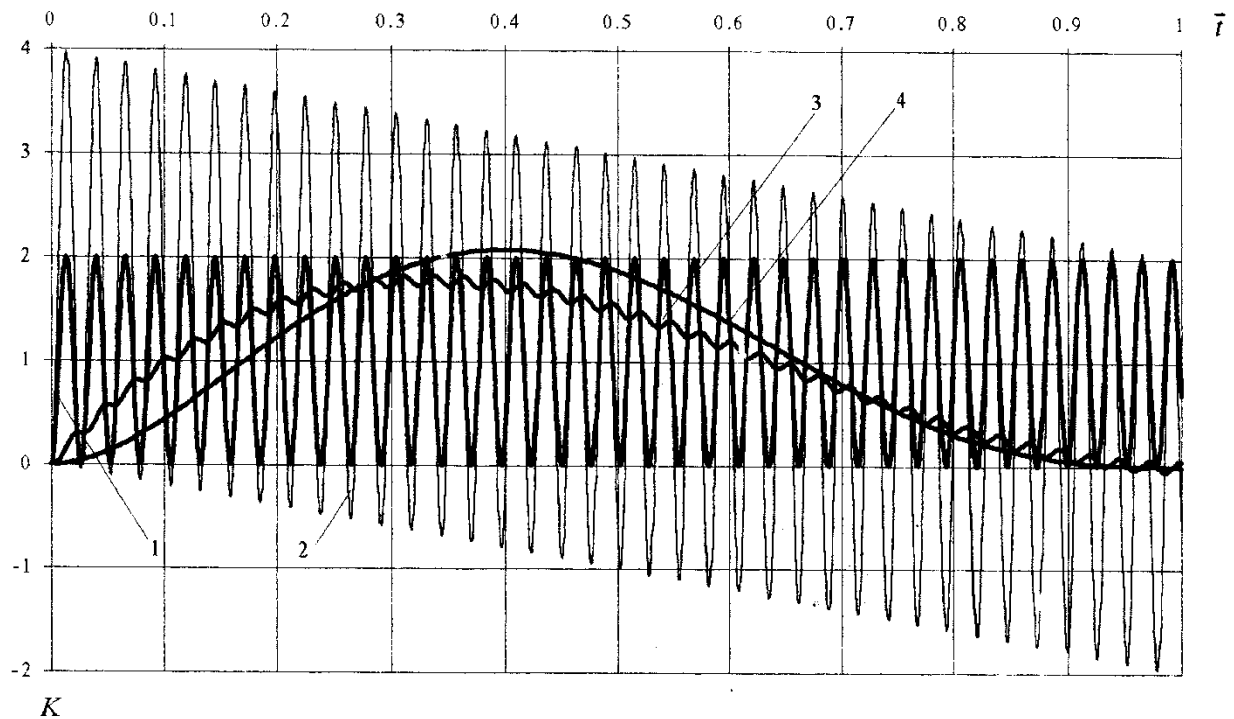


Рис. 7.19. Графіки залежності коефіцієнта зміни динамічної складової зусилля в канаті піднімальної машини в процесі пуску при режимах руху: 1 - з постійним прискоренням; 2 - з лінійною зміною прискорення; 3,4 - зі зміною прискорення по кривих відповідно 3-го і 5-го порядку

Проведений аналіз впливу режимів пуску приводного механізму на динамічні навантаження в канаті піднімальної машини показує, що з підвищенням плавності зміни прискорення (врахування і зменшення максимальних значень прискорень більш високих порядків) приводного вала зменшуються коливання динамічних навантажень в канаті, які приводить до погашення коливань піднімальної посудини, валопровода й інших елементів. Таке зменшення коливань дає можливість збільшити продуктивність піднімальної машини за рахунок зменшення тривалості перехідних ділянок пуску і гальмування і збільшення швидкості підйому. Крім того, зменшення коливань елементів піднімальної машини приводить до значного підвищення її надійності [15].

РОЗДІЛ 8

ФУНКЦІОНАЛЬНО-ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМІВ РУХУ МАШИН

У попередніх розділах розглядалася параметрична і функціональна оптимізація режимів руху. При параметричній оптимізації задавалася форма режиму руху у виді діаграми швидкості піднімальної посудини. Задача параметричної оптимізації полягала в тому, щоб для заданої форми (функції) режиму руху визначити такі значення параметрів руху, що мінімізували б той чи інший критерій якості руху піднімальної машини.

При функціональній оптимізації визначалася форма (функція) режиму руху, що мінімізувала визначений критерій якості піднімальної машини при цілком визначених, наперед заданих, параметрах режиму руху.

При функціонально-параметричній оптимізації пропонується одночасно визначати форму і параметри режиму руху, які мінімізують той чи інший критерій якості піднімальної машини, що залежить від режиму руху і його параметрів.

Синтезуємо деякі оптимальні режими руху піднімальних машин, у яких розв'язуються поставлені задачі одночасного визначення форми і параметрів режиму руху.

8.1. Синтез оптимальних режимів руху при наявності обмежень на кінематичні характеристики

Продуктивність піднімальних машин, надійність їхньої роботи, точність виконання піднімальних операцій і т.д. істотно залежать від їхніх режимів руху. Режим руху піднімальної машини визначається характером (формою чи функцією) зміни швидкостей, прискорень, ривків і т.д. визначених елементів (наприклад, піднімальної посудини, ротора чи якоря електродвигуна, барабана) протягом усього циклу руху з урахуванням їхніх припустимих значень. Зазначені елементи вважаємо зв'язаними між собою

абсолютно твердими ланками без зазорів. Тому закони руху всіх елементів визначені, якщо заданий закон руху ведучого чи веденого елемента. Тут функцією режиму руху є форма зміни швидкості, прискорення, ривка і т.д. піднімальної посудини, а параметрами – тривалість циклу руху піднімальної машини і припустимі максимальні значення швидкості, прискорення, ривка і т.д. Причому частина з цих параметрів може бути заданою, а частина – визначатися в процесі оптимізації разом з формою режиму руху.

Величина швидкості усталеного руху визначає енергетичні витрати, прискорення й уповільнення викликають динамічні навантаження, що впливають на міцність елементів піднімальної машини, а ривки викликають зміни динамічних навантажень, що є джерелом коливань у валопроводах і канатопроводах. Тому для більшості піднімальних машин вводяться обмеження на максимальні значення швидкості усталеного руху піднімальної посудини, прискорення й уповільнення на ділянках пуску і гальмування, а для машин, призначених для транспортування пасажирів і на інтенсивність зміни в часі прискорень і ривків. У зв'язку з цим виникає задача синтезу таких режимів руху піднімальних машин, при яких дотримувалися б обмеження на абсолютні припустимі максимальні значення кінематичних характеристик і був би сприятливий характер їхньої зміни з мінімально можливою тривалістю циклу підйому.

Представимо піднімальну машину як матеріальну точку масою m , що піднімається з положення $x=0$ у положення $x=h$ за мінімально можливий час t_1 при обмеженнях на швидкість підйому $|\dot{x}| \leq v_n$, прискорення й уповільнення $|\ddot{x}| \leq a_m$ і ривок $|\dddot{x}| \leq b_m$. Тут прийняті наступні умовні позначки: x – координата вертикального підйому матеріальної точки; h – висота підйому; v_n – максимально припустима швидкість усталеного руху матеріальної точки; a_m , b_m – максимально припустимі абсолютні значення прискорення і ривка матеріальної точки на ділянках пуску і гальмування.

У цій задачі заданими параметрами режиму руху матеріальної точки є висота підйому h , швидкість v_n , прискорення a_m і ривок b_m . Підлягають

визначенню функціональна залежність режиму руху і параметр – час підйому t_1 .

Швидкість v , прискорення a і ривок b матеріальної точки зв'язані з її координатою наступними співвідношеннями: $v = \dot{x}$; $a = \dot{v} = \ddot{x}$; $b = \dot{a} = \ddot{v} = \ddot{x}$. У загальному випадку величини a_m і b_m на ділянках пуску і гальмування можуть приймати різні абсолютні значення. Розглянемо випадок, коли ці величини на ділянках пуску і гальмування мають однакові абсолютні значення.

Найбільш сприятливим режимом підйому матеріальної точки буде такий режим, при якому енергетичні витрати за час руху t_1 будуть мінімальними. Для розглянутого випадку енергія витрачається на подолання сил ваги, що виражається придбаною системою потенціальною енергією $m \cdot g \cdot h$ і на створення руху, що виражається придбаною системою кінетичною енергією. Оскільки перша складова енергетичних витрат не залежить від режиму руху і є величиною постійної, то її можна не враховувати в процесі оптимізації. Тому для вибору оптимального режиму руху будемо мінімізувати інтегральний критерій, що представляє собою середні за час циклу руху матеріальної точки витрати кінетичної енергії

$$T_{cp} = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} T dt = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 dt. \quad (8.1)$$

Критерій (8.1) являє собою інтегральний функціонал, умовою мінімуму якого є рівняння (8.2). Для розглянутого випадку ці рівняння дають $\ddot{x} = 0$, $\dot{x} = A = \text{const}$. З отриманих співвідношень видно, що для мінімізації енергетичних витрат матеріальна точка повинна рухатися з постійною швидкістю на всій ділянці руху. Для одержання мінімальної тривалості циклу руху матеріальної точки масою m необхідно, щоб її швидкість руху дорівнювала максимально припустимій швидкості усталеного руху v_n . Однак рух матеріальної точки m з таким режимом здійснити не можна, оскільки в

ньому відсутні ділянки пуску і гальмування, під час яких швидкість повинна наростати від нуля до деякого значення v_n , а потім від цього значення убувати до нуля.

У зв'язку з цим отриманий режим руху матеріальної точки повинний бути доповнений ділянками пуску, коли швидкість змінюється від нуля до v_n , і гальмування, коли швидкість убиває від v_n до нуля. На цих ділянках необхідний режим руху, що забезпечує мінімальні значення інерційних навантажень. Дія цих навантажень на ділянках пуску чи гальмування може бути виражена середньоквадратичним значенням у виді інтегрального функціоналу

$$P_{ncp} = \left[\frac{1}{t_{n(t)}} \int_0^{t_{n(t)}} (m\dot{v})^2 dt \right]^{1/2}, \quad (8.2)$$

де $t_{n(t)}$ – тривалість ділянки пуску чи гальмування.

Умовою мінімуму критерію (8.2) є рівняння Ейлера-Лагранжа (8.2), у яких функція T замінена на підінтегральний вираз функціонала (8.2), а координати q_k і швидкості $\dot{q}_k$ відповідно на v і $\dot{v}$. Після зазначених заміни і диференціювань маємо: $\ddot{v} = 0$; $\dot{v} = a = B = \text{const}$. Отримані умови показують, що на ділянках пуску і гальмування піднімальної машини для мінімізації інерційних навантажень потрібно рухатись з постійним прискоренням і уповільненням. Ці прискорення й уповільнення повинні дорівнювати максимально припустимим значенням, оскільки потрібно мінімізувати тривалість циклу руху. При цьому на ділянці пуску $a = a_m$, а на ділянці гальмування $a = -a_m$.

Останні режими пуску і гальмування піднімальної машини також не цілком задовольняють вимогам, що висуваються до режимів руху, тому що миттєве наростання й убивання інерційних навантажень у крайніх положеннях перехідних ділянок приводить до появи коливань у пружних

елементах. Тому необхідні ділянки поступового наростання й убування прискорення й уповільнення під час пуску і гальмування піднімальної машини. На цих ділянках повинний бути такий режим руху, при якому інтенсивність зміни інерційних навантажень була б мінімальною. Середнє значення інтенсивності зміни інерційних навантажень протягом деякої ділянки руху може бути виражено середньоквадратичним значенням у вигляді інтегрального функціоналу

$$\dot{P}_{ncp} = \left[\frac{1}{t_{п(т)р(в)}} \int_0^{t_{п(т)р(в)}} (m\dot{a})^2 dt \right]^{1/2}, \quad (8.3)$$

де $t_{п(т)р(в)}$ – тривалість ділянки зростання чи убування прискорення (уповільнення) під час пуску чи гальмування.

Умовою мінімуму критерію (8.3) є рівняння (8.2), у яких функція T замінена на підінтегральний вираз функціонала (8.3), а q_k і $\dot{q}_k$ – на a і $\dot{a}$. У результаті чого одержуємо $\ddot{a} = 0$; $\dot{a} = b = \text{const}$. З результатів мінімізації критерію (8.3) видно, що на ділянках зростання й убування прискорення чи уповільнення для мінімізації інтенсивності зміни інерційних навантажень потрібний рух з постійним значенням ривка, рівним максимально припустимому його значенню з тих же розумінь, що для швидкості і прискорення (уповільнення). При наростанні прискорення $b = b_m$, а при убуванні $b = -b_m$.

Розроблений оптимальний режим вертикального руху піднімальної посудини складається з трьох основних ділянок: розбігу (пуску); вибігу (гальмування) і усталеного руху. У свою чергу кожна з ділянок розбігу і вибігу складається з трьох під ділянок. Це під ділянки зростання прискорення під час пуску від нуля до максимального значення a_m , руху з цим максимальним постійним прискоренням і убування прискорення до нуля, а також під ділянки зростання уповільнення під час гальмування від нуля до

максимального значення – a_m , руху з цим уповільненням і убування уповільнення до нуля.

Характер (функціональна залежність) зміни швидкості, прискорення і ривка піднімальної машини, представлена у виді матеріальної точки масою m , на всіх цих ділянках і під ділянках показаний на рис. 9.1. На цьому рисунку прийняті наступні умовні позначки: t_p, t_r, t_y – тривалості ділянок пуску (розбігу), гальмування (вибігу) і усталеного руху; $t_{пр}, t_{пв}, t_{пу}$ – тривалості під ділянок зростання й убування прискорення, а також руху з постійним прискоренням на ділянці пуску; $t_{тр}, t_{тв}, t_{ту}$ – тривалості під ділянок зростання й убування уповільнення, а також руху з постійним уповільненням на ділянці гальмування.

Для розглянутого випадку прийняте допущення, що максимальні абсолютні припустимі значення прискорень і ривків на ділянках пуску і гальмування прийняті рівними між собою. З цих допущень одержуємо, що $t_p = t_r, t_{пр} = t_{пв} = t_{тр} = t_{тв}; t_{пу} = t_{ту}$.

В отриманій функціональній залежності оптимального режиму вертикального переміщення піднімальної посудини необхідно визначити тривалості ділянок $t_{пр}, t_{пу}$, і t_y і на їхній основі сумарну тривалість циклу

$$t_1 = 4t_{пр} + 2t_{пу} + t_y. \quad (8.4)$$

Тривалість ділянки $t_{пр}$ визначається з умови досягнення максимально припустимого прискорення піднімальної посудини і виражається залежністю

$$t_{пр} = a_m / b_m.$$

Тривалість ділянки $t_{пу}$ – визначається з умови досягнення піднімальною посудиною номінальної швидкості усталеного руху v_n . Для цього визначається досягнута швидкість руху на кожній з під ділянок ділянки пуску і її сумарне значення порівнюється зі швидкістю v_n . У результаті чого

одержують рівняння, з якого знаходять тривалість під ділянки руху піднімальної посудини з максимально припустимим прискоренням

$$t_{\text{пу}} = v_{\text{н}} / a_{\text{м}} - a_{\text{м}} / b_{\text{м}}.$$

Тривалість ділянки усталеного руху t_y визначається з умови переміщення піднімальної посудини на задану висоту h . Для цього знаходять відстані, пройдені піднімальною посудиною на кожній з під ділянок пуску і гальмування і на ділянці сталого руху, підсумовують їх і порівнюють отриману суму з висотою підйому h . З отриманого рівняння визначають тривалість ділянки усталеного руху

$$t_y = h / v_{\text{н}} - v_{\text{н}} / a_{\text{м}} - a_{\text{м}} / b_{\text{м}}.$$

Після підстановки отриманих вище виразів для тривалостей $t_{\text{пр}}$, $t_{\text{пу}}$ і t_y в залежність (8.4), знаходять остаточний вираз мінімально можливої тривалості циклу руху піднімальної посудини при обмеженнях на абсолютні максимальні значення швидкості, прискорення і ривка

$$t_1 = h / v_{\text{н}} + v_{\text{н}} / a_{\text{м}} + a_{\text{м}} / b_{\text{м}}. \quad (8.5)$$

Таким чином, у результаті проведеної оптимізації знайдена залежність оптимального режиму руху піднімальної посудини у виді швидкісної діаграми, а також діаграм прискорень і ривків (рис. 8.1) і визначені їхні параметри – тривалості ділянок, під ділянок і всього циклу руху.

Запропонована методика оптимізації режиму руху може бути використана для різних піднімальних машин, піднімальну посудину яких на початковій стадії проектування можна замінити рухом матеріальної точки.

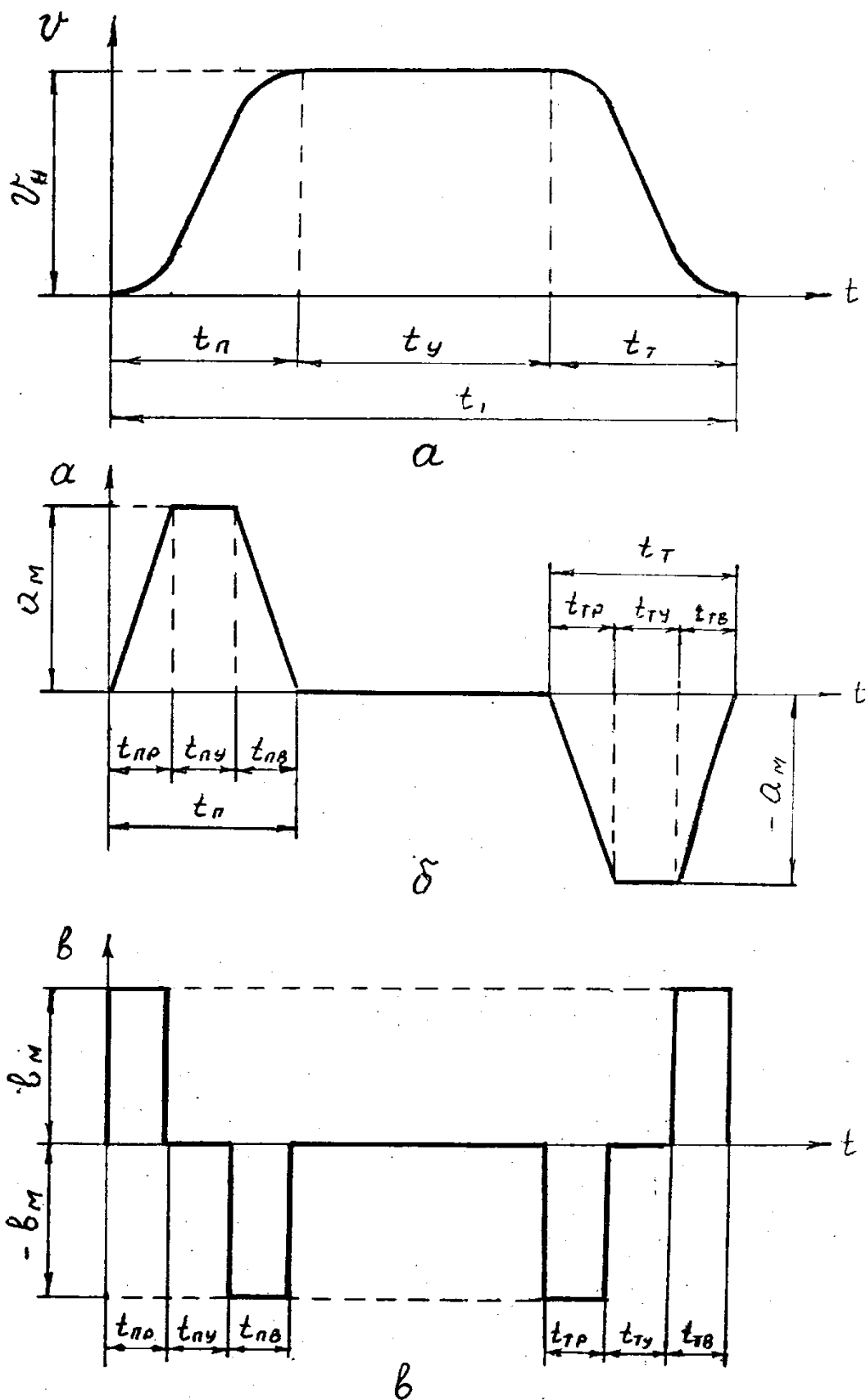


Рис. 8.1. Графіки зміни швидкості (а), прискорення (б) і ривка (в) оптимального режиму руху матеріальної точки при обмеженнях на максимальні припустимі значення кінематичних характеристик

Так, при переміщенні піднімальної посудини на висоту $h = 1000$ м з обмеженням на номінальну швидкість усталеного руху $v_n = 12$ м/с, максимальні значення прискорення $a_m = 1,2$ м/с² і ривка $b_m = 0,4$ м/с³ по залежності (8.8) знайдена мінімально можлива тривалість циклу руху $t_1 = 93,3$ с. У цій сумарній тривалості циклу тривалості ділянок і під ділянок приймають наступні значення:

$$t_y = 70,3 \text{ с}, t_n = 13 \text{ с}, t_{np} = t_{nv} = 3,0 \text{ с}, t_{ny} = 7,0 \text{ с}, t_r = 13,0 \text{ с}, t_{rp} = t_{rv} = 3,0 \text{ с}, t_{ry} = 7,0 \text{ с}.$$

Якщо при русі піднімальних машин виникає необхідність обмеження не тільки на швидкості, прискорення і ривки (прискорення другого порядку) піднімальної посудини, але і на прискорення більш високих порядків, то мінімально можлива тривалість циклу руху піднімальної машини буде визначається наступною залежністю

$$t_1 = \sum_{i=1}^n x_M^{(i-1)} / x_M^{(i)}, \quad (8.6)$$

де i – показник похідної функції координати руху; n – максимальний показник похідної функції координати руху, на яку накладаються обмеження; x – координата центра мас піднімальної посудини.

Функції $x_M^{(0)}$ відповідає висота підйому посудини, тобто $x_M^{(0)} = h$, а $x_M^{(1)}$ – максимальне значення першої, $x_M^{(2)}$ – другий і т.д. похідних за часом координати x . Так, для обмеження похідних від координати центра мас піднімальної посудини аж до п'ятого порядку тривалість циклу руху, відповідно до залежності (8.8), визначається наступним виразом:

$$t_1 = x_M^{(0)} / x_M^{(1)} + x_M^{(1)} / x_M^{(2)} + x_M^{(2)} / x_M^{(3)} + x_M^{(3)} / x_M^{(4)} + x_M^{(4)} / x_M^{(5)}.$$

Запропонована методика оптимізації режимів руху піднімальних машин по припустимих обмеженнях на максимальні абсолютні значення

кінематичних характеристик дозволяє обґрунтовано вибирати функції законів руху піднімальної посудини і їхні параметри, виходячи з потреб зниження енергетичних витрат, діючих динамічних навантажень і інтенсивностей їхньої зміни в часі.

Для встановлення обмежень на прискорення більш високих порядків необхідні спеціальні дослідження з виявлення їхнього впливу на організм людини, міцність матеріалів й інші властивості конструкцій піднімальних машин.

У тому випадку, коли з умов продуктивності піднімальної установки відома тривалість циклу руху t_1 і висота підйому h , можна шляхом варіювання, наприклад, параметрами v_n , a_m і b_m і, використовуючи формулу (8.8), побудувати оптимальну швидкісну діаграму, виходячи з мінімізації енергетичних витрат чи динамічних навантажень в елементах конструкції.

8.2. Синтез оптимальних режимів руху при наявності обмежень на силові й енергетичні характеристики

Крім обмежень на кінематичні характеристики, у піднімальних машинах часто вводяться обмеження на силові, енергетичні і інші характеристики привода. Розглянемо постановку задачі синтезу оптимальних режимів руху піднімальних машин при наявності цих обмежень. Необхідно знайти функціональну залежність зміни кінематичних характеристик піднімальної посудини, що забезпечують мінімальну тривалість підйому при дотриманні обмежень на рушійні сили і потужність привода, а також енергетичні витрати, що витрачаються на підйом. Тут параметрами оптимізації є тривалість циклу підйому і його окремих ділянок, а функціями оптимізації – закони зміни кінематичних характеристик піднімальної посудини.

У розглянутій задачі піднімальна машина представляється механічною системою з абсолютно твердими ланками без зазорів, у якій враховується тільки основний рух підйому. За узагальнену координату такої системи

вибираємо координату x вертикального руху умовної маси m піднімальної машини, приведеної до радіуса органа навивки. На піднімальну машину з боку електродвигуна діє рушійний момент, приведений до радіуса органа навивки, вага піднімальної посудини, канатів і вантажу також приведені до радіуса органа навивки.

Для обраної динамічної моделі піднімальної машини рівняння руху можна записати в наступному виді

$$m \ddot{x} = F_1 - F_2, \quad (8.7)$$

де m – приведена до радіуса органа навивки маса всіх рухомих елементів піднімальної машини; $\ddot{x}$ – прискорення маси m ; F_1 – рушійна сила електродвигуна, приведена до маси m ; F_2 – сила статичного опору пересуванню піднімальної машини, приведена до маси m , до складу якої входить вага корисного вантажу, піднімальної посудини, головних і врівноважених канатів і сили опору руху. Якщо використовується двокінцевий підйом то вага піднімальних посудин врівноважується, і в рівнянні (8.7) враховується тільки вага вантажу.

При оптимізації режиму руху будемо враховувати тільки динамічну складову потужності привода й енергію, що йде на створення руху піднімальної машини, оскільки енергія, що йде на підйом вантажу на висоту h , не залежить від режиму руху.

Тому синтезуємо режим руху піднімальної машини, що забезпечує мінімальний час t_1 підйому посудини на задану висоту h при обмеженнях:

1) на рушійну і гальмову силу –

$$F_{1T} \leq F_1 \leq F_{1д}; \quad (8.8)$$

2) на енергетичні витрати –

$$\dot{I}_T = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt \leq A; \quad (8.9)$$

3) на динамічну складову потужності привода –

$$\dot{I}_v = \int_0^{t_1} m \ddot{x}^2 dt \leq P. \quad (8.10)$$

Тут: $|F_{1д}|, |F_{1Т}|$ – максимальні абсолютні значення рушійної і гальмової сили привода, приведені до центра мас піднімальної посудини; A, P – максимально можливі значення енергетичних витрат і потужності привода, що йдуть на створення руху піднімальної машини. Для електроприводів перше обмеження відповідає припустимим величинам струму, друге – максимальній величині швидкості усталеного руху, третє – припустимому нагріванню обмоток двигуна.

Вирішимо поставлену задачу за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. Для цього вихідну задачу представимо в наступному виді:

1) рівняння руху –

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = (F_1 - F_2)/m; \quad (8.11)$$

2) обмеження –

$$F_{1Т} \leq F_1 \leq F_{1д}; \quad (8.12)$$

$$\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{1}{2} m x_2^2 dt \leq A; \quad (8.13)$$

$$\int_0^{t_1} [(F_1 - F_2)^2 / m] dt \leq P; \quad (8.14)$$

3) крайові умови –

$$t=0: \quad x_1(0)=0; \quad x_2(0)=0;$$

$$t=t_1: \quad x_1(t_1)=h; \quad x_2(t_1)=0; \quad (8.15)$$

4) критерій –

$$\dot{I}_0 = \int_0^{t_1} 1 dt = t_1 \rightarrow \min. \quad (8.16)$$

На початку визначимо оптимальні режими підйому посудини тільки при наявності одного з обмежень чи (8.12), чи (8.13), чи (8.14).

При дії обмеження (8.12) функція Понтрягіна має вид

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 (F_1 - F_2) / m, \quad (8.17)$$

де ψ_1, ψ_2 – множники Лагранжа, які є функцією часу.

Використавши для функції (8.17) сполучену систему, одержимо:

$$\dot{\psi}_1 = -\partial H / \partial x_1 = 0;$$

$$\dot{\psi}_2 = -\partial H / \partial x_2 = -\dot{\psi}_1.$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд

$$\psi_1 = c_1; \quad \psi_2(t) = -c_1 t + c_2; \quad (8.18)$$

де c_1, c_2 – постійні інтегрування.

З умови максимуму

$$\max_{F_{1T} \leq F_1 \leq F_{1д}} H = \psi_1 x_2 + \max_{F_{1T} \leq F_1 \leq F_{1д}} \psi_2 (F_1 - F_2) / m \quad (8.19)$$

впливає, що функція (8.19) приймає максимум тільки тоді, коли рушійна сила F_1 приймає крайні значення $F_{1д}$ чи $F_{1т}$ і її знак усюди в точках безперервності збігається зі знаком функції $\psi_2(t)$, тобто

$$F_1^*(t) = \begin{cases} F_{1д}, & \psi_2(t) > 0, \\ F_{1т}, & \psi_2(t) < 0. \end{cases}$$

Тому що функція $\psi(t)$ є лінійною (див. залежність (8.18)), то її знак може змінюватися на інтервалі руху не більше одного разу. Звідси випливає, що рушійне зусилля привода має не більше одного перемикання, тобто одну точку, у якій функція $F_1^*(t)$ змінює свій знак. Тоді оптимальна зміна рушійної сили має вид

$$F_1^*(t) = \begin{cases} F_{1д}, & 0 \leq t < t_n; \\ F_{1т}, & t_n \leq t \leq t_1, \end{cases} \quad (8.20)$$

де t_n – момент часу перемикання рушійної сили.

