

Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О.

АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ РЕЖИМІВ РУХУ МЕХАНІЗМІВ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МАШИН

МОНОГРАФІЯ



Київ – 2012

Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О.

**АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ РЕЖИМІВ РУХУ
МЕХАНІЗМІВ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МАШИН**

Монографія

Київ - 2012

УДК 621.01: 621.87

ББК 22.21Я73

Ло 68

Публікується за рішенням вченої ради Національного університету біоресурсів і природокористування України (протокол №4 від 28 листопада 2012 р.).

Рецензенти:

Сукач Михайло Кузьмич, доктор технічних наук, професор, професор кафедри будівельних машин Київського національного університету будівництва і архітектури.

Піпа Борис Федорович, доктор технічних наук, професор, Заслужений діяч науки і техніки України, професор кафедри інженерної механіки Київського національного університету технологій та дизайну.

Мироненко Валентин Григорович, доктор технічних наук, професор, Національний науковий центр "Інститут механізації та електрифікації сільського господарства" Національної академії аграрних наук України

Ловейкін В.С.

Ло 68 Аналіз та синтез режимів руху механізмів вантажопідйомних машин. Монографія / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич. – К.: ЦП „КОМПРІНТ”, 2012. - 298 с.

Монографія написана на основі досліджень авторів режимів руху механічних систем, зокрема, механізмів вантажопідйомних машин. Проаналізовано приводні зусилля асинхронних двигунів, які використовуються у вантажопідйомній техніці та запропоновано їх уточнення за допомогою використання сплайн-моделі. Синтезовано оптимальні режими руху вантажопідйомних машин та їх механізмів у формах зворотного зв'язку та програмного керування. Оптимізація режимів руху механізмів виконана за інтегральними та термінальними критеріями. Досліджено оптимальні режими руху одно- та багатомасових моделей механізмів вантажопідйомних машин обладнаних електричним приводом постійного струму із незалежним збудженням.

Призначена для наукових та інженерних працівників, а також може бути корисна аспірантам, магістрам та студентам машинобудівних спеціальностей вищих навчальних закладів.

© Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О., 2012

© НУБіП України, 2012

ВСТУП

Роль вантажопідйомних машин та механізмів у різних сферах сучасного виробництва важко переоцінити. З їх допомогою виконуються перевантажувальні операції у морських та річкових портах, на підприємствах металургійної та машинобудівної промисловості, у сільському господарстві, енергетиці та інших галузях народного господарства. Особливо важливе місце вантажопідйомні машини займають у будівництві.

У багатьох випадках робота вантажопідйомної машини є „вузьким місцем” усього виробництва і тому необхідно приділяти особливу увагу питанням їх правильної експлуатації. Практика показує, що більшість вантажопідйомних машин працюють у режимах, які характеризуються значними енергетичними витратами на виконання перевантажувальних операцій та динамічними навантаженнями, діючими у елементах машини. Все це призводить до передчасного виходу з ладу вантажопідйомної техніки. У багатьох випадках поломка лише одного елемента вантажопідйомної машини (наприклад, електродвигуна) призводить до втрати нею працездатності. Часто буває, що поломка є некритичною, але подальша експлуатація машини забороняється згідно зі встановленими нормативами (наприклад, Правилами будови і безпечної експлуатації вантажопідіймальних кранів). Зупинка роботи вантажопідйомної машини у більшості випадків веде до зупинки всього технологічного процесу. Виключення можуть становити лише процеси, в яких вантажопідйомні крани працюють „паралельно”. Таким чином, актуальною є задача визначення таких режимів експлуатації машин, які дають змогу продовжити строк їх служби та знизити витрати енергії.

Для того, щоб вирішити вказану задачу необхідно провести її формалізацію. Це дає змогу використати для її вирішення формальні теоретичні методи. Наступний етап у вирішенні задачі – проведення аналізу, який полягає у тому, щоб встановити причини небажаних показників роботи вантажопідйомної машини та намітити шляхи їх усунення. Синтез режимів

руху механізмів, які входять у вантажопідйомну машину є логічним продовженням вирішення задачі. Визначення законів руху механізмів повинно базуватись на методах теорії оптимального керування. Широкий спектр методів оптимального керування дає певну свободу при синтезі режимів руху механізмів вантажопідйомних машин. Часто буває, що при розв'язуванні задачі оптимального керування один метод доповнює інший або представляє задачу у іншому світлі. Це дає змогу досліднику краще зрозуміти сутність задачі. Останній етап у вирішенні задачі – втілення результатів синтезу. Для реалізації результатів досліджень необхідно знати можливості сучасного обладнання та специфіку його роботи. Загалом, домінуючі позиції у реалізації режимів руху механізмів вантажопідйомних машин займає мехатронний підхід. Він дозволяє перекласти складні функції керування від людини-оператора на ЕОМ, оператору залишаються лише функції контролю за перебігом процесу перевантаження та корекції, якщо це потрібно, рухів вантажопідйомної машини.

У представленій монографії висвітлені питання аналізу та синтезу режимів руху вантажопідйомних машин. У першому розділі проаналізовано приводні зусилля, що створюються крановими електричними асинхронними двигунами. Показні недоліки відомої формули Клосса, якою описується статична механічна характеристика двигуна. Замість рівняння Клосса пропонується використати сплайнову модель механічної характеристики, яка враховує всі заявлені виробником двигуна данні. Для декількох задач знайдено аналітичні вирази (тривалість розгону механізму із асинхронним приводом, функція зміни швидкості тощо), які можуть бути використані для уточнення розрахунків механічних перехідних процесів кранових електричних двигунів.

Другий розділ присвячений актуальному питанню використання частотного керування асинхронними приводами крана. Важко переоцінити можливості, які отримав крановий електричний привод завдяки переведенню на частотне керування. У розділі досліджується вплив основних

характеристик та налаштувань частотного перетворювача на динаміку руху кранових механізмів. Тут показано, що відповідними (і досить простими) налаштуваннями частотного перетворювача можна добитись значного покращення динамічної картини у механізмах вантажопідйомної машини.

Третій розділ монографії включає відомості про прямий варіаційний метод. За допомогою даного методу розв'язані лінійні та нелінійні задачі оптимального керування механізмами вантажопідйомних машин із врахуванням та без врахування обмежень на керування ними. Модель руху механізму у даному розділі прийнята одномасовою, однак вказаний метод може бути використаний і для багатомасових моделей.

У четвертому розділі основна увага приділена задачам синтезу оптимального керування механізмами вантажопідйомних машин у формі зворотного зв'язку. Така форма оптимального керування дає змогу експлуатувати механізми із стохастичними впливами зі сторони зовнішнього середовища. Звичайно, для реалізації вказаного оптимального керування необхідно певним чином організувати зворотній зв'язок за фазовими координатами динамічної системи (механізму або машини в цілому).

П'ятий розділ можна охарактеризувати як логічне продовження попереднього. Однак тут використана більш складна (двомасова) динамічна модель вантажопідйомної машини. Крім того, врахована також робота електричного приводу постійного струму, який є джерелом приводного зусилля у динамічній системі.

Останній, шостий розділ, висвітлює питання аналізу умов усунення коливань елементів мостових кранів. Тут також розв'язана задача синтезу оптимального керування рухом вантажопідйомного крана із траверсною підвіскою вантажу методом динамічного програмування.

Результати, які представлені у монографії, можуть бути використані на стадії проектування вантажопідйомних машин та при їх модернізації (наприклад, заміна приводу, системи керування).

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ ПРИВОДНИХ ЗУСИЛЬ АСИНХРОННИХ КРАНОВИХ ДВИГУНІВ

1.1. Недоліки механічної характеристики асинхронного приводу побудованої на основі рівняння Клосса

Найпоширенішим двигуном, який використовується у сучасних механізмах вантажопідйомних машин, є асинхронний із короткозамкненим ротором. Це зумовлено рядом переваг цього двигуна над іншими: надійністю, простотою виготовлення, незначною складністю монтажних та налагоджувальних робіт, невибагливістю до змінних показників джерела живлення тощо.

Величезна кількість різноманітних динамічних кранових систем включають асинхронний двигун із короткозамкненим ротором, який виступає у ролі збурюючого джерела, підводячи до системи механічну енергію. Для опису роботи (руху) тієї чи іншої динамічної системи необхідно мати адекватну механічну характеристику асинхронного двигуна, яка характеризує зміну крутного моменту двигуна від його кутової швидкості. Загальноприйнято для опису механічної характеристики використовувати рівняння Клосса [1]. Однак можна показати, що вказане рівняння не відображає важливі характеристики реальної механічної характеристики. Проілюструємо дане твердження (рис. 1.1). На рис. 1.1. показана характеристика двигуна АИР250М2 побудована із використанням рівняння Клосса:

$$M = \frac{2M_{\max}(1 + as_{кр})}{\frac{s}{s_{кр}} + \frac{s_{кр}}{s} + 2as_{кр}}, \quad (1.1)$$

де M_{\max} - максимальний момент двигуна; s - поточне ковзання двигуна

$(s = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0})$; $s_{кр}$ - критичне ковзання двигуна, яке відповідає максимальному

моменту $(s_{кр} = \frac{s_{ном} \left[\frac{M_{max}}{M_{ном}} + \sqrt{\left(\frac{M_{max}}{M_{ном}}\right)^2 + 2s_{ном} \left(\frac{M_{max}}{M_{ном}} - 1\right) - 1} \right]}{1 - 2s_{ном} \left(\frac{M_{max}}{M_{ном}}\right)})$); a – постійний коефіцієнт для

даного двигуна ($a = \frac{R_1}{R_2'}$, R_1 - активний опір статорної обмотки двигуна; R_2' -

приведений активний опір роторного кола двигуна). Точками на рис. 1. Показані крутні моменти, які відповідають довідниковим даним [2] цього двигуна.

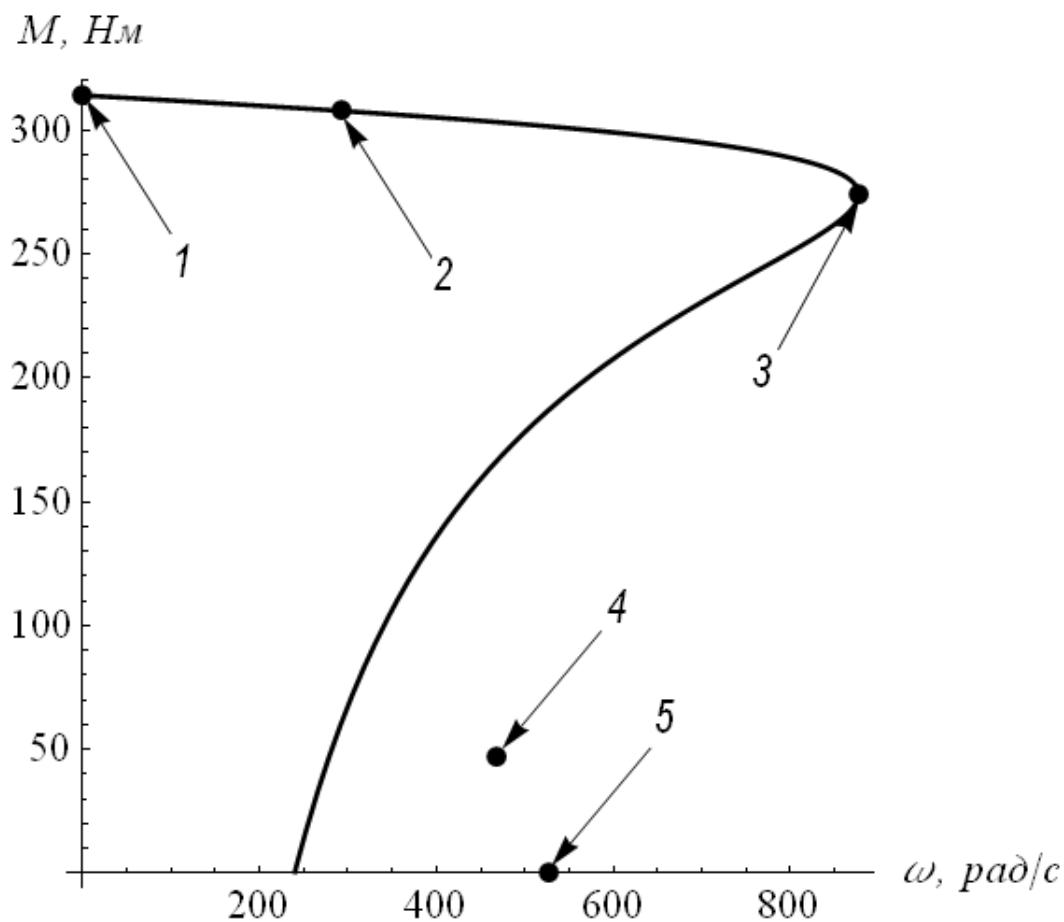


Рис. 1.1. Механічна характеристика асинхронного двигуна із короткозамкненим ротором побудована за рівнянням (1) та довідникові значення моментів двигуна, що відповідають довідковим даним:
 1 – момент ідеального холостого ходу; 2 – номінальний момент;
 3 – максимальний момент; 4 – мінімальний момент; 5 – пусковий момент

Із рис. 1 видно, що графік побудований за рівнянням Клосса добре апроксимує реальну механічну характеристику лише у області невеликих ковзань (робоча ділянка характеристики). Однак, при дослідженні динаміки руху кранових механізмів у багатьох випадках цікавляться саме перехідними режимами роботи (ділянка характеристики від пускового до максимального моменту). Тут рівняння Клоса дає значну похибку і його використання є недоцільним.

Опис асинхронної машини, як електромеханічної системи досить повно викладений у різноманітних джерелах [3-5]. Однак, за дужками, як правило, залишається питання появи мінімального моменту (провалу у механічній характеристиці) двигуна, яке пов'язує із дією вищих додаткових асинхронних електромагнітних моментів у двигуні. Методи розрахунку таких додаткових моментів досить складні та різноманітні, тому обмежуються лише якісною природою їх виникнення [6].