За допомогою системи (8.20) по рівняннях руху (8.11) знаходимо оптимальний за швидкодією режим руху піднімальної посудини

$$x_2 = \begin{cases} [(F_{1д} - F_2) / m]t + B_1, & 0 \leq t < t_n; \\ [(F_{1т} - F_2) / m]t + B_2, & t_n \leq t \leq t_1; \end{cases} \quad (8.21)$$

$$x_1 = \begin{cases} [(F_{1д} - F_2)/m]t^2/2 + B_1 t + B_3, & 0 \leq t < t_{\pi}; \\ [(F_{1T} - F_2)/m]t^2/2 + B_2 t + B_4, & t_{\pi} \leq t \leq t_1, \end{cases} \quad (8.22)$$

де B_1, B_2, B_3, B_4 – постійні інтегрування. З крайових умов руху знаходяться ці постійні інтегрування:

$$B_1 = B_3 = 0;$$

$$B_2 = [(F_{1T} - F_2)/m]t_1; \quad (8.23)$$

$$B_4 = h[(F_{1T} - F_2)/m]t_1^2/2.$$

За умовами безперервності переміщення x і швидкості $\dot{x}$ піднімальної посудини знайдено моменти часу перемикання рушійної сили t_{π} і тривалості циклу руху t_1 :

$$t_1 = \sqrt{2 \frac{mh(F_{1д} - F_{1T})}{(F_{1д} - F_{1T})(F_2 - F_{1T})}}; \quad (8.24)$$

$$t_{\pi} = \frac{(F_2 - F_{1T})}{(F_{1д} - F_{1T})} t_1.$$

Оптимальним за швидкодією при обмеженні рушійної і гальмової сили є режим підйому вантажу, що складається з ділянок рівноприскореного пуску і рівноуповільненого гальмування (рис 8.2).

Однак при такому режимі руху зростає максимальна швидкість підйому посудини $\dot{x}_{\max}$, що приводить до збільшення енергетичних витрат, які йдуть на створення руху піднімальної машини.

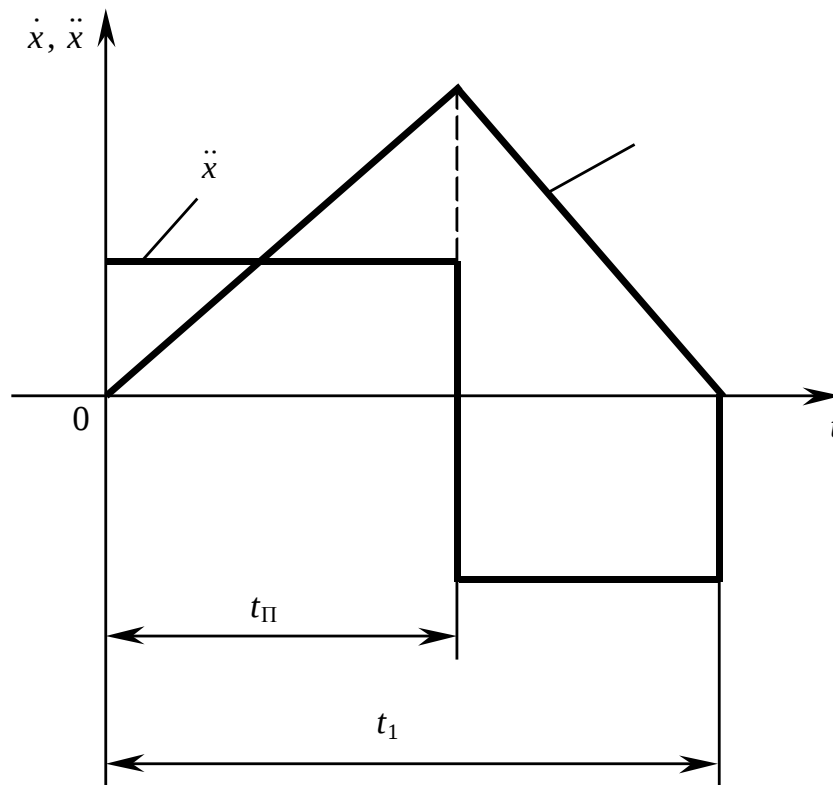


Рис. 8.2. Графіки зміни швидкості і прискорення піднімальної посудини при оптимальному по швидкодії режимі руху з обмеженнями на рушійні сили

Для піднімальної машини з параметрами: $m = 2,16 \cdot 10^4 \text{ кг}$; $F_{1д} = 10 \cdot 10^4 \text{ Н}$, $F_{1т} = 6 \cdot 10^4 \text{ Н}$, $F_2 = 8 \cdot 10^4 \text{ Н}$; $h = 1000 \text{ м}$ по формулах (8.24) визначена мінімально можлива тривалість циклу руху $t_1 = 65,7 \text{ с}$ і момент часу перемикавання рушійного зусилля привода на гальмове $t_{\Pi} = 32,85 \text{ с}$.

Як видно з отриманих даних, у розглянутому оптимальному режимі руху відсутня ділянка усталеного руху, що приводить до несталого режиму руху протягом усього циклу і зростанню енергетичних витрат.

Визначимо оптимальний за швидкодією режим руху піднімальної посудини при дії обмеження (8.12) і мінімізації енергетичних витрат (8.13). У цьому випадку функція Понтрягіна записується наступним чином

$$H = \frac{1}{2t_1} \psi_0 m \dot{x}_2^2 + \psi_1 \dot{x}_2 + \psi_2 (F_1 - F_2) / m. \quad (8.25)$$

Використовуючи функцію (8.25), одержимо сполучену систему рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_0 &= 0; \quad \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \\ \dot{\psi}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_0 \frac{m}{t_1} x_2 - \psi_1.\end{aligned}\tag{8.26}$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд:

$$\psi_0 = C_0; \quad \psi_1 = C_1; \quad \psi_2 = -C_0 \frac{m}{t_1} x_1 - C_1 t + C_2,$$
(8.27)

де C_0, C_1, C_2 – постійні інтегрування.

З умови максимуму функції Понтрягіна (8.25) випливає, що функція (8.25) лінійна відносно F_1 , тому її максимум досягається при крайніх значеннях F_1 . Якщо на деякій ділянці руху піднімальної посудини $\psi_2(t) = \text{const}$, то $\dot{\psi}_2(t) = 0$. З рівнянь (8.26) і (8.27) при $\dot{\psi}_2(t) = 0$ випливає, що

$$x_2(t) = -\frac{C_1 t_1}{C_0 m}.\tag{8.28}$$

В залежності (8.28) величини C_0, C_1, m і t_1 є постійними, а це значить, що на цій ділянці $x_2(t) = \text{const}$, а $F_1(t) = F_2$.

Отже, для забезпечення оптимального по швидкодії режиму руху піднімальної посудини з мінімізацією енергетичних витрат зміна рушійної сили має вид:

$$F_1(t) = \begin{cases} F_{1д}, & 0 \leq t < t_{п}; \\ F_2, & t_{п} \leq t < t_{т}; \\ F_{1т}, & t_{т} \leq t \leq t_1, \end{cases}\tag{8.29}$$

де $t_{\text{п}}$, $t_{\text{т}}$ – моменти часу для перемикання рушійної сили.

Тепер оптимальний режим руху піднімальної посудини визначається залежністю:

$$x_2(t) = \begin{cases} [(F_{1\text{д}} - F_2)/m]t + B_1, & 0 \leq t < t_{\text{п}}; \\ B_5, & t_{\text{п}} \leq t < t_{\text{т}}; \\ [(F_{1\text{т}} - F_2)/m]t + B_2, & t_{\text{т}} \leq t \leq t_1; \end{cases} \quad (8.30)$$

$$x_1(t) = \begin{cases} [(F_{1\text{д}} - F_2)/m]t^2/2 + B_1t + B_3, & 0 \leq t < t_{\text{п}}; \\ B_5t + B_6, & t_{\text{п}} \leq t < t_{\text{т}}; \\ [(F_{1\text{т}} - F_2)/m]t^2/2 + B_2t + B_4, & t_{\text{т}} \leq t \leq t_1, \end{cases} \quad (8.31)$$

де $B_1, B_2, \dots, B_6$ – постійні інтегрування.

З крайових умов руху знайдені постійні інтегрування B_1, B_2, B_3, B_4 , їхні вирази представлені залежностями (8.23). Постійні інтегрування B_5, B_6 і моменти часу $t_{\text{п}}$, $t_{\text{т}}$ і t_1 визначаються з умов безперервності переміщення $x(t)$ і швидкості $\dot{x}(t)$ піднімальної посудини, а також обмеження на енергетичні витрати.

$$B_5 = [(F_{1\text{д}} - F_2)/m]t_{\text{п}}; \quad B_6 = [(F_{1\text{т}} - F_2)/m]t_{\text{п}}^2.$$

Моменти часу $t_{\text{п}}$, $t_{\text{т}}$ і t_1 визначаються із системи рівнянь:

$$\begin{aligned} t_{\text{п}} &= (t_1 - t_{\text{т}}) \frac{F_{1\text{т}} + F_2}{F_{1\text{д}} - F_2}; \\ \frac{F_{1\text{д}} - F_2}{2m} t_{\text{п}}(2t_{\text{т}} - t_{\text{п}}) + \frac{-F_{1\text{т}} + F_2}{2m} (t_1 - t_{\text{т}})^2 &= h; \\ \frac{F_{1\text{д}} - F_2}{6mt_1} t_{\text{п}}^2(3t_{\text{т}} - 2t_{\text{п}}) + \frac{-F_{1\text{т}} + F_2}{6mt_1} (t_1 - t_{\text{т}})^3 &= A. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Оптимальним за швидкодією при обмеженнях на рушійну і гальмову сили й енергетичні витрати привода є режим руху піднімальної посудини, що складається з ділянок рівноприскореного пуску, усталеного руху з постійною швидкістю і рівноуповільненого гальмування (рис. 8.3).

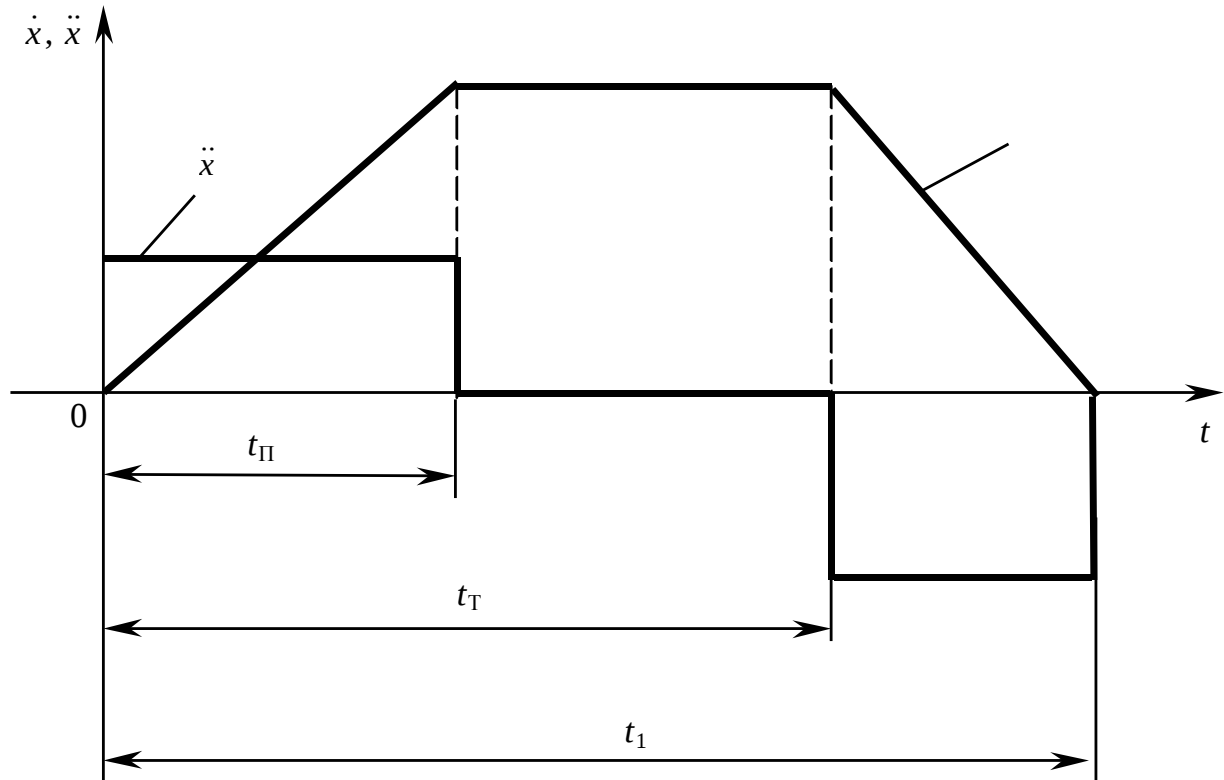


Рис. 8.3. Графіки зміни швидкості і прискорення піднімальної посудини при оптимальному по швидкодії режимі руху з обмеженнями на рушійні сили й енергетичні витрати

Для піднімальної машини з параметрами $m = 2,16 \cdot 10^4$ кг; $F_{1д} = 10 \cdot 10^4$ Н; $F_{1т} = 6 \cdot 10^4$ Н; $F_2 = 8 \cdot 10^4$ Н; $h = 1000$ м і обмеженнях на енергетичні витрати $A = 1400$ кДж визначені по системі (8.32) мінімально можлива тривалість циклу руху $t_1 = 96,4$ с і моменти перемикання рушійного зусилля привода $t_{\Pi} = 13,0$ с і $t_T = 83,4$ с.

У порівнянні з попереднім режимом руху цієї ж піднімальної машини в розглянутому режимі час циклу руху зріс з 65,7 с до 96,4 с. Однак при цьому режимі руху значно скоротилися енергетичні витрати з 9990 кДж у попередньому режимі до 1400 кДж у розглянутому режимі і динамічна

складова потужності привода відповідно зменшилася з 608 кВт до 240 кВт.

Як і в попередньому режимі руху піднімальної машини, так і в розглянутому режимі не повністю використовується потужність привода для досягнення максимальної швидкодії. Тому оптимізуємо режим руху піднімальної судини по швидкодії при наявності обмежень на діючі зусилля (8.12) і динамічну складову потужності привода (8.14). У цьому випадку задача розв'язується аналогічно попередній.

Функція Понтрягіна для цього випадку визначається залежністю

$$H = \psi_0 (F_1 - F_2)^2 / m + \psi_1 x_1 + \psi_2 (F_1 - F_2) / m \quad (8.33)$$

і досягає максимуму при зміні рушійної сили привода за таким законом:

$$F_1 = \begin{cases} F_{1д}, & 0 \leq t < t_{\pi}; \\ -B_5 t + B_6 & t_{\pi} \leq t < t_{\tau}; \\ F_{1\tau}, & t_{\tau} \leq t \leq t_1. \end{cases} \quad (8.34)$$

Такий закон зміни рушійної сили дає наступний режим руху піднімальної посудини:

$$x_2(t) = \begin{cases} [(F_{1д} - F_2) / m] t + B_1, & 0 \leq t < t_{\pi}; \\ -B_5 t^2 / 2 + B_6 t + B_7, & t_{\pi} \leq t < t_{\tau}; \\ [(F_{1\tau} - F_2) / m] t + B_2, & t_{\tau} \leq t \leq t_1; \end{cases} \quad (8.35)$$

$$x_1(t) = \begin{cases} [(F_{1д} - F_2) / m] t^2 / 2 + B_1 t + B_3, & 0 \leq t < t_{\pi}; \\ -B_5 t^3 / 6 + B_6 t^2 / 2 + B_7 t + B_8, & t_{\pi} \leq t < t_{\tau}; \\ [(F_{1\tau} - F_2) / m] t^2 / 2 + B_2 t + B_4, & t_{\tau} \leq t \leq t_1. \end{cases} \quad (8.36)$$

Постійні інтегрування B_1, B_2, B_3, B_4 визначаються за допомогою

залежностей (8.23), а B_5, B_6, B_7, B_8 і моменти часу t_{Π}, t_T і t_1 – з умови безперервності прискорення, швидкості і переміщення піднімальної посудини, а також з обмеження на потужність привода (8.14). В результаті використання вказаних умов постійні інтегрування приймають такий вигляд:

$$\begin{aligned} B_5 &= -(F_{1д} + F_{1г}) / (t_T - t_{\Pi}); \\ B_6 &= F_{1д} - B_5 t_{\Pi}; \\ B_7 &= [(F_{1д} - F_2) / m] t_{\Pi} + B_5 t_{\Pi}^2 / 2 - B_6 t_{\Pi}; \\ B_8 &= [(F_{1д} - F_2) / m] t_{\Pi}^2 + B_5 t_{\Pi}^3 / 6 - B_6 t_{\Pi}^2 / 2 + B_7 t_{\Pi}. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Оптимальним за швидкодією з урахуванням обмежень на рушійну і гальмову сили при мінімізації динамічної складової потужності привода є режим руху, що складається з ділянок рівноприскореного пуску, усталеного руху з постійною потужністю і рівноуповільненого гальмування (рис. 8.4).

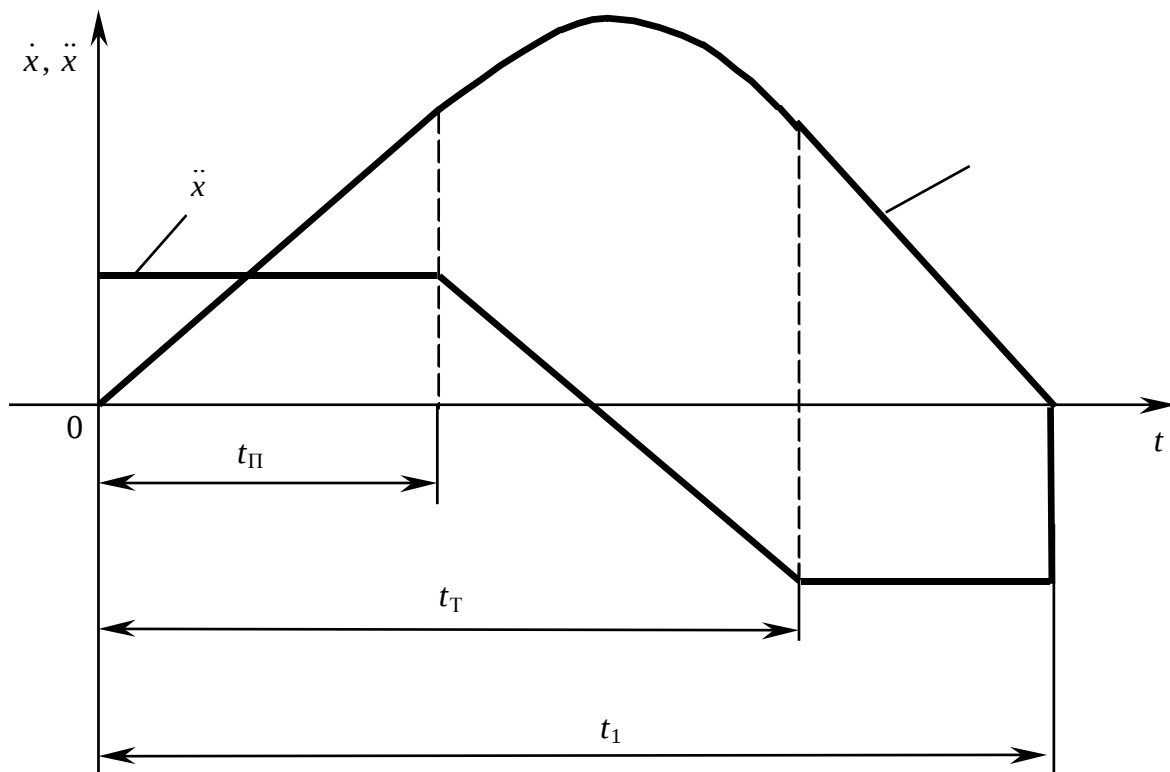


Рис. 8.4. Графіки зміни швидкості і прискорення піднімальної посудини при оптимальному по швидкодії режимі руху з обмеженнями на рушійні сили і потужність привода

Для піднімальної машини з тими ж параметрами, що й у попередніх прикладах, але без обмежень на енергетичні витрати, а з обмеженням на динамічну складову потужності привода $P=200$ кВт визначена мінімально можлива тривалість циклу руху $t_1=71,8$ с і моменти часу перемикання рушійного зусилля привода $t_n=10,8$ с і $t_T=61,0$ с. При цьому режимі руху скоротилася тривалість циклу руху в порівнянні з попереднім режимом з 96,4 с до 71,8 с. У той же час тут зросли енергетичні витрати з 1400 кДж до 5050 кДж. Крім того, хоча динамічна складову потужності привода зменшилася в порівнянні з попереднім режимом з 240 кВт до 200 кВт, загальна потужність привода з урахуванням статичних сил опору збільшився з 1200 кВт до 1730 кВт.

Оптимальний за швидкодією з урахуванням обмежень на рушійну і гальмову сили (8.12), енергетичні витрати (8.13) і динамічну складову потужності привода (8.14) режим руху піднімальної машини визначається аналогічно попереднім оптимальним режимам руху. При цьому режимі руху рушійна сила привода протягом усього періоду руху визначається залежністю:

$$F_1(t) = \begin{cases} F_{1д}, & 0 \leq t < t'; \\ -B_5 t + B_6, & t' \leq t < t_n; \\ F_2, & t_n \leq t < t_T; \\ F_2 - B_5(t - t_T), & t_T \leq t < t''; \\ F_{1г}, & t'' \leq t \leq t_1. \end{cases} \quad (8.38)$$

За допомогою залежностей (8.38) і рівнянь руху піднімальної машини (8.11) визначається оптимальний режим руху. Він складається з ділянок рівноприскореного пуску, руху з постійною потужністю, усталеного руху з постійною швидкістю і рівноуповільненого гальмування (рис. 9.5). На цьому рисунку позначені такі моменти часу перемикання рушійної сили привода: t' – з ділянки рівноприскореного руху на ділянку постійної потужності в

процесі пуску; t'' – з ділянки постійної потужності на ділянку рівноуповільненого гальмування; t_{Π} – з ділянки постійної потужності на ділянку усталеного руху в процесі пуску; t_T – з ділянки усталеного руху на ділянку постійної потужності в процесі гальмування.

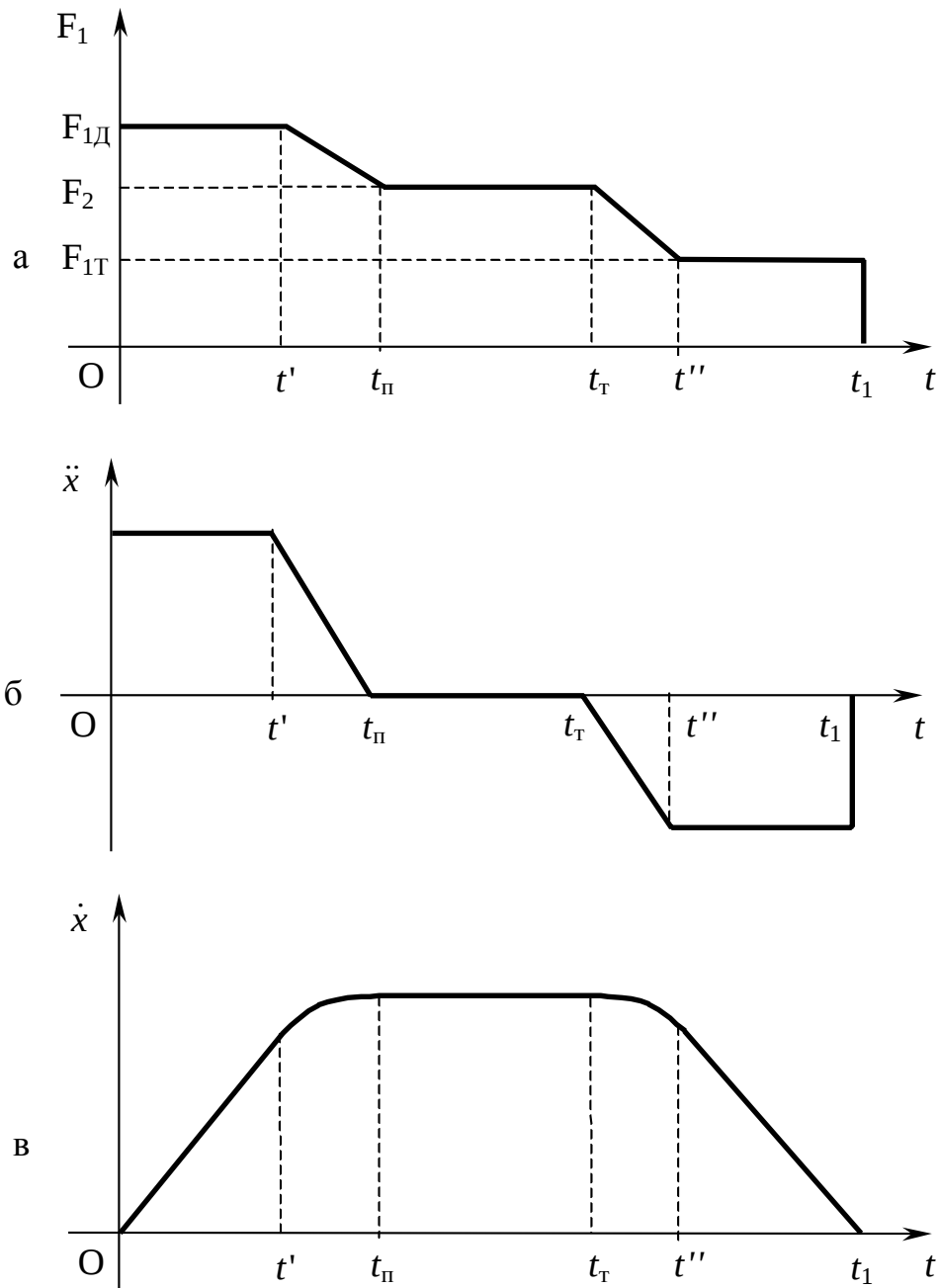


Рис. 8.5. Графіки зміни рушійної сили приводу (а), прискорення (б) і швидкості (в) піднімальної судини при оптимальному по швидкодії режимі руху й обмеженнях на силові, енергетичні і потужнісні характеристики піднімальної машини

Для тієї ж піднімальної машини, що розглядалася в попередніх прикладах з обмеженнями на енергетичні витрати привода $A=1400$ кДж і динамічну складову потужності привода $P=200$ кВт знайдена мінімально можлива тривалість циклу руху $t_1=96,4$ с і моменти часу перемикавання рушійного зусилля привода $t'=10,8$ с, $t_n=15,1$ с, $t_r=81,3$ с, $t''=85,6$ с.

Отриманий режим руху піднімальної машини має тривалість циклу руху на 46,7 % більшу в порівнянні з режимом руху, у якого відсутні обмеження на енергетичні витрати і динамічну складову потужності привода. Однак оптимальний режим руху з цими обмеженнями дозволить зменшити енергетичні витрати в 7,1 рази, а динамічну складову потужності привода в 3,0 рази в порівнянні з оптимальним режимом без цих обмежень. Аналогічні результати отримані і при порівнянні останнього оптимального режиму з іншими, раніше визначеними оптимальними режимами.

Розроблена методика синтезу оптимальних за швидкістю режимів руху піднімальних машин забезпечує максимальну продуктивність піднімальних операцій при повному використанні резервів привода і збереженні обмежень на діючі зусилля привода, енергетичні витрати і динамічну складову потужності привода. Це дає можливість підтримати необхідний рівень енергетичних витрат і надійності піднімальної машини при необхідній продуктивності.

8.3. Системи приводів машин для реалізації оптимальних режимів руху

До складу електроприводів піднімальних машин входить система керування з регуляторами струму (моменту) і напруги (швидкості), що являють собою регульовані приводи. Ці приводи дозволяють здійснити зміни швидкості піднімальної машини за заданими законами руху. Тому вони можуть реалізувати з визначеним ступенем точності різні оптимальні режими руху піднімальних машин. Для реалізації оптимальних режимів руху в процесі пуску електроприводи піднімальних машин повинні мати цілком

визначені механічні характеристики.

Як приклад визначимо необхідну механічну характеристику електропривода, що реалізує оптимальний динамічний режим пуску піднімальної машини. При оптимальному динамічному режимі пуску піднімальної машини, виходячи з залежностей (8.18), кутова швидкість обертання ротора і пусковий момент електродвигуна повинні визначатися наступними залежностями:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_H \cdot (2 - \bar{t}) \cdot \bar{t}; \\ M &= M_C + 2 \cdot I \cdot \omega_H \cdot (1 - \bar{t}) / t_{\Pi},\end{aligned}\tag{8.39}$$

де $\bar{t} = t / t_{\Pi}$ – відносний час пуску; t – час; t_{Π} – тривалість процесу пуску; ω , ω_H – кутова швидкість ротора електродвигуна і її номінальне значення; M , M_C – рушійний момент на валу електродвигуна і момент сил статичного опору, приведений до осі ротора електродвигуна; I – момент інерції всіх рухомих елементів піднімальної машини приведений до осі обертання ротора електродвигуна.

Виключимо із системи (8.39) параметр $\bar{t}$ і виразимо кутову швидкість ротора електродвигуна в залежності від рушійного моменту на його валу, тому що механічна характеристика двигуна являє собою залежність кутової швидкості від моменту. У результаті чого, одержимо

$$\omega = \omega_H \frac{M_{\Pi} - M}{M_{\Pi} - M_C} \left(2 - \frac{M_{\Pi} - M}{M_{\Pi} - M_C} \right),\tag{8.40}$$

де M_{Π} – пусковий момент на валу електродвигуна, що визначається наступною залежністю

$$M_{\Pi} = M_C + 2 \cdot I \cdot \omega_H / t_{\Pi}.\tag{8.41}$$

Механічна характеристика електродвигуна, побудована за рівнянням (8.40) з урахуванням залежності (8.41), забезпечує оптимальний динамічний режим пуску піднімальної машини (рис. 8.6).

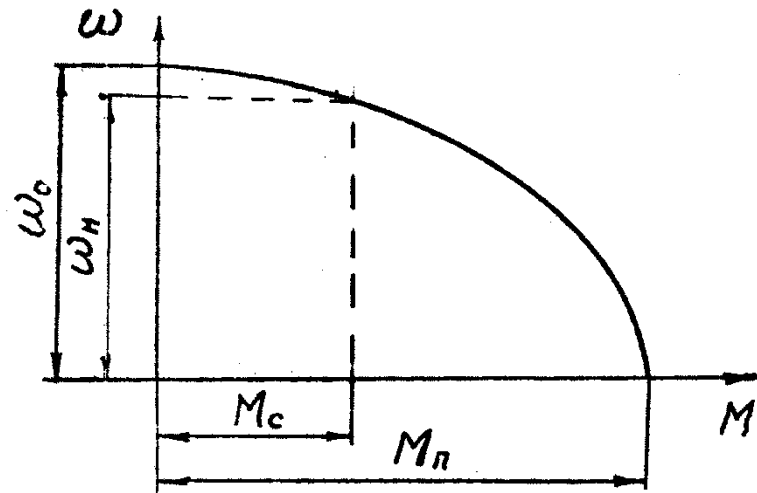


Рис. 8.6. Механічна характеристика електропривода з оптимальним динамічним режимом пуску

Аналогічним чином побудована механічна характеристика електропривода, що забезпечує оптимальний ривковий режим пуску піднімальної машини (рис. 8.7).

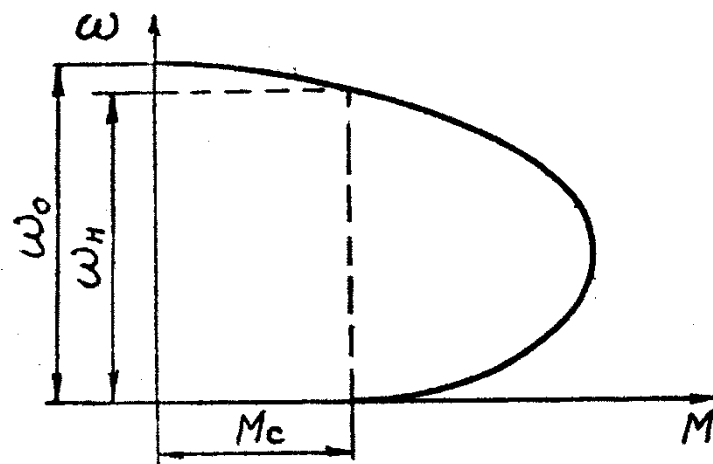


Рис. 8.7. Механічна характеристика електропривода з оптимальним ривковим режимом пуску

Як видно з раніше розглянутих режимів руху піднімальних машин

необхідно одержувати регульоване прискорення від нуля до максимуму, тобто повинний бути регульований момент на валу електродвигуна. Це ускладнює схеми керування електроприводом. Один з напрямків розробок схем керування асинхронним двигуном – зменшення моменту і швидкості обертання ротора зниженням напруги, що живить статор, – можливо тільки з застосуванням замкнутих систем автоматичного керування і регульованих перетворювачів напруги. Для таких схем важливою умовою є застосування двигуна з фазним ротором і досить великим активним опором у колі ротора, тому що інакше величина і розподіл втрат від нагрівання двигуна виявляються неприйнятними.

Тиристорні системи з двигунами постійного струму вирішують поставлену проблему реалізації оптимальних режимів руху, в основному, шляхом використання реверсивних контакторних мостів. Режими інвертування в цих схемах звичайно обумовлюють значний перепад частоти обертання ротора двигуна при переході з рухового режиму в генераторний і навпаки.

Тиристорні перетворювачі частоти з короткозамкненими двигунами змінного струму працюють на характеристиках, аналогічних системі генератор-двигун на постійному струмі, також дозволяють з визначеним ступенем точності реалізувати плавну зміну прискорення, тобто моменту на валу двигуна, відповідно до необхідного оптимального режиму руху. Застосування регуляторів частоти дозволяє створювати компактні, малої маси і габаритних розмірів, більш надійні системи електроприводів піднімальних машин.

Однак найпростішим способом регулювання частоти обертання і моменту на валу ротора асинхронного двигуна є регулювання опорами, включеними послідовно в ротор. Для одержання пускових механічних характеристик, що реалізують той чи інший оптимальний режим руху, застосовують для електродвигунів контролери з несиметричними включеннями в роторі.

Приклад побудови механічної характеристики двигуна, що реалізує з визначеним ступенем точності оптимальний ривковий режим пуску піднімальної машини шляхом переключення роторних резисторів показаний на рис. 8.8. Реалізувати такий режим пуску можна тільки при автоматичному керуванні двигуном. Тут може бути реалізована система запуску електродвигуна з використанням реле прискорень. На рис. 8.8 показане сімейство механічних характеристик 1, 2,..., 8, що дозволяють реалізувати з визначеним наближенням ривковий режим пуску піднімальної машини. Тут горизонтальні лінії показують послідовність переходу з характеристики на характеристику. При такому способі керування пуском асинхронного двигуна точність досягнення необхідної оптимальної характеристики підвищується зі збільшенням числа резисторів, підключених у коло ротора.

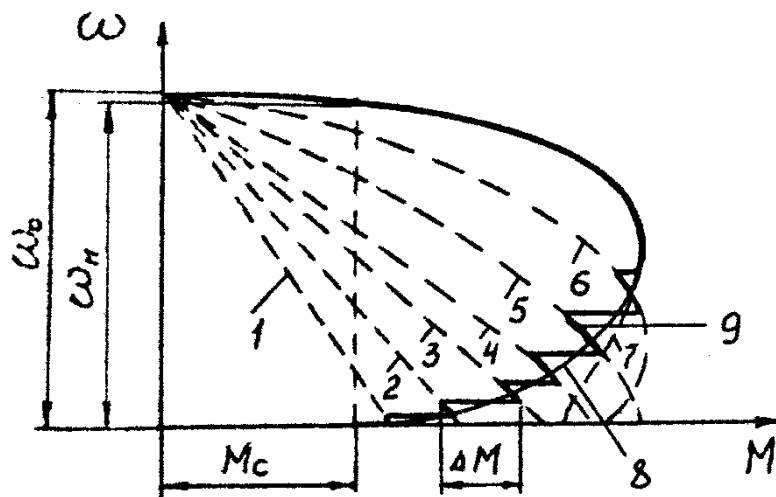


Рис. 8.8. Механічна характеристика електродвигуна, що регулює оптимальний ривковий режим пуску піднімальної машини шляхом перемикання роторних резисторів

При переході з однієї характеристики на іншу відбувається різка зміна (збільшення або зменшення) рушійного моменту від одного значення до іншого за дуже невеликий проміжок часу, що значно збільшує значення ривків у процесі пуску і приводить до виникнення коливань у системі елементів піднімальної машини. Зменшення стрибка зміни моменту ΔM

приводить до значного зниження пружних коливань. На рис. 8.8: 1-7 – штучні механічні характеристики асинхронного двигуна, отримані при підключенні відповідних резисторів у коло ротора; 8 – механічна характеристика, що відповідає оптимальному ривковому режиму пуску; 9 – реальна характеристика електропривода, отримана в результаті перемикання резисторів у процесі пуску у визначені моменти часу, що відповідають найкращому наближенню до оптимального ривкового режиму пуску.

Застосування замість набору резисторів рідинного реостата забезпечує високу плавність процесу пуску, тому що при цьому можна одержати будь-яку залежність зміни опору в колі ротора в часі. При цьому досягається плавна зміна прискорення і ривка при русі піднімальної машини в процесі пуску. Дослідження, проведені в роботі, показали, що кількість піків прискорень, що характеризують процес пуску піднімальної машини з контакторною магнітною станцією і металевими опорами, знижується в 5-6 разів при використанні рідинного реостата, у результаті чого збільшується термін служби канатів.

З розглянутих способів керування пуском електроприводів варто віддати перевагу сучасним системам з тиристорним керуванням, тому що вони дозволяють більш якісно реалізувати оптимальні режими пуску при малих габаритах і незначних втратах електроенергії, що мають місце в керуванні пуском за допомогою металевих резисторів чи регульованих реостатів (наприклад, рідинних). Однак другий спосіб керування пуском електродвигунів на сьогоднішній день є більш простим і надійної в експлуатації, тому ще знаходить застосування в піднімальних машинах. Застосування тиристорних систем керування з перетворювачами частоти для короткозамкнених двигунів змінного струму дозволяє створювати компактні, малої маси і габаритних розмірів, більш надійні в експлуатації системи електроприводів піднімальних машин [15].

РОЗДІЛ 9

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ЗАКОНІВ РУХУ ДЛЯ ДВОМАСОВОЇ МОДЕЛІ МАШИНИ

Для проведення досліджень виконаємо розрахунки оптимальних режимів руху двомасової моделі машини. Таку модель часто використовуються для опису руху кранового візка із вантажем на гнучкому підвісі. У даному розділі всі розрахунки будуть проведені саме для такої моделі.

9.1. Побудова динамічної та математичної моделей руху візка

При дослідженні перехідних режимів роботи кранового візка можна умовно виділити два основні етапи:

- 1) ідеалізація властивостей конструкції візка з вантажем, зовнішніх та внутрішніх дій (побудова динамічної моделі);
- 2) математичний опис процесів динамічної моделі (побудова математичної моделі).

Реальна конструкція кранового візка має нескінченно багато особливостей геометрії, властивостей матеріалу, характеру зовнішнього навантаження тощо. Тому досліджуваний візок замінюється деякою моделлю, яка має скінченне число властивостей з числа тих, які притаманні реальній конструкції візка з вантажем. Деякі властивості об'єкту при переносі на модель можуть бути змінені (спрощені), але це не повинно відображатись на ті сторони даного об'єкту, які підлягають дослідженню. Динамічна модель відображає лише частину властивостей досліджуваного об'єкту, а тому є простішою за нього.

У прольотних кранів частота маятникових коливань вантажу відносно крану суттєво нижча за частоту пружних коливань крану й при їх розрахунку металоконструкцію та трансмісію механізму пересування кранового візка можна приймати абсолютно жорсткими. Навіть за малої довжини гнучкого

підвісу (не більше 3 м) частота маятникових коливань вантажу не перевищує $2 \dots 2,6$ рад/с, у той час як частота пружних коливань кранів у декілька разів (у десятки разів) вище.

Таким чином, маятникові коливання вантажу можна вважати практично не залежними від пружних коливань елементів крану й при їх розрахунку металоконструкцію та трансмісію механізму пересування можна приймати абсолютно жорсткими.

Також прийнято такі припущення:

- 1) підвішений вантаж подібний до вільно висячого маятника;
- 2) вагою тягового елемента нехтуємо;
- 3) припускаємо поперечні коливання вантажу в порівнянні з повздовжніми коливаннями незначними і їх дію не враховуємо;
- 4) нехтуємо опором повітря та інших дисипативних сил (наприклад в поліспасти механізму підйому).

Перераховані припущення при дослідженнях дають досить малу похибку, що підтверджується експериментальними дослідженнями та практичним використанням механізмів пересування кранів в реальних умовах експлуатації.

Крім того, приймемо припущення малості поперечного прогину канату. Це припущення можна обґрунтувати наступним чином: коливання канату подібні до коливань натягненої струни, рівняння руху якої записується таким

чином: $\frac{\partial^2 y}{\partial l^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, де y - поперечне зміщення будь-якої точки (елемента) струни, l - координата цієї точки (вподовж струни), t - час, ρ - маса одиниці довжини струни, G - сила натягу струни. У випадку натягу канату $G = m_2 g$.

Оскільки $m_2 g \gg \rho$, то можна записати $\frac{\partial^2 y}{\partial l^2} \approx 0$, або $\frac{\partial y}{\partial l} \approx \text{const}$. З

геометричних міркувань $\frac{\partial y}{\partial l} = \text{tg} \alpha \approx \alpha$, де α - кут нахилу елемента струни

відносно його нерухомого стану. Отже $\alpha \approx \text{const}$, що, за умовою натягу канату вагою вантажу, можливо лише при $\alpha \approx 0$.

У відповідності з приведеними припущеннями дослідження маятникових коливань вантажу на канатах можна вести за найпростішою схемою двомасової системи (рис. 9.1).

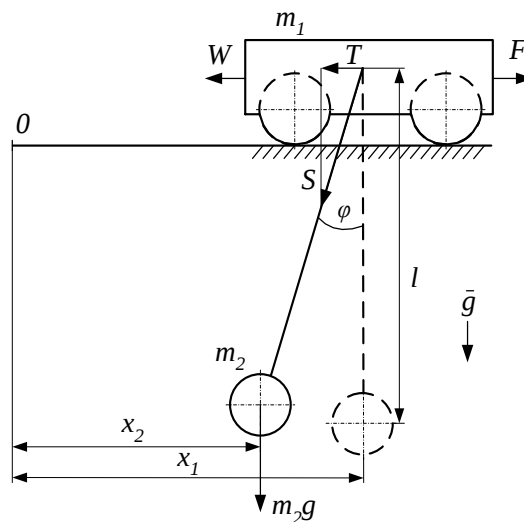


Рис. 9.1. Розрахункова динамічна модель механічної системи „візок-вантаж”

На рис. 9.1.: m_1 – приведена до поступального руху маса вантажного візка і приводного механізму; m_2 – маса вантажу з захватним пристроєм; x_1, x_2 – координати центрів мас відповідно візка та вантажу; g – прискорення вільного падіння; l – довжина гнучкого підвісу вантажу, F – сумарне тягове або гальмівне зусилля що діє на візок; W – сила опору переміщенню візка; S – сила натягу канату; φ – кутова координата відхилення канату від вертикалі; T – горизонтальна складова сили натягу у канаті.

На основі прийнятої динамічної моделі побудовано математичну модель механічної системи „візок-вантаж”. В даному випадку математична модель представляється у вигляді диференціальних рівнянь руху окремих мас. Для отримання диференціальних рівнянь руху представленої динамічної моделі зручно використати метод рівноваги, який заснований на принципі

Даламбера. Даний метод дає змогу вивести рівняння руху мас (рис. 9.1.) на основі умов динамічної рівноваги.

Оскільки максимальні відхилення канатів від вертикалі не перевищують $10...12^0$, приймаємо $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. З урахуванням цього припущення при незмінній довжині канату маємо:

$$x_2 = x_1 - l\varphi, \quad (9.1)$$

$$S = m_2 g, \quad (9.2)$$

Враховуючи вирази (9.1) та (9.2) можемо записати формулу для горизонтальної складової сили натягу канатів:

$$T = S\varphi = m_2 g \frac{x_2 - x_1}{l}. \quad (9.3)$$

Відповідно до методу рівноваги диференціальне рівняння руху вантажу в горизонтальному напрямку має такий вигляд (крапка над символом означає диференціювання за часом):

$$m_2 \ddot{x}_2 = T. \quad (9.4)$$

З врахуванням (9.3) і (9.4) остаточно запишемо рівняння руху маси m_2 :

$$m_2 \ddot{x}_2 + m_2 g \frac{x_2 - x_1}{l} = 0. \quad (9.5)$$

Диференціальне рівняння руху візка:

$$m_1 \ddot{x}_1 = F - W \text{sign}(\dot{x}_1) - T. \quad (9.6)$$

Рівняння (9.6) з урахуванням формули (9.4) переписати так:

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = F - W\text{sign}(\dot{x}_1). \quad (9.7)$$

Об'єднуючи диференціальні рівняння (9.5) і (9.7) отримаємо систему, яка описує рух мас m_1 і m_2 – математичну модель руху системи „візок-вантаж”:

$$\begin{cases} m_2\ddot{x}_2 + \frac{m_2g}{l}(x_2 - x_1) = 0; \\ m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = F - W\text{sign}(\dot{x}_1). \end{cases} \quad (9.8)$$

Дана система диференціальних рівнянь буде використовуватись для визначення оптимальних законів керування крановим візком з вантажем.

Систему рівнянь (9.8) для режиму розгону візка можна представити у вигляді одного рівняння відносно різниці переміщень мас візка та вантажу $\Delta x = x_1 - x_2$:

$$\Delta\ddot{x} + k^2\Delta x = \frac{F - W}{m_1}, \quad (9.9)$$

де Δx – горизонтальне переміщення вантажу відносно рухомої точки підвісу,

$$k = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1l}} - \quad (9.10)$$

частота власних маятникових коливань вантажу відносно візка.

Розв'язуючи рівняння (9.9) при нульових початкових умовах ($\Delta x(0) = \Delta\dot{x}(0) = 0$) та при постійних значеннях $F = \text{const}$ і $W = \text{const}$, знаходимо:

$$\Delta x = A(1 - \cos kt), \quad (9.11)$$

де $A = \frac{(F - W)l}{g(m_1 + m_2)}$ – амплітуда відносних коливань вантажу.

Перша похідна величини Δx по часу (швидкість зміни горизонтального переміщення вантажу відносно рухомої точки підвісу) має вигляд:

$$\Delta \dot{x} = k \sin kt. \quad (9.12)$$

Коливання вантажу до кінця перехідного режиму припиняться при умові рівності переміщень та швидкостей візка та вантажу ($\Delta x(t_1) = \Delta \dot{x}(t_1) = 0$), або у відповідності до рівнянь (9.11) та (9.12):

$$\begin{cases} A(1 - \cos kt_1) = 0, \\ k \sin kt_1 = 0. \end{cases} \quad (9.13)$$

Розв'язок системи (9.13) представляється у вигляді:

$$t_1 = \frac{2\pi n}{k} = 2\pi n \sqrt{\frac{m_1 l}{(m_1 + m_2)g}}, \quad (9.14)$$

де n – будь-яке ціле число.

Таким чином, усунути коливання вантажу можна підібравши час перехідного режиму руху візка. Дослідимо, як будуть впливати параметри m_2 та l на вибір потрібного часу t_1 (рис. 9.2).

Як видно з графічної залежності час t_1 має досить великі значення, які є неприйнятними для інтенсивних перевантажувальних процесів, які здійснюються прольотними кранами.

Таким чином, такий спосіб усунення коливань вантажу, при якому час розгону/гальмування вибирається з відношення (9.14), є неефективними. З цього випливає необхідність визначення таких законів керування рухомою точкою підвісу m_1 , які б не мали цього недоліку.

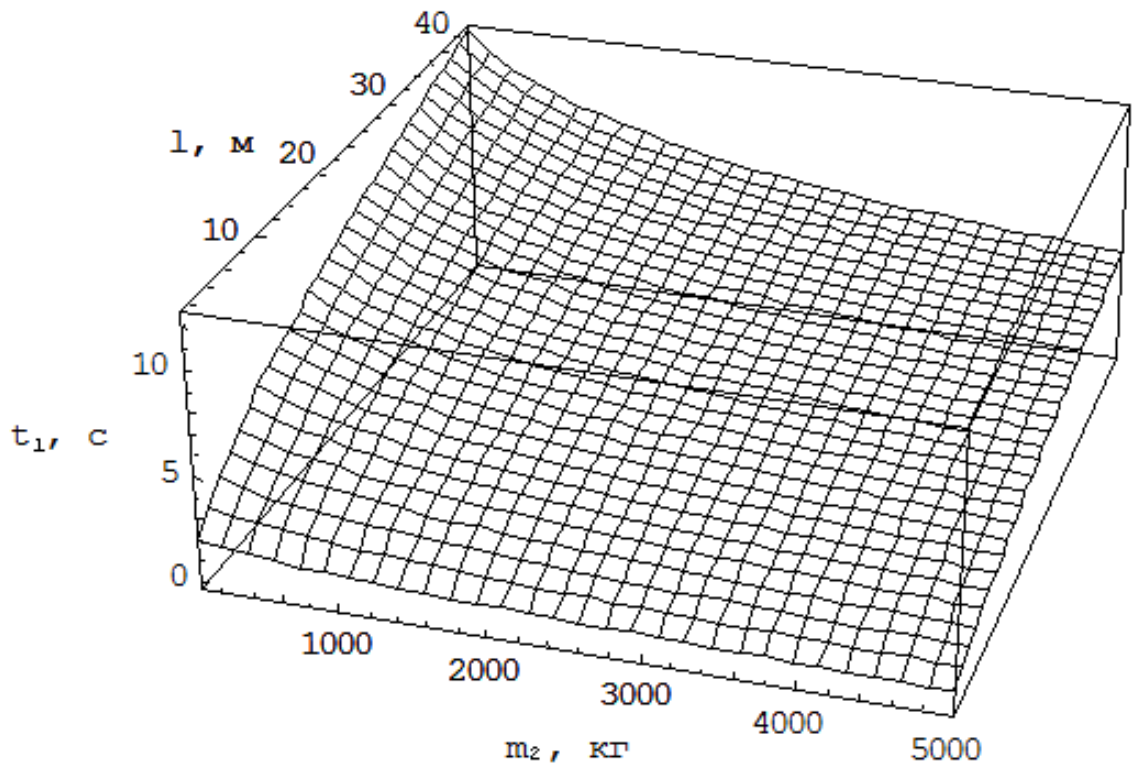


Рис. 9.9. Залежність часу перехідного режиму руху візка від параметрів маси транспортованого вантажу m_2 та від довжини гнучкого підвісу l .

9.2. Вибір методу оптимізації та критеріїв оптимальності

Для знаходження оптимального керування пропонується використати варіаційні методи. Їх головна перевага полягає в тому, що за допомогою них можна отримати режими руху візка із досить плавною зміною кінематичних характеристик (швидкостей, прискорень, ривків тощо) протягом перехідних процесів руху. Використання цих методів дає змогу забезпечити неперервність зміни похідних від координат візка будь-якого порядку. Варіаційні методи оптимізації пропонується використовувати тоді, коли перевага надається точності виконання технологічної операції транспортування вантажу і надійності роботи кранового механізму. Як правило, це випадки, коли тривалість циклу механізму визначена і не накладено обмежень на характеристики приводу.

При використанні варіаційних методів головну роль відіграє обраний критерій оптимізації. Розробці та застосуванню критеріїв для оптимізації та оцінки режимів руху механізмів і машин присвячено багато праць. Оскільки режими руху механізму переміщення кранового візка є функціональними

залежностями переміщень, швидкостей, прискорень, тощо ланок механізму від просторового та часового аргументів протягом перехідних режимів руху, то критерій повинен мати вигляд інтегрального функціоналу. Крім того, процедура порівняння допустимих режимів руху можлива лише тоді, коли критерій має вигляд скалярної величини і для кожного режиму набуває конкретного значення. В процесі руху візка залежності кінематичних характеристик ланок можуть мати додатні та від'ємні значення, тому у вирази критеріїв вони повинні входити в квадратичному вигляді.

Усім переліченим вимогам до критеріїв руху візка крана відповідає структура критерію у вигляді дії:

$$I_n[q_k(t)] = \int_{t_0}^{t_1} P_n(t, q_k, \dot{q}_k, \dots, q_k^{(n)}) dt, \quad k = 1, \dots, s, \quad (9.15)$$

де $q_k, \dot{q}_k, \dots, q_k^{(n)}$ ($k = 1, \dots, s$) – узагальнені координати механічної системи „візок-вантаж” та їх похідні включно до n -го порядку;

s – кількість узагальнених координат;

t_0, t_1 – моменти часу початку та завершення перехідного режиму руху відповідно початковий та кінцевий;

P_n – підінтегральний вираз відповідного критерію n -го порядку.

Кожний окремий критерій руху візка оцінює окремі властивості його руху. Для оптимізації режимів руху за кількома критеріями одночасно використовується комплексний критерій, який містить окремі критерії у вигляді лінійної згортки:

$$K = \sum_{i=1}^n \delta_i K_i = \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{I_i}{I_i^*}; \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.16)$$

де δ_i – i -й безрозмірний ваговий коефіцієнт, який ураховує частку i -го критерію;

K_i – безрозмірний критерій;

I_i – мінімально можливе значення i -го критерію I_i , яке визначається шляхом розв’язання варіаційної задачі для функціоналу за формулою (9.15) при різних значеннях n .

Сума коефіцієнтів у формулі (9.16) $\sum_{i=0}^n \delta_i = 1$, а кожний з них приймають у межах від нуля до одиниці і встановлюють залежно від вимог до руху візка шляхом порівняння абсолютних максимальних значень кінематичних характеристик з їх допустимими значеннями, або шляхом експертних оцінок. Крім того підбором значень вагових коефіцієнтів δ_i можна добитись покращення якості перехідних режимів, як це буде показано нижче.

Вибір того чи іншого критерію повинен бути обґрунтований специфікою транспортних задач, які виконує візок, а також обмеженнями, які накладаються на кінематичні характеристики його руху. В якості критеріїв оптимальності руху візка крана можуть виступати кінематичні характеристики механічної системи „візок-вантаж”: середньоквадратичне відхилення вантажу від вертикалі точки підвісу протягом часу перехідного режиму і його вищі похідні за часом:

$$\left[\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} [(x_1 - x_2)^{(n)}]^2 dt \right]^{1/2} \rightarrow \min, \quad n = 0, 1, \dots, m, \quad (9.17)$$

де n – порядок підінтегрального виразу оптимізаційного критерію;

m – максимальний порядок підінтегрального виразу, а також динамічні характеристики механічної системи „візок-вантаж”: середньоквадратичне приводне зусилля, що діє на візок і його вищі похідні за часом:

$$\left[\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} [F^{(n)}]^2 dt \right]^{1/2} \rightarrow \min, \quad n = 0, 1, \dots, m. \quad (9.18)$$

Головна вимога, яка ставиться до оптимальних законів керування знайдених за допомогою запропонованих оптимізаційних критеріїв: до кінця

перехідного режиму візок і вантаж повинні мати однакові переміщення та швидкості. Знайдемо порядок n підінтегральних виразів такий, при якому б ця вимога виконувалась, а оптимальні закони керування можна було б реалізувати на практиці.

Мінімізувати критерії (9.17) та (9.18) можна мінімізувавши інтегральні частини у виразах цих критеріїв. Екстремалі функціоналів (9.17) та (9.18) будемо шукати у вигляді функції переміщення вантажу від часу. В подальшому від неї можна легко перейти до функцій параметрів керування візком: його швидкістю, або приводним зусиллям. Враховуючи систему рівнянь (9.8) інтегральну частину критерію за формулою (9.17) можна записати таким чином:

$$\int_{t_0}^{t_1} [(x_1 - x_2)^{(n)}]^2 dt = \frac{l^2}{g^2} \int_{t_0}^{t_1} [x_2^{(n+2)}]^2 dt. \quad (9.19)$$

Умовою мінімуму такого інтегрального функціоналу є рівняння Ейлера-Пуассона:

$$\sum_{i=0}^{n+2} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial P_n}{\partial x_2^i} = 0, \quad (9.20)$$

Рівняння (9.20) в даному випадку можна записати таким чином:

$$x_2^{(2n+4)} = 0. \quad (9.21)$$

Для знаходження потрібної функції з сімейства інтегральних кривих, які є розв'язками рівняння (9.21), необхідно використати $2n+4$ крайових умов руху механічної системи „візок-вантаж”, причому таких, які б задовольняли поставлену вище вимогу. Розглянемо випадок для розгону візка, при цьому будемо вважати, що коливання вантажу на початку розгону відсутні. З урахуванням цього крайові умови запишуться таким чином:

$$\begin{cases} x_1=0, \dot{x}_1=0, x_2=0, \dot{x}_2=0 & \text{при } t=t_0; \\ \dot{x}_1=v, \ddot{x}_1=0, \dot{x}_2=v, \ddot{x}_2=0 & \text{при } t=t_1, \end{cases} \quad (9.22)$$

де v – номінальна (усталена) швидкість руху візка.

З урахуванням системи рівнянь (9.8) крайові умови (9.22) можна переписати так:

$$\begin{cases} x_2=0, \dot{x}_2=0, \ddot{x}_2=0, \overset{IV}{\ddot{x}_2}=0 & \text{при } t=t_0; \\ \dot{x}_2=v, \ddot{x}_2=0, \overset{IV}{\ddot{x}_2}=0, x_2=0, & \text{при } t=t_1. \end{cases} \quad (9.23)$$

Таким чином, для того, щоб закон керування рухом візка забезпечував усунення коливань підвішеного вантажу необхідно використати вісім крайових умов (9.23). При цьому найменший порядок критерію оптимальності за виразом (9.19) буде рівний двом ($2n+4=8$, $n=2$). Використання критеріїв меншого порядку неможливе, оскільки знайдені з їх допомогою закони не забезпечують крайові умови руху візка і коливання вантажу в кінці перехідного режиму будуть присутні.

Аналогічне дослідження можна провести і для динамічних критеріїв оптимальності. Оскільки приводну силу F можна представити виразом, в який функція переміщення вантажу входить похідною четвертого порядку, то для функціоналу за формулою (9.18) $n=0$.

Для комплексних критеріїв за допомогою вагового коефіцієнта δ можна поставити ще одну додаткову крайову умову. Це означає, що комплексні критерії з підінтегральними виразами порядків менше n -го також дадуть екстремалі, за якими коливання вантажу будуть усунені.

Максимальний порядок критеріїв оптимальності m можна знайти емпірично. Зі збільшенням порядку критерію на одиницю кількість крайових умов для розв'язання рівняння Ейлера-Пуассона збільшиться на дві одиниці. Це означає, що будуть поставлені крайові умови, за якими в околах крайніх точок законів руху (початок та кінець перехідного процесу руху) кінематичні характеристики вищих порядків (прискорення, ривки і т.д.) вантажу будуть

рівні нулю. Тобто зі збільшенням порядку критерію оптимальності збільшиться плавність руху вантажу в крайніх точках перехідного процесу руху. При цьому профіль кривої $\dot{x}_2$ буде наближатись до графіка функції Хевісайда, а графік кривої $\ddot{x}_2$ – до дельта-функції. Очевидно, що реалізувати такі закони руху вантажу на практиці неможливо, оскільки при цьому до візка необхідно прикладати значні (нескінченні при $n \rightarrow \infty$) зусилля. Зменшення цих зусиль можливе за рахунок подовження тривалості перехідних режимів руху візка з вантажем. Однак необхідно прагнути, щоб перехідний режим руху візка проходив швидко. Тому, щоб забезпечити прийнятне значення максимального зусилля, прикладеного до візка протягом перехідних режимів його руху при невеликій тривалості перехідних режимів, максимальний порядок підінтегрального виразу критерію оптимальності за формулою (9.11) не повинен перевищувати чотирьох, за формулою (9.12) – одиниці.

9.3. Визначення оптимальних законів керування за одиничними кінематичними критеріями

9.3.1. Визначення оптимальних законів керування за одиничними кінематичними критеріями з підінтегральним виразом другого порядку

Для визначення оптимальних законів керування за допомогою варіаційного числення необхідно задатись оптимізаційним критерієм та крайовими умовами руху вантажу протягом перехідного режиму. Як було показано вище мінімальний порядок підінтегрального виразу для одиничного кінематичного критерію рівний двом. Зазначимо, що для знаходження екстремалі можна поставити різні крайові умови, при цьому ми отримаємо декілька законів керування.