Отже, актуальною є задача отримання рівняння, яке б достатньо точно відображало характер зміни моменту асинхронного двигуна на всьому проміжку зміни кутової швидкості. Це дозволить більш точно оцінювати динамічні процеси, які відбуваються у кранових механізмах, обладнаних асинхронним електроприводом.

1.2. Синтез моделі механічної характеристики асинхронного двигуна

З'ясуємо, яким чином можна синтезувати аналітичний вираз, який би враховував реальні значення пускового та мінімального моментів. Це можна зробити за допомогою поліноміальної апроксимації [7]. Задамо вираз, який описує механічну характеристику асинхронного двигуна у вигляді полінома:

$$M = \sum_{i=0}^n A_i \omega^i, \quad (1.2)$$

де A_i - невідомі коефіцієнти, які необхідно певним чином підібрати; n – порядок полінома. Знайдемо мінімальне значення степеня полінома n . Для цього запишемо які значення повинен приймати даний поліном у вузлах апроксимації (координати вузлів апроксимації у даному випадку відповідають довідковим даним двигуна):

$$\left\{ \begin{array}{l} M(0) = M_n; \\ M(\omega_{\min}) = M_{\min}; \\ \frac{\partial M}{\partial \omega}(\omega_{\min}) = 0; \\ M(\omega_{\max}) = M_{\max}; \\ \frac{\partial M}{\partial \omega}(\omega_{\max}) = 0; \\ M(\omega_{\text{ном}}) = M_{\text{ном}}; \\ M(\omega_0) = 0, \end{array} \right. \quad (1.3)$$

де M_n , M_{\min} , M_{\max} , $M_{\text{ном}}$ - пусковий, мінімальний, максимальний та номінальний моменти двигуна відповідно; ω_{\min} , ω_{\max} , $\omega_{\text{ном}}$ - кутові швидкості, які відповідають мінімальному, максимальному, номінальному моментам; ω_0 - швидкість ідеального холостого ходу.

Поліном (1.2) повинен задовільняти системі (1.3). Отже, в даному випадку $n=6$. Знайшовши першу похідну виразу (1.2) та підставивши отримане у систему (1.3), сформуємо систему із семи рівнянь, які дають змогу знайти невідомі коефіцієнти A_i . Ці коефіцієнти є функціями відповідних значень швидкостей та моментів:

$$A_i = f(M_n, M_{\max}, M_{\min}, M_{\text{ном}}, \omega_{\max}, \omega_{\min}, \omega_{\text{ном}}, \omega_0), \quad i=0, 1, \dots, 6. \quad (1.4)$$

Приведемо графіки, які відповідають апроксимованій механічній характеристиці та побудовані із використанням рівняння Клосса (рис. 1.2). Точками на рис. 1.2. позначені дійсні (довідникові) дані для двигуна. Як видно із рис. 1.2 поліноміальна апроксимаційна функція краще описує реальну механічну характеристику двигуна аніж рівняння Клосса. Оцінкою

покращення опису характеристики за допомогою функції поліноміальної апроксимації є інтеграл:

$$\Delta P = \int_0^{\omega_{уст}} \left[\sum_{i=1}^n A_i \omega^i - \frac{2M_{\max} (1 + a s_{кр})}{\frac{s}{s_{кр}} + \frac{s_{кр}}{s} + 2a s_{кр}} \right] d\omega, \quad (1.5)$$

де ΔP - похибка підведеної до динамічної системи потужності протягом розгону системи; $\omega_{уст}$ - усталена швидкість руху механізму вантажопідійомної машини. Геометрична сутність даного інтегралу показує суму площ фігур, які утворюються при відніманні площ фігур під кривими (1.1) та (1.2). З'ясуємо фізичну сутність даного інтегралу. Очевидно, що одиницею виміру інтеграла (1.5) є Ватт. Отже, можна припустити, що даний інтеграл характеризує похибку ΔP у розрахунку потужності підведеної до динамічної системи протягом її розгону при використанні рівняння Клосса та рівняння (1.2). Як видно із рис. 1.2 ця похибка є значною.

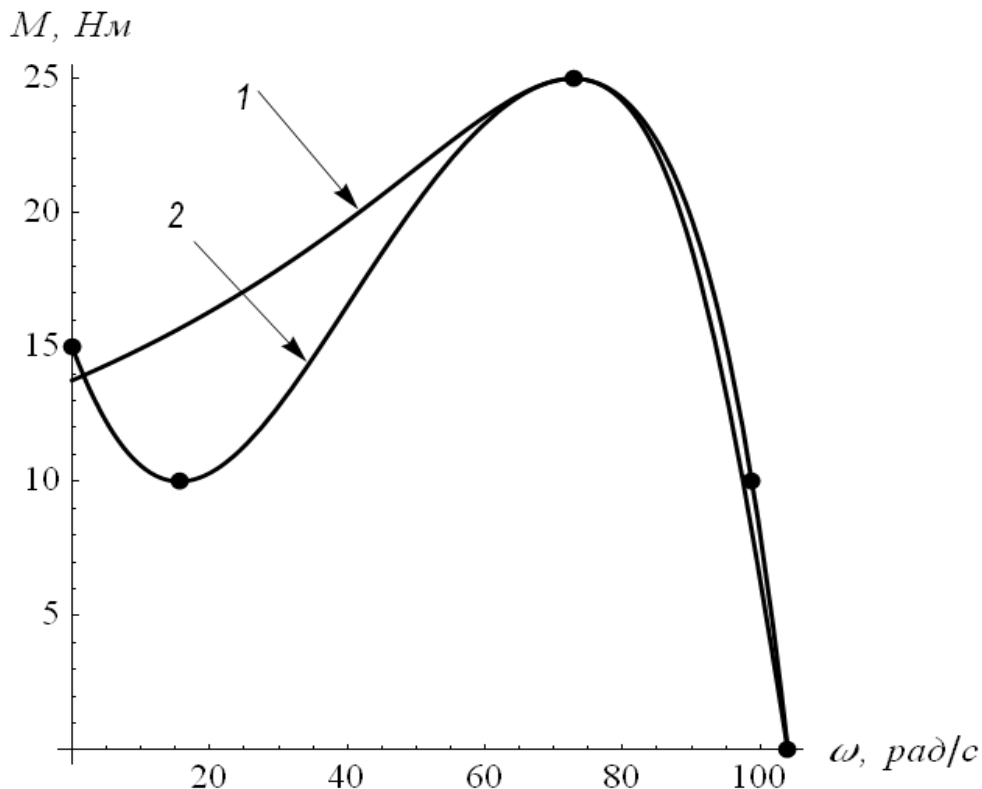


Рис. 1.2. Порівняння механічних характеристик побудованих за різними залежностями:

1 – за рівнянням Клосса; 2 – за допомогою поліноміальної апроксимації

Однак, необхідно зазначити, що отриманий результат не завжди адекватно описує механічну характеристику асинхронного приводу. Причиною є те, що поліном (1.2) може мати декілька екстремумів – як правило більше ніж два, що вимагається за умовами (1.3). На рис. 1.3. показано, як поліноміальна функція, проходячи через вузли апроксимації, незадовільно описує механічну характеристику асинхронного двигуна.

Очевидно, що для усунення цього недоліку необхідно розширити клас функцій, в яких шукається наближення до реальної функції механічної характеристики асинхронного двигуна. Будемо шукати таке наближення у класі кусочно-гладких функцій, причому гладкість функцій на окремих проміжках може бути різною. Така апроксимація отримала назву сплайнової [8].

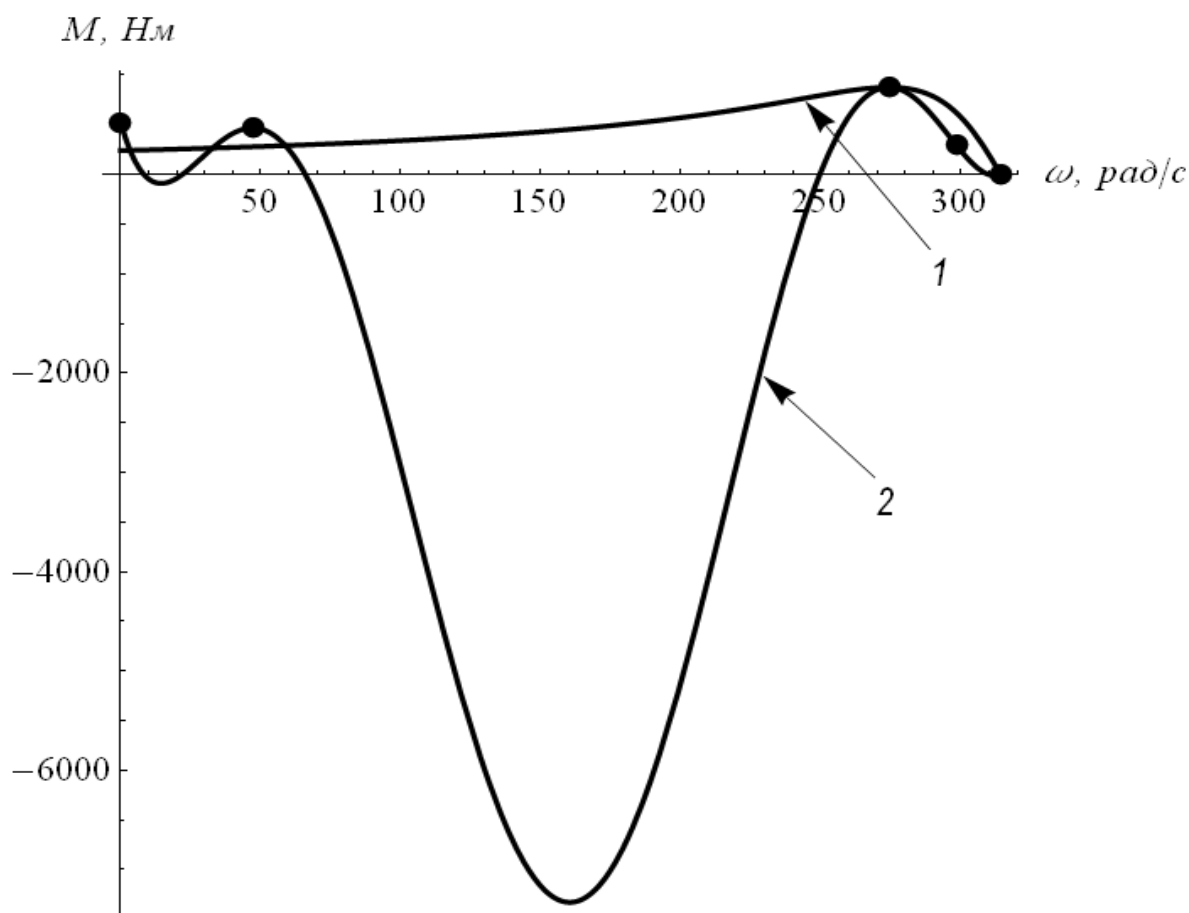


Рис. 1.3. Порівняння механічних характеристик побудованих за різними залежностями:

1 – за рівнянням Клосса; 2 – за допомогою поліноміальної апроксимації

Звернемося до рис. 1.4 на якому показана функція, що задовольняє умови (1.3). Із рис. 1.4 видно, що сплайнова функція повинна складатись із чотирьох відрізків. З'ясуємо порядок поліноміальної функції – куска сплайна для кожного відрізка.

Для першого відрізка $[0, \omega_{\min}]$ вимагається проходження функції крутного моменту через дві точки і рівність нулю першої похідної даної функції за кутовою швидкістю у кінці відрізка $[0, \omega_{\min}]$. Отже мінімальна степінь полінома для даного проміжку рівна двом.

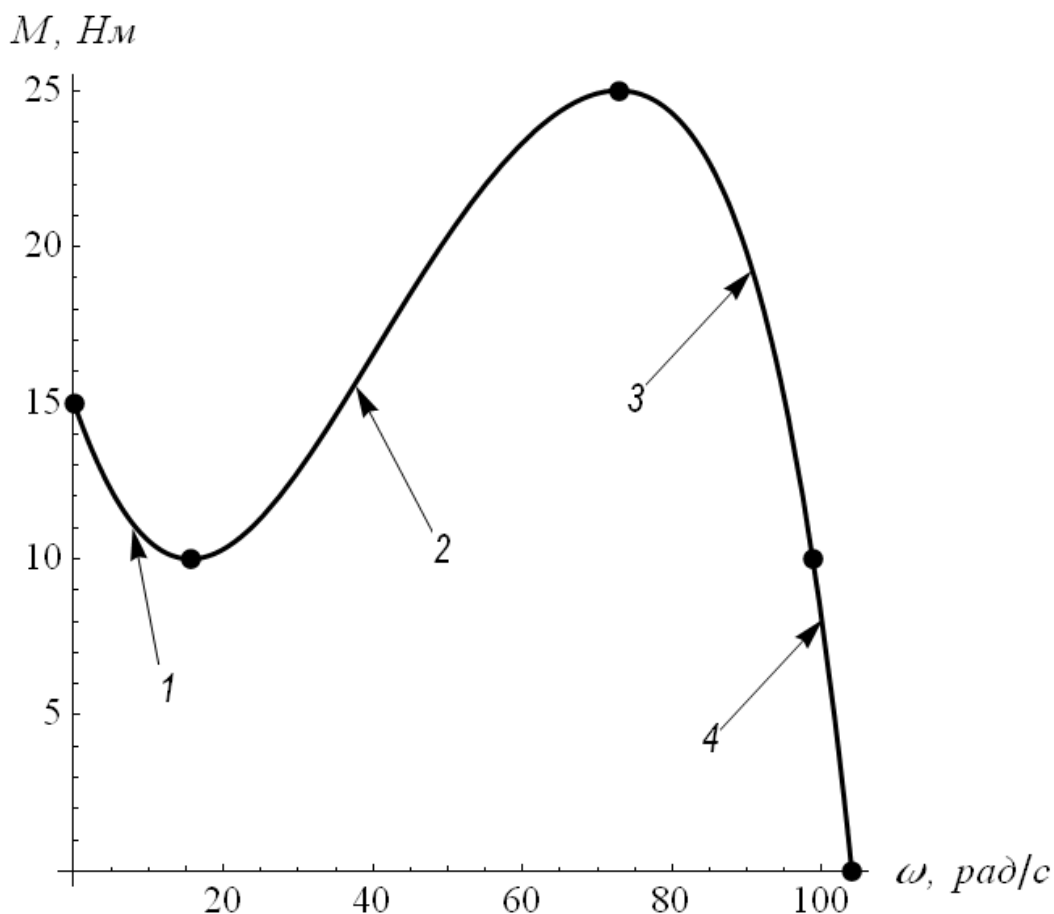


Рис. 1.4. Графік функції, яка задовольняє умови (1.3)

Для другого відрізка $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ вимагається проходження функції крутного моменту через дві точки і рівність нулю перших похідних за кутовою швидкістю на кінцях даного відрізка. Мінімальна степінь полінома для даного проміжку рівна трьом.