Всі закони керування будуть визначатись для режиму пуску візка з вантажем. Закони керування для гальмування знаходяться аналогічно, але

при інших крайових умовах. Запишемо інтегральний функціонал, який підлягає мінімізації:

$$I_{\Delta\ddot{x}} = \int_0^{t_1} \Delta\ddot{x}^2 dt \rightarrow \min, \quad (9.24)$$

де $\Delta\ddot{x} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2$.

Умовою мінімуму цього функціоналу є рівняння Ейлера-Пуассона (9.20), яке в даному випадку з урахуванням другого рівняння системи (9.8) запишеться таким чином:

$$\overset{VIII}{x_2} = 0. \quad (9.25)$$

Для знаходження потрібної функції з сімейства інтегральних кривих задамо крайові умови, які з урахуванням системи рівнянь (9.8) запишуться таким чином:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \ddot{x}_2 = 0, \quad \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0 & \text{при } t = t_0; \\ \dot{x}_2 = v, \quad \ddot{x}_2 = 0, \quad \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0, \quad x_2 = 0 & \text{при } t = t_1. \end{cases} \quad (9.26)$$

Опустимо проміжні перетворення та запишемо функцію, яка є розв'язком рівняння (9.25) при крайових умовах (9.26) – функцію переміщення вантажу протягом процесу пуску візка та її вищі похідні за часом:

$$x_2 = \frac{vt^4}{7t_1^6} [-10t^3 + 42t^2t_1 - 63tt_1^2 + 35t_1^3]; \quad (9.27)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{vt^3}{t_1^6} [-10t^3 + 36t^2t_1 - 45tt_1^2 + 20t_1^3]; \quad (9.28)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{-60vt^2}{t_1^6} (t - t_1)^3. \quad (9.29)$$

З урахуванням системи рівнянь (9.8) знаходимо як будуть змінюватись аналогічні функції для візка:

$$x_1 = \frac{vt^2}{7gt_1^6} [-420l(t-t_1)^3 + gt^2(-10t^3 + 42t^2t_1 - 63tt_1^2 + 35t_1^3)]; \quad (9.30)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{vt}{gt_1^6} [-60l(5t-2t_1)(t-t_1)^2 + gt^2(-10t^3 + 36t^2t_1 - 45tt_1^2 + 20t_1^3)]; \quad (9.31)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{-v}{gt_1^6} [60(t-t_1)(gt^2(t-t_1)^2 + 2l(10t^2 - 8tt_1 + t_1^2))]. \quad (9.32)$$

Дослідимо як буде змінюватись динамічне приводне зусилля (зусилля необхідне для приведення у рух мас візка і вантажу) при керуванні рухом візка за приведеними вище законами:

$$F_{\ddot{a}ei} = \frac{-60v(t-t_1)}{gt_1^6} [g(m_1 + m_2)t^2(t-t_1)^2 + 2lm_1(10t^2 - 8tt_1 + t_1^2)]. \quad (9.33)$$

Для отриманих вище законів руху вантажу та візка (9.27)-(9.33) для всього циклу переміщення вантажу побудуємо графіки (приведені нижче графіки побудовані при таких умовах $v=1$ м/с, $m_1=500$ кг, $m_2=2000$ кг, $l=5$ м, $t_1=3$ с; штриховою лінією зображені кінематичні характеристики руху вантажу) (рис. 9.3 а-г). У подальшому будемо приводити лише графіки для розгону візка, оскільки вони більш інформаційні.

У загальному диференціальне рівняння (9.25) можна розв'язувати при інших крайових умовах. Однак при цьому повинна зберігатись умова рівності переміщень та швидкостей візка і вантажу у кінці перехідного режиму руху.

Для розв'язання диференціального рівняння (9.25) використаємо інші крайові умови (нові крайові умови можна отримати якщо кінцеву умову

$x_2(t_1) = 0$ перетворити на початкову $x_2(0) = 0$):

$$\begin{cases} x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0, x_2 = 0 \text{ при } t = t_0; \\ \dot{x}_2 = v, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0 \text{ при } t = t_1 \end{cases} \quad (9.34)$$

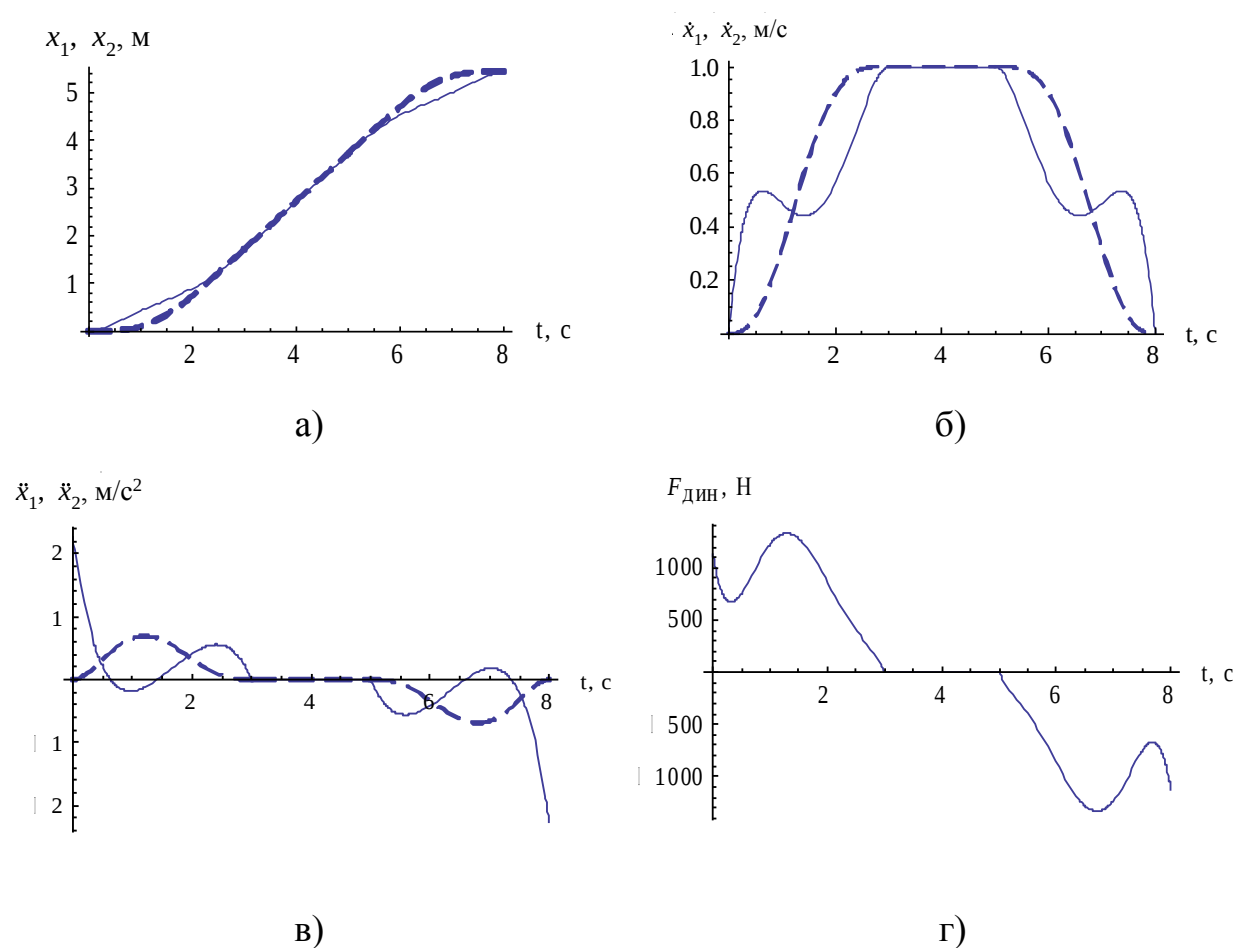


Рис. 9.3. Графіки зміни переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) візка та вантажу і динамічного зусилля діючого на візок (г).

Використання крайових умов (9.34) дасть такі кінематичні функції руху вантажу:

$$x_2 = \frac{vt^5}{7t_1^6} [10t^2 - 28tt_1 + 21t_1^2]; \quad (9.35)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{vt^4}{t_1^6} [10t^2 - 24tt_1 + 15t_1^2]; \quad (9.36)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{60vt^3}{t_1^6} (t - t_1)^2. \quad (9.37)$$

Запишемо аналогічні функції для візка:

$$x_1 = \frac{vt^3}{7gt_1^6} [420l(t - t_1)^2 + gt^2(10t^2 - 28tt_1 + 21t_1^2)]; \quad (9.38)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{vt^2}{gt_1^6} [60l(5t - 3t_1)(t - t_1) + gt^2(10t^2 - 24tt_1 + 15t_1^2)]; \quad (9.39)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{60vt}{gt_1^6} [gt^2(t - t_1)^2 + l(20t^2 - 24tt_1 + 6t_1^2)]. \quad (9.40)$$

Знайдемо як буде змінюватись динамічна складова рушійної сили:

$$F_{дин} = \frac{60v}{gt_1^6} [g(m_1 + m_2)t^2(t - t_1)^2 + 2lm_1(10t^2 - 12tt_1 + 3t_1^2)]. \quad (9.41)$$

Для знайдених кінематичних (9.35)-(9.40) та динамічних (9.41) характеристик побудуємо графіки (рис. 9.4).

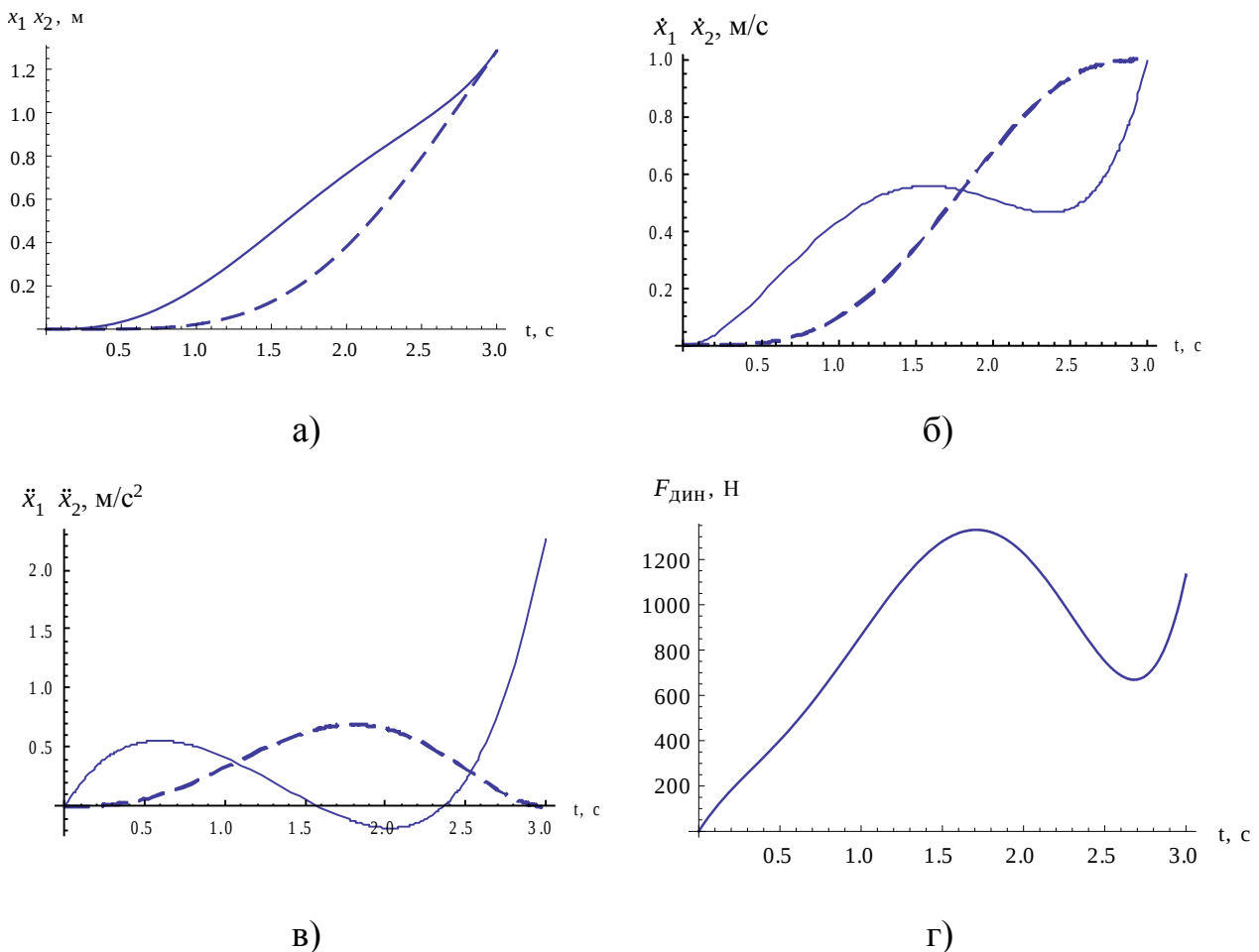


Рис. 9.4. Графіки зміни переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) візка та вантажу і динамічного зусилля діючого на візок (г).

Представлені вище оптимальні закони керування рухом кранового візка виводились за допомогою несиметричних крайових умов (9.26) та

(9.34). Для знаходження інших законів керування поставимо симетричні крайові умови, тобто такі, які вказують значення функції та її вищих похідних, яких вони набувають в двох значеннях аргументу (в даному випадку це час), причому в обох значеннях аргументу вказуються одні і ті ж порядки похідних функції:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \ddot{x}_2 = 0, \ddot{\ddot{x}}_2 = 0 & \text{при } t = 0; \\ x_2 = x, \dot{x}_2 = v, \ddot{x}_2 = 0, \ddot{\ddot{x}}_2 = 0 & \text{при } t = t_1. \end{cases} \quad (9.42)$$

Розв'язок рівняння (9.25) за симетричних крайових умов (9.42) представляється у вигляді:

$$x_2 = \frac{t^4 v}{t_1^7} \left[x(-20t^3 + 70t^2 t_1 - 84t t_1^2 + 35t_1^3) + t_1(t - t_1)(10t^2 - 24t t_1 + 15t_1^2) \right], \quad (9.43)$$

де x – відстань, яку проходить візок і вантаж протягом перехідного режиму руху.

Підставимо знайдене x_2 у вираз (9.24) та знайдемо чому рівний функціонал:

$$\begin{aligned} I_{\Delta\ddot{x}} = & \left(\frac{l}{g}\right)^2 \int_0^{t_1} \left(\frac{120v}{t_1^7} \left[-7x(2t - t_1)(10t^2 - 10t t_1 + t_1^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + t_1(70t^3 - 102t^2 t_1 + 39t t_1^2 - 3t_1^3) \right] \right)^2 dt. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Візьмемо інтеграл, в результаті чого вираз (9.44) запишеться таким:

$$I_{\Delta\ddot{x}} = \frac{2880l^2}{g^2 t_1^7} (35x^2 - 35xv t_1 + 9v^2 t_1^2). \quad (9.45)$$

Як видно з виразу (9.45) функціонал залежить від параметрів l , t_1 , v та x . Оскільки величини l , t_1 та v визначаються технологічними параметрами роботи кранового візка, то єдиний параметр, змінюючи який можна добитись зменшення функціоналу є x . Для знаходження екстремуму функціонала візьмемо частинну похідну виразу (9.45) по x :

$$\frac{\partial I_{\Delta\ddot{x}}}{\partial x} = \frac{2880l^2}{g^2 t_1^7} (70x - 35t_1 v), \quad (9.46)$$

та прирівняємо вираз (9.46) до нуля:

$$\frac{2880l^2}{g^2 t_1^7} (70x - 35t_1 v) = 0. \quad (9.47)$$

В результаті розв'язання рівняння (9.47), маємо:

$$x = \frac{vt_1}{2}. \quad (9.48)$$

Підставимо отримане значення (9.48) в формулу (9.43) та знайдемо функцію переміщення вантажу, запишемо також її вищі похідні:

$$x_2 = \frac{vt^4}{2t_1^5} (2t^2 - 6tt_1 + 5t_1^2); \quad (9.49)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{vt^3}{t_1^5} (6t^2 - 15tt_1 + 10t_1^2); \quad (9.50)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{30vt^2}{t_1^5} (t - t_1)^2. \quad (9.51)$$

Запишемо відповідні кінематичні характеристики для візка:

$$x_1 = \frac{vt^2}{2gt_1^5} [60l(t - t_1)^2 + gt^2(2t^2 - 6tt_1 + 5t_1^2)]; \quad (9.52)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{vt}{gt_1^5} [60l(2t^2 - 3tt_1 + t_1^2) + gt^2(6t^2 - 15tt_1 + 10t_1^2)]; \quad (9.53)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{30v}{gt_1^5} [gt^2(t - t_1)^2 + 2l(6t^2 - 6tt_1 + t_1^2)]. \quad (9.54)$$

Функція динамічного приводного зусилля має вигляд:

$$F_{дин} = \frac{30v}{gt_1^5} \left[g(m_1 + m_2)t^2(t - t_1)^2 + 2lm_1(6t^2 - 6tt_1 + t_1^2) \right]. \quad (9.55)$$

Для функцій (9.49)-(9.55) побудуємо графіки (рис. 9.5).

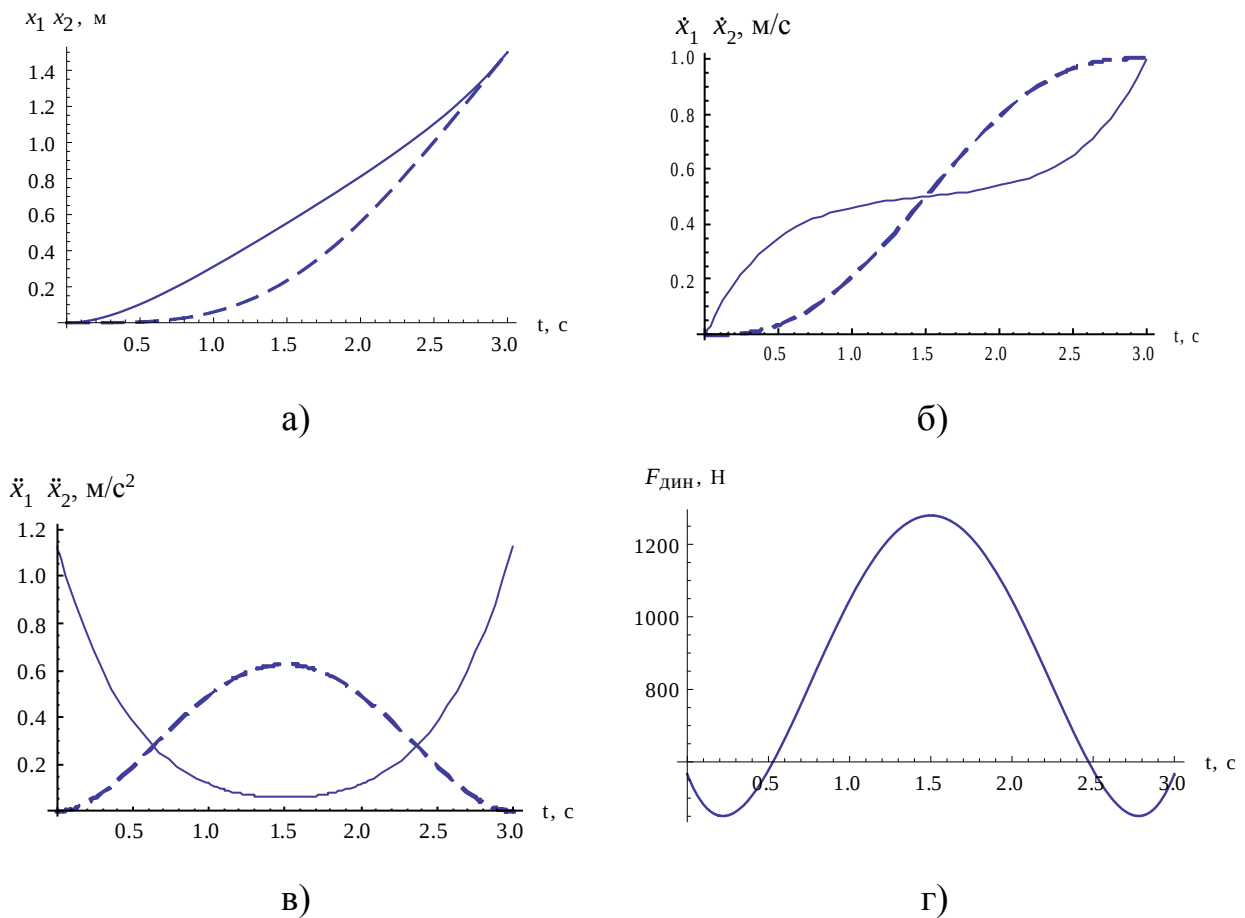


Рис. 9.5. Графіки зміни переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) візка та вантажу і динамічного зусилля діючого на візок (г).

Графічний аналіз представлених залежностей показує певні недоліки отриманих законів керування, а саме ненульові прискорення візка в околах крайніх точок перехідного процесу. Потрібно прагнути до того, щоб прискорення на початку руху були рівні нулю – це дасть змогу усунути удари в кінематичних парах механічних передач. Крім того, необхідно якомога плавніший вихід візка на номінальну швидкість. Жоден з отриманих законів не може забезпечити виконання цих вимог. Для забезпечення плавного руху візка необхідно використати оптимізаційні критерії більш високого порядку.

9.3.2. Визначення оптимальних законів керування за одиничними кінематичними критеріями з підінтегральним виразом третього порядку

Визначення оптимальних законів керування з підінтегральним виразом більш високого (третього) порядку полягає в мінімізації функціоналу виду:

$$I_{\Delta\ddot{x}} = \int_0^{t_1} \Delta\ddot{x}^2 dt \rightarrow \min. \quad (9.56)$$

Умовою мінімуму цього функціоналу є рівняння Ейлера-Пуассона (9.20), яке можна записати так:

$$\frac{X}{x_2} = 0. \quad (9.57)$$

Задамо крайові умови для знаходження потрібної функції:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0, \overset{IV}{x_2} = 0 & \text{при } t = 0; \\ \dot{x}_2 = v, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0, \overset{V}{x_2} = 0, \overset{V}{x_2} = 0, & \text{при } t = t_1. \end{cases} \quad (9.58)$$

Екстремаль, яка доставляє мінімум даному функціоналу і відповідає прийнятим крайовим умовам має вигляд [100]:

$$x_2 = \frac{vt^5}{9t_1^8} (35t^4 - 180t^3t_1 + 360t^2t_1^2 - 336tt_1^3 + 126t_1^4). \quad (9.59)$$

Функції швидкості та прискорення вантажу під час пуску:

$$\dot{x}_2 = \frac{vt^4}{t_1^8} (35t^4 - 160t^3t_1 + 280t^2t_1^2 - 224tt_1^3 + 70t_1^4); \quad (9.60)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{280vt^3}{t_1^8} (t - t_1)^4. \quad (9.61)$$

Відповідні кінематичні функції для візка мають вигляд:

$$x_1 = \frac{vt^3}{9gt_1^8} [2520l(t - t_1)^4 + gt^2(35t^4 - 180t^3t_1 + 360t^2t_1^2 - 336tt_1^3 + 126t_1^4)]; \quad (9.62)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{vt^2}{gt_1^8} \left[280l(7t-3t_1)(t-t_1)^3 + gt^2(35t^4 - 160t^3t_1 + 280t^2t_1^2 - 224tt_1^3 + 70t_1^4) \right]; \quad (9.63)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{280vt(t-t_1)^2}{gt_1^8} \left[gt^2(t-t_1)^2 + 6l(7t^2 - 6tt_1 + t_1^2) \right]. \quad (9.64)$$

Знаючи функції прискорень візка і вантажу можемо записати закон зміни динамічного приводного зусилля, яке діє на візок:

$$F_{\text{дин}} = \frac{280vt(t-t_1)^2}{t_1^8} \left[(m_1 + m_2)t^2(t-t_1)^2 + \frac{6lm_1(7t^2 - 6tt_1 + t_1^2)}{g} \right]. \quad (9.65)$$

Представимо отримані закони зміни кінематичних (9.59)-(9.64) та динамічних (9.65) характеристик у графічному вигляді (рис. 9.6).

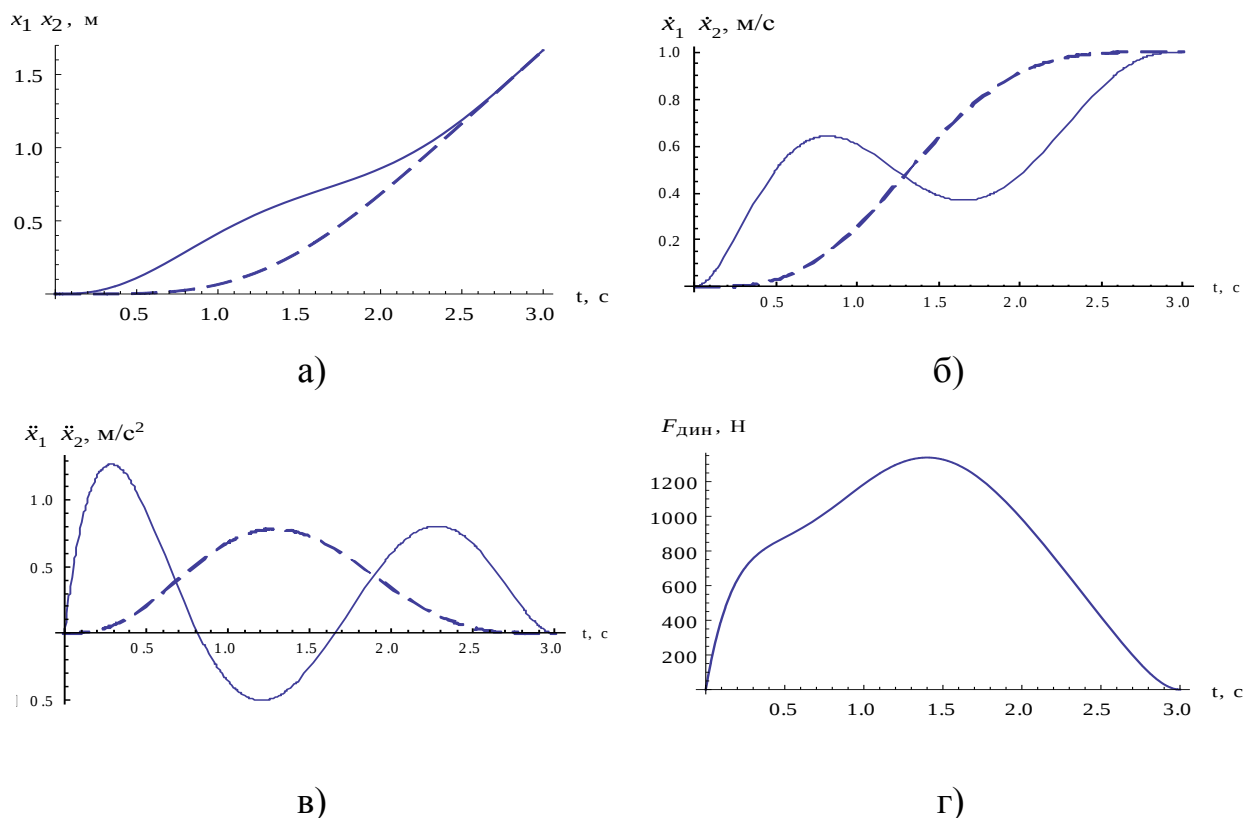


Рис. 9.6. Графіки зміни переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) візка та вантажу і динамічного зусилля діючого на візок (г).

Для розв'язування рівняння (9.57) окрім крайових умов (9.58) можна поставити інші – 6 початкових та 4 кінцеві умови:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0, \overset{V}{x_2} = 0, \overset{V}{\dot{x}_2} = 0 & \text{при } t = 0; \\ \dot{x}_2 = v, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0, x_2 = 0 & \text{при } t = t_1. \end{cases} \quad (9.66)$$

В результаті розв'язання диференціального рівняння (9.57) при крайових умовах (9.66) отримаємо такі кінематичні функції руху вантажу:

$$x_2 = \frac{vt^6}{9t_1^8}(-35t^3 + 135t^2t_1 - 180tt_1^2 + 84t_1^3); \quad (9.67)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{vt^5}{t_1^8}(-35t^3 + 120t^2t_1 - 140tt_1^2 + 56t_1^3); \quad (9.68)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{-280vt^4}{t_1^8}(t - t_1)^3. \quad (9.69)$$

Аналогічні кінематичні показники руху візка:

$$x_1 = \frac{vt^4}{9gt_1^8}[-2520l(t - t_1)^3 + gt^2(-35t^3 + 135t^2t_1 - 180tt_1^2 + 84t_1^3)]; \quad (9.70)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{vt^3}{gt_1^8}[-280l(7t - 4t_1)(t - t_1)^3 + gt^2(-35t^3 + 120t^2t_1 - 140tt_1^2 + 56t_1^3)]; \quad (9.71)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{-280vt^2(t - t_1)}{gt_1^8}[gt^2(t - t_1)^2 + 6l(7t^2 - 8tt_1 + 2t_1^2)]. \quad (9.72)$$

Динамічне зусилля, яке діє на візок описується таким законом:

$$F_{\partial_{ин}} = \frac{-280vt^2(t - t_1)}{gt_1^8}[g(m_1 + m_2)t^2(t - t_1)^2 + 6lm_1(7t^2 - 8tt_1 + 2t_1^2)]. \quad (9.73)$$

Для визначених законів руху візка і вантажу (9.67)-(9.73) побудуємо їх графічні залежності (рис. 9.7).

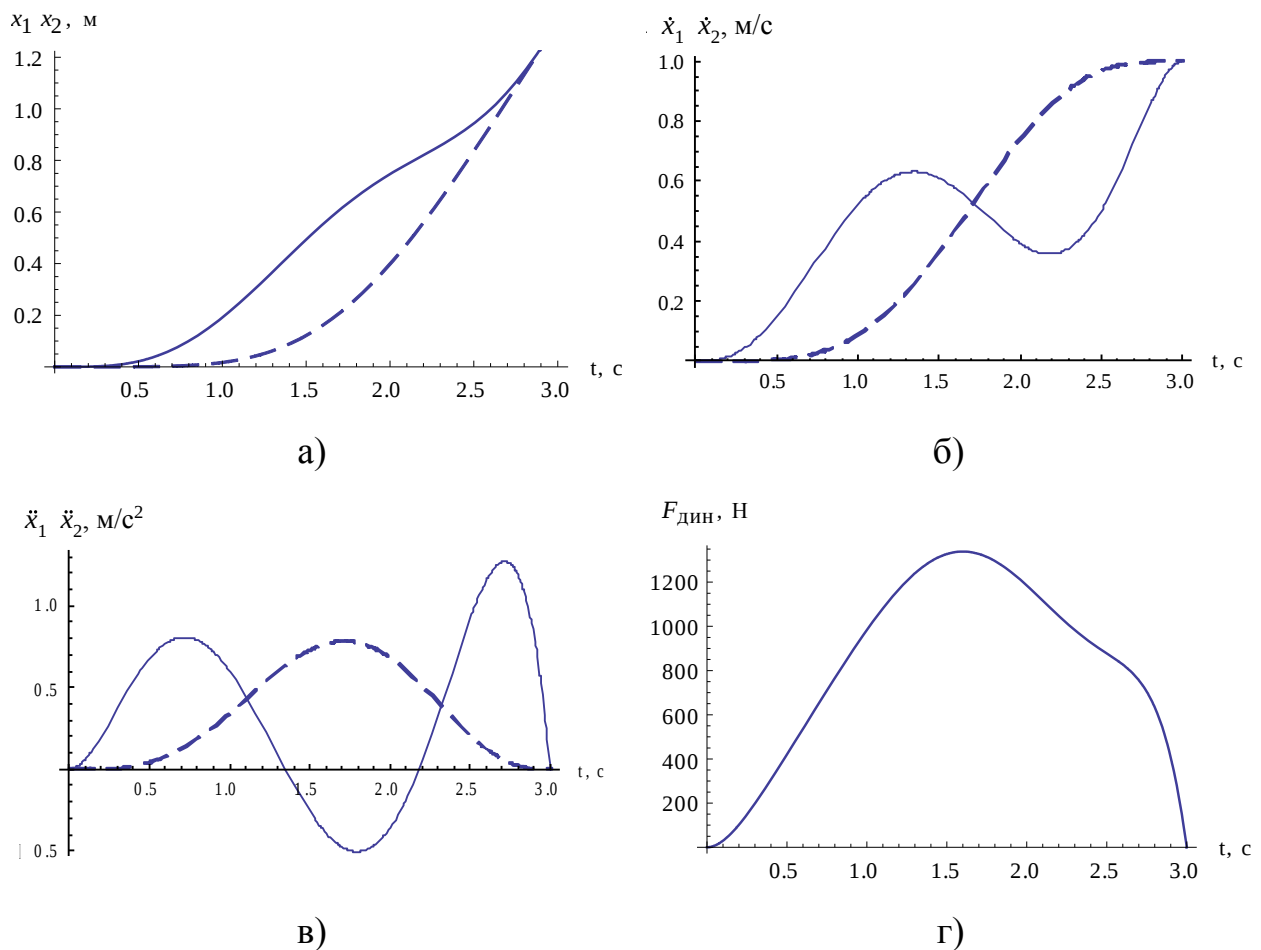


Рис. 9.7. Графіки зміни переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) візка та вантажу і динамічного зусилля діючого на візок (г).

Для знаходження оптимальних законів керування можна також використати симетричні крайові умови:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0, x_2 = 0 & \text{при } t = 0; \\ x_2 = x, \dot{x}_2 = v, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0, x_2 = 0 & \text{при } t = t_1, \end{cases} \quad (9.74)$$

Розв'язок рівняння (9.57) при крайових умовах (9.74) представляється у вигляді:

$$x_2 = \frac{vt^5}{t_1^9} \left[x(70t^4 - 315t^3t_1 + 540t^2t_1^2 - 420tt_1^3 + 126t_1^4) - t_1(t - t_1)(35t^3 - 120t^2t_1 + 140tt_1^2 - 56t_1^3) \right]. \quad (9.75)$$

Знайдемо невідоме x , для чого з врахуванням виразу (9.75) запишемо підінтегральний вираз функціоналу (9.56):

$$P_{\Delta\ddot{x}} = \left(\frac{l}{g}\right)^2 \left(\frac{-1680t(t-t_1)}{t_1^9} \left[-9x(2t-t_1)(7t^2-7tt_1+t_1^2) + t_1(63t^3-92t^2t_1+38tt_1^3-4t_1^3) \right] \right)^2. \quad (9.76)$$

Після відповідних перетворень враховуючи вираз (9.76) формула для критерію (9.56) прийме такий вигляд:

$$I_{\Delta\ddot{x}} = \frac{4480l^2}{11g^2t_1^7} (405x^2 - 405xvt_1 + 104v^2t_1^2). \quad (9.77)$$

Візьмемо частинну похідну функції (9.77) по x :

$$\frac{\partial I_{\Delta\ddot{x}}}{\partial \tilde{o}} = \frac{4480l^2}{11g^2t_1^7} (810x - 405vt_1), \quad (9.78)$$

та прирівнюємо отриманий вираз (9.78) до нуля:

$$\frac{4480l^2}{11g^2t_1^7} (810x - 405vt_1) = 0. \quad (9.79)$$

В результаті розв'язання рівняння (9.79) маємо:

$$x = \frac{vt_1}{2}. \quad (9.80)$$

Підставимо знайдене x (9.80) в формулу (9.75) та отримаємо функцію переміщення вантажу, запишемо також швидкість та прискорення вантажу:

$$x_2 = \frac{vt^5}{2t_1^7} (-5t^3 + 20t^2t_1 - 28tt_1^2 + 14t_1^3); \quad (9.81)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{vt^4}{t_1^7} (-20t^3 + 70t^2t_1 - 84tt_1^2 + 35t_1^3); \quad (9.82)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{140vt^3}{t_1^7}(t-t_1)^3. \quad (9.83)$$

Запишемо відповідні кінематичні характеристики для візка:

$$x_1 = \frac{vt^3}{2gt_1^7}[-280l(t-t_1)^3 + gt^2(-5t^3 + 20t^2t_1 - 28tt_1^2 + 14t_1^3)]; \quad (9.84)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{vt^2}{gt_1^7}[-420l(t-t_1)^2(2t-t_1) + gt^2(-20t^3 + 70t^2t_1 - 84tt_1^2 + 35t_1^3)]; \quad (9.85)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{-140vt(t-t_1)}{gt_1^7}[gt^2(t-t_1)^2 + 6l(5t^2 - 5tt_1 + t_1^2)]. \quad (9.86)$$

Функція динамічного приводного зусилля має вигляд:

$$F_{\text{дин}} = \frac{-140vt(t-t_1)}{gt_1^7}[g(m_1 + m_2)t^2(t-t_1)^2 + 6lm_1(5t^2 - 5tt_1 + t_1^2)]. \quad (9.87)$$

Для знайдених законів (9.81)-(9.87) побудуємо графіки (рис. 9.8).

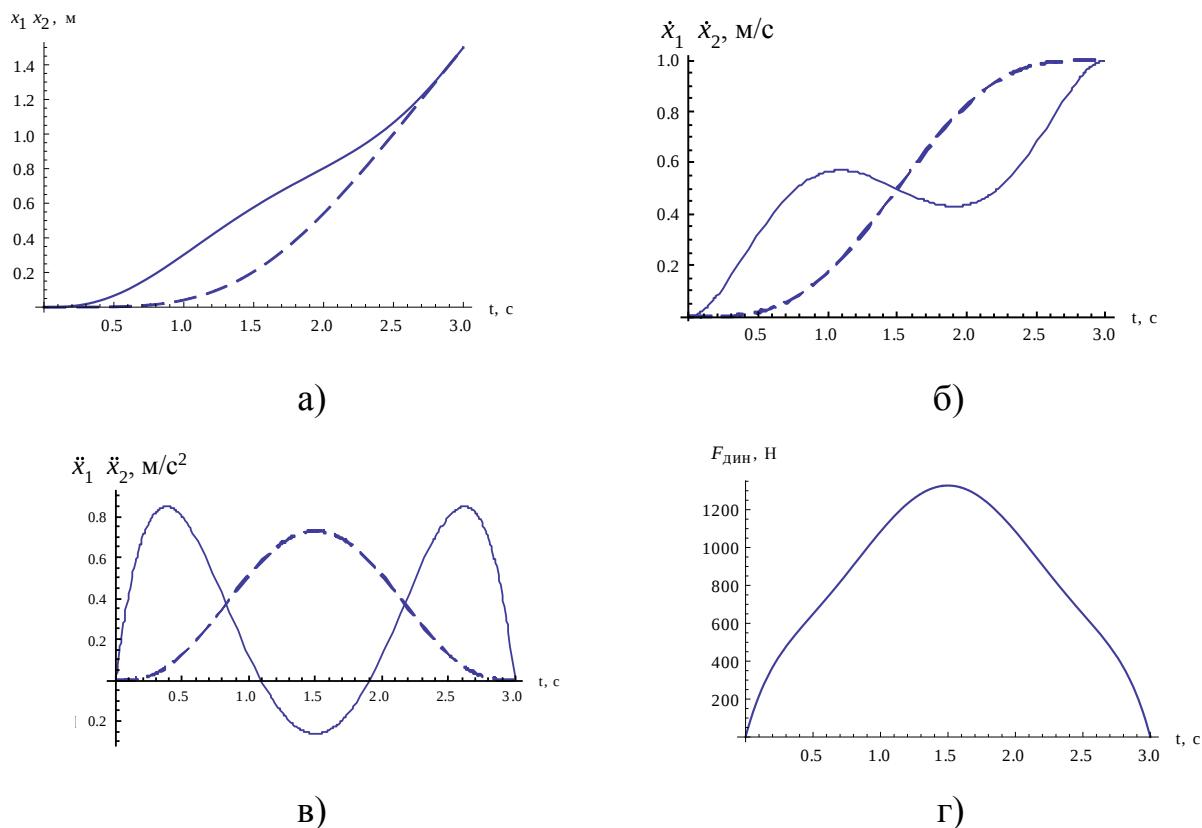


Рис. 9.8. Графіки зміни переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) візка та вантажу і динамічного зусилля діючого на візок (г).

Візуальний аналіз представлених графічних залежностей показує нульові прискорення візка в околах крайніх точок перехідного режиму. Це значно зменшує динамічні навантаження в механічних передачах. Крім того реалізація оптимального керування за цими законами не вимагає створення великого початкового рушійного зусилля (воно рівне силі статичного опору W). Це зменшує навантаження на електропривод візка, який працює в повторно-короткочасному режимі.

9.3.3. Визначення оптимальних законів керування за одиничним кінематичним критерієм з підінтегральним виразом червертого порядку

Визначення оптимальних законів керування з підінтегральним виразом червертого порядку полягає в мінімізації функціоналу виду:

$$I_{\Delta x}^{IV} = \int_0^{t_1} \Delta x^2 dt \rightarrow \min. \quad (9.88)$$

Умовою мінімуму цього функціоналу є рівняння Ейлера-Пуассона (9.20), яке можна записати так:

$$\frac{XII}{x_2} = 0. \quad (9.89)$$

Визначення попередніх законів (п.п. 9.3.2) керування рухом візка показує, що прискорення візка в крайніх точках, а також ривок в одній з крайніх точок рівні нулю. Використання ж симетричних крайових умов дає рівність нулю в крайніх точках лише прискорень візка. Для визначення закона руху візка за критерієм (9.88) використаємо симетричні крайові умови:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0, \overset{V}{x_2} = 0, \overset{V}{\dot{x}_2} = 0 & \text{при } t = 0; \\ x_2 = x, \dot{x}_2 = v, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0, \overset{V}{x_2} = 0, \overset{V}{\dot{x}_2} = 0 & \text{при } t = t_1, \end{cases} \quad (9.90)$$

які дадуть нульові ривки в крайніх точках (на початку руху та у кінці розгону).

Розв'язок рівняння (9.89) при симетричних крайових умовах (9.90) представляється у вигляді:

$$x_2 = \frac{vt^6}{t_1^{11}} \left[x(-252t^5 + 1386t^4t_1 - 3080t^3t_1^2 + 3465t^2t_1^3 - 1980tt_1^4 + 462t_1^5) + \right. \\ \left. - t_1(t - t_1)(126t^4 - 560t^3t_1 + 945t^2t_1^2 - 720tt_1^3 + 210t_1^4) \right]. \quad (9.91)$$

Знайдемо невідоме x , для чого запишемо підінтегральний вираз функціоналу (9.88):

$$P_{\Delta x}^{IV} = \left(\frac{l}{g}\right)^2 \left(\frac{30240}{t_1^{11}} \left[-11x(2t - t_1)(126t^4 - 252t^3t_1 + 154t^2t_1^2 - 28tt_1^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + t_1^4) + t_1(1386t^5 - 3430t^4t_1 + 3010t^3t_1^2 - 1110t^2t_1^3 + 155tt_1^4 - 5t_1^5) \right] \right)^2. \quad (9.92)$$

Враховуючи вираз (9.92) запишемо остаточно функцію функціонала:

$$I_{\Delta x}^{IV} = \frac{10160640Q^2}{g^2t_1^{11}} (99x^2 - 99xvt_1 + 25v^2t^2). \quad (9.93)$$

Візьмемо частинну похідну функції (9.93) по x :

$$\frac{\partial I_{\Delta x}^{IV}}{\partial \tilde{o}} = \frac{10160640Q^2}{g^2t_1^{11}} (198x - 99vt_1), \quad (9.94)$$

та прирівняємо вираз (9.94) до нуля:

$$\frac{10160640Q^2}{g^2t_1^{11}} (198x - 99vt_1) = 0. \quad (9.95)$$

В результаті розв'язання отриманого рівняння (9.95) маємо:

$$x = \frac{vt_1}{2}. \quad (9.96)$$

Підставимо знайдене x (9.96) в формулу (9.91) та отримаємо функцію переміщення вантажу, запишемо також швидкість та прискорення вантажу:

$$x_2 = \frac{vt^6}{2t_1^9} (14t^4 - 70t^3t_1 + 135t^2t_1^2 - 120tt_1^3 + 42t_1^4); \quad (9.97)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{vt^5}{t_1^9} (70t^4 - 315t^3t_1 + 540t^2t_1^2 - 420tt_1^3 + 126t_1^4); \quad (9.98)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{630vt^4}{t_1^9} (t - t_1)^4. \quad (9.99)$$

Запишемо відповідні кінематичні характеристики для візка:

$$x_1 = \frac{vt^4}{2gt_1^9} [1260l(t-t_1)^4 + gt^2(14t^4 - 70t^3t_1 + 135t^2t_1^2 - 120tt_1^3 + 42t_1^4)]; \quad (9.100)$$

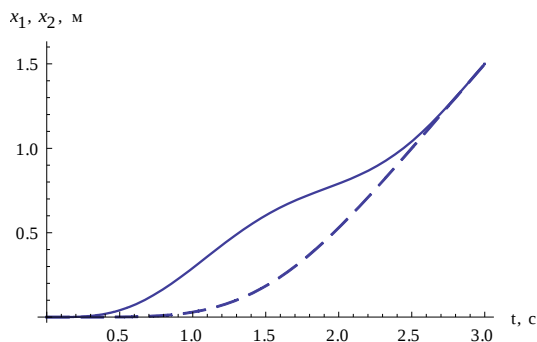
$$\dot{x}_1 = \frac{vt^3}{gt_1^9} [2520l(t-t_1)^3(2t-t_1) + gt^2(70t^4 - 315t^3t_1 + 540t^2t_1^2 - 420tt_1^3 + 126t_1^4)]; \quad (9.101)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{630vt^2(t-t_1)^2}{gt_1^9} [gt^2(t-t_1)^2 + 4l(14t^2 - 14tt_1 + 3t_1^2)]. \quad (9.102)$$

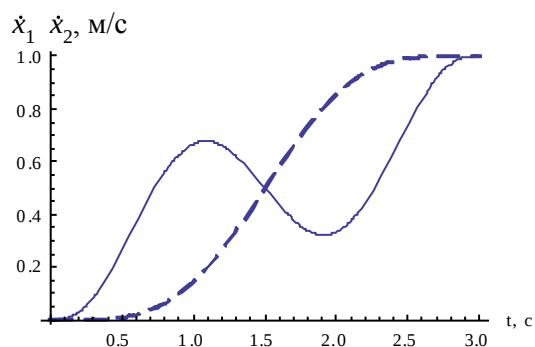
Функція динамічного приводного зусилля має вигляд:

$$F_{\text{дин}} = \frac{630t^2(t-t_1)^2v}{gt_1^9} [g(m_1 + m_2)t^2(t-t_1)^2 + 4lm_1(14t^2 - 14tt_1 + 3t_1^2)]. \quad (9.103)$$

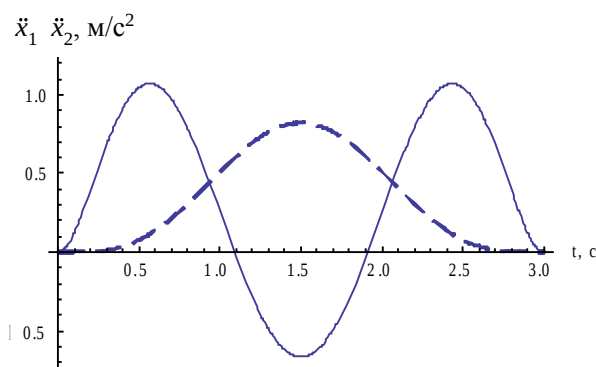
Представимо отримані характеристики (9.97)-(9.103) в графічному вигляді (рис. 9.9).



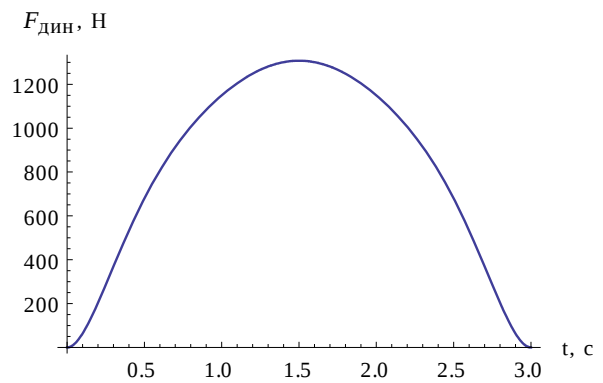
а)



б)



в)



г)

Рис. 9.9. Графіки зміни переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) візка та вантажу і динамічного зусилля діючого на візок (г).

Головною перевагою керування рухом візка за визначеним законом є рівність нулю динамічного зусилля на початку та в кінці руху. Це значно зменшує навантаженість приводу та трансмісії механізму переміщення візка.

Всі визначені оптимальні закони керування мінімізують лише один показник якості руху візка з вантажем. Для оптимізації руху візка за кількома показниками необхідно використати комплексні критерії.

9.4. Визначення оптимальних законів керування за комплексними кінематичними критеріями

9.4.1. Попередні підготовчі перетворення

Мінімізація декількох небажаних показників якості руху візка з вантажем проводиться за допомогою комплексних критеріїв. Комплексний оптимізаційний критерій представляється в вигляді інтегрального функціоналу з підінтегральним виразом за формулою (9.16). Для отримання підінтегральної функції необхідно знайти мінімально можливе значення i -го критерію I_i , яке визначають шляхом розв'язання варіаційної задачі для кожного окремого функціоналу.

В даному пункті будуть визначатись оптимальні закони керування за такими комплексними критеріями:

$$I_{\Delta x + \Delta \dot{x}} = \int_0^{t_1} [\delta_{\Delta x} \frac{\Delta x^2}{\tilde{I}_{\Delta x}} + (1 - \delta_{\Delta x}) \frac{\Delta \dot{x}^2}{\tilde{I}_{\Delta \dot{x}}}] dt; \quad (9.104)$$

$$I_{\Delta \dot{x} + \Delta \ddot{x}} = \int_0^{t_1} [\delta_{\Delta \dot{x}} \frac{\Delta \dot{x}^2}{\tilde{I}_{\Delta \dot{x}}} + (1 - \delta_{\Delta \dot{x}}) \frac{\Delta \ddot{x}^2}{\tilde{I}_{\Delta \ddot{x}}}] dt, \quad (9.105)$$

де $\delta_{\Delta x}$ – безрозмірний ваговий коефіцієнт, який ураховує частку $I_{\Delta x}$ критерію;

$\delta_{\Delta \dot{x}}$ – безрозмірний ваговий коефіцієнт, який ураховує частку $I_{\Delta \dot{x}}$ критерію;

$\tilde{I}_{\Delta x}$ – мінімально можливе значення критерію $I_{\Delta x}$, яке визначається шляхом розв’язання варіаційної задачі для функціоналу за формулою (9.17) при значенні $n=0$;

$\tilde{I}_{\Delta \dot{x}}$ – мінімально можливе значення критерію $I_{\Delta \dot{x}}$, яке визначається шляхом розв’язання варіаційної задачі для функціоналу за формулою (9.17) при значенні $n=1$.

Знайдемо мінімально можливі значення критеріїв $\tilde{I}_{\Delta x}$, $\tilde{I}_{\Delta \dot{x}}$, $\tilde{I}_{\Delta \ddot{x}}$. Для критерію різниці прискорень візка та вантажу можна визначити мінімум підставивши екстремаль x_2 знайдену у пункті 9.3 в підінтегральний вираз та взявши відповідний інтеграл (9.24). В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\Delta \ddot{x}} &= \int_0^{t_1} \Delta \ddot{x}^2 dt = \int_0^{t_1} \left(\frac{l}{g} x_2^{IV} \right)^2 dt = \\ &= \int_0^{t_1} \left[\frac{120lv}{gt_1^6} (-10t^3 + 18t^2t_1 - 9tt_1^2 + t_1^3) \right]^2 dt = \frac{8640}{7t_1} \left(\frac{lv}{gt_1^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (9.106)$$

Тепер, з врахуванням виразу (9.106), можемо записати безрозмірний критерій:

$$\frac{\Delta \ddot{x}}{\tilde{I}_{\Delta \ddot{x}}} = \frac{7}{8640} \frac{x_2^{IV} t_1^5}{v^2}. \quad (9.107)$$

Для визначення мінімально можливих значень критеріїв $I_{\Delta x}, I_{\Delta \dot{x}}$ необхідно розв'язати відповідні варіаційні задачі. Не будемо детально зупинятись на їх розв'язанні, оскільки вони подібні до тих задач, які розв'язувались у пункті 9.3. Запишемо результати:

1) екстремаль функціонала

$$I_{\Delta x} = \int_0^{t_1} \Delta x^2 dt, \quad (9.108)$$

представляється у вигляді

$$x_2 = \frac{vt^3}{3t_1^2}; \quad (9.109)$$

2) екстремаль функціонала

$$I_{\Delta \dot{x}} = \int_0^{t_1} \Delta \dot{x}^2 dt, \quad (9.110)$$

представляється у вигляді

$$x_2 = \frac{vt^4}{t_1^3} \left(1 - \frac{8t}{15t_1}\right). \quad (9.111)$$

Враховуючи вирази (9.109) та (9.111) знайдемо мінімально можливі значення критеріїв (9.108) та (9.110):

$$\tilde{I}_{\Delta x} = \int_0^{t_1} \Delta x^2 dt = \int_0^{t_1} \left(\frac{l}{g} \ddot{x}\right)^2 dt = \int_0^{t_1} \left(\frac{l}{g} \frac{2vt}{t_1^2}\right)^2 dt = \frac{4}{t_1} \left(\frac{vl}{g}\right)^2; \quad (9.112)$$

$$\tilde{I}_{\Delta \dot{x}} = \int_0^{t_1} \Delta \dot{x}^2 dt = \int_0^{t_1} \left(\frac{l}{g} \ddot{x}\right)^2 dt = \int_0^{t_1} \left[12 \frac{vt}{t_1^3} \frac{l}{g} \left(2 - 3 \frac{t}{t_1}\right)\right]^2 dt = \frac{96}{5t_1} \left(\frac{vl}{gt_1}\right)^2. \quad (9.113)$$

Враховуючи вирази (9.112) та (9.113) запишемо безрозмірні критерії:

$$\frac{\Delta x}{\tilde{I}_{\Delta x}} = \frac{3}{4} \frac{\ddot{x}_2^2 t_1}{v^2}; \quad (9.114)$$

$$\frac{\Delta \dot{x}}{\tilde{I}_{\Delta \dot{x}}} = \frac{5}{96} \frac{\ddot{x}_2^2 t_1^3}{v^2}. \quad (9.115)$$

Всі підготовчі перетворення для створення комплексних критеріїв виконані. Тепер перейдемо безпосередньо до визначення оптимальних законів руху візка з вантажем.

9.4.2. Визначення оптимальних законів керування за критерієм, що враховує переміщення та швидкості візка і вантажу

Знайдемо екстремаль, яка доставляє мінімум функціоналу за виразом (9.104) для цього, враховуючи попередньо знайдені вирази (9.114) та (9.115) надамо йому „робочого” вигляду:

$$I_{\Delta x + \Delta \dot{x}} = \int_0^{t_1} [\delta_{\Delta x} \frac{\Delta x}{\tilde{I}_{\Delta x}} + (1 - \delta_{\Delta x}) \frac{\Delta \dot{x}}{\tilde{I}_{\Delta \dot{x}}}] dt = \frac{t_1}{v^2} \int_0^{t_1} \left[\frac{3}{4} \ddot{x}_2^2 \delta_{\Delta x} + \frac{5}{96} \ddot{x}_2^2 t_1^2 (1 - \delta_{\Delta x}) \right] dt. \quad (9.116)$$

Умовою екстремуму функціонала (9.116) є рівняння Ейлера-Пуассона (9.20). Запишемо знайдене рівняння:

$$\frac{3}{2} \delta_{\Delta x} \overset{IV}{x_2} - \frac{5}{48} t_1^2 (1 - \delta_{\Delta x}) \overset{VI}{x_2} = 0. \quad (9.117)$$

Для полегшення розв’язування рівняння (9.117) введемо наступне позначення:

$$A^2 = \frac{5(\delta_{\Delta x} - 1)}{72 \delta_{\Delta x}} t_1^2, \quad (9.118)$$

в результаті чого отримаємо:

$$\overset{IV}{x_2} + \frac{\overset{VI}{x_2}}{A^2} = 0. \quad (9.119)$$

Використаємо такі крайові умови для знаходження постійних інтегрування:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \ddot{x}_2 = 0 & \text{при } t = 0; \\ \dot{x}_2 = v, \ddot{x}_2 = 0, \dddot{x}_2 = 0 & \text{при } t = t_1. \end{cases} \quad (9.120)$$

Запишемо функцію, яка є розв'язком рівняння (9.119) при прийнятих крайових умовах (9.120):

$$\begin{aligned} x_2 = v[6At + A^3t^3 + 6At_1 \cos(At - At_1) - A(6t + A^2t^3 + 6A - 3A^2t^2t_1) \times \\ \times \cos(At_1) - 6\sin(At) + 6\sin(At - At_1) + 6\sin(At_1) - 3A^2t^2 \sin(At_1) - \\ - 6A^2tt_1 \sin(At_1)][6A(At_1 \cos(\frac{At_1}{2}) - 2\sin(\frac{At_1}{2}))^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (9.121)$$

В формулі (9.121) невідомою величиною залишається A , яка залежить від значення вагового коефіцієнту $\delta_{\Delta x}$ (9.118).

При прийнятих крайових умовах (9.120) на початку розгону/гальмування швидкості візка і вантажу можуть бути різні. Приймемо умову:

$$\Delta \dot{x}(0) = 0. \quad (9.122)$$

Умова (9.122) з урахуванням системи рівнянь (9.8) прийме такий вигляд:

$$\ddot{x}_2(0) = 0. \quad (9.123)$$

Визначимо таке A , при якому рівність (9.123) буде справедлива. Для цього знайдемо третю похідну отриманої функції (9.121) за часом:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 = v[6A^3 + 6A^3 \cos(At) - 6A^3 \cos(At - At_1) - 6A^3 \cos(At_1) + \\ + 6A^4t_1 \sin(At - At_1)] \times [6A(At_1 \cos(\frac{At_1}{2}) - 2\sin(\frac{At_1}{2}))^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (9.124)$$

Прирівняємо вираз (9.124) при $t=0$ до нуля. В результаті отримаємо:

$$\frac{2A^2 v \sin(\frac{At_1}{2})}{2 \sin(\frac{At_1}{2}) - At_1 \cos(\frac{At_1}{2})} = 0. \quad (9.125)$$

Очевидно, що розв'язки рівняння (9.125) відносно A будуть описуватись таким виразом:

$$A = \frac{2\pi n}{t_1}; \quad n = 0, 1, \dots, Z. \quad (9.126)$$

Найкращим значенням A є таке:

$$A = \frac{2\pi}{t_1}. \quad (9.127)$$

Це пояснюється тим, що при $n > 1$ у виразі (9.126) умова рівності переміщень та швидкостей візка і вантажу під час розгону/гальмування буде виконуватись n разів. Отже на часових проміжках $\frac{t_1}{n}$ візок буде рухатись зі значними прискореннями, що є неприпустимим. При $n=0$ рівняння (9.127) не має сенсу.

Підставимо знайдене A у вираз (9.121) і після спрощень отримаємо:

$$x_2 = v \frac{2\pi^2 t^2 - t_1^2 + t_1^2 \cos(\frac{2\pi t}{t_1})}{4\pi^2 t_1}. \quad (9.128)$$

Запишемо вищі похідні – функції кінематичних характеристик руху вантажу:

$$\dot{x}_2 = v \frac{4\pi^2 t - 2\pi t_1 \sin(\frac{2\pi t}{t_1})}{4\pi^2 t_1} - \quad (9.129)$$

для швидкості,

$$\ddot{x}_2 = v \frac{4\pi^2 - 4\pi \cos(\frac{2\pi}{t_1})}{4\pi^2 t_1} - \quad (9.130)$$

для прискорення.