Для третього відрізка $[\omega_{\max}, \omega_{\text{ном}}]$ вимагається проходження функції

крутного моменту через дві точки і рівність нулю першої похідної за кутовою швидкістю на початку відрізка. Мінімальна степінь полінома для даного проміжку рівна двом.

Для четвертого відрізка $[\omega_{\text{ном}}, \omega_0]$ вимагається проходження функції крутного моменту через дві точки. Отже мінімальна степінь полінома для даного проміжку рівна одному.

Прийmemo для подальшого розгляду поліноми із мінімальними степенями, оскільки це спростить розрахунки та дозволить уникнути недоліку неперервної на всьому проміжку $[0, \omega_0]$ поліноміальної апроксимаційної функції пов'язаним із виникненням невідповідних реальній механічній характеристиці асинхронного двигуна екстремумів. Запишемо у загальному вигляді вираз для сплайн-функції, що апроксимує механічну характеристику:

$$M = \begin{cases} \sum_{j=0}^2 B_j \omega^j & \text{при } \omega \in [0, \omega_{\min}]; \\ \sum_{j=0}^3 C_j \omega^j & \text{при } \omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]; \\ \sum_{j=0}^2 D_j \omega^j & \text{при } \omega \in [\omega_{\max}, \omega_{\text{ном}}]; \\ \sum_{j=0}^1 E_j \omega^j & \text{при } \omega \in [\omega_{\text{ном}}, \omega_0], \end{cases} \quad (1.6)$$

де B_j, C_j, D_j, E_j - невідомі коефіцієнти. Ці коефіцієнти знаходяться шляхом розв'язання системи рівнянь для кожного куска сплайн-функції. Опишемо процес знаходження функції для першого куска $\sum_{j=0}^2 B_j \omega^j$. Для цього знайдемо її першу похідну за часом:

$$\frac{\partial \sum_{j=0}^2 B_j \omega^j}{\partial \omega} = B_1 + 2B_2 \omega. \quad (1.7)$$

Використовуючи перші три умови із системи (1.3), запишемо систему рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} B_0 = M_n; \\ B_0 + B_1\omega_{\min} + B_2\omega_{\min}^2 = M_{\min}; \\ B_1 + 2B_2\omega_{\min} = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

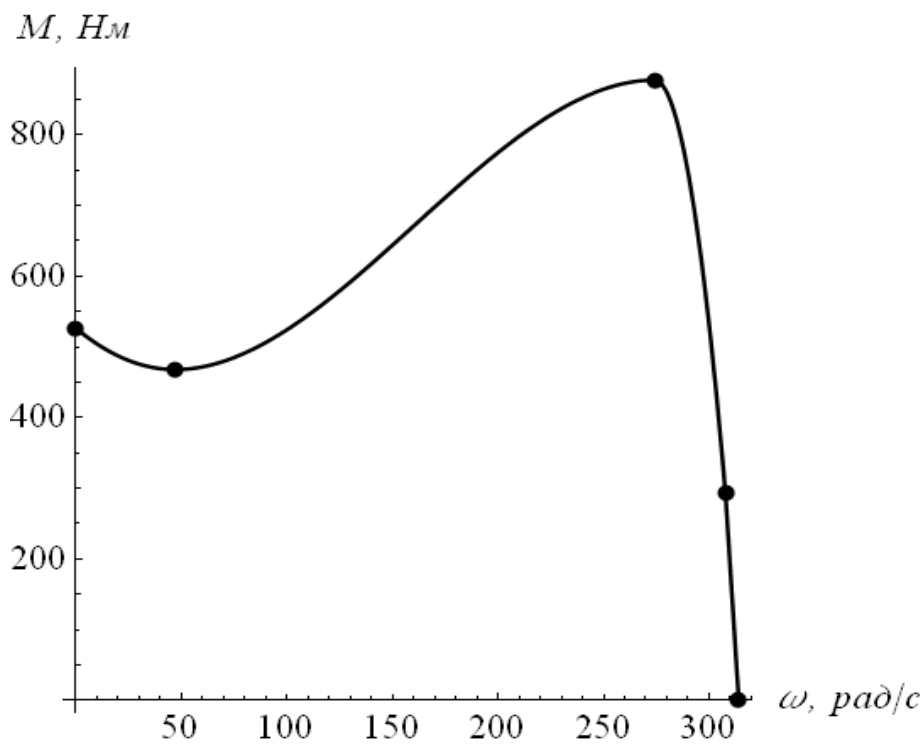
Розв'язуючи отриману систему рівнянь будемо мати:

$$\begin{cases} B_1 = \frac{2(M_{\min} - M_n)}{\omega_{\min}}; \\ B_2 = \frac{M_n - M_{\min}}{\omega_{\min}^2}. \end{cases} \quad (1.9)$$

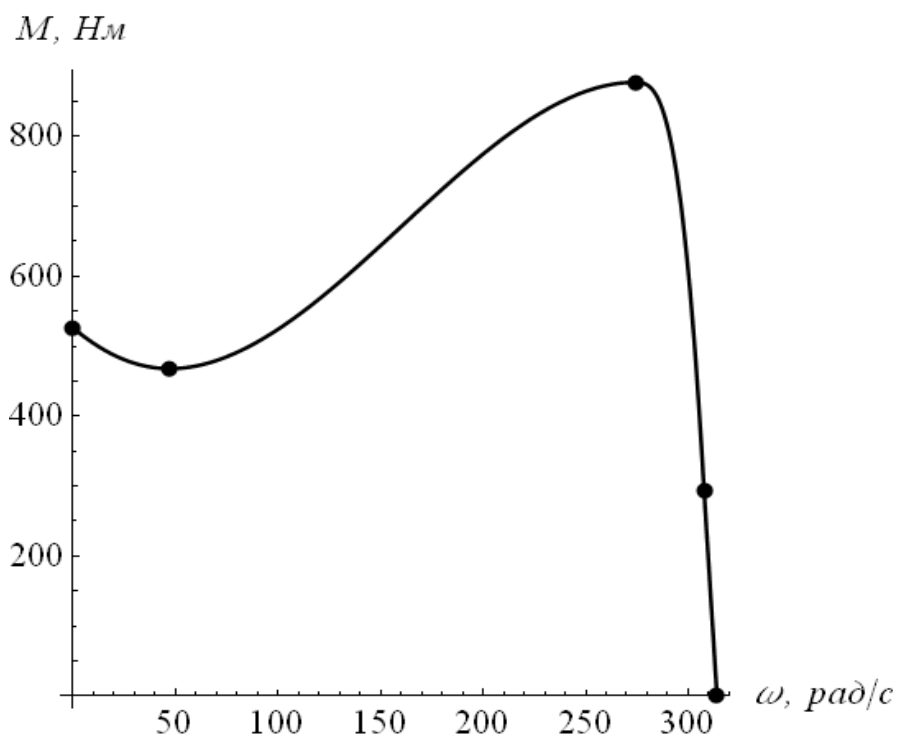
Аналогічно можна знайти вирази для інших невідомих коефіцієнтів. У результаті проведених розрахунків отримаємо сплайн-функцію, яка описує механічну характеристику асинхронного двигуна (рис. 1.5, а).

Зазначимо, що у точках сполучення друга похідна кусків функцій може терпіти розриви першого роду. Це впливає на плавність сполучення кусків функції. Для того, щоб уникнути цієї проблеми достатньо збільшити степені деяких поліномів та провести повторний розрахунок. На рис. 1.5, б показано сплайн-функцію, яка у точці сполучення другого та третього куска не має розриву другої похідної. Для отримання цього результату досить було збільшити порядок поліному третього куска на одиницю та розв'язати сформовану систему рівнянь. Додамо, що кількість рівнянь збільшується також на одиницю – дається рівняння:

$$\left. \frac{\partial^2 \sum_{j=0}^3 C_j \omega^j}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_{\max}} - \left. \frac{\partial^2 \sum_{j=0}^3 D_j \omega^j}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_{\max}} = 0. \quad (1.10)$$



а)



б)

Рис. 1.5. Графіки сплайн-функцій, які апроксимують механічну характеристику асинхронного двигуна: а) сплайн-функція з розривом другої похідної (точка максимального моменту); б) сплайн-функція без розривів другої похідної

Узагальнимо отримані результати на випадки роботи асинхронного двигуна у режимі генератора (рекуперативне гальмування). Для цього необхідно знати довідкові дані для крутних моментів та відповідних їм кутових швидкостей двигуна. Надалі сплайн-функцію необхідно доповнити іншими елементами (поліномами) та провести розрахунок коефіцієнтів цих поліномів, аналогічний тому який проведено у даному пункті. Перевагою даного методу апроксимації (моделювання) механічної характеристики асинхронного двигуна є те, що він дозволяє збільшувати точність моделі за рахунок збільшення вихідних даних, за якими вона будується (вузлів апроксимації). Збільшення точності апроксимації механічної характеристики асинхронного двигуна дозволяє отримати більш точну картину динамічних процесів, які протікають у системі при її розгоні на природній механічній характеристиці двигуна.

1.3. Аналіз режиму пуску кранових механізмів представлених одномасовою моделлю

Для аналізу процесу пуску приймемо одномасову динамічну модель, яка описується диференціальним рівнянням другого порядку:

$$m\ddot{x} = F - W, \quad (1.11)$$

де m - приведена до поступального руху маса кранового механізму; x - узагальнена координата кранового механізму; F - сила створена приводним двигуном; W - сила опору переміщення маси m (у тому числі технологічного характеру), яка у даному дослідженні є незмінною (наприклад, у випадку підйому вантажу сила опору переміщення рівна вазі вантажу). Точка над символом означає диференціювання за часом. На рис. 1.6. приведені кінематичні схеми кранових механізмів, які описуються у першому наближенні диференціальним рівнянням (1.11). Всі приведені на рис. 1.6 механізми мають загальну властивість: їх моменти інерції та маси, які

змонтовані на рухомих елементах цих механізмів можуть бути приведені до одного елемента, наприклад, до вала двигуна.

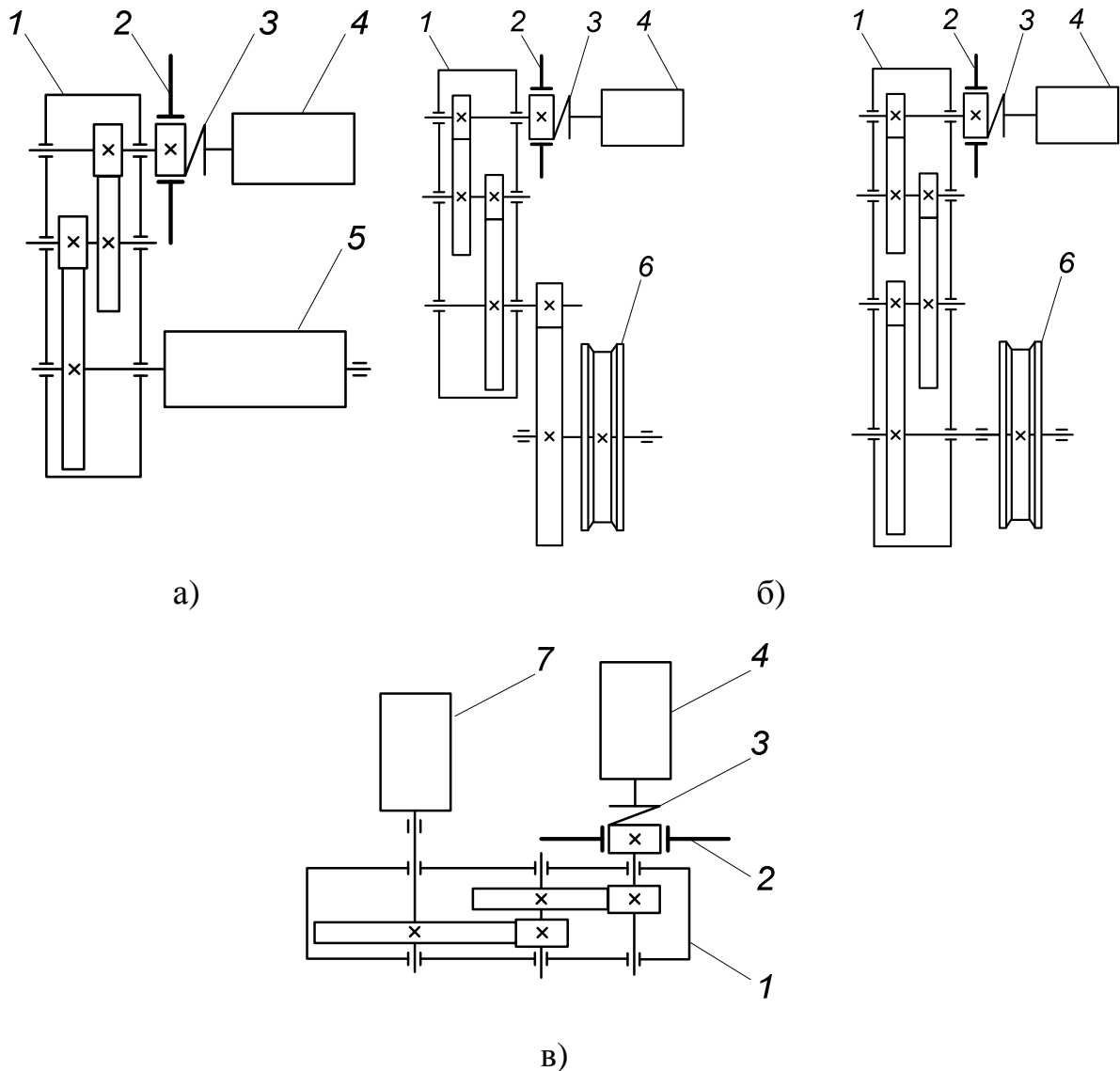


Рис. 1.6. Кінематичні схеми механізмів: підйому вантажу (а); горизонтального переміщення кранового візка та крана (варіанти) (б), повороту крана БК-1000 (в)

На рис. 1.6: 1 – редуктор, 2 – гальмо, 3 – муфта, 4 – двигун, 5 – канатний барабан; 6 – колесо кранового візка або крана; 7 – колона баштового крана.

Здійснимо аналіз процесу розгону асинхронного кранового приводу із короткозамкненим ротором. Апроксимуємо механічну характеристику

прямою, яка проходить через дві точки: точку, яка відповідає пусковому моменту (точка 1) та точку із нульовим моментом (точка 3) (рис. 1.7). На рис. 1.7 показані вказані точки та точка 2 із координатами, які відповідають номінальному моменту та номінальній кутовій швидкості двигуна. Дана апроксимація не досить коректно відображає реальну статичну механічну характеристику двигуна, тому її можна використовувати лише у першому наближенні. У приведених розрахунках використані дані для двигуна

$$\text{МТКФ011-6: } P_{\text{ном}}=1,7 \text{ кВт, } n_{\text{ном}}=835 \text{ об/хв, } \frac{M_{\text{пуск}}}{M_{\text{ном}}} = \frac{M_{\text{max}}}{M_{\text{ном}}} = 2,3 \quad [3].$$

Підставляючи відповідні значення, можемо сформулювати задачу Коші: знайти розв'язок диференціального рівняння:

$$\ddot{x} + \dot{x} \frac{M_{\text{пуск}} i^2 \eta}{\omega_0 m r^2} - \frac{M_{\text{пуск}} i \eta}{m r} + \frac{W}{m} = 0, \quad (1.12)$$

де ω_0 - швидкість ідеального холостого ходу електродвигуна; при початкових умовах:

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

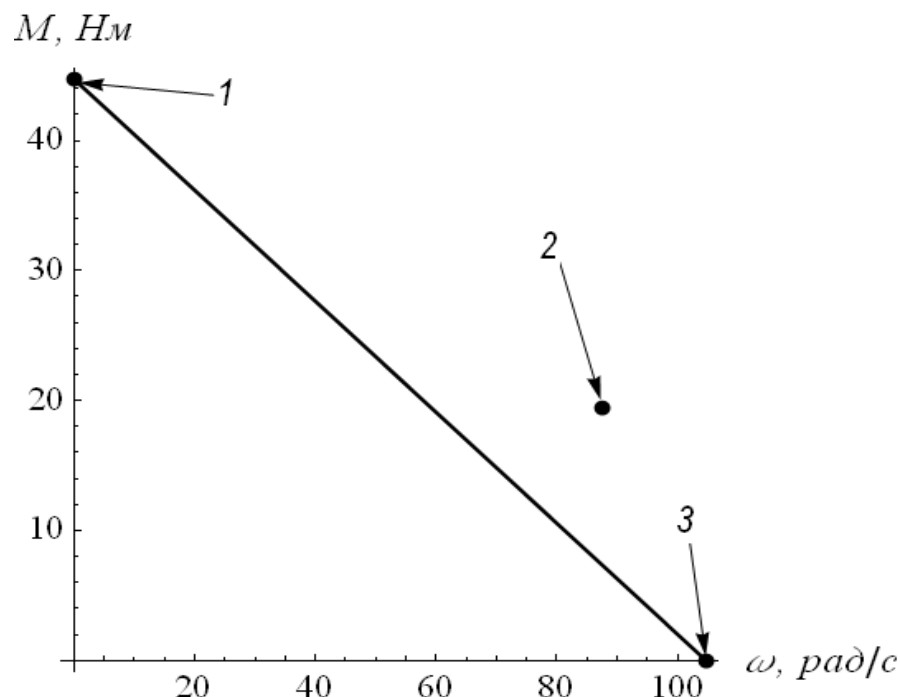


Рис. 1.7. Апроксимація механічної характеристики двигуна прямою

Розв'язок даної задачі Коші представляється у такому вигляді:

$$x = \frac{\omega_0^2 m^2 r^4}{M_{\text{пуск}}^2 i^4 \eta^2} \left(\frac{M_{\text{пуск}} i \eta}{m r} - \frac{W}{m} \right) \left(e^{-t \left(\frac{M_{\text{пуск}} i^2 \eta}{\omega_0 m r^2} \right)} + t \frac{M_{\text{пуск}} i^2 \eta}{\omega_0 m r^2} - 1 \right). \quad (1.14)$$

Диференціюючи вираз за часом, отримаємо функцію швидкості системи:

$$\dot{x} = \left(\frac{r}{r i} - \frac{W r^2}{i^2 \eta M_{\text{пуск}}} \right) \left(1 - e^{-t \left(\frac{M_{\text{пуск}} i^2 \eta}{\omega_0 m r^2} \right)} \right). \quad (1.15)$$

Для знаходження тривалості розгону системи до деякої швидкості необхідно розв'язати наступне рівняння:

$$\dot{x} = v^* \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}, \quad (1.16)$$

де v^* - відносна швидкість усталеного руху. Розв'язок рівняння (1.16) представляється таким чином:

$$t = \frac{\lg \frac{1}{1-v^*}}{M_{\text{пуск}} i^2 \eta} m r^2 \omega_0. \quad (1.17)$$

Побудуємо графіки функцій (1.14), (1.15) на рис. 1.8 та рис. 1.9.

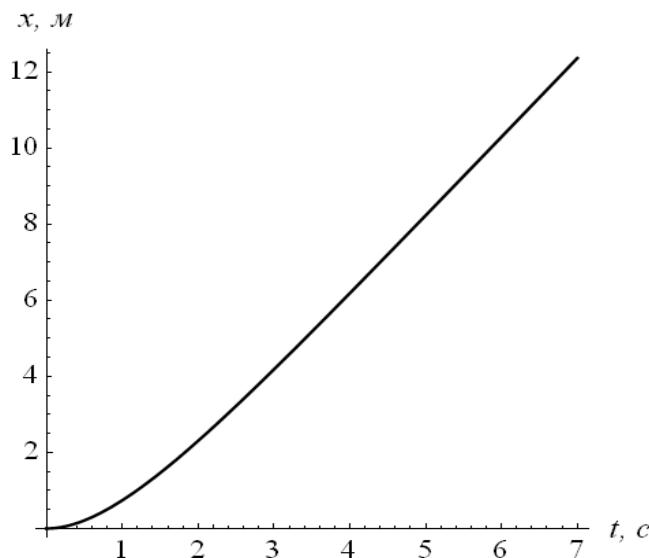


Рис. 1.8. Графік функції переміщення механізму

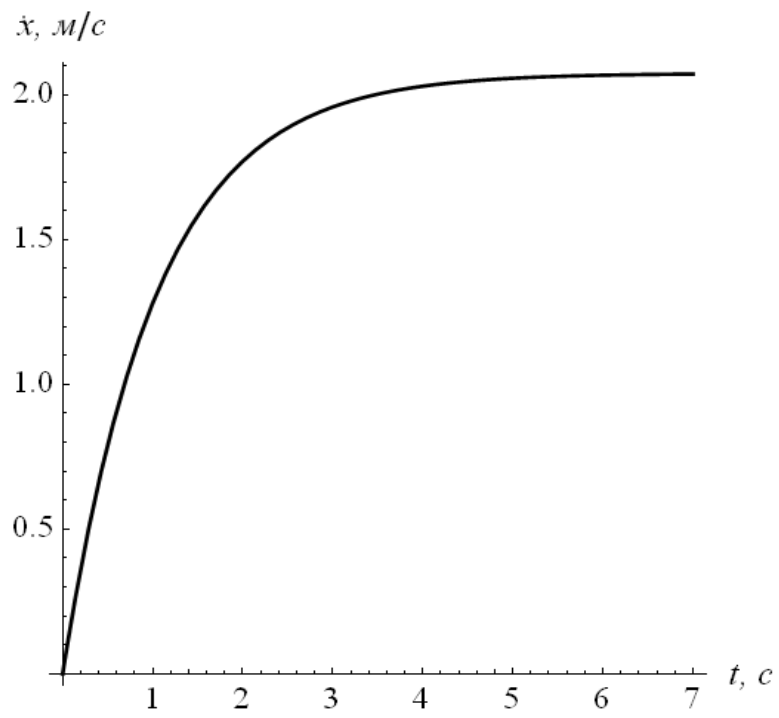


Рис. 1.9. Графік функції швидкості механізму

Крім того, приведемо графік функції прискорення механізму (рис. 1.10).

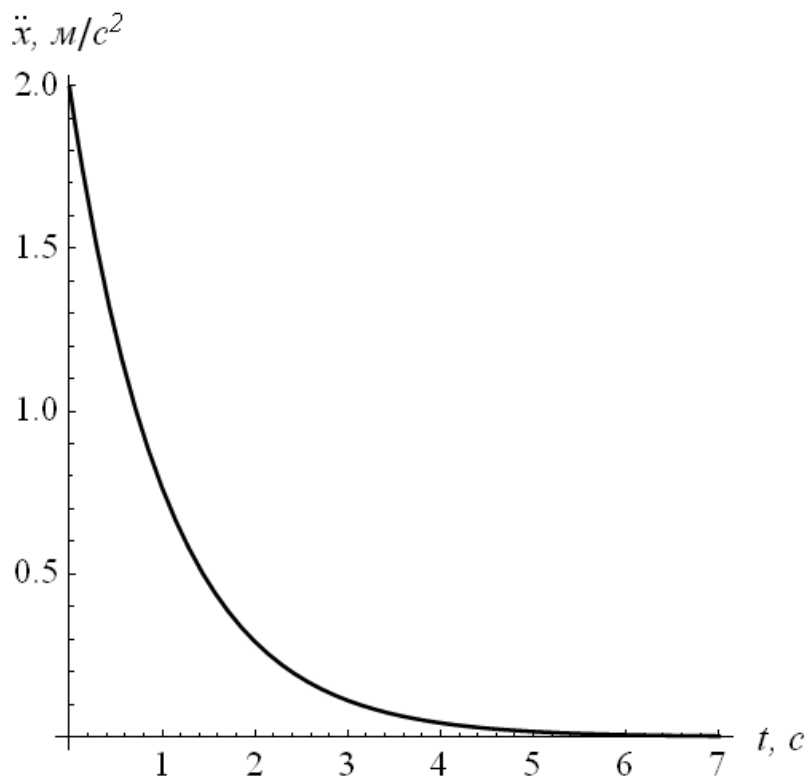


Рис. 1.10. Графік функції прискорення механізму

Природно представити апроксимаційну функцію у вигляді полінома:

$$M = \sum_{i=0}^n A_i \omega^i, \quad (1.18)$$

де A_i - невідомі коефіцієнти, які необхідно певним чином підібрати; ω - кутова швидкість електродвигуна; n – степінь полінома. Поліном (1.18) повинен задовольняти наступні умови:

$$\begin{cases} M(0) = M_{\text{пуск}}; \\ \frac{\partial M}{\partial \omega}(0) = 0; \\ M(\omega_{\text{ном}}) = M_{\text{ном}}; \\ M(\omega_0) = 0, \end{cases} \quad (1.19)$$

де $\omega_{\text{ном}}$ - номінальна швидкість руху електроприводу; $M_{\text{ном}}$ - номінальний момент на валу двигуна.

Оскільки умов чотири, то $n=3$. Із системи умов (1.19) можна знайти невідомі коефіцієнти A_i . Для цього сформуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} A_0 = M_{\text{пуск}}; \\ A_1 = 0; \\ A_0 + A_1 \omega_{\text{ном}} + A_2 \omega_{\text{ном}}^2 + A_3 \omega_{\text{ном}}^3 = M_{\text{ном}}; \\ A_0 + A_1 \omega_0 + A_2 \omega_0^2 + A_3 \omega_0^3 = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Запишемо вирази для коефіцієнтів A_2 та A_3 :

$$A_2 = \frac{(M_{\text{ном}} - M_{\text{пуск}}) \omega_0^3 + M_{\text{пуск}} \omega_{\text{ном}}^3}{\omega_0^2 (\omega_0 - \omega_{\text{ном}}) \omega_{\text{ном}}^2}; \quad (1.21)$$

$$A_3 = \frac{-M_{\text{ном}} \omega_0^2 + M_{\text{пуск}} (\omega_0^2 - \omega_{\text{ном}}^2)}{\omega_0^2 (\omega_0 - \omega_{\text{ном}}) \omega_{\text{ном}}^2}. \quad (1.22)$$

Підставляючи знайдені вирази у формулу (1.18) знайдемо формулу, яка

описує статичну механічну характеристику асинхронного електродвигуна. Побудуємо графік цієї характеристики (рис. 1.11). Враховуючи вирази (1.20)-(1.22) рівняння руху (1.11) можна переписати таким чином:

$$\ddot{x} = \frac{F - W}{m} = N_3 \dot{x}^3 + N_2 \dot{x}^2 + N_1 \dot{x} + N_0, \quad (1.23)$$

де N_3, N_2, N_1, N_0 - певні коефіцієнти, які визначаються із наступних

виразів: $N_3 = \frac{A_3 i^4 \eta}{m r^4}$, $N_2 = \frac{A_2 i^3 \eta}{m r^3}$, $N_1 = \frac{A_1 i^2 \eta}{m r^2} = 0$, $N_0 = \frac{A_0 i \eta}{m r} - \frac{W}{m}$.