Виходячи з першого рівняння системи рівнянь (9.8) запишемо відповідні кінематичні характеристики для візка:

$$x_1 = v \frac{4l\pi^2 + 2g\pi^2 t^2 - gt^2 + (gt^2 - 4l\pi^2) \cos(\frac{2\pi}{t_1})}{4g\pi^2 t_1} - \quad (9.131)$$

для переміщення,

$$\dot{x}_1 = v \frac{2g\pi t_1 + (4l\pi^2 - gt_1^2) \sin(\frac{2\pi}{t_1})}{2g\pi t_1^2} - \quad (9.132)$$

для швидкості,

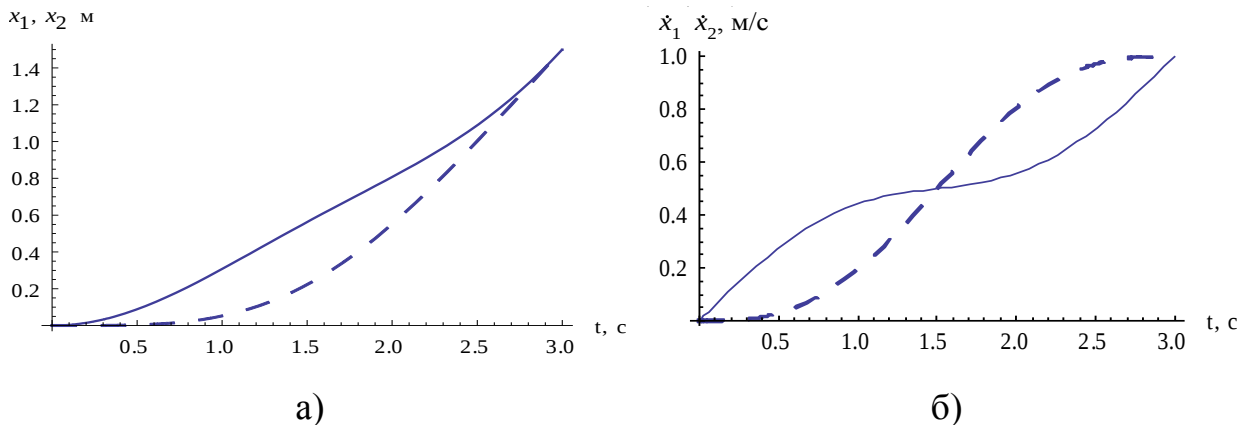
$$\ddot{x}_1 = v \frac{gt_1^2 + (4l\pi^2 - gt_1^2) \cos(\frac{2\pi}{t_1})}{gt_1^3} - \quad (9.133)$$

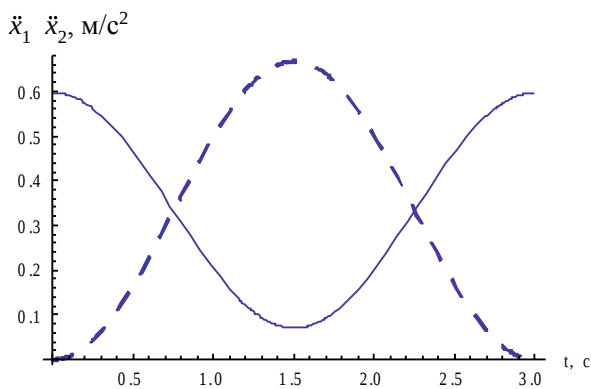
для прискорення.

Запишемо закон зміни динамічного приводного зусилля:

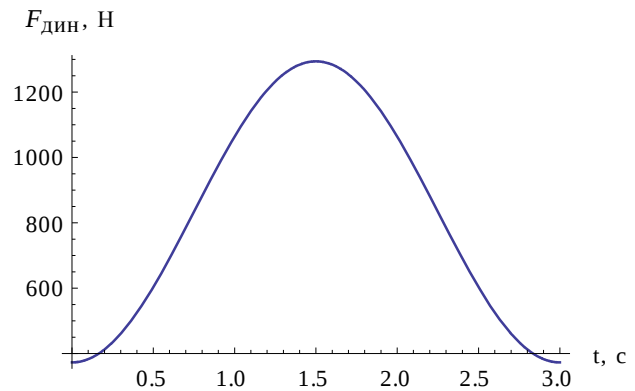
$$F_{дин} = v \frac{m_1 + m_2}{t_1} + \frac{(4\pi^2 m_2 l - gt_1^2 (m_1 + m_2)) \cos(\frac{2\pi}{t_1})}{gt_1^3}. \quad (9.134)$$

Для знайдених функцій (9.128)-(9.134) побудуємо графіки (рис. 9.10).





в)



г)

Рис. 9.10. Графіки зміни переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) візка та вантажу і динамічного зусилля діючого на візок (г).

З рисунків 9.10 (а) та 9.10 (б) видно, що наприкінці перехідного режиму візок і вантаж будуть мати однакові переміщення та швидкості. Це означає, що коливання вантажу будуть усунені. Необхідно також зазначити, що даний комплексний критерій включає одиничні критерії нульового та першого порядку, екстремалі яких не можна використати для усунення коливань вантажу. Постановка ще однієї умови (в даному підпункті це рівність нулю ривка вантажу на початку руху) дало змогу визначити представлені вище закони. Цим прийомом ми будемо користуватись у подальшому.

9.4.3. Визначення оптимальних законів керування за критерієм, що враховує швидкості та прискорення візка і вантажу

Знайдемо закони керування рухом візка такі, які б забезпечували одночасну мінімізацію різниць швидкостей та прискорень візка та вантажу протягом перехідного режиму. Для цього необхідно визначити функцію, на якій функціонал за формулою (9.105) набуває екстремуму. З врахуванням виразів (9.107) та (9.115) перепишемо цей функціонал (надамо йому „робочого” вигляду):

$$\begin{aligned}
I_{\Delta\dot{x}+\Delta\ddot{x}} &= \int_0^{t_1} [\delta_{\Delta\dot{x}} \frac{\Delta\dot{x}}{\tilde{I}_{\Delta\dot{x}}} + (1-\delta_{\Delta\dot{x}}) \frac{\Delta\ddot{x}}{\tilde{I}_{\Delta\ddot{x}}}] dt = \\
&= \frac{t_1^3}{v^2} \int_0^{t_1} \left[\frac{5}{96} \ddot{x}_2^2 \delta_{\Delta\dot{x}} + \frac{7}{8640} x_2^2 t_1^2 (1-\delta_{\Delta\dot{x}}) \right] dt.
\end{aligned} \quad (9.135)$$

Запишемо рівняння Ейлера-Пуассона, яке є умовою екстремуму критерію (9.135):

$$\frac{5}{48} x_2^2 \delta_{\Delta\dot{x}} + \frac{7}{4320} t_1^2 x_2^2 (1-\delta_{\Delta\dot{x}}) = 0. \quad (9.136)$$

Для полегшення розв'язування рівняння (9.136) введемо наступне позначення

$$B^2 = \frac{7t_1^2}{450} \frac{(1-\delta_{\Delta\dot{x}})}{\delta_{\Delta\dot{x}}}, \quad (9.137)$$

в результаті чого отримаємо:

$$\frac{VIII}{x_2^2} + \frac{VI}{B^2} = 0. \quad (9.138)$$

Задамо крайові умови руху вантажу:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0, x_2 = 0 & \text{при } t = 0; \\ \dot{x}_2 = v, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0 & \text{при } t = t_1. \end{cases} \quad (9.139)$$

Запишемо функцію, яка є розв'язком рівняння (9.138) при заданих райових умовах (9.139) – функцію переміщення вантажу:

$$\begin{aligned}
x_2 &= v \sin(Bt) [120Bt_1^2 (3t - 2t_1) + B^5 t^3 t_1^3 (3t^2 - 10tt_1 + 10t_1^2) + 12A^3 t (t^4 - 5B^2 t^2 + \\
&+ 10tt_1^3 - 5t_1^4) + 240Bt_1^3 \cos(Bt_1) + 120Bt_1^3 \cos(Bt - At_1) + B \cos(Bt_1) (B^4 t^4 t_1^2 (3t - \\
&- 5t_1) - 120t_1^2 (3t + t_1) - 12B^2 t^2 (t^3 - 5tt_1^2 - 5t_1^3)) + 60t_1^2 ((-6 + B^2 t_1^2) \sin(Bt) + 6 \times \\
&\times \sin(Bt - Bt_1)) + t_1 (360t_1 - 60B^2 tt_1 (3t + 2t_1) + B^4 t^3 (-12t^2 + 15tt_1 + 20t_1^2))] \times \\
&\times [10Bt_1^2 (6At_1 \cos(\frac{Bt_1}{2}) + (-12 + B^2 t_1^2) \sin(\frac{Bt_1}{2}))^2].
\end{aligned} \quad (9.140)$$

В формулі (9.140) невідомою величиною залишається B , яка залежить від величини вагового коефіцієнту $\delta_{\Delta\ddot{x}}$ (9.137).

Аналіз системи рівнянь (9.8) показує, що при прийнятих крайових умовах (9.139) коливання вантажу до кінця перехідного режиму руху будуть повністю усунені. Єдиним недоліком отриманого закону керування є те, що прискорення візка і вантажу в кінці перехідного режиму руху будуть різні (крива швидкості візка не буде плавно сполучатись з прямою лінією його номінальної швидкості). Для усунення цього недоліку необхідно знайти таке B , при якому буде справедлива рівність:

$$\Delta\ddot{x}(t_1) = 0, \quad (9.141)$$

З урахуванням системи рівнянь (9.8) рівність (9.141) прийме такий вигляд:

$${}^{IV}x_2(t_1) = 0. \quad (9.142)$$

Для забезпечення умови (9.142) знайдемо четверту похідну отриманої функції (9.140) за часом:

$$\begin{aligned} {}^{IV}x_2 = & 6B^2v[24t + 6B^2t_1^2t - 4B^2t_1^3 + 4B^2t_1^3 \cos(Bt) + 2B^2t_1^3 \cos(Bt - Bt_1) - 24t \cos(Bt) + \\ & + 6B^2t_1^2t \cos(Bt) - 2B^2t_1^3t \cos(Bt) - 6Bt_1^2 \sin(Bt) + B^3t_1^4 \sin(Bt) + 6Bt_1^2 \sin(Bt - Bt_1) - \\ & - 24Bt_1t \sin(Bt) + 6Bt_1^2 \sin(Bt)][t_1^2(6Bt \cos(\frac{Bt_1}{2}) + (-12 + B^2t_1^2) \sin(\frac{Bt_1}{2}))^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (9.143)$$

У відповідності до умови (9.142) рівняння (9.143) прирівнюємо при $t=t_1$ до нуля. В результаті отримаємо:

$$\frac{12B^2v(Bt_1 \cos(\frac{Bt_1}{2}) - 2 \sin(\frac{Bt_1}{2}))}{t_1(6Bt \cos(\frac{Bt}{2}) + (-12 + B^2t_1^2) \sin(\frac{Bt}{2}))} = 0. \quad (9.144)$$

Розв'язати це рівняння відносно B досить складно. Знайдемо наближений розв'язок, для чого розкладемо рівняння (9.144) в ряд до шостої степені (врахування доданків з більш високими степенями значно ускладнює розрахунки, при цьому точність розрахунку зменшується не набагато). Маємо:

$$\frac{120v}{t_1^3} - \frac{6vB^2}{7t_1} - \frac{vt_1B^4}{294} - \frac{vt_1^3B^6}{45279} = 0. \quad (9.145)$$

Рівняння (9.145) буде мати шість розв'язків: чотири комплексні та два дійсні. Один дійсний розв'язок цього рівняння буде завжди додатним (при умові додатності величин v та t_1), а другий завжди від'ємним. Аніліз рівняння (9.137) показує, що величина B не може бути комплексною (це впливає з умови $\delta_{\Delta x} \leq 1$), або дійсною від'ємною величиною. Тому розв'язком рівняння (9.145) буде дійсний додатний корінь, який має вигляд:

$$B = \frac{9}{t_1}. \quad (9.146)$$

Підставимо знайдене B за формулою (9.146) у вираз (9.140) і після спрощень отримаємо:

$$\begin{aligned} x_2 = v[& 243t^5(85 + 77 \cos(9) - 36 \sin(9)) + (6 + 3 \cos(9) - \sin(9))(1620t^2t_1^3 + \\ & + 40t_1^5 \cos(\frac{9t}{t_1}) - 10935t^4t_1 - 40t_1^5) + (25 + 2 \cos(9) + 6 \sin(9))(2430t^3t_1^2 - \\ & - 180tt_1^4 + 20t_1^5 \sin(\frac{9t}{t_1}))][90t^4(18 \cos(\frac{9}{2}) + 23 \sin(\frac{9}{2}))^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (9.147)$$

Запишемо вищі похідні – функції кінематичних характеристик руху вантажу:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = v[& 27t^4(85 + 77 \cos(9) - 36 \sin(9)) + (6 + 3 \cos(9) - \sin(9))(72tt_1^3 - 972t^3t_1 - \\ & - 8t_1^4 \sin(\frac{9t}{t_1})) + (25 + 2 \cos(9) + 6 \sin(9))(162t^2t_1^2 - 4t_1^4 + 4t_1^4 \cos(\frac{9t}{t_1}))][t^4(853 - \\ & - 205 \cos(9) + 828 \sin(9))^2]^{-1} - \end{aligned} \quad (9.148)$$

для швидкості,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 = & 18v[3t^3(85 + 77\cos(9) - 36\sin(9)) + (6 + 3\cos(9) - \sin(9))(2t_1^3 - 81t^2t_1 - \\ & - 2t_1^3\cos(\frac{9t}{t_1})) + (25 + 2\cos(9) + 6\sin(9))(9tt_1^2 - t_1^3\sin(\frac{9t}{t_1}))][t^4(18\cos(\frac{9}{2}) + \\ & + 23\sin(\frac{9}{2}))^2]^{-1} - \end{aligned} \quad (9.149)$$

для прискорення.

Виходячи з першого рівняння системи рівнянь (9.8) запишемо відповідні кінематичні характеристики для візка:

$$\begin{aligned} x_1 = & v[40t_1^3\cos(\frac{9t}{t_1})(-81g + lt_1^2)(6 + 3\cos(9) - \sin(9)) + 1620g(3t^3(85 + 77\cos(9) - \\ & - 36\sin(9)) + (2t_1^3 - 81t^2t_1)(6 + 3\cos(9) - \sin(9))) + 9tt_1^2(25 + 2\cos(9) + 6\sin(9))] + \\ & + l(243t^5(85 + 77\cos(9) - 36\sin(9)) + (1620t^2t_1^3 - 10935t^4t_1 - 40t_1^5)(6 + 3\cos(9) - \\ & - \sin(9)) + (2430t^3t_1^2 - 180tt_1^4)(25 + 2\cos(9) + 6\sin(9)) + 20t_1^3\sin(\frac{9t}{t_1})(-81g + lt_1^2) \times \\ & \times (25 + 2\cos(9) + 6\sin(9))][90lt_1^4(18\cos(\frac{9}{2}) + 23\sin(\frac{9}{2}))^2]^{-1} - \end{aligned} \quad (9.150)$$

для переміщення,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & v[4t_1^2\cos(\frac{9t}{t_1})(-81g + lt_1^2)(25 + 2\cos(9) + 6\sin(9)) + 324g(t^2(85 + \\ & + 77\cos(9) - 36\sin(9)) + 18tt_1(-6 - 3\cos(9) + \sin(9)) + t_1^2(25 + 2\cos(9) + \\ & + 6\sin(9))) + l(27t^4(85 + 77\cos(9) - 36\sin(9)) + (6 + 3\cos(9) - \sin(9)) \times \\ & \times (72tt_1^3 - 972t^3t_1) + (25 + 2\cos(9) + 6\sin(9))(162t^2t_1^2 - 4t_1^4) + 8t_1^2\sin(\frac{9t}{t_1}) \times \\ & \times (-81g + lt_1^2)(-6 - 3\cos(9) + \sin(9))][lt_1^4(853 - 205\cos(9) + 828\sin(9))^2]^{-1} - \end{aligned} \quad (9.151)$$

для швидкості,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 = & 18v[2t_1^2\cos(\frac{9t}{t_1})(-81g + lt_1^2)(-6 - 3\cos(9) + \sin(9)) + 18g(t(85 + 77\cos(9) - \\ & - 36\sin(9)) + 9t_1(-6 - 3\cos(9) + \sin(9)) + l(3t^3(85 + 77\cos(9) - 36\sin(9)) + 2t_1^3 \times \\ & \times (6 + 3\cos(9) - \sin(9)) + 9tt_1^2(25 + 2\cos(9) + 6\sin(9)) - t_1\sin(\frac{9t}{t_1})(-81g + lt_1^2) \times \\ & \times (25 + 2\cos(9) + 6\sin(9))][lt_1^4(18\cos(\frac{9}{2}) + 23\sin(\frac{9}{2}))^2]^{-1} - \end{aligned} \quad (9.152)$$

для прискорення.

Знаючи прискорення візка та вантажу можна визначити динамічну складову приводної сили:

$$F_{дин} = 18v[2t_1 \cos(\frac{9t}{t_1})(-81glm_1 + g(m_1 + m_2)t_1^2)(-6 - 3\cos(9) + \sin(9)) + 18lm_1 \times \\ \times (t(85 + 77\cos(9) - 36\sin(9)) + 9t_1(-6 - 3\cos(9) + \sin(9)) + g(m_1 + m_2)(3t^3(85 + \\ + 77\cos(9) - 36\sin(9)) + (2t_1^3 - 81t_1t^2)(6 + 3\cos(9) - \sin(9)) + 9tt_1^2(25 + 2\cos(9) + \\ + 6\sin(9)) - t_1(-81glm_1 + g(m_1 + m_2)t_1^2)(25 + 2\cos(9) + 6\sin(9))\sin(\frac{9t}{t_1})][t_1^4 g(18 \times \\ \times \cos(\frac{9}{2}) + 23\sin(\frac{9}{2}))^2]^{-1}. \quad (9.153)$$

Для отриманих законів (9.147)-(9.153) побудуємо графічні залежності (рис. 9.11).

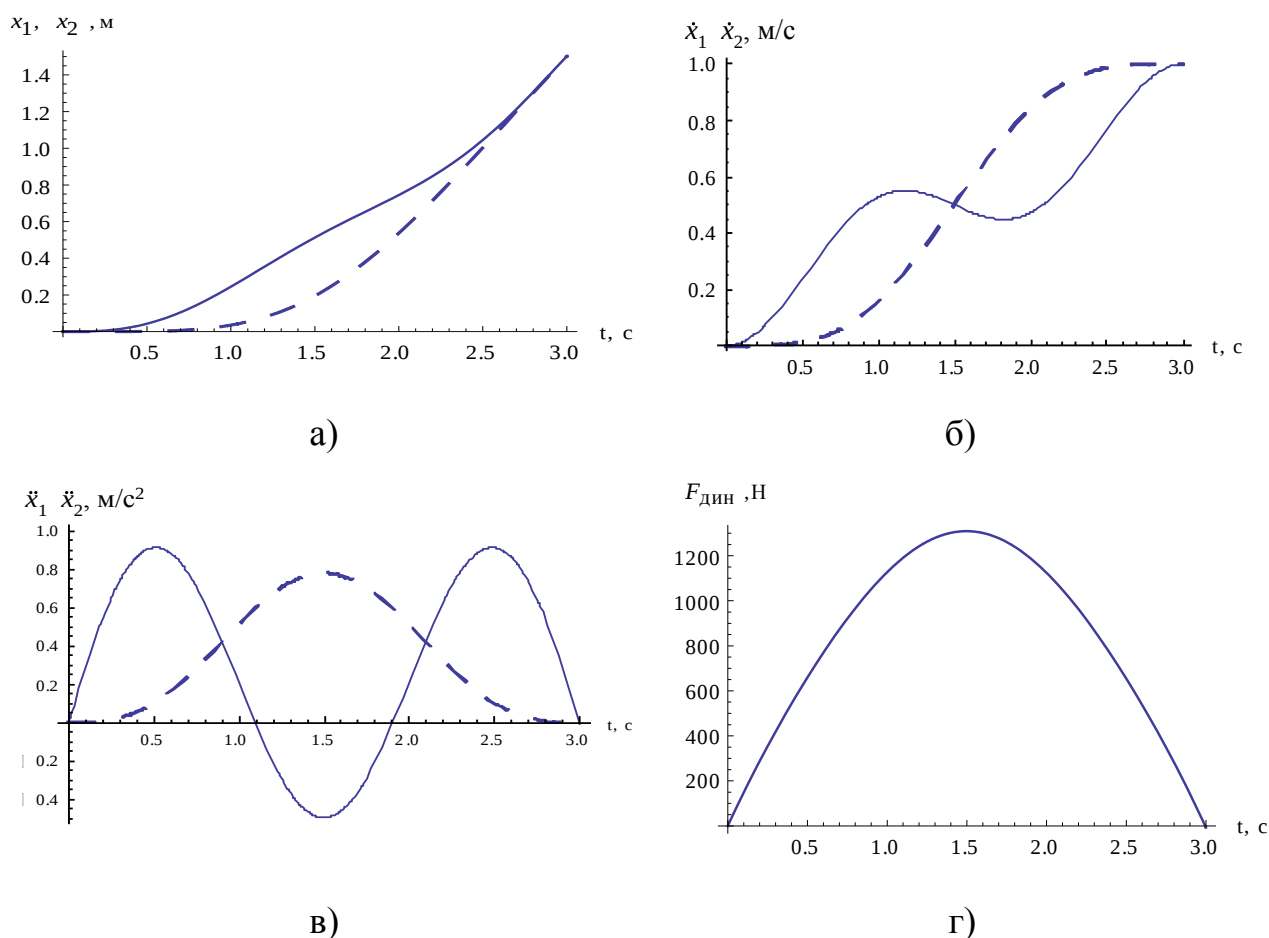


Рис. 9.11. Графіки зміни переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) візка та вантажу і динамічного зусилля діючого на візок (г).

Графічний аналіз представлених залежностей показує, що прискорення візка на початку і в кінці перехідного режиму будуть рівні нулю. Необхідно відмітити, що такий результат можна досягнути при використанні одиничного критерію – різниці ривків вантажу і візка. Тобто комплексний критерій другого порядку дозволяє отримати кінематичні характеристики руху візка, які за якістю руху можна порівняти з кінематичними характеристиками отриманими при використанні одиничного критерію третього порядку і вище.

Визначення оптимальних законів для комплексного критерію, який би враховував різницю переміщень та різницю прискорень візка та вантажу неможливий, оскільки екстремаль описується функцією, в яку входять комплексні числа, що унеможлиблює реалізацію цього закону на практиці. Для комплексного критерію, який враховує три одиничні критерії: різницю переміщень, швидкостей та прискорень візка та вантажу не вдається знайти таке значення вагового коефіцієнта, яке б забезпечило виконання додаткової крайової умови руху візка, тому такий оптимальний закон не визначається.

9.5. Визначення оптимальних законів керування за одиничними динамічними критеріями

9.5.1. Визначення оптимальних законів керування за одиничними динамічними критеріями з підінтегральним виразом нульового порядку

Відомо, що динамічна складова рушійної сили механізмів переміщення мостових кранів і візків стрілових кранів становить понад 80% від їх сумарної рушійної сили. Тому для мінімізації динамічної рушійної сили використовується критерій виду (9.18). Підінтегральний вираз цього критерію можна перетворити, виразивши його через кінематичні функції руху вантажу. Запишемо це перетворення:

$$^2_{F_{\ddot{a} \ddot{e} t}} = \int_0^{t_1} F_{\ddot{a} \ddot{e} t}^2 dt = \int_0^{t_1} \left[\frac{m_1 l}{g} x_2^{IV} + (m_2 + m_1) \ddot{x}_2 \right]^2 dt. \quad (9.154)$$

Умовою мінімуму функціоналу (9.154) є рівняння Ейлера-Пуассона, яке в даному випадку переписеться наступним чином:

$$m_1^2 l^2 \overset{VIII}{x_2} + 2gm_1 l(m_1 + m_2) \overset{VI}{x_2} + g^2(m_1 + m_2)^2 \overset{IV}{x_2} = 0. \quad (9.155)$$

Використовуючи позначення (9.10), перепишемо рівняння (9.155) у такому вигляді:

$$\overset{VIII}{x_2} + 2k^2 \overset{VI}{x_2} + k^4 \overset{IV}{x_2} = 0. \quad (9.156)$$

Запишемо крайові умови даної задачі:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0 & \text{при } t = 0; \\ \dot{x}_2 = v, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0, x_2 = 0 & \text{при } t = t_1. \end{cases} \quad (9.157)$$

Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos(kt); & s_1 &= \sin(kt); \\ c_2 &= \cos(t_1); & s_2 &= \sin(kt_1); \\ c_3 &= \cos(2kt_1); & s_3 &= \sin(2kt_1); \\ c_4 &= \cos(k(t - t_1)); & s_4 &= \sin(k(t - t_1)); \\ c_5 &= \cos(k(t + t_1)); & s_5 &= \sin(k(t + t_1)); \\ c_6 &= \cos(k(t - 2t_1)); & s_6 &= \sin(k(t - 2t_1)); \end{aligned}$$

Опустимо проміжні перетворення та запишемо функцію, яка є розв'язком рівняння (9.156) при заданих крайових умовах (9.157) – функцію переміщення вантажу протягом процесу пуску візка:

$$\begin{aligned} x_2 &= v[66kt - k^3 t^3 - 9k(2 + k^2 t^2)t_1 - 2k^3 t(6 + k^2 t^2)t_1^2 + 6k^3(-2 + k^2 t^2)t_1^3 + \\ &+ 6k(5t + 3t_1 - 2k^2 t_1^2 t + 2k^2 t_1^3)c_1 + 18k(t - t_1)c_6 - 96s_1 - 48s_6 + 120s_6 + 96s_2 - \\ &- 48s_3 + k\{-6(7t + t_1)c_4 + 12t(-8 + k^2 t t_1)c_2 + c_3(30t + k^2 t^3 + 18t_1 - 3k^2 t^2 t_1) - \\ &- 6tc_5 + 6t_1 c_5 + 18k t t_1 s_1 + 24k t_1^2 s_1 - 6k t t_1 s_6 - 12k t t_1 s_4 - 12k t^2 s_2 + 4k^3 t^3 t_1 s_2 + \\ &+ 6k t(t + 2t_1)\sin(2kt_1)\} + 24\sin(k(t + t_1))][6k(-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2)^2]^{-1}. \quad (9.158) \end{aligned}$$

Диференціювання виразу (9.158) за часом дасть інші кінематичні характеристики руху вантажу – швидкість та прискорення:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = v[22 - 2k^4 t t_1^2 (t - 2t_1) - k^2 (t^2 + 6t t_1 + 4t_1^2) + (-22 + 2k^2 t_1 (3t + 2t_1))c_1 - \\ - 2(5 + k^2 t t_1)c_5 + 26c_4 - 32c_2 + 10c_3 + 6c_5 + k\{-4k t t_1 c_4 + 8k t t_1 c_2 + k t^2 c_3 - \\ - 2k t t_1 c_3 - 10t s_1 + 4k^2 t t_1^2 s_1 - 4k^2 t_1^3 s_1 - 6t s_6 + 4t_1 s_6 + 14t s_4 - 2t_1 s_4 - 8t s_2 + \\ + 4k^2 t^2 t_1 s_2 + 4t s_3 + 4t_1 s_3 + 2(t - t_1)s_5\}] \times [2(-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2)^2]^{-1} - \end{aligned} \quad (9.159)$$

функція зміни швидкості,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 = k v[-k(t + 6t_1 + 2k^2 t t_1^2 - 2k^2 t_1^3) + k(3t_1 - 2k^2 t_1^3 + t(-5 + 2k^2 t_1^2))c_1 + \\ + k(-3t + t_1)c_6 + 6s_1 + 2s_6 - 6s_5 - 4s_2 + k\{(7t - 3t_1)c_4 + t(c_3 + c_5 - t_1 \times \\ \times (-4c_2 + c_5) - k t(-3s_1 + s_6 + 2s_4 + 4s_2))\} + 2s_2 - 2s_5] \times \\ \times [-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2]^{-2} - \end{aligned} \quad (9.160)$$

функція зміни прискорення.