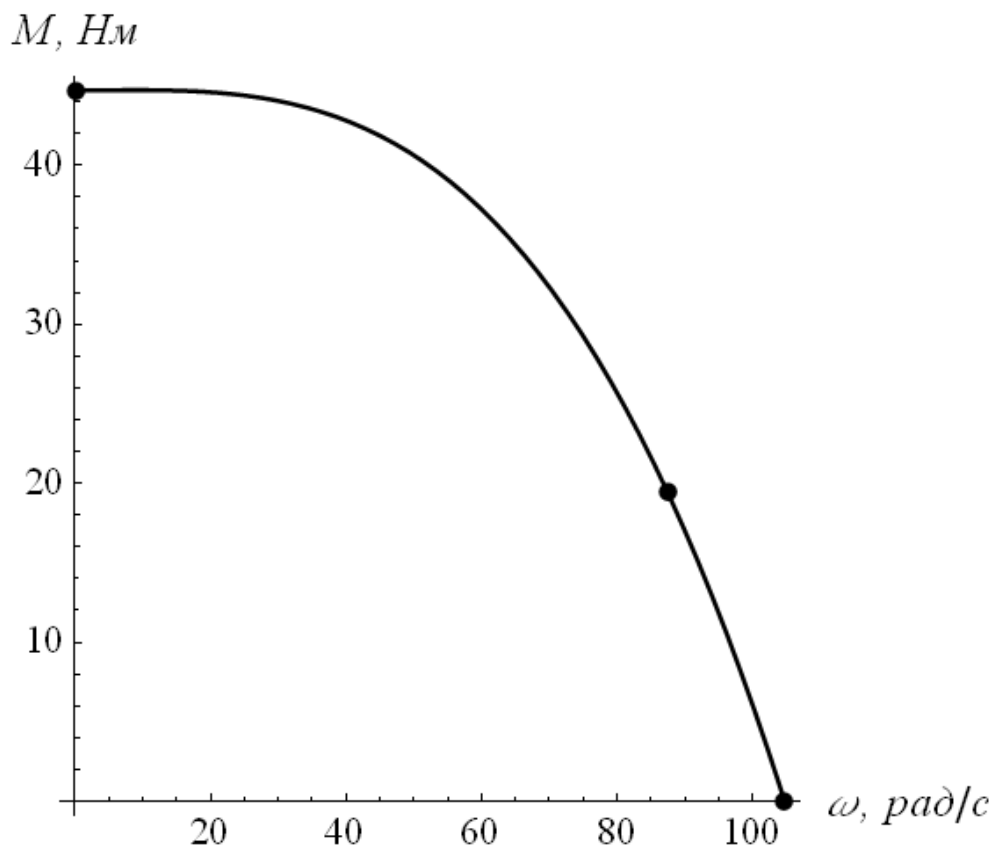


Рис. 1.11. Графік апроксимованої механічної характеристики асинхронного двигуна МТКФ011-6

Вводячи позначення: $\dot{x} = v$, рівняння (1.23) запишемо таким чином:

$$\dot{v} = N_3 v^3 + N_2 v^2 + N_0. \quad (1.24)$$

Рівняння (1.24) є нелінійним диференціальним рівнянням Абеля із постійними коефіцієнтними [9]. Для знаходження розв'язку рівняння (1.24) необхідно знайти розв'язки кубічного алгебраїчного рівняння:

$$v^3 + \frac{N_2}{N_3} v^2 + \frac{N_0}{N_3} = 0. \quad (1.25)$$

Для визначення коренів рівняння (1.25) його необхідно звести до „неповного” виду [10]. Це робиться шляхом введення заміни: $\gamma = v + \frac{N_2}{3N_3}$. У результаті рівняння (1.25) представляється у такому виді:

$$\gamma^3 + \gamma \frac{N_2^2}{3N_3^2} + \left(\frac{2N_2^3}{27N_3^3} + \frac{N_0}{N_3} \right) = 0. \quad (1.26)$$

Корені „неповного” кубічного рівняння (1.26) знаходяться за такими виразами:

$$\begin{cases} \gamma_1 = A + B; \\ \gamma_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3}, \quad i^2 = -1, \end{cases} \quad (1.27)$$

де $A = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{D}}, \quad A = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{D}}, \quad D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 - \left(\frac{q}{2}\right)^2, \quad p = \frac{N_2^2}{3N_3^2},$

$$q = \frac{2N_2^3}{27N_3^3} + \frac{N_0}{N_3}.$$

Для подальшого аналізу необхідно встановити знак дискримінанта D . Враховуючи введені вище позначення можемо записати вираз для дискримінанту:

$$D = \frac{r^6 \omega_{ном}^4 \omega_0^4 (rW - iM_{ном} \eta \lambda)^2 (\omega_0 - \omega_{ном})^2}{4i^8 M_{ном}^2 \eta^2 (\omega_0^2 (\lambda - 1) - \lambda \omega_{ном}^2)^2}. \quad (1.28)$$

Аналіз виразу (1.28) показує, що завжди $D > 0$. Отже, рівняння (1.26) буде мати один дійсний корінь та два комплексно-спряжені.

Тепер можемо записати розв'язок рівняння (1.24) у неявному вигляді:

$$\int \frac{dv}{\left(v - \gamma_1 + \frac{N_3}{3N_3}\right) \left(v - \gamma_2 + \frac{N_3}{3N_3}\right) \left(v - \gamma_3 + \frac{N_3}{3N_3}\right)} = tN_3 + \lg C_1, \quad (1.29)$$

де C_1 - постійна інтегрування.

Після інтегрування лівої частини виразу (1.29) його можна переписати у такому вигляді:

$$\lg \left(v - \gamma_1 + \frac{N_3}{3N_3}\right)^{G_1} + \lg \left(v - \gamma_2 + \frac{N_3}{3N_3}\right)^{G_2} + \lg \left(v - \gamma_3 + \frac{N_3}{3N_3}\right)^{G_3} = tN_3 + \lg C_1 \quad (1.30)$$

$$\text{де } G_1 = \frac{(\gamma_2 - \gamma_3)}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_3)}, \quad G_2 = \frac{(\gamma_3 - \gamma_1)}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_3)},$$

$$G_3 = \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_3)(\gamma_2 - \gamma_3)}.$$

Надалі необхідно знайти постійну інтегрування C_1 , яка входить у вираз (1.30). Для цього потрібно задатись початковою умовою: $v(0) = 0$. Із врахуванням цієї умови можемо знайти вираз для постійної інтегрування C_1 :

$$C_1 = \left(-\gamma_1 + \frac{N_3}{3N_3}\right)^{G_1} \left(-\gamma_2 + \frac{N_3}{3N_3}\right)^{G_2} \left(-\gamma_3 + \frac{N_3}{3N_3}\right)^{G_3}. \quad (1.31)$$

Таким чином, ми знайшли залежність $t = f(v)$. Цю залежність також можна трактувати як неявну залежність $v = f(t)$. Для знаходження явної залежності $v = f(t)$ необхідно розв'язати рівняння (1.30), причому представляє інтерес саме аналітичний розв'язок, який знайти досить складно. Можна шукати розв'язок рівняння (1.30) при відомих параметрах, які в нього входять. Але навіть при умові, що всі параметри відомі розв'язування рівняння (1.30) може бути досить складним. Звичайно використання наближених (наприклад, ітераційних) методів розв'язку дозволяє знаходити певні наближення до точного розв'язку. Це не універсальний результат, тому він не представляє інтересу з точки зору проведення загального аналізу процесу розгону кранового механізму. Однак, для даних параметрів

кранового механізму можна отримати графічну залежність швидкості від часу. Для цього побудуємо графік функції $t = f(v)$ та „повернемо” його на 90 градусів. Отриманий графік показаний на рис. 1.12 штриховою лінією. Для перевірки правильності проведених розрахунків проведемо чисельне інтегрування диференціального рівняння (1.24). У результаті отримаємо інтерполяційну функцію $x = f(t)$. Графіки вищих похідних інтерполяційної функції $x = f(t)$ показано на рис. 1.12 та рис. 1.12.

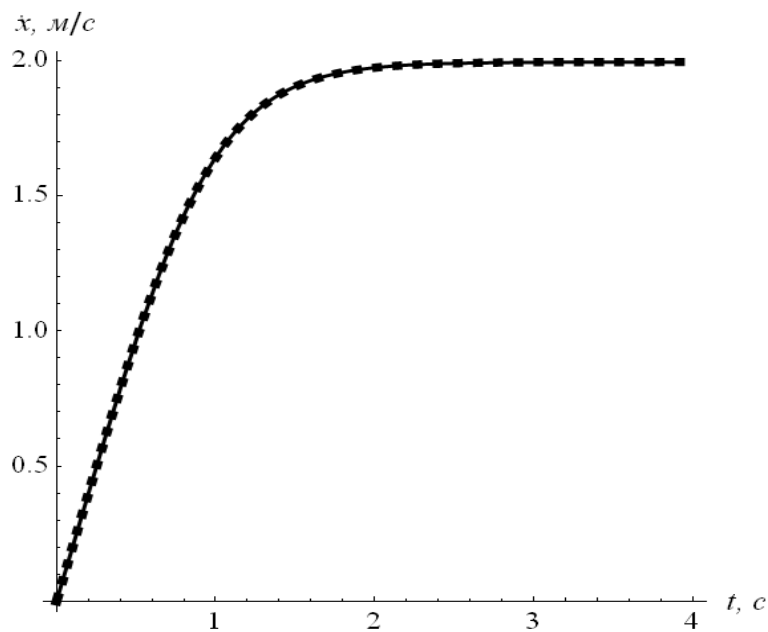


Рис. 1.12. Графік функції швидкості механізму

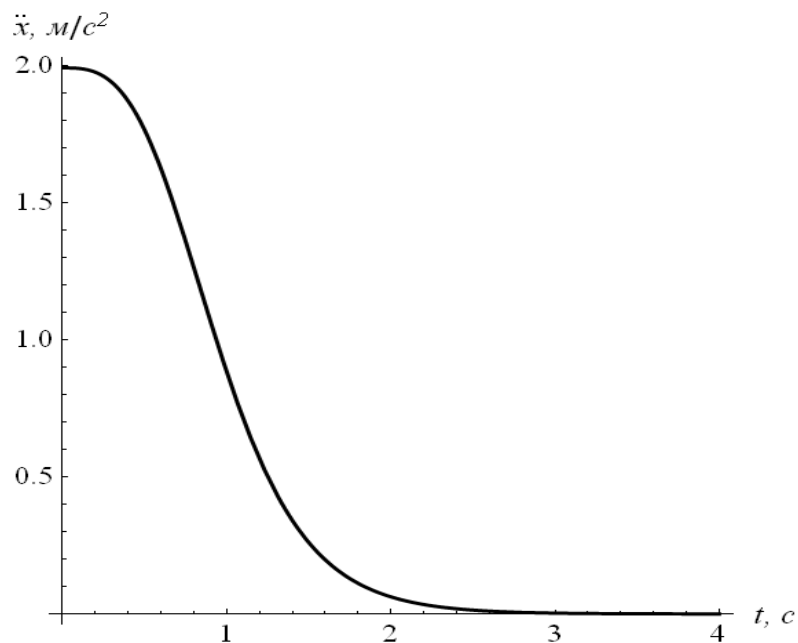


Рис. 1.13. Графік функції прискорення механізму

На рис. 1.12 побудовано графіки при чисельному інтегруванні рівняння (14) та функція $t = f(v)$ повернута на 90 градусів. Графіки даних функцій мають абсолютний збіг, що свідчить про правильність проведених аналітичних розрахунків.

Причиною складнощів при розв'язуванні задачі знаходження аналітичного виразу, що описує рух кранового механізму, є вид диференціального рівняння (1.24), яке у свою чергу є „продуктом” апроксимаційної функції (1.18). Тому доцільно апроксимаційну функцію представляти у іншому вигляді, наприклад, у вигляді квадратичного полінома (при $n=2$). Однак, при цьому не виконуються усі умови (1.19). Тому механічну характеристику асинхронного двигуна необхідно шукати у вигляді сплайна [8], який складається із двох квадратичних поліномів і які „зшиваються” у точці із координатами $(M_{ном}; \omega_{ном})$.

1.4. Аналітичний розв'язок рівнянь руху кранових механізмів

Велика кількість кранових механізмів може бути представлена у вигляді одномасової динамічної моделі. Таке представлення базується на певних припущеннях: маса кранового механізму вважається зосередженою, жорсткість та демпфування у рухомих елементах механізму не враховуються тощо. Приведемо приклади таких кранових механізмів: механізм переміщення крана-штабелера, механізм переміщення крана із жорстким захватом вантажу (наприклад, металургійний кран), механізм повороту баштового крана за відсутності впливу гнучкого підвісу вантажу (поворот крана без вантажу), механізми переміщення (горизонтального, вертикального, кутового) промислових роботів тощо. Крім того, можна привести також інші приклади, не пов'язані із вантажопідійомною технікою: вентилятори, насоси, дробарки, металообробні верстати тощо. Усі вказані машини та механізми у першому наближенні моделюються одномасовою динамічною моделлю. Необхідно зробити таке зауваження: вже перше

наближення (одномасова модель) для вивчення та аналізу процесів у вказаних механізмах може бути достатньо точним. У цьому випадку отримані результати аналітичного характеру можуть бути цінним матеріалом для використання у практичних цілях.

У приведених нижче розрахунках використані дані для двигуна МТКФ011-6: $P_{ном}=1,7$ кВт, $n_{ном}=835$ об/хв, $\frac{M_{пуск}}{M_{ном}} = \frac{M_{max}}{M_{ном}} = 2,3$ [3]. Таким чином, можна сформулювати вимоги до апроксимаційної функції, яка описує механічну характеристику асинхронного кранового двигуна (1.19). У попередньому пункті встановлено, що у випадку апроксимації механічної характеристики поліномом необхідно обрати кубічний поліном. Однак при цьому диференціальне рівняння (1.11), яке дає змогу отримати кінематичні функції руху кранового механізму, перетворюється у нелінійне рівняння Абеля із постійними коефіцієнтами, яке неможливо розв'язати аналітично [11]. Тому приймемо для апроксимації механічної характеристики сплайново-квадратичну функцію [8]:

$$M = \begin{cases} A_0 + A_1\omega + A_2\omega^2, & \text{при } \omega \in [0, \omega_{ном}]; \\ B_0 + B_1\omega + B_2\omega^2, & \text{при } \omega \in [\omega_{ном}, \omega_0], \end{cases} \quad (1.32)$$

де $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ - невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити; ω - поточна кутова швидкість двигуна. Таким чином, можна записати умови для знаходження невідомих коефіцієнтів $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ з урахуванням умов (1.32):

$$\begin{cases} A_0 = M_{пуск}; \\ A_1 = 0; \\ A_0 + A_1\omega_{ном} + A_2\omega_{ном}^2 = M_{ном}; \\ B_0 + B_1\omega_{ном} + B_2\omega_{ном}^2 = M_{ном}; \\ B_0 + B_1\omega_0 + B_2\omega_0^2 = 0. \end{cases} \quad (1.33)$$

Система (3) дозволяє знайти невідомі коефіцієнти окрім одного – це один із коефіцієнтів B_0 , B_1 , B_2 . Для того, щоб усі коефіцієнти були визначені необхідно задатись ще однією умовою – умовою плавного сполучення квадратичних поліномів у точці $\omega = \omega_{ном}$, що еквівалентно рівнянню:

$$\left. \frac{\partial(A_0 + A_1\omega + A_2\omega^2)}{\partial\omega} \right|_{\omega=\omega_{ном}} = \left. \frac{\partial(B_0 + B_1\omega + B_2\omega^2)}{\partial\omega} \right|_{\omega=\omega_{ном}}. \quad (1.34)$$

Розв'язуючи сумісно рівняння (1.33) та (1.34), отримаємо всі невідомі коефіцієнти:

$$\begin{cases} A_2 = \frac{M_{ном} - M_{пуск}}{\omega_{ном}^2}; \\ B_0 = \frac{\omega_0(M_{ном}\omega_0 + 2M_{пуск}(\omega_{ном} - \omega_0))}{(\omega_0 - \omega_{ном})^2}; \\ B_1 = \frac{2(M_{ном} - M_{пуск})\omega_0^2 + 2M_{пуск}\omega_{ном}^2}{(\omega_0 - \omega_{ном})^2\omega_{ном}}; \\ B_2 = \frac{2M_{пуск}(\omega_0 - \omega_{ном}) + M_{ном}(\omega_{ном} - 2\omega_0)}{(\omega_0 - \omega_{ном})^2\omega_{ном}}. \end{cases} \quad (1.35)$$

Побудуємо графіки, які відповідають виразам (1.32) та (1.1) (рис. 1.14).

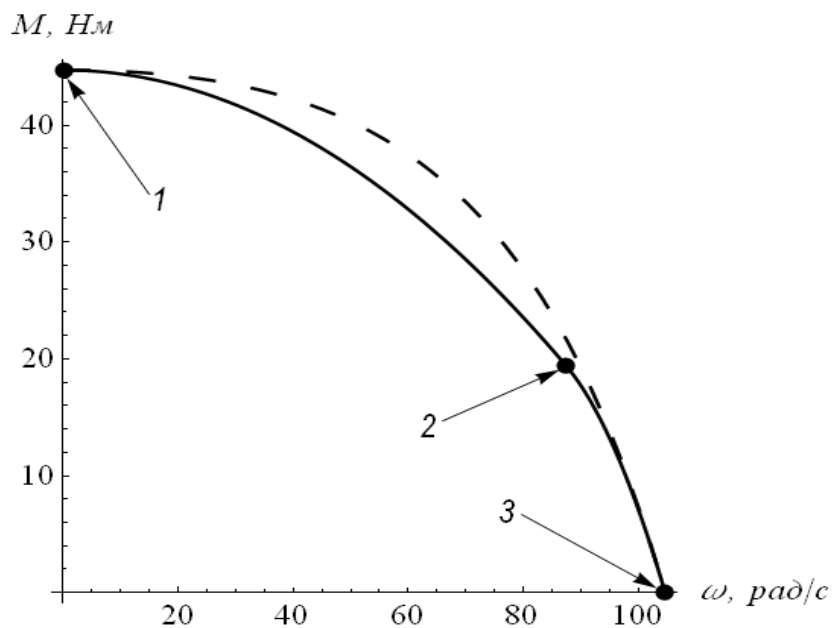


Рис. 1.14 Графіки механічних характеристик побудовані за виразами (1.1) і

(1.32)

На рис. 1.14 штриховою лінією показано графік виразу (1.32). Як видно із приведених графіків (рис. 1.14) вираз (1.32) краще описує механічну характеристику двигуна, оскільки його графік проходить через всі точки 1, 2 та 3. Ці точки характеризують заявлені виробником електродвигуна дані: точка 1 має координати $(0, M_{\text{пуск}})$, точка 2 – $(\omega_{\text{ном}}, M_{\text{ном}})$, точка 3 – $(\omega_0, 0)$. Із рис. 1.32 видно, що графік побудований за формулою Клосса не містить точку 2, тобто формула (1.1) має деяке розходження із практичними даними.

Із врахуванням виразів (1.32) та (1.35) рівняння руху кранового механізму можна представити у такому вигляді:

$$\ddot{x} = \frac{F - W}{m} = N_2 \dot{x}^2 + N_1 \dot{x} + N_0, \quad (1.36)$$

де, N_2 , N_1 , N_0 - певні коефіцієнти, які визначаються із наступних виразів:

$$N_2 = \begin{cases} \frac{A_2 i^3 \eta}{m r^3}, & \text{при } \omega \in [0, \omega_{\text{ном}}]; \\ \frac{B_2 i^3 \eta}{m r^3}, & \text{при } \omega \in [\omega_0, \omega_{\text{ном}}]; \end{cases}$$

$$N_1 = \begin{cases} 0, & \text{при } \omega \in [0, \omega_{\text{ном}}]; \\ \frac{B_1 i^2 \eta}{m r^2}, & \text{при } \omega \in [\omega_0, \omega_{\text{ном}}]; \end{cases} \quad (1.37)$$

$$N_0 = \begin{cases} \frac{A_0 i \eta}{m r} - \frac{W}{m}, & \text{при } \omega \in [0, \omega_{\text{ном}}]; \\ \frac{B_0 i \eta}{m r} - \frac{W}{m}, & \text{при } \omega \in [\omega_0, \omega_{\text{ном}}]. \end{cases}$$

Вводячи позначення: $\dot{x} = v$, рівняння (1.37) запишемо таким чином:

$$\dot{v} = N_2 v^2 + N_1 v + N_0. \quad (1.38)$$

Рівняння (1.38) є нелінійним диференціальним рівнянням Рікатті із постійними коефіцієнтними [11]. Розв'язок даного виду рівняння Рікатті знаходиться із такого співвідношення [11]:

$$\frac{v - v_1}{v - v_2} = \frac{v_1 - v_0}{v_2 - v_0} e^{N_2(t-t_0)}, \quad (1.39)$$

де v_0 - початкова швидкість руху кранового механізму; t_0 - початковий момент часу, який відповідає початковій швидкості v_0 (початкова умова така $v(t_0) = v_0$); v_1 та v_2 - корені квадратного рівняння:

$$N_2 v^2 + N_1 v + N_0 = 0. \quad (1.40)$$

Із виразу (1.40) можемо виразити шукане v . У результаті отримаємо:

$$v = \frac{e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)} (v_0 - v_1)v_2 + v_1(v_2 - v_0)}{e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)} (v_0 - v_1) + v_2 - v_0}. \quad (1.41)$$

Тепер знайдемо корені квадратного рівняння (1.40):

$$v_{1,2} = \frac{-N_1 \pm \sqrt{N_1^2 - 4N_0N_2}}{2N_2}. \quad (1.42)$$

Таким чином, отримана перша похідна розв'язку рівняння (1.38) за часом, тобто функція зміни швидкості кранового механізму. Диференціювання виразу (1.41) за часом дає функцію прискорення кранового механізму:

$$\dot{v} = \ddot{x} = \frac{e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)} N_2 (v_1 - v_0)(v_1 - v_2)^2 (v_2 - v_0)}{(e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)} (v_0 - v_1) + v_2 - v_0)^2}. \quad (1.43)$$

Для того, щоб знайти функцію переміщення кранового механізму у часі необхідно проінтегрувати вираз (1.41). У результаті отримаємо:

$$\int v dt = x = \frac{\lg(v_2 - v_0 + e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)} (v_0 - v_1))}{N_2} + tv_1 + C_1. \quad (1.44)$$

де C_1 - постійна інтегрування. Поставимо початкову умову:

$$x(t_0) = x_0, \quad (1.45)$$

яка дасть змогу знайти невідому постійну інтегрування C_1 . Умова (1.45) у розгорнутому вигляді представляється у вигляді рівняння, з якого просто виразити шукану постійну інтегрування:

$$C_1 = x_0 - t_0 v_1 + \frac{\lg(v_2 - v_1)}{N_2}. \quad (1.46)$$

Розв'язок (1.44) є універсальним результатом, який описує рух кранового механізму на обох ділянках механічної характеристики: від точки 1 до 2 ($\omega \in [0, \omega_{ном}]$) та від точки 2 до 3 ($\omega \in [\omega_{ном}, \omega_0]$). Вирази для ділянок механічної характеристики 1-2 та 2-3 відрізняються лише початковими умовами: кінцеві умови для розв'язку на ділянці 1-2 будуть початковими для розв'язку на ділянці 2-3. Крім того, необхідно зазначити, що у випадку коли виконується умова $W \geq \frac{M_{ном} i \eta}{r}$ крановий електропривод працює лише на ділянці 1-2 механічної характеристики і виконувати сполучення розв'язків для ділянок механічних характеристик 1-2 та 2-3 не потрібно.

Приймемо, що $W \leq \frac{M_{ном} i \eta}{r}$, тоді необхідно знайти момент часу, при якому розв'язки сполучаються. Це такий момент часу, при якому виконується умова:

$$v = v_{ном}, \quad (1.47)$$

або у розгорнутому вигляді:

$$v_2 + \frac{v_2(v_2 - v_1)}{e^{N_2 t(v_1 - v_2)} v_1 - v_2} = \frac{\omega_{ном} r}{i}. \quad (1.48)$$

Запишемо вираз для шуканого моменту часу:

$$t_{ном} = \frac{\lg\left(\frac{v_2(v_2 - v_1)i}{(\omega_{ном}r - v_2i)v_1} + \frac{v_2}{v_1}\right)}{N_2(v_1 - v_2)}. \quad (1.49)$$

Приведемо графічну інтерпретацію отриманих результатів. Для цього подубуємо графіки переміщення (рис. 1.15), швидкості (рис. 1.16) та прискорення (рис. 1.17) кранового механізму. Графіки побудовані при таких параметрах: $i = 5$, $\eta = 0,85$, $m = 1000 \text{ кг}$, $W = 0,8M_{ном}$. Виконаємо дослідження отриманого результату при знаходженні додаткових кінематичних параметрів, які можуть бути використані у практичних розрахунках електроприводу кранових механізмів. Передусім встановимо максимальне прискорення механізму. Очевидно, максимальне прискорення механізму буде у початковий момент, тобто при $t = 0$, оскільки максимальний момент рівний пусковому. Запишемо вираз максимального прискорення:

$$\ddot{x}_{max} = \frac{F_{max} - W}{m} = \frac{\frac{M_{max}i\eta}{r} - W}{m} = \frac{\frac{M_{пуск}i\eta}{r} - W}{m}. \quad (1.50)$$