Користуючись залежностями (9.8) знайдемо функцію переміщення візка:

$$\begin{aligned} x_1 = v[66k t - k^3 t^3 - 9k(2 + k^2 t^2)t_1 - 2k^3 t(6 + k^2 t^2)t_1^2 + 6k^3(-2 + k^2 t^2)t_1^3 + \\ + 6k(5t + 3t_1 - 2k^2 t_1^2 t + 2k^2 t_1^3)c_2 + 18k(t - t_1)c_6 - 96s_1 - 48s_6 + 120s_4 + \\ + 96s_2 - 48s_3 + k\{-6(7t + t_1)c_4 + 12t(-8 + k^2 t t_1)c_2 + c_3(30t + k^2 t^3 + 18t_1 - \\ - 3k^2 t^2 t_1) - 6t c_5 + 6t_1 c_5 + 18k t t_1 s_1 + 24k t_1^2 s_1 - 6k t t_1 s_6 - 12k t t_1 s_4 - 12k t^2 s_2 + \\ + 4k^3 t^3 t_1 s_2 + 6k t(t + 2t_1)s_3\} + g^{-1}\{6k^2 l(-k(t + 3t_1 + 2k^2 t t_1^2 - 2k^2 t_1^3) + k(3t_1^3 - \\ - 2k^2 t_1^3 + t(-5 + 2k^2 t_1^2))c_1 + k(-3t + t_1)c_6 + 6s_1 + 2s_6 - 6s_4 - 4s_2 + k\{(7t - \\ - 3t_1)c_4 + t(c_3 + c_5) - t_1(-4c_2 + c_3 + c_5 - k t(-3s_1 + s_6 + 4s_2))\} + 2s_2 - 2s_4) \\ + 24s_5\}] [6k(-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2)^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (9.161)$$

Запишемо вираз для швидкості:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = v[-2k^2 l(1 + 2k^2 t_1^2) - g t_1^2 c_1(-22 + 2k^4 t(t - 2t_1) + k^2(t^2 + 6t t_1 + \\ + 4t_1^2)) + 2(k^2 l + k^4 l t_1(-3t + 2t_1) + g(-11 + k^2 t_1(3t + 2t_1))) - 2(5g + \\ + k^2 l + k^2(g - k^2 l)t t_1 c_6 + c_4(26g + 2k^2 l - 4g k^2 t t_1 + 4k^4 l t_1) - 32g c_1 + \\ + 8g k^2 t t_1 c_1 + c_3(10g + 2k^2 l + g k^2 t^2 - 2g k^2 t t_1) + 2c_5(3g - k^2 l) - s_1 \times \\ \times (10g k t + 10k^3 t l - 12k^3 t_1 l + 4g k^3 t t_1^2 - 4k^5 t t_1^2 l - 4g k^3 t_1^3 + 4k^5 l t_1^3) - \\ - s_6(6g k t + 6k^3 l t + 4g k t_1) + s_4(14g k t - 14k^3 l t + 2g k t_1 + 10k^3 l t_1) - \\ - s_1(8g k t + 8k^3 t_1 l + 4g k^3 t^2 t_1) + 4g k t s_3 + 2k(g - k^2 l)(t - t_1)s_5] \times \\ \times [2g(-4 + k^2 t_1^2 + 4 \cos(k t_1) + k t_1 \sin(k t_1))^2]^{-1} \end{aligned} \quad (9.162)$$

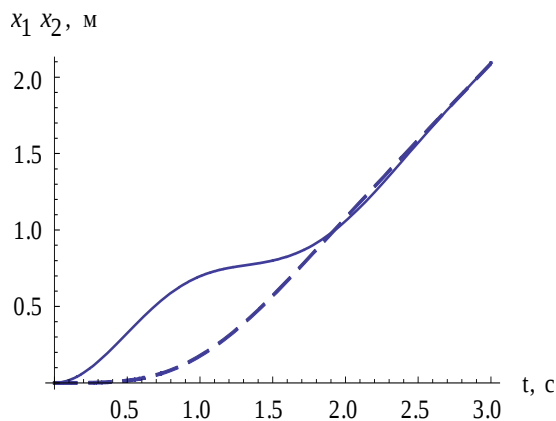
та прискорення візка

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 = k\sqrt{-gk(t+3t_1+2k^2tt_1^2-2k^2t_1^3)+k c_1(g(-5t+3t_1-2k^2tt_1^2)+} \\ +k^2l(5t-9t_1-2k^2tt_1^2+2k^2t_1^3))+k(g(-3t+t_1^3)+k^2l(3t+t_1^3))c_6+ \\ +c_4(7gkt-7k^3lt-3gkt_1+7k^3lt_1)+4gkt_1c_2+gkct_3-gkt_1c_3+ \\ +k(g-k^2l)(t-t_1)c_5+s_1(6g+4k^2l-3gk^2tt_1+3k^4ltt_1-4k^4lt_1^2)+ \\ +s_6(2g+4k^2l+gk^2tt_1-k^4ltt_1)-s_4(6g-8k^2l+2gk^2tt_1-2k^4ltt_1)- \\ -s_2(4g+4gk^2tt_1)+2gs_3-2gs_5][g(-4+k^2t_1^2+4c_2+kt_1s_2)^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (9.163)$$

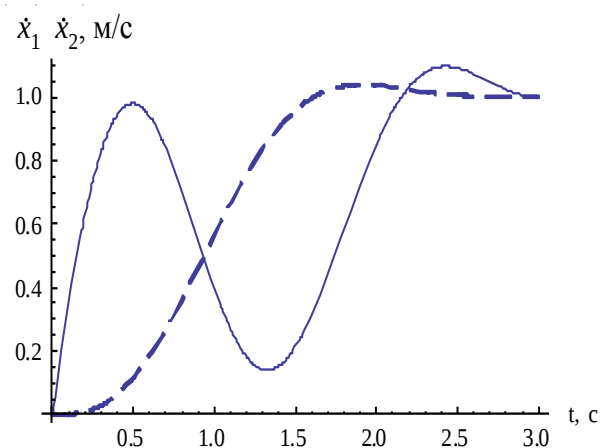
Запишемо функцію зміни динамічного приводного зусилля:

$$\begin{aligned} F_{\ddot{a}ei} = k\sqrt{\{-gk(t+3t_1+2k^2tt_1^2-2k^2t_1^3)+k^2l(5t-9t_1-2k^2tt_1^2+2k^2t_1^3)) + \\ +k(g(-3t+t_1^3)+k^2l(3t+t_1^3))c_6+c_4(7gkt-7k^3lt-3gkt_1+7k^3lt_1)+ \\ +4gkt_1c_2+c_3(gkt-gkt_1)+k(g-k^2l)(t-t_1)c_5+s_1(6g+4k^2l-3gk^2tt_1+ \\ +3k^4ltt_1-4k^4lt_1^2)+s_6(2g+4k^2l+gk^2tt_1-k^4ltt_1)-s_4(6g-8k^2l+2gk^2tt_1- \\ -2k^4ltt_1)+s_2(4g+4gk^2tt_1+2g)-2gs_5\}(\frac{m_1}{g})+[-k(t+6t_1+2k^2tt_1^2- \\ -2k^2t_1^3)+k(3t_1-2k^2t_1^3+t(-5+2k^2t_1^2))c_1+k(-3t+t_1)c_6+6s_1+2s_6- \\ -6s_4-4s_2+k\{(7t-3t_1)c_4+t(c_3+c_5-t_1(-4c_2+c_5-kt(-3s_1+s_5+ \\ +2s_4+4s_2))\}+2s_3-2s_5\}][-4+k^2t_1^2+4c_2+kt_1s_2]^{-2}. \end{aligned} \quad (9.164)$$

Графіки знайдених функцій (9.158)-(9.164) зображені на рис. 9.19.



а)



б)

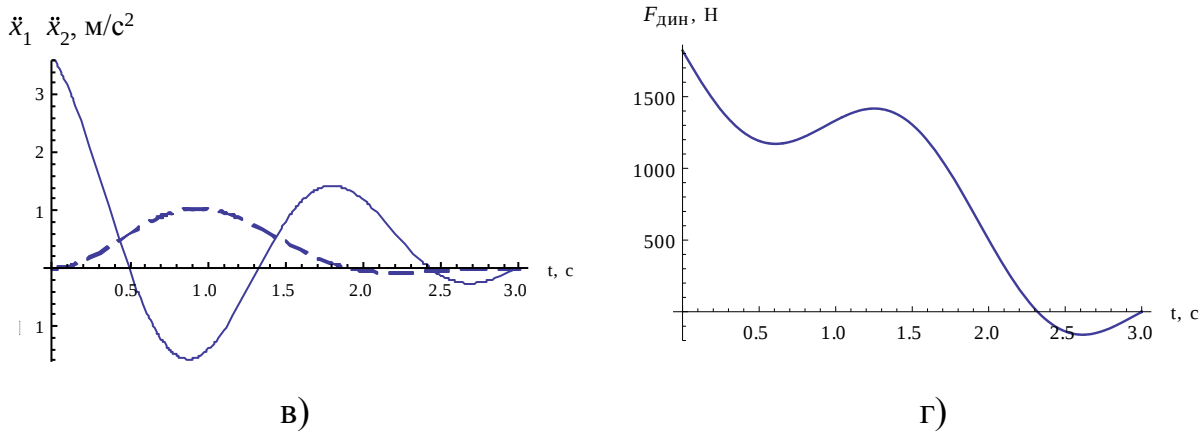


Рис. 9.19. Графіки зміни переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) візка та вантажу і динамічного зусилля діючого на візок (г).

Для розв'язання диференціального рівняння (9.157) можна використати інші крайові умови:

$$\begin{cases} x_2=0, \dot{x}_2=0, \ddot{x}_2=0, \ddot{\ddot{x}}_2=0, x_2=0 & \text{при } t=t_0; \\ \dot{x}_2=v, \ddot{x}_2=0, \ddot{\ddot{x}}_2=0 & \text{при } t=t_1. \end{cases} \quad (9.165)$$

Використання крайових (9.165) умов дасть такі кінематичні функції руху вантажу:

$$\begin{aligned} x_2 = & v[k t(78 + k^2 t^2) - 12k(k^2 t^2 - 4)t_1 + 2k^3 t(k^2 t^2 - 6)t_1^2 + 6k(7t - 8t_1)c_1 + \\ & 6k t c_6 - 120s_1 - 24s_6 + 96s_4 + 48s_2 - 24s_3 + 48s_5 + k(6(8t_1 + t(2k^2 t^2 - 5))c_4 + \\ & + 12(-4t_1 + t(-8 + k^2 t_1(t + 2t_1)))c_2 + 18t c_3 - k^2 t^3 c_3 - 18t c_5 - 12k t t_1 c_5 + 12k t_1^2 c_5 + \\ & + 18k t t_1 s_4 - 42k t_1^2 s_4 - s_2(12k t^2 - 24k t t_1 - 4k^3 t^3 t_1 - 48k t_1^2 + 12k^3 t^2 t_1^2) + 6k t^2 s_3 + \\ & + 6k t_1(t_1 - t)s_5)] [6k(-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2)]^{-1}; \end{aligned} \quad (9.166)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & v[26 + k^2(t^2 - 8t t_1 + 2(k^2 t^2 - 2)t_1^2) + (-26 + 4k^2 t_1(t_1 - t))c_1 - 6c_6 + \\ & + 2(11k^2(3t - 5t_1)t_1)c_4 - 32c_2 + 6c_3 + 10c_5 + k(8k t_1(t + t_1)c_2 - k t^2 c_3 + \\ & + 2(k t_1(t_1 - t)c_5 + (-7t + 6t_1)s_1 - t s_6 + (5t - 5t_1 - 2k^2 t t_1^2)s_4 - 2(2t_1 + t \times \\ & \times (2 + k^2(t - 2t_1)t_1))s_2 + 2t s_3 + (3t - t_1)s_5))] [2(-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2)]^{-1}; \end{aligned} \quad (9.167)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 = & v[k t - 4k t_1 + 2k^3 t t_1^2 + k(-7t + 4t_1)c_1 - k t c_6 + 6s_1 + 2s_6 - 6s_4 - 4s_2 + \\ & + 2s_3 - 2s_5 + k\{(5t - 2t_1 - 2k^2 t t_1^2)c_4 - t(c_3 - 3c_5) + t_1(4c_2 - 2c_5 + k(t - t_1) \times \\ & \times (2s_1 - 3s_4 - 4s_2 + s_5))\}] [-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2]^{-2}. \end{aligned} \quad (9.168)$$

Відповідні кінематичні характеристики для візка:

$$\begin{aligned}
 x_1 = & v[k t(78 + k^2 t^2) - 12k(k^2 t^2 - 4)t_1 + 2k^3 t(k^2 t^2 - 6)t_1^2 + 6k(7t - 8t_1)c_1 + \\
 & 6k t c_6 - 120s_1 - 24s_6 + 96s_4 + 48s_2 - 24s_3 + 48s_5 + k(6(8t_1 + t(2k^2 t^2 - 5))c_4 + \\
 & + 12(-4t_1 + t(-8 + k^2 t_1(t + 2t_1)))c_2 + 18t c_3 - k^2 t^3 c_3 - 18t c_5 - 12k t t_1 c_5 + 12k t_1^2 c_5 + \\
 & + 18k t t_1 s_4 - 42k t_1^2 s_4 - s_2(12k t^2 - 24k t t_1 - 4k^3 t^3 t_1 - 48k t_1^2 + 12k^3 t^2 t_1^2) + 6k t^2 s_3 + \\
 & + 6k t_1(t_1 - t)s_5) + g^{-1}(6k^2 l(k t - 4k t_1 + 2k^3 t t_1^2 + k(-7t + 4t_1)c_1 - k t c_6 + 6s_1 + 2s_6 - \\
 & - 6s_4 - 4s_2 + 2s_3 - 2s_5 + k((5t - 2t_1 - 2k^2 t t_1^2)c_4 - t(c_3 - 3c_5 + t_1(4c_2 - 2c_5 + \\
 & - k(t - t_1)(2s_1 - 3s_4 - 4s_2 + s_5))))))][6k(-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2)^2]^{-1}; \quad (9.169)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 = & v[2k^2 l + 4k^4 l t_1^2 + g(26 + k^2(t^2 - 8t t_1 + 2(-2 + k^2 t^2)t_1^2)) - 2(k^2 l + 2k^4 l t_1(t_1 - t) + \\
 & g(13 + 2k_2(t - t_1)t_1))c_1 - 6g c_6 + 2k^2 l c_6 + c_4(22g - 2k^2 l + 6g k^2 t t_1 - 6k^4 l t t_1 - 10g k^2 t_1^2 + \\
 & + 2k^4 l t_1^2) - c_2(32 + 8g k^2 t t_1 + 8g k^2 t_1^2) + c_3(6g - 2k^2 l - g k^2 t^2) + 2(k^2 l + k^4 l(t - t_1)t_1 + \\
 & + g(5 + k^2 t_1(t_1 - t)))c_5 - s_1(14g k t + 14k^3 l t + 12g k t_1 - 4k^3 l t_1) - s_6(2g k t + 22k^3 l t) + \\
 & + s_4(10g k t - 10k^3 l t - 10g k t_1 - 2k^3 l t_1 - 4g k^3 t t_1^2 + 4k^5 l t t_1^2) - s_2(8g t - 8g k t_1 - 8k^3 l t_1 - \\
 & - 4g k^3 t^2 t_1 + 8g k^3 t t_1^2) + 4g k t s_3 - 2k(3k^2 l(t - t_1) + g(t_1 - 3t))s_5)] \times \\
 & \times [2g(-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2)^2]^{-1}; \quad (9.170)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 = & v k [g k(t - 4t_1 + 2k^2 t t_1^2) + k(-7g t + 7k^2 l t + 4g t_1)c_1 + k(k^2 l - g)t c_6 + c_4(5g k t - 5k^3 l t - \\
 & - 2g k t_1 - 4k^3 l t_1 - 2g k^3 t t_1^2 + 2k^5 l t t_1^2) + 4g k t_1 - g k t c_3 + k(g(3t - 2t_1) + k^2 l(4t_1 - 3t))c_5 + \\
 & + s_1(6g + 8k^2 l + 2g k^2 t t_1 - 2k^4 l t t_1 - 2g k^2 t_1^2 + 2k^4 l t_1^2) + 2g s_6 + s_4(-6g - 4k^2 l - 3g k^2 t t_1 + \\
 & + 3g k^2 t_1^2 + k^4 l t_1^2) - s_2 4g(1 - k^2 t t_1 + k^2 t_1^2) + 2g s_3 + (g(-2 + k^2(t - t_1)t_1 + k^2 l(-4 + k^2 t_1 \times \\
 & \times (t_1 - t)))s)] [g(-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2)^2]^{-1}. \quad (9.171)
 \end{aligned}$$

Знайдемо як буде змінюватись динамічна складова рушійної сили:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{дин}} = & [k v (g^{-1}(m_1(g k(t - 4t_1 + 2k^2 t t_1^2) + k(-7g t + 7k^2 l t + 4g t_1)c_1 + k(k^2 l - g)t c_6 + c_4(5g k t - \\
 & - 5k^3 l t - 2g k t_1 - 4k^3 l t_1 - 2g k^3 t t_1^2 + 2k^5 l t t_1^2) + 4g k t c_2 - g k t c_3 + k(g(3t - 2t_1) + k^2 l(4t_1 - 3t))c_5 + \\
 & + s_1(6g + 8k^2 l + 2g k^2 t t_1 - 2k^4 l t t_1 - 2g k^2 t_1^2 + 2k^4 l t_1^2) + 2g s_6 - s_4(6g - 4k^2 l - 3g k^2 t t_1 + 3k^4 l t t_1 + \\
 & + 3g k^2 t_1^2 + k^4 l t_1^2) + 4g s_2(1 - k^2 t t_1 + k^2 t_1^2) + 2g s_3 + (g(-2 + k^2(t - t_1)t_1) + k^2 l(-4 + k^4 t_1(t_1 - t))) \times \\
 & \times s_5) + m_2(k t - 4k t_1 + 2k^3 t t_1^2 + k(-7t + 4t_1)c_1 - k t c_6 + 6s_1 + 2s_6 - 6s_4 - 4s_2 + 2s_3 - 2s_5 + k \times \\
 & \times ((5t - 2t_1 - 2k^2 t t_1^2)c_4 - t(c_3 - 3c_5) + t_1(4c_2 - 2c_5 + k(t - t_1)(2s_1 - 3s_4 - 4s_2 + s_5)))))] \times \\
 & \times [-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2]^{-2}. \quad (9.172)
 \end{aligned}$$

Для визначених законів руху (9.166)-(9.172) побудовано графіки їх функцій (рис. 9.13).

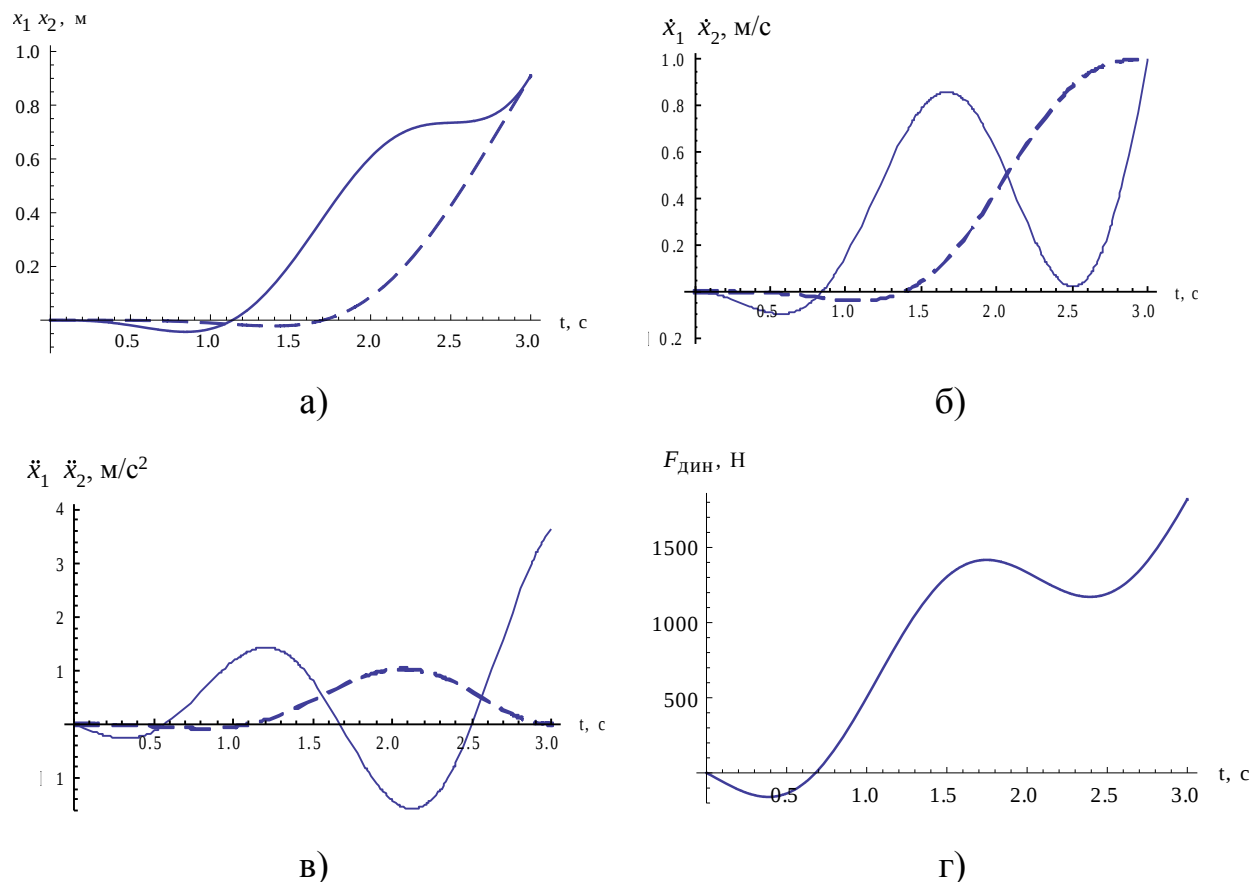


Рис. 9.13. Графіки зміни переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) візка та вантажу і динамічного зусилля діючого на візок (г).

Знайдемо розв'язок рівняння (9.157) при симетричних крайових умовах:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \ddot{x}_2 = 0, \ddot{\ddot{x}}_2 = 0, x_2 = 0 & \text{при } t = 0; \\ x_2 = x, \dot{x}_2 = v, \ddot{x}_2 = 0, \ddot{\ddot{x}}_2 = 0, x_2 = 0 & \text{при } t = t_1. \end{cases} \quad (9.173)$$

Вирази екстремалі, знайденій при крайових умовах (9.173), підінтегральний вираз функціоналу, а також вираз самого функціоналу досить значні по об'єму, тому вони не приводяться.

Для знаходження невідомого параметру x , який входить у крайові умови (9.173), візьмемо частинну похідну з виразу для інтеграла по x у результаті чого будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_F}{\partial x} = & [12k^3(-2x + t_1 v)(-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2)^2 (4gk^5 l m_1 (m_1 + m_2) t_1^3 (-19 + 2k^2 t_1^2) + 8g^2 k \times \\ & \times (m_1 + m_2)^2 t_1 (72 + 12k^2 t_1^2 - k^4 t_1^4) - 2k^5 l^2 m_1^2 t_1 (144 - 13k^2 t_1^2 + 2k^4 t_1^4) + 2k t_1 (k^4 l^2 m_1^2 (132 - \\ & - 43k^2 t_1^2 + k^4 t_1^4) - 2gk^2 l m_1 (m_1 + m_2) (12 - 13k^2 t_1^2 + k^4 t_1^4) + g^2 (m_1 + m_2)^2 (-204 + 41k^2 t_1^2 + \\ & + k^4 t_1^4) c_1 + 2k t_1 (12k^4 l^2 m_1^2 + 24gk^2 l m_1 (m_1 + m_2) + g^2 (m_1 + m_2)^2 (-84 + k^2 t_1^2)) c_3 + 2(k^4 l^2 m_1^2 \times \\ & \times (60 + 87k^2 t_1^2 - 10k^4 t_1^4) + 3g^2 (m_1 + m_2)^2 (-60 - 79k^2 t_1^2 + 2k^4 t_1^4) + 2gk^2 l m_1 (m_1 + m_2) (12 + \\ & + 15k^2 t_1^2 + 4k^4 t_1^4)) s_2 - 3(k^4 l^2 m_1^2 (20 - k^2 t_1^2) - 2gk^2 l m_1 (m_1 + m_2) (-4 + k^2 t_1^2) + g^2 (m_1 + m_2)^2 \times \\ & \times (-60 + 11k^2 t_1^2) s_3) [g^2 (576 - 33k^4 t_1^4 + 2k^6 t_1^6 - 16(48 - 6k^2 t_1^2 + k^4 t_1^4) c_2 + (192 - 96k^2 t_1^2 + \\ & + k^4 t_1^4) c_3 + 16k t_1 (5(-6 + k^2 t_1^2) s_2 + (15 - k^2 t_1^2) s_3))]^{-2}. \end{aligned} \quad (9.174)$$

Прирівняємо вираз (9.174) до нуля та розв'яжемо отримане алгебраїчне рівняння відносно x . В результаті маємо:

$$x = \frac{v t_1}{2}. \quad (9.175)$$

Підставимо знайдене переміщення x (9.175) у формулу для екстремалі. Після спрощення будемо мати кінематичні характеристики руху вантажу, які описуються такими залежностями:

$$\begin{aligned} x_2 = & [v(-4kt - 2kt_1 + k^3 t^2 t_1 + 2k(t_1 - t)c_1 + 6s_1 - 6s_4 - 6s_2 + kt(2c_4 + 4c_2 + kts_2))] \times \\ & \times [2k(-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2)]^{-1}, \end{aligned} \quad (9.176)$$

$$\dot{x}_2 = [v(-2 + k^2 t t_1 + 2c_1 - 2c_4 + 2c_2 + k(t - t_1)s_1 + kt(-s_4 + s_2))][-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2]^{-1}; \quad (9.177)$$

$$\ddot{x}_2 = [kv(k t_1 + k(t - t_1)c_1 - k t c_4 - s_1 + s_4 + s_2)][-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2]^{-1}. \quad (9.178)$$

Відповідні кінематичні характеристики візка описуються наступними виразами:

$$\begin{aligned} x_1 = & [v(k(2k^2 l t_1 + g(-2t_1 + t(-4 + k^2 t t_1))) + 2(k(-g + k^2 l)(t - t_1)c_1 + k(g - k^2 l) t c_4 + \\ & + 2gk t c_1 + (k^2 l - 3)(s_4 - s_1)) + (2k^2 l + g(k^2 t^2 - 6))s_2) [2gk(k^2 t_1^2 - 4 + 4c_2 + k t_1 s_2)]^{-1}; \end{aligned} \quad (9.179)$$

$$\dot{x}_1 = [v(g(k^2 t t_1 - 2) + 2g c_1 - 2g c_4 + 2g c_2 + s_1(g k t - k^3 l t - g k t_1 + k^3 l t_1) + k(k^2 l - g) \times (9.180) \\ \times t s_4 + g k t s_2)] [g(-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2)]^{-1};$$

$$\ddot{x}_1 = [k v(g k t_1 + k(g - k^2 l)(t - t_1) c_1 + k(k^2 l - g) t c_4 + (g + k^2 l)(-s_1 + s_4) + g s_2) \times (9.181) \\ \times [g(-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2)]^{-1}.$$

Запишемо функцію для динамічної складової сили, що діє на візок зі сторони приводного механізму:

$$F_{дин} = [k v(g k (m_1 + m_2) t_1 + k(-k^2 l m_1 + g(m_1 + m_2))(t - t_1) c_1 - k(-k^2 l m_1 + g(m_1 + m_2)) \times (9.182) \\ \times t c_4 + (k^2 l m_1 + g(m_1 + m_2))(-s_1 + s_4) + g(m_1 + m_2) s_2) [g(-4 + k^2 t_1^2 + 4c_2 + k t_1 s_2)]^{-1}.$$

Всі отримані закони (9.176)-(9.182) представимо в графічному вигляді (рис. 9.14).

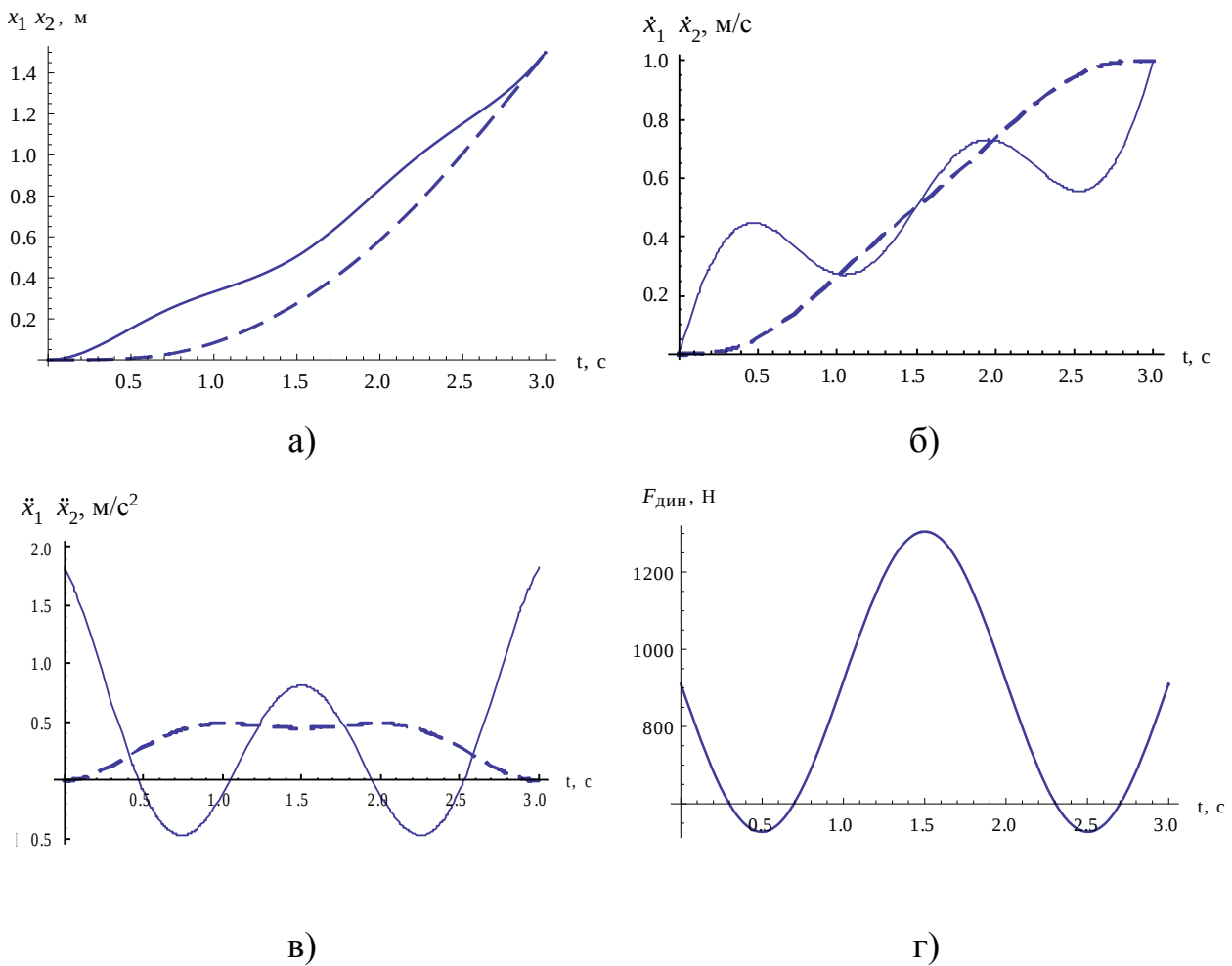


Рис. 9.14. Графіки зміни переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) візка та вантажу і динамічного зусилля діючого на візок (г).