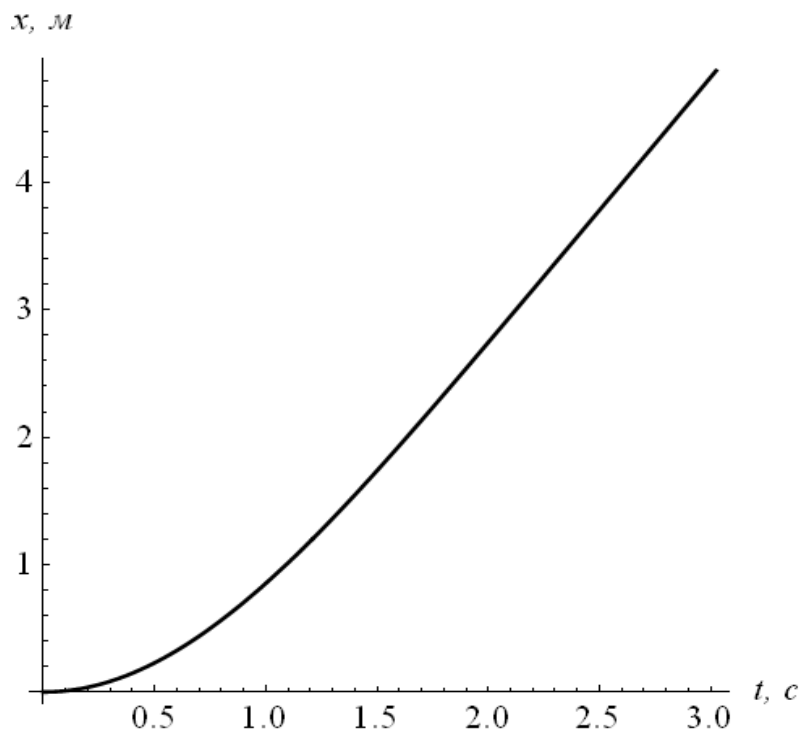


Рис. 1.15. Графік функції переміщення кранового механізму

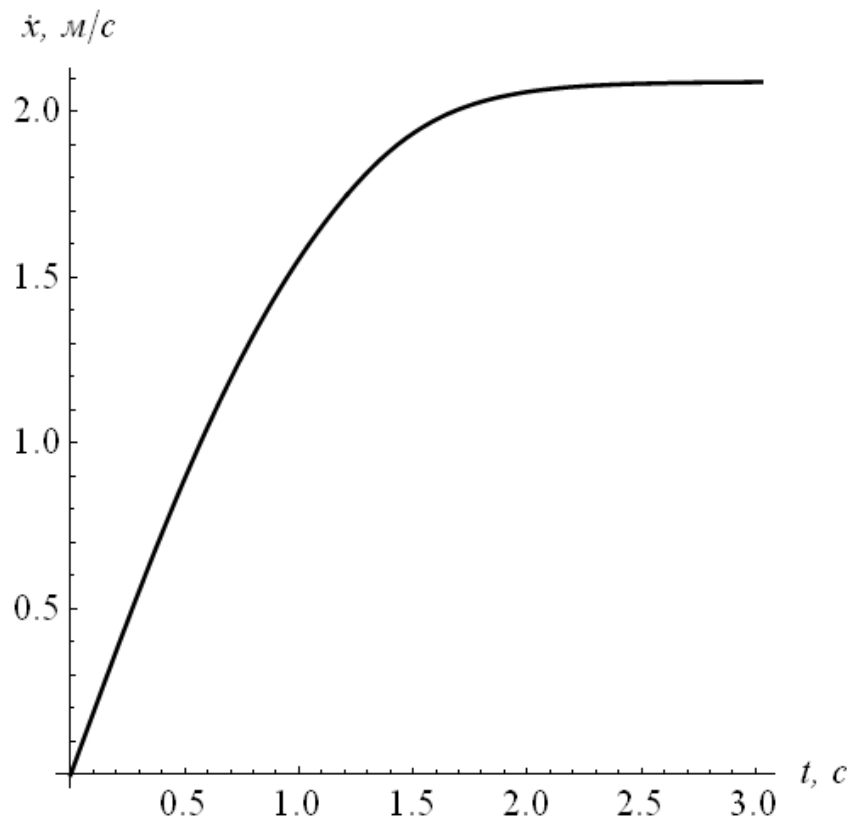


Рис. 1.16. Графік функції швидкості кранового механізму

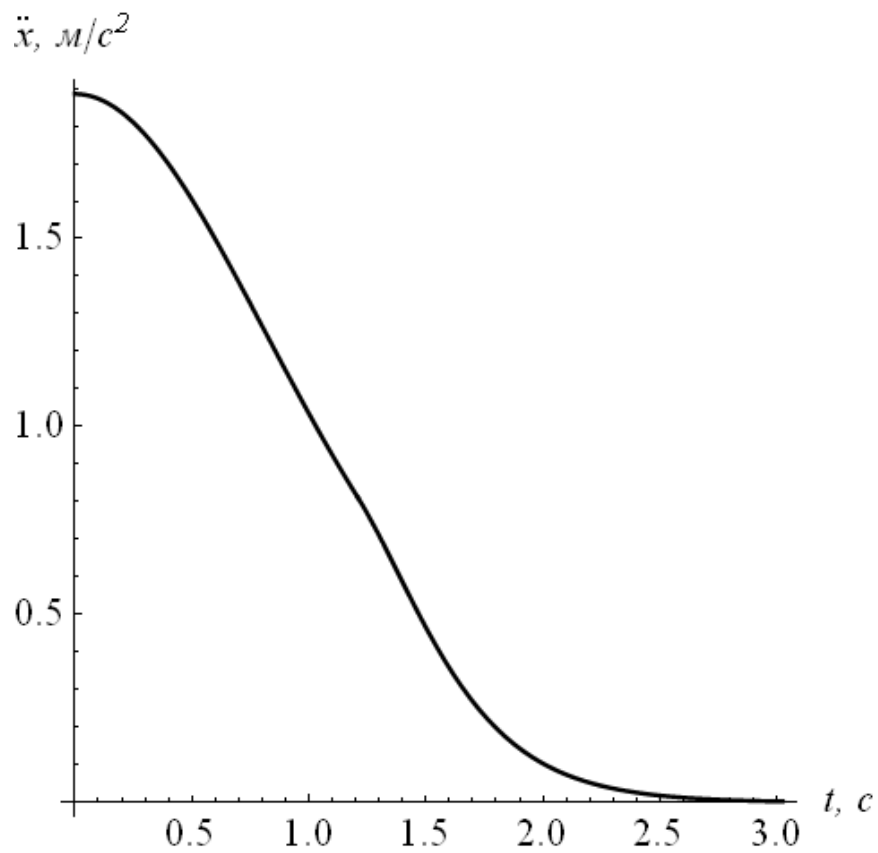


Рис. 1.17. Графік функції прискорення кранового механізму

Надалі знайдемо усталену швидкість при умові $W \geq \frac{M_{ном} i \eta}{r}$, для цього необхідно виконати дослідження швидкості на граничне значення:

$$v_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{x}) = v_1. \quad (1.51)$$

Дана рівність впливає з аналізу формули (1.43). Справді, вираз $N_2(v_1 - v_2)$, який входить у показник степеня числа Ейлера завжди від'ємний, тому при $t \rightarrow \infty$ вираз $e^{N_2(t-t_0)(v_1-v_2)} \rightarrow 0$. Для прийнятих параметрів кранового механізму та його приводу маємо $v_{уст} = 2,092$ м/с (при $W = \frac{1,1M_{ном} i \eta}{r}$). Таке чисельне значення $v_{уст}$ можна отримати підставивши всі параметри у формулу:

$$v_{уст} = [-r(i^2 M_{ном} \eta (\omega_0^2 (\lambda - 1) + \lambda \omega_{ном}^2) + mr^2 (\omega_0 - \omega_{ном})^2 \omega_{ном} (i^3 M_{ном} \eta (rW \omega_{ном} \times \\ \times (2(\lambda - 1)\omega_0 + \omega_{ном} - 2\lambda \omega_{ном}) + iM_{ном} \eta (\omega_0 - \lambda \omega_0 + \lambda \omega_{ном})^2))^{\frac{1}{2}} (mr^2 (\omega_0 - \omega_{ном}) \times \\ \times \omega_{ном})^{-1})][i^3 M_{ном} \eta (2(\lambda - 1)\omega_0 + \omega_{ном} - 2\lambda \omega_{ном} 1)], \quad (1.52)$$

де λ - перевантажувальна здатність двигуна ($\lambda = \frac{M_{max}}{M_{ном}}$).

Знайдемо вираз для тривалості руху, при якому швидкість кранового механізму досягає певного значення, яке виражене у відносних одиницях. Для цього знайдемо розв'язок рівняння:

$$v(t_\gamma) = v_{уст} \gamma, \quad (1.53)$$

де γ - відносна швидкість руху кранового механізму ($\gamma = \frac{\dot{x}}{v_{уст}}$). Таким чином, формула (1.53) показує тривалість руху, при якому швидкість кранового механізму досягає $\gamma_{уст}$.

У практичних розрахунках можна прийняти $\gamma = 0,95$. Запишемо розв'язок рівняння (1.53):

$$t_{\gamma(1-2)} = \frac{\lg\left(-\frac{v_2(\gamma-1)}{v_2-\gamma}\right)}{N_2(v_1-v_2)}. \quad (1.54)$$

Приведені вище залежності (1.52), (1.54) справедливі для випадку $W \geq \frac{M_{ном} i \eta}{r}$. Якщо ж $W \leq \frac{M_{ном} i \eta}{r}$, то необхідно шукати відповідні залежності із врахуванням зміни крутного моменту двигуна на ділянці 2-3 його механічної характеристики (рис. 1.13). Із рівняння, аналогічного (1.53), але складеному для нових умов руху кранового механізму отримаємо тривалість розгону до швидкості $\mathcal{W}_{уст}$:

$$t_{\gamma(1-3)} = \frac{\lg\left(-\frac{\mathcal{W}_1 v_2 - \mathcal{W}_0 v_1 - v_1(v_2 - v_0)}{(v_0 - v_1)v_2 - \mathcal{W}_1(v_0 - v_1)}\right)}{N_2(v_1 - v_2)} + t_{ном}. \quad (1.55)$$

Зазначимо, що при умові $v_0 = 0$ вираз (1.55) перетворюється у формулу (1.54). Для отриманого виразу початкове значення швидкості рівне номінальній швидкості, тобто швидкості, яка відповідає номінальному моменту двигуна. Отже, $v_0 = v_{ном} = \frac{\omega_{ном} r}{i}$.

1.5. Моделювання та аналіз приводних зусиль загальнопромислового асинхронного приводу

У приведених вище розрахунках обрано електродвигун, у якого максимальний момент рівний пусковому. Однак, для невеликих вантажопідйомних механізмів (електроталі, лебідки) часто використовуються загальнопромислові електродвигуни серії АИР, 4А та інші. У цих двигунів максимальний момент не рівний пусковому, тому всі приведені вище розрахунки для них використовувати не можна. Для аналізу роботи механізмів із приводом від таких двигунів використовують рівняння Клосса (1.1). Однак, необхідно зазначити, що вказані серії електродвигунів мають

провал у механічній характеристиці (послаблення моменту при деякій кутовій швидкості), який не враховується рівнянням Клосса. Дісно, рівняння Клосса складне для основної гармоніки електромагнітного моменту. Однак, у статорі діють також вищі гармоніки електромагнітного моменту, які при деякій швидкості, яку можна приблизно оцінити значенням $\omega_{\min} \approx 0,15\omega_0$, послаблюють основну гармоніку, чим і викликане зменшення (провал) моменту на валу двигуна [6]. Крім того, рівняння Клосса не враховує величину пускового моменту двигуна, яка відіграє важливу роль у перехідному процесі. Отже, бажано користуватися при розрахунках моделлю електроприводу, яка б враховувала вказані параметри. Використання приведеної вище методики дає змогу це зробити.

Для усунення недоліків рівняння Клосса необхідно прийняти іншу модель статичної характеристики асинхронного приводу. Для цього використаємо сплайново-квадратичну апроксимацію [8]. Спочатку необхідно встановити умови, для яких проводиться апроксимація механічної характеристики. Такими умовами є система рівнянь (1.3), яка доповнена ще одним рівнянням:

$$M(\omega_{2-3}) = M_{2-3}. \quad (1.56)$$

де M_{2-3} - момент на валу двигуна, який відповідає кутовій швидкості ω_{2-3} ; ω_{2-3} - кутова швидкість двигуна у межах $\omega_{2-3} \in [\omega_{\min}; \omega_{\max}]$. Включення умови (1.56) зроблено для того, щоб здійснити побудову механічної характеристики квадратичним сплайном. Для побудови сплайна, який апроксимує механічну характеристику асинхронного двигуна необхідно задатись порядком сплайна. Для апроксимації механічної характеристики використаємо сплайново-квадратичну функцію. Пояснимо чому: справа в тому, що така залежність дає змогу у багатьох випадках знаходити аналітичні залежності кінематичних та динамічних функцій руху механізму, який приводиться у рух від асинхронного двигуна. Тому, у загальному вигляді, апроксимаційна функція,

яка описує механічну характеристику, буде представлятись у такому виді:

$$M = N_0 + N_1\omega + N_2\omega^2, \quad (1.57)$$

де N_0, N_1, N_2 - деякі кусочно-постійні функції. Для знаходження значень цих функцій на проміжках $[0; \omega_{\min}]$, $[\omega_{\min}; \omega_{23}]$, $[\omega_{23}; \omega_{\max}]$, $[\omega_{\max}; \omega_{ном}]$ та $[\omega_{ном}; \omega_0]$ необхідно скласти та розв'язати систему рівнянь, яка впливає із умов (1.3), (1.56). Приведемо цю систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = M_{\text{пуск}}; \\ A_0 + A_1\omega_{\min} + A_2\omega_{\min}^2 = M_{\min}; \\ A_1 + 2A_2\omega_{\min} = 0; \\ B_0 + B_1\omega_{\min} + B_2\omega_{\min}^2 = M_{\min}; \\ B_1 + 2B_2\omega_{\min} = 0; \\ B_0 + B_1\omega_{2-3} + B_2\omega_{2-3}^2 = M_{2-3}; \\ C_0 + C_1\omega_{2-3} + C_2\omega_{2-3}^2 = M_{2-3}; \\ C_1 + 2C_2\omega_{\max} = 0; \\ C_0 + C_1\omega_{\max} + C_2\omega_{\max}^2 = M_{\max}; \\ C_1 + 2C_2\omega_{2-3} = B_1 + 2B_2\omega_{2-3}; \\ D_0 + D_1\omega_{\max} + D_2\omega_{\max}^2 = M_{\max}; \\ D_1 + 2D_2\omega_{\max} = 0; \\ D_0 + D_1\omega_{2-3} + D_2\omega_{2-3}^2 = M_{ном}; \\ E_0 + E_1\omega_{ном} + E_2\omega_{ном}^2 = M_{ном}; \\ E_1 + 2E_2\omega_{ном} = D_1 + 2D_2\omega_{ном}; \\ E_0 + E_1\omega_0 + E_2\omega_0^2 = 0, \end{array} \right. \quad (1.58)$$

де коефіцієнти A_i, B_i, C_i, D_i, E_i знаходяться із такого співвідношення:

$$N_i = \left\{ \begin{array}{l} A_i, \text{ при } \omega \in [0, \omega_{\min}]; \\ B_i, \text{ при } \omega \in [\omega_{\min}, \omega_{2-3}]; \\ C_i, \text{ при } \omega \in [\omega_{2-3}, \omega_{\max}]; \\ D_i, \text{ при } \omega \in [\omega_{\max}, \omega_{ном}]; \\ E_i, \text{ при } \omega \in [\omega_{ном}, \omega_0]; \end{array} \right. \quad i = 0, 1, 2. \quad (1.59)$$

Рівнянь у системі (4) – шістнадцять, а невідомих коефіцієнтів – п’ятнадцять (по три на кожний коефіцієнт A_i, B_i, C_i, D_i, E_i). Кількість рівнянь не відповідає кількості невідомих. Для того, щоб система (1.58) не була невизначеною необхідно зменшити кількість рівнянь або збільшити кількість невідомих. Збільшимо кількість невідомих: у якості ще однієї невідомої оберемо момент на валу двигуна M_{2-3} при кутовій швидкості ω_{2-3} . Необхідно відмітити, що така операція може бути обґрунтована із позицій забезпечення гладкості сплайн-функції на всьому проміжку $\omega \in [0, \omega_0]$. Пояснимо приведені твердження. Дійсно, система (1.58) без десятого рівняння встановлює деякі „правила” для кусків сплайн-функції. Ці „правила” передбачають гладкість сплайн-функції на всьому проміжку $\omega \in [0, \omega_0]$ за виключенням точки ω_{2-3} . Десяте рівняння системи (1.58) встановлює „правило” гладкості сплайн-функції у точці ω_{2-3} . Однак при цьому система (1.58) стає невизначеною. Для того, щоб її можна було розв’язати необхідно додати ще одну невідому величину, у даному випадку це M_{2-3} . Іншими словами необхідно знайти таке значення M_{2-3} , при якому б сплайн-функція у точці ω_{2-3} була б гладкою. Запишемо розв’язки системи рівнянь (1.58):