Проведемо короткий аналіз отриманих графічних залежностей. З рис.9.12 (в) видно, що на початку руху вантажний візок має велике прискорення, що є недоліком цього закону. З рисунку 9.12 (б) видно, що на деякому етапі руху (наприкінці розгону) швидкість візка перевищує номінальне значення, задане в даному випадку в 1 м/с. При цьому на систему керування рухом візка накладається умова здійснювати керування швидкістю вище номінальної. Звичайно, щоб усунути ці недоліки можна збільшити час розгону (гальмування), але в цьому випадку збільшується час робочого циклу руху візка, що приводить до зменшення продуктивності крана.

Аналіз графіків представлених на рис. 9.13 показує певні недоліки законів керування, а саме: від’ємні кінематичні та динамічні характеристики на початку руху. Ці недоліки мають принциповий характер, тому таке керування рекомендується здійснювати на практиці лише при певних параметрах руху механічної системи „візок-вантаж” (маса вантажу, довжина гнучкого підвісу та час перехідних процесів руху), при яких ці недоліки не проявляються.

Аналізуючи графіки наведені на рис. 9.14 можна зробити висновок про можливість реалізації такого керування на практиці. Однак, як видно з рис. 9.14 (в) початкові та кінцеві прискорення візка не рівні нулю, що не є бажаним. Для усунення цих недоліків необхідно використати критерії вищого порядку, а саме квадратичну швидкість зміни динамічного приводного зусилля протягом перехідного режиму руху візка з вантажем.

9.5.2. Визначення оптимальних законів керування за одиничними динамічними критеріями з підінтегральним виразом першого порядку

Визначення оптимальних законів керування з підінтегральним виразом більш високого (першого) порядку полягає в мінімізації функціоналу виду:

$$I_{\dot{F}_{дин}} = \int_0^{t_1} \dot{F}_{дин}^2 dt \rightarrow \min. \quad (9.183)$$

Вираз (9.183) можна записати так:

$$I_{\dot{F}_{\text{дин}}} = \int_0^{t_1} \left[\frac{m_1 l^V}{g} \dot{x}_2 + (m_2 + m_1) \ddot{x}_2 \right]^2 dt \rightarrow \min. \quad (9.184)$$

Умовою мінімуму функціоналу (9.184) є рівняння Ейлера-Пуассона (9.20), яке представляється диференціальним рівнянням десятого порядку:

$$m_1^2 l^2 \overset{X}{x}_2 + 2gm_1 l(m_1 + m_2) \overset{VIII}{x}_2 + g^2(m_1 + m_2)^2 \overset{VI}{x}_2 = 0. \quad (9.185)$$

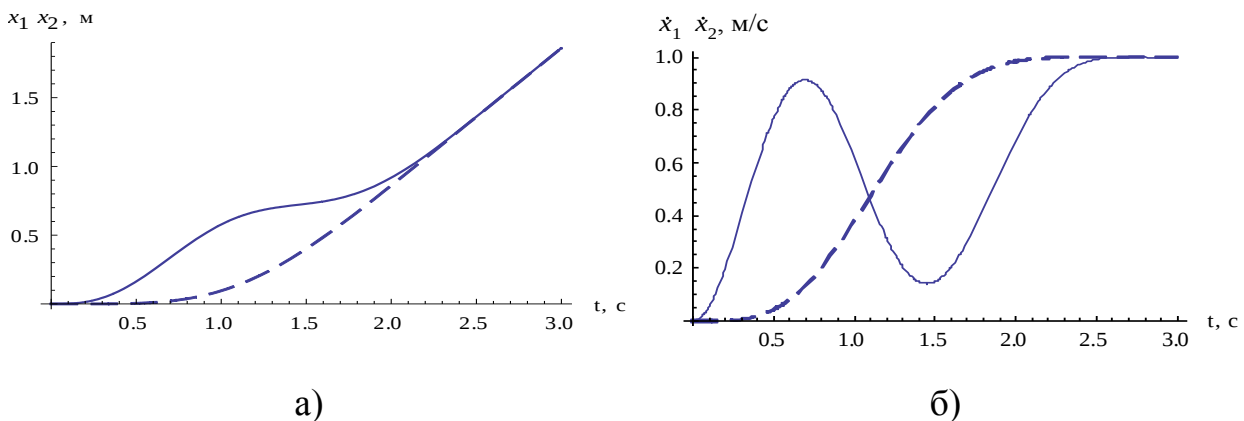
Як і в попередньому підпункті через k позначимо частоту власних маятникових коливань вантажу відносно візка під час перехідних режимів його руху. Тоді рівняння (9.185) можна переписати таким чином:

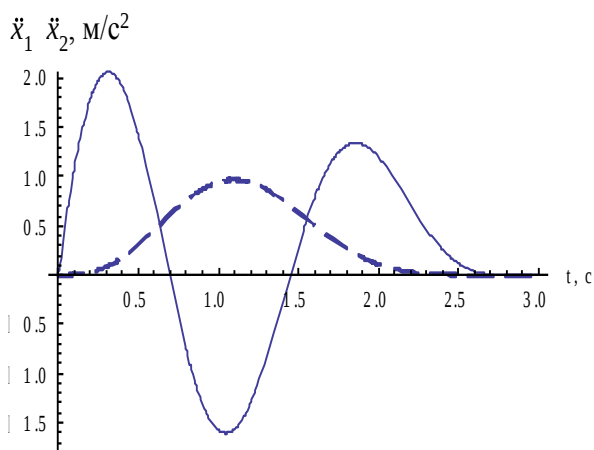
$$\overset{X}{x}_2 + 2k^2 \overset{VIII}{x}_2 + k^4 \overset{VI}{x}_2 = 0. \quad (9.186)$$

Задамо крайові умови для знаходження потрібної функції:

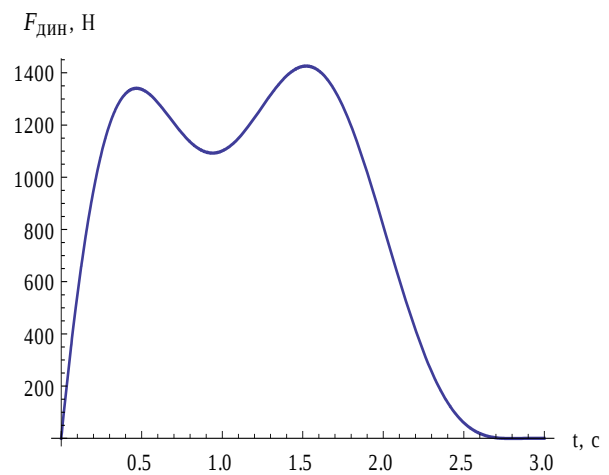
$$\begin{cases} \overset{IV}{x}_2 = 0, \overset{IV}{\dot{x}}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{\ddot{x}}}_2 = 0, \overset{IV}{x}_2 = 0 & \text{при } t = 0; \\ \overset{IV}{\dot{x}}_2 = v, \overset{IV}{\ddot{x}}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{\ddot{x}}}_2 = 0, \overset{V}{x}_2 = 0, \overset{V}{x}_2 = 0 & \text{при } t = t_1. \end{cases} \quad (9.187)$$

Екстремаль, яка доставляє мінімум функціоналу (9.184) і відповідає прийнятим крайовим умовам (9.187), внаслідок великого об'єму виразу, який її описує, тут не наведена. Для знайдених законів руху візка і вантажу побудуємо графіки (рис. 9.15).





в)



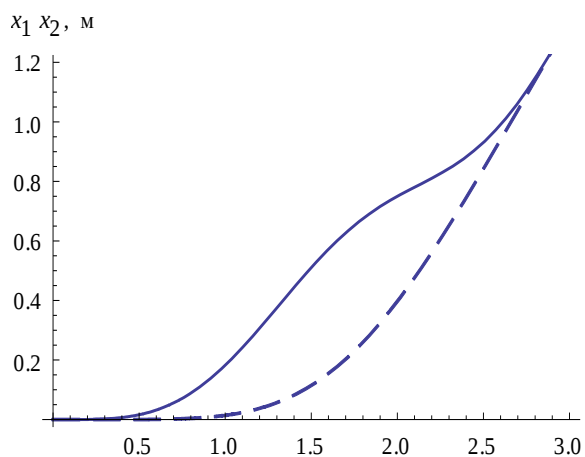
г)

Рис. 9.15. Графіки зміни переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) візка та вантажу і динамічного зусилля діючого на візок (г).

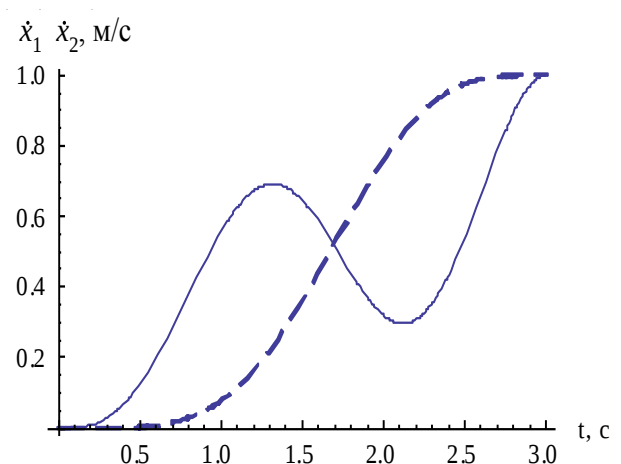
Можна отримати інший розв'язок диференціального рівняння (9.186), якщо поставити такі крайові умови:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0, x_2 = 0, \overset{V}{\dot{x}_2} = 0 & \text{при } t = 0; \\ \dot{x}_2 = v, \ddot{x}_2 = 0, \overset{IV}{\ddot{x}_2} = 0, x_2 = 0 & \text{при } t = t_1. \end{cases} \quad (9.188)$$

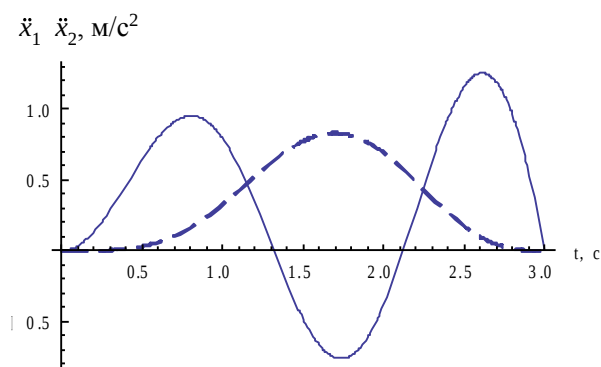
Для знайдених функцій отриманих при крайових умовах (9.188) побудуємо графіки (рис. 9.16).



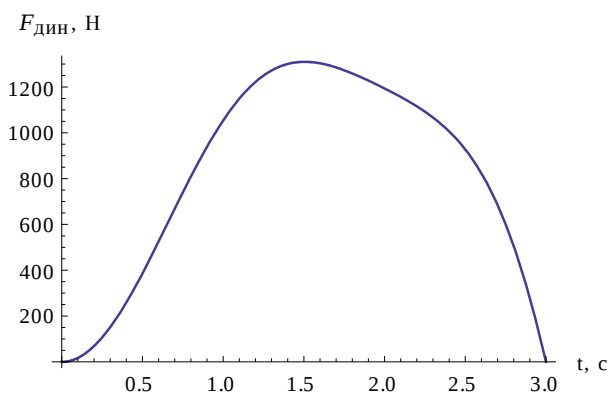
а)



б)



в)



г)

Рис. 9.16. Графіки зміни переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) візка та вантажу і динамічного зусилля діючого на візок (г).

Для знаходження екстремалі можна поставити симетричні крайові умови:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \ddot{x}_2 = 0, \ddot{\ddot{x}}_2 = 0, x_2 = 0 & \text{при } t = 0; \\ x_2 = x, \dot{x}_2 = v, \ddot{x}_2 = 0, \ddot{\ddot{x}}_2 = 0, x_2 = 0 & \text{при } t = t_1, \end{cases} \quad (9.189)$$

У випадку використання крайових умов (9.189) можна знайти екстремаль, однак вираз, який її описує має значний об'єм і тому не приводиться. Не будемо приводити також функціонал який відповідає знайденій екстремалі, а також вираз частинної похідної функціоналу за параметром x . Прирівнюючи вираз частинної похідної функціоналу за параметром x до нуля і розв'язуючи отримане рівняння відносно невідомого x будемо мати:

$$x = \frac{t_1 v}{2}. \quad (9.190)$$

Вираз (9.190) підставимо у формулу екстремалі та спростимо її. Будемо мати:

$$x_2 = [v(-k^5 t^3(t - 2t_1)t_1 - 12k^3 t t_1^2 + 24k(t_1 - 2t) + 12k(4t_1 + t(4 - k^2 t_1)))c_2 + 72s_1 - 72s_4 -$$

$$-12k(2(t+t_1)c_1-2(t-2t_1)c_4+kt_1((t-t_1)s_1+ts_4))+(-72+k^4t^3(t-2t_1)+12k^2t(t+3t_1))\times \\ \times s_2)] [2k(-48-12k^2t_1^2-k^4t^4-12(-4+k^2t^2)c_2+kt_1(48-k^2t^2)s_2)]^{-1}. \quad (9.191)$$

Вищі похідні – швидкість та прискорення вантажу протягом розгону – описуються такими законами:

$$\dot{x}_2 = [v(-24+k^2t_1(-6t_1+k^2t^2(-2t+3t_1))+6(4+k^2t_1(t_1-t))c_1-6(4+k^2tt_1)c_4+ \\ 6((4-2k^2tt_1)c_2+k(2t+t_1)s_1+k(3t_1-2t)s_4+k(t(12+k^2t(2t-3t_1))+18t_1)s_2)]\times \\ \times [-48-12k^2t_1^2+k^4t^4-12(-4+k^2t^2)c_2+kt_1(48-k^2t^2)s_2)]^{-1}. \quad (9.192)$$

$$\ddot{x}_2 = [6kv(k^3tt_1(t_1-t)+2ktc_1+2k(t_1-t)c_4+2(s_2-s_1+s_4)+k(-2t_1c_2+ktts_4+k\times \\ \times (t-t_1)(t_1s_1+ts_2)))] [-48-12k^2t_1^2+k^4t^4-12(-4+k^2t^2)c_2+kt_1(48-k^2t^2)s_2)]^{-1}. \quad (9.193)$$

Знайдемо відповідні кінематичні характеристики для візка:

$$x_1 = [v(12k^5ltt_1(t_1-t)+gk(24t_1+t(-48-k^4t^2(t-2t_1)t_1-12k^2t_1^2))-12k(2k^2lt_1+ \\ g(-4t_1+t(k^2tt_1-4)))c_2+12(-2k(-k^2lt+g(t+t_1))c_1+2k(g(t-2t_1)+k^2l(t_1-t))\times \\ \times c_4+(k^2l(-2+k^2(t-t_1)t_1)+g(6+k^2t_1(t_1-t)))s_1+(k^2l(2+k^2tt_1)-g(6+k^2tt_1))\times \\ \times s_4+(12k^2l(2+k^2t(t-t_1))+g(-72+k^4t^3(t-2t_1)+12k^2t(t+3t_1)))s_2)] [2gk(-48- \\ -12k^2t_1^2+k^4t^4-12(-4+k^2t^2)c_2+kt_1(48-k^2t^2)s_2)]^{-1}. \quad (9.194)$$

$$\dot{x}_1 = [v(6k^4lt_1(t_1-2t)-g(24+k^4t^2(2t-3t_1)t_1+6k^2t_1^2)-12g(k^2tt_1-2)c_2+6\times \\ \times ((k^4l(t-t_1)t_1+g(4+k^2t_1(t_1-t))c_1+(k^4ltt_1-g(4+k^2tt_1))c_4+k(k^2l(t_1-2t)+g\times \\ \times (2t+t_1))s_1+k(k^2l(2t-t_1)+g(3t_1-2t))s_4+k(6k^2l(2t-t_1)+g(t(12+k^2t(2t-3\times \\ \times t_1))+18t_1))s_2)] [g(-48-12k^2t_1^2+k^4t^4-12(-4+k^2t^2)c_2+kt_1(48-k^2t^2)s_2)]^{-1}. \quad (9.195)$$

$$\ddot{x}_1 = [6vk(k^3t_1(-2l+gt(t_1-t))+2k(gt+k^2l(t_1-t))c_1+2k(-gt+k^2lt+gt_1)c_4- \\ -2gkt_1c_2+s_1(-2g-2k^2l+gk^2tt_1-k^4ltt_1-gk^2t_1^2+k^4lt_1^2)+(2(g+k^2l)+k^2(g- \\ -k^2l)tt_1)s_4+s_2(2g+2k^2l+gk^2t^2-gk^2tt_1))] [g(-48-12k^2t_1^2+k^4t^4-12(-4+ \\ +k^2t^2)c_2+kt_1(48-k^2t^2)s_2)]^{-1}. \quad (9.196)$$

Запишемо функцію зміни динамічного зусилля на протязі часу розгону візка з вантажем:

$$F_{дин} = [6kv(g^{-1}(k^2lm_1(k(2tc_4 + (t_1 - t)(2c_1 + kt_1s_1) - ktt_1s_4) + 2(-kt_1 - s_1 + s_4 + s_2))) + (m_1 + m_2)(k^3tt_1(t_1 - t) + 2kct_1 + 2k(t_1 - t)c_4 + 2(s_2 - s_1 + s_4) + k(-2t_1 \times c_2 + ktt_1s_4 + k(t - t_1)(t_1s_1 + ts_2)))))] [-48 - 12k^2t_1^2 + k^4t^4 - 12(-4 + k^2t^2)c_2 + k \times t_1(48 - k^2t^2)s_2)]^{-1}. \quad (9.197)$$

Закони зміни кінематичних та динамічних характеристик візка і вантажу (9.191)-(9.197) зобразимо в графічному вигляді (рис. 9.17).

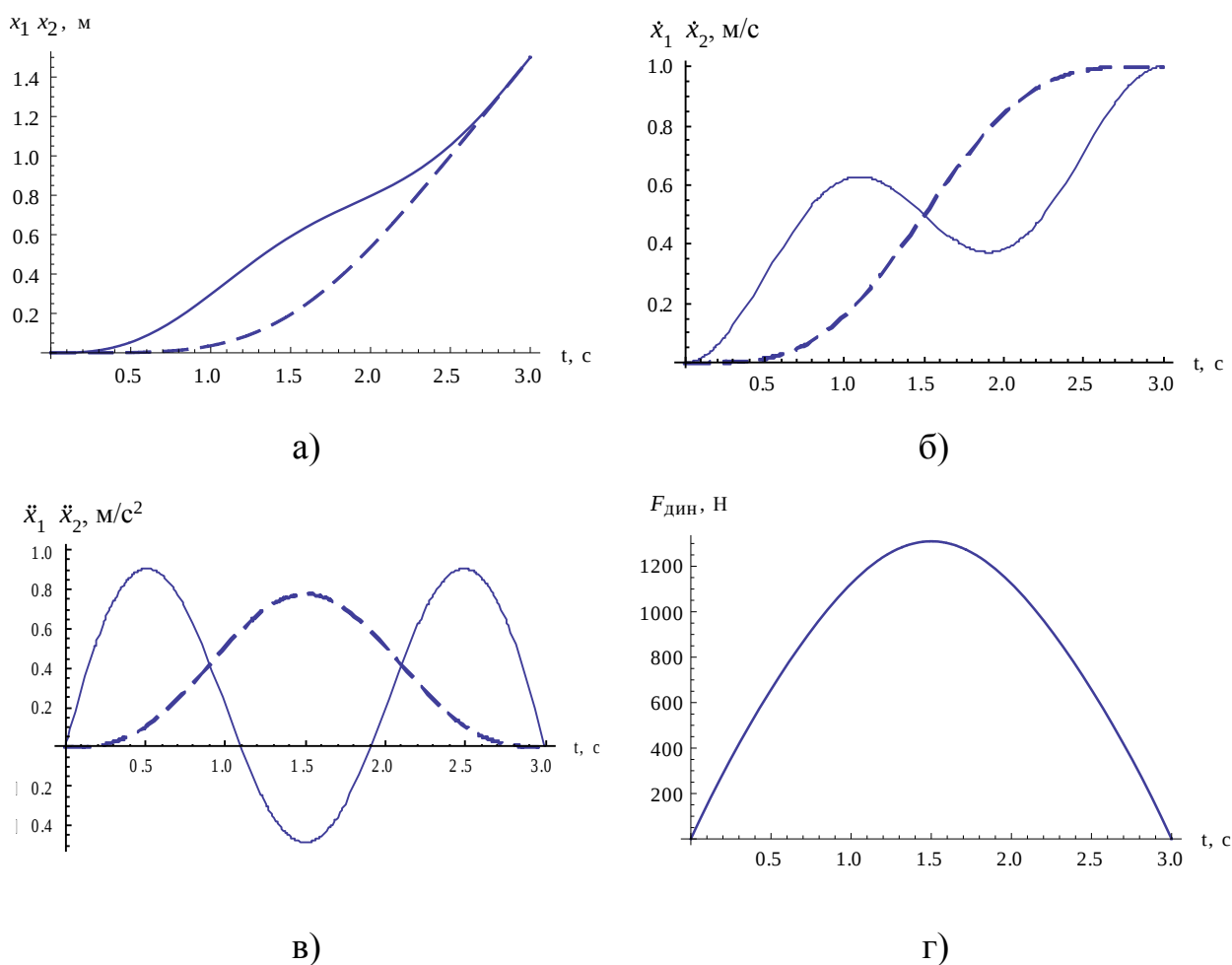


Рис. 9.17. Графіки зміни переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) візка та вантажу і динамічного зусилля діючого на візок (г)

Аналіз приведених графіків показує задовільні показники руху візка з вантажем. За вище приведеними оптимальними законами руху візок має нульові початкові та кінцеві прискорення, що характеризує високу плавність

руху. Графіки приводних динамічних зусиль (рис. 9.15, 9.16, 9.17) не мають крутих ділянок – це дозволяє приводному двигуну працювати в менш напруженому режимі, а також виключає можливість виникнення коливань в передачах та крановій металоконструкції.

Відмітимо, що графіки побудовані для останнього оптимального динамічного закону керування мало відрізняються від побудованих для закону (9.150), однак зміна величини маси вантажу може показати їх відмінності. У закон (9.150) маса вантажу не входить, а у оптимальному динамічному законі величина маси вантажу врахована, тому динамічний закон краще відображає динаміку руху візка [16].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

1. Ловейкін В.С. Теорія технічних систем / В.С. Ловейкін, І.І. Назаренко, О.Г. Онищенко. – К. - Полтава: ІЗМН-ПДТУ, 1998. –175 с.
2. Чиликин М.Г. Общий курс электропривода: учебник [для студ. вузов] / М.Г. Чиликин, А.С. Сандлер. – [6-е изд., доп. и перераб.]. – М.: Энергоиздат, 1981. – 576 с.
3. Зоммерфельд А. Механика / А. Зоммерфельд [пер. с нем.]. – Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 368 с.
4. Вейц В.Л. Динамика машинных агрегатов / В.Л. Вейц – Л.: Машиностроение, 1969. – 370 с.
5. Моделювання динаміки механізмів вантажопідйомних машин / [Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Пастушенко С.І.]. – К.-Миколаїв: РВВ МДАУ, 2004. – 286 с.
6. Комаров М.С. Динамика грузоподъемных машин / Комаров М.С. – М.: Машиностроение, 1969. – 206 с.
7. Григоров О.В. Совершенствование рабочих характеристик крановых механизмов: дисс. на соиск. степ. доктора техн. наук: 05.05.05 / Григоров Отто Владимирович. – Х., 1995. – 386 с.
8. Мельникова Л.В. Автоматизация технологического процесса перемещения механизма с подвешенным грузом средствами микропроцессорного управления: дисс. на соиск. степ. канд техн. наук: 05.09.03 / Мельникова Любовь Васильевна. - Одесса, 2000. – 116 с.
9. Лобов Н. А. Динамика грузоподъемных кранов / Н.А. Лобов. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.
10. Ловейкін В.С. Аналіз та синтез режимів руху механізмів вантажопідйомних машин: монографія / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич. – К. : Компрінт, 2012. – 298 с.

11. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – М.: Высшая школа, 2003. – 614 с.
12. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтнянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.
13. Киселев Ю.Н. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения / Ю.Н. Киселев, С.Н. Авакумов, М.В. Орлов. – М: Изд. отдел факультета ВМиК МГУ им. Ломоносова, 2007 – 270 с.
14. Ловейкин В.С. Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин / В.С. Ловейкин. – Киев: УМК ВО, 1990. – 168 с.
15. Ловейкін В.С. Динамічна оптимізація підйомних машин / В.С. Ловейкін, А.П. Нестеров. – Х.: ХДАДТУ, 2002. – 285 с.
16. Ловейкін В.С. Оптимізація режимів руху кранових механізмів / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич. Ніжин: Видавець ПП Лисенко М.М., 2011. - 307с.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИНАМІКИ МАШИН.....	5
1.1. Задачі динаміки машин.....	5
1.2. Основні динамічні характеристики машин.....	8
1.2.1. Пружні властивості елементів машини.....	10
1.2.2. Розподілення мас в трансмісії машини.....	14
1.2.3. Спрощення розрахункової схеми машини.....	17
1.2.4. Формування навантажень в елементах машин.....	20
РОЗДІЛ 2. НЕРІВНОМІРНИЙ РУХ МАШИНИ.....	27
2.1. Основні положення процесу пуску машин.....	25
2.2. Пришвидшений рух машини при запуску.....	27
2.3. Динамічні навантаження при пуску машини.....	37
2.3.1. Еквівалентна динамічна модель машини.....	37
2.3.2. Динамічні навантаження в машинах з одним виконавчим органом.....	41
2.3.3. Динамічні навантаження в машинах з двома виконавчими органами.....	53
РОЗДІЛ 3. МОДЕЛІ МЕХАНІЗМІВ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МАШИН.....	61
3.1. Загальні положення математичного моделювання руху механізмів вантажопідйомних машин.....	61
3.2. Математична модель руху стрілової системи крана.....	64
3.3. Математичні моделі руху візка та механізму повороту баштового крана.....	67

РОЗДІЛ 4. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ.....	69
4.1. Постановка задачі оптимального керування.....	69
4.2. Розв'язання задач методом класичного варіаційного числення.	77
4.2.1. Класифікація задач оптимального керування.....	77
4.2.2. Метод класичного варіаційного числення.....	80
4.3. Принцип максимуму Понтрягіна.....	91
 РОЗДІЛ 5. КРИТЕРІЇ ОЦІНКИ ЯКОСТІ МАШИН.....	101
5.1. Аналіз критеріїв якості.....	101
5.2. Інтегральні динамічні критерії.....	104
5.2.1. Зміст і форма критеріїв.....	104
5.2.2. Форми критеріїв.....	106
5.3. Критерії якості режимів руху піднімальних машин.....	109
5.4. Критерії якості силових перехідних процесів машин...	113
5.4.1. „Максимальне відхилення”.....	113
5.4.2. „Коефіцієнт динамічності”.....	114
5.4.3. „Час загасання”.....	115
5.4.4. „Запас стійкості”.....	116
5.4.5. „Швидкість загасання”.....	117
5.4.6. „Квадратична інтегральна оцінка”.....	117
5.4.7. „Втрата втомної міцності”, “зниження довговічності”..	120
5.5. Критерії зовнішніх збурювань.....	121
 РОЗДІЛ 6. ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМІВ РУХУ МАШИН.....	123
6.1. Постановка задачі.....	123
6.2. Оптимізація за критерієм „питомі приведені витрати”.....	125
6.3. Оптимізація за критерієм „час циклу”.....	129
6.4. Оптимізація за критерієм „ефективна потужність”.....	131
6.5. Оптимізація по інтегральних динамічних критеріях.....	138

РОЗДІЛ 7. ФУНКЦІОНАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМІВ РУХУ МАШИН.....	146
7.1. Загальні положення оптимізації режимів руху.....	146
7.2. Методика функціональної оптимізації режимів руху.....	148
7.3. Оптимізація режимів руху на початковій стадії проектування.....	153
7.3.1. Синтез швидкісного режиму руху.....	153
7.3.2. Синтез динамічного режиму руху.....	155
7.3.3. Синтез рівного режиму руху.....	163
7.3.4. Синтез режимів руху по прискореннях вищих порядків.....	172
7.3.5. Синтез режимів руху за комплексним критерієм.....	176
7.4. Оптимізація режимів руху на кінцевій стадії проектування...	194
7.5. Аналіз оптимальних режимів руху піднімальних машин.....	207
 РОЗДІЛ 8. ФУНКЦІОНАЛЬНО-ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМІВ РУХУ МАШИН.....	218
8.1. Синтез оптимальних режимів руху при наявності обмежень на кінематичні характеристики.....	218
8.2. Синтез оптимальних режимів руху при наявності обмежень на силові й енергетичні характеристики.....	227
8.3. Системи приводів машин для реалізації оптимальних режимів руху.....	241
 РОЗДІЛ 9. ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ЗАКОНІВ РУХУ ДЛЯ ДВОМАСОВОЇ МОДЕЛІ МАШИНИ.....	247
9.1. Побудова динамічної та математичної моделей руху візка....	247
9.2. Вибір методу оптимізації та критеріїв оптимальності.....	253
9.3. Визначення оптимальних законів керування за одиничними кінематичними критеріями.....	258

9.3.1. Визначення оптимальних законів керування за одиничними кінематичними критеріями з підінтегральним виразом другого порядку.....	258
9.3.2. Визначення оптимальних законів керування за одиничними кінематичними критеріями з підінтегральним виразом третього порядку.....	266
9.3.3. Визначення оптимальних законів керування за одиничним кінематичним критерієм з підінтегральним виразом четвертого порядку.....	272
9.4. Визначення оптимальних законів керування за комплексними кінематичними критеріями.....	275
9.4.1. Попередні підготовчі перетворення.....	275
9.4.2. Визначення оптимальних законів керування за критерієм, що враховує переміщення та швидкості візка і вантажу.....	278
9.4.3. Визначення оптимальних законів керування за критерієм, що враховує швидкості та прискорення візка і вантажу.....	282
9.5. Визначення оптимальних законів керування за одиничними динамічними критеріями.....	288
9.5.1. Визначення оптимальних законів керування за одиничними динамічними критеріями з підінтегральним виразом нульового порядку.....	288
9.5.2. Визначення оптимальних законів керування за одиничними динамічними критеріями з підінтегральним виразом першого порядку.....	297
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	304