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = M_{\text{ниск}}; A_1 = \frac{2(M_{\text{мін}} - M_{\text{ниск}})}{2}; A_2 = \frac{M_{\text{ниск}} - M_{\text{мін}}}{\omega_{\text{мін}}^2}; \\ B_0 = M_{\text{мін}} + \frac{(M_{\text{макс}} - M_{\text{мін}})\omega_{\text{мін}}^2}{(\omega_{2-3} - \omega_{\text{мін}})(\omega_{\text{макс}} - \omega_{\text{мін}})}; B_1 = \frac{2(M_{\text{макс}} - M_{\text{мін}})\omega_{\text{мін}}}{(\omega_{2-3} - \omega_{\text{мін}})(\omega_{\text{мін}} - \omega_{\text{макс}})}; B_2 = \frac{M_{\text{мін}} - M_{\text{макс}}}{(\omega_{2-3} - \omega_{\text{мін}})(\omega_{\text{мін}} - \omega_{\text{макс}})}; \\ C_0 = M_{\text{макс}} + \frac{(M_{\text{макс}} - M_{\text{мін}})\omega_{\text{макс}}^2}{(\omega_{2-3} - \omega_{\text{макс}})(\omega_{\text{макс}} - \omega_{\text{мін}})}; C_1 = \frac{2(M_{\text{мін}} - M_{\text{макс}})\omega_{\text{макс}}}{(\omega_{2-3} - \omega_{\text{макс}})(\omega_{\text{макс}} - \omega_{\text{мін}})}; C_2 = \frac{M_{\text{макс}} - M_{\text{мін}}}{(\omega_{2-3} - \omega_{\text{макс}})(\omega_{\text{макс}} - \omega_{\text{мін}})}; \\ D_0 = \frac{M_{\text{НОМ}}\omega_{\text{макс}}^2 + M_{\text{макс}}\omega_{\text{НОМ}}(\omega_{\text{НОМ}} - 2\omega_{\text{макс}})}{(\omega_{\text{макс}} - \omega_{\text{НОМ}})^2}; D_1 = \frac{2(M_{\text{макс}} - M_{\text{НОМ}})\omega_{\text{макс}}}{(\omega_{\text{макс}} - \omega_{\text{НОМ}})^2}; D_2 = \frac{M_{\text{НОМ}} - M_{\text{макс}}}{(\omega_{\text{макс}} - \omega_{\text{НОМ}})^2}; \\ E_0 = -[\omega_0(2M_{\text{макс}}\omega_{\text{НОМ}}(\omega_{\text{НОМ}} - \omega_0) + M_{\text{НОМ}}(\omega_0(\omega_{\text{макс}} - \omega_{\text{НОМ}}) - 2\omega_{\text{макс}}\omega_{\text{НОМ}}))][(\omega_0 - \omega_{\text{НОМ}})^2(\omega_{\text{НОМ}} - \omega_{\text{макс}})]^{-1}; \\ E_1 = [2(M_{\text{НОМ}} - M_{\text{макс}})\omega_0^2 - 2M_{\text{НОМ}}\omega_{\text{макс}}\omega_{\text{НОМ}} + 2M_{\text{макс}}\omega_{\text{НОМ}}^2][(\omega_0 - \omega_{\text{НОМ}})^2(\omega_{\text{НОМ}} - \omega_{\text{макс}})]^{-1}; \\ E_2 = [2M_{\text{макс}}(\omega_0 - \omega_{\text{НОМ}}) + M_{\text{НОМ}}(\omega_{\text{НОМ}} + \omega_{\text{макс}} - 2\omega_0)][(\omega_0 - \omega_{\text{НОМ}})^2(\omega_{\text{НОМ}} - \omega_{\text{макс}})]^{-1}; \\ M_{2-3} = [\omega_{2-3}(M_{\text{макс}} - M_{\text{мін}}) - M_{\text{макс}}\omega_{\text{мін}} + M_{\text{мін}}\omega_{\text{макс}}][\omega_{\text{макс}} - \omega_{\text{мін}}]^{-1}. \end{array} \right. \quad (1.60)$$

На основі цих розв'язків для відомого електричного двигуна побудована його механічна характеристика (рис. 1.18). На рис. 1.18 точка 2* має координати $[\omega_{2-3}; M_{2-3}]$. Ми навмисно виокремлюємо її оскільки координати цієї точки не входять у каталожні дані, а знайдені із приведених вище міркувань.

Отже, отримана функція (1.57), (1.59), (1.60), яка дозволяє представити механічну характеристику асинхронного приводу. Дана функція має важливу властивість – за її допомогою можна отримати аналітичний розв'язок диференціального рівняння руху механізму, представленою одномасовою динамічною моделлю, із асинхронним приводом. Інтегрування диференціального рівняння руху у цьому випадку зводиться до відшукування розв'язку нелінійного рівняння Рікатті [11], який було знайдено у попередньому пункті.

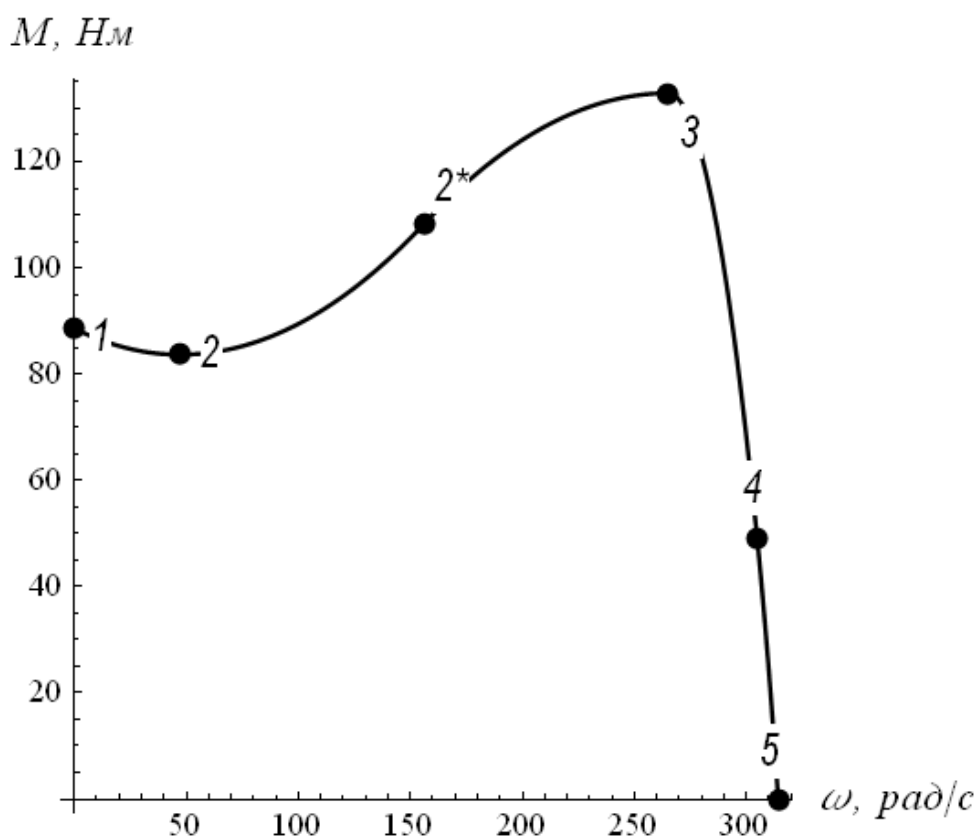


Рис. 1.18. Механічна характеристика асинхронного двигуна отримана шляхом сплайново-квадратичної апроксимації

Крім того, покажемо ще одну перевагу даної моделі статичної механічної

характеристики. Для цього побудуємо графіки (рис. 1.19-1.21), отримані при інтегруванні диференціального рівняння (1.11). Графіки на рис. 1.19-1.21 показані штриховою лінією побудовані для випадку чисельного інтегрування рівняння (1.11), за умови, що F визначається відомим рівнянням Клосса, звичайно, із врахуванням кінематичної схеми приводного механізму. Графіки представлені на рис. 1.19-1.21 суцільними лініями знайдені із використанням аналітичної залежності:

$$x_j = \frac{\lg(v_2 - \dot{x}(t_{0j}) + e^{N_2(t-t_{0j})(v_1-v_2)}(\dot{x}(t_{0j}) - v_1))}{N_2} + tv_1 + C_{1j}, \quad j = 1, 2, \dots, 5, \quad (1.61)$$

де $v_{1,2} = \frac{-N_1 \pm \sqrt{N_1^2 - 4N_0N_2}}{2N_2}$; t – час; t_{0j} – момент часу початку j -тої ділянки руху; C_{1j} – постійна інтегрування для j -тої ділянки руху, яка визначається із врахуванням кінцевої швидкості механізму на $(j-1)$ -й ділянці руху. Індекс j „пробігає” значення від 1 до 5, що впливає із системи (1.59). Залежність (1.61) є розв’язком рівняння Рікатті, яке вже згадувалось вище. Дане рівняння враховує фактичні параметри приводного двигуна, воно відповідає механічній характеристиці приведеній на рис. 1.18.

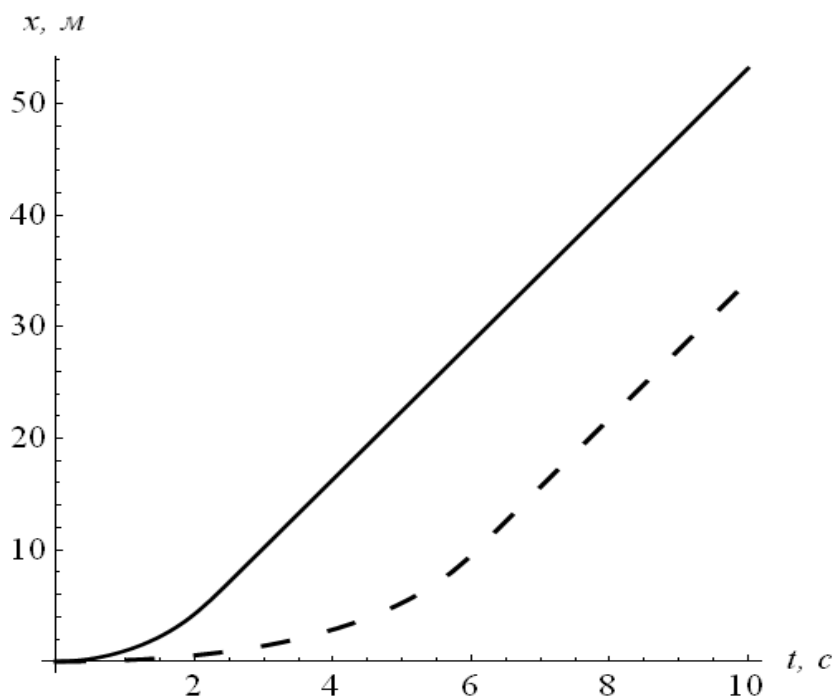


Рис. 1.19. Переміщення механізму

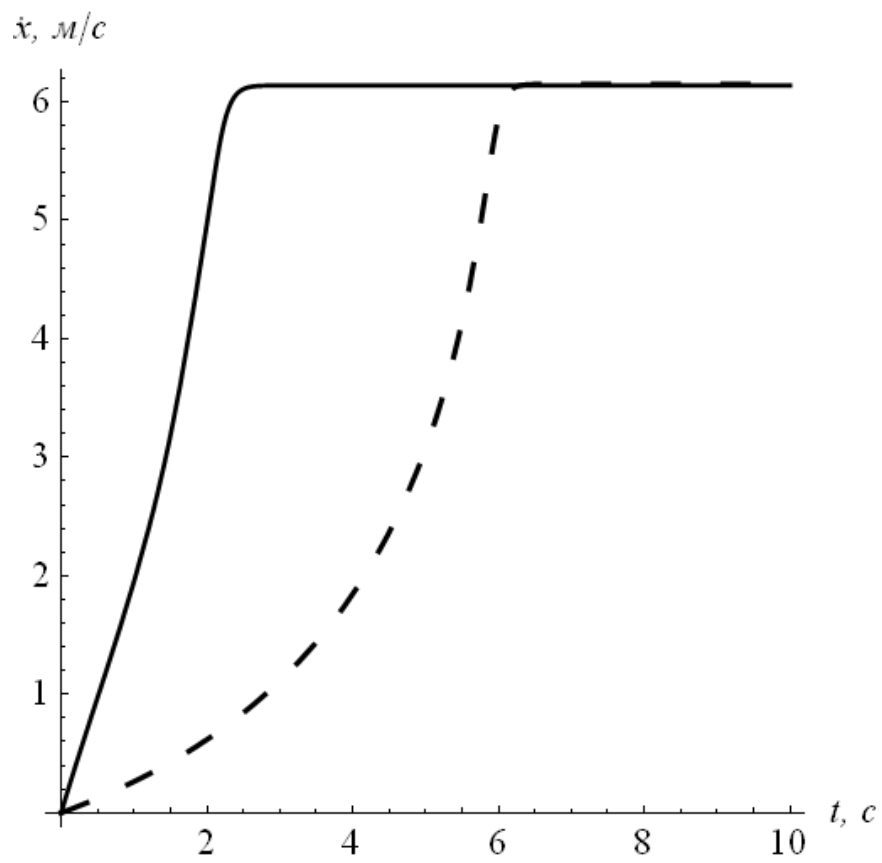


Рис. 1.20. Швидкість механізму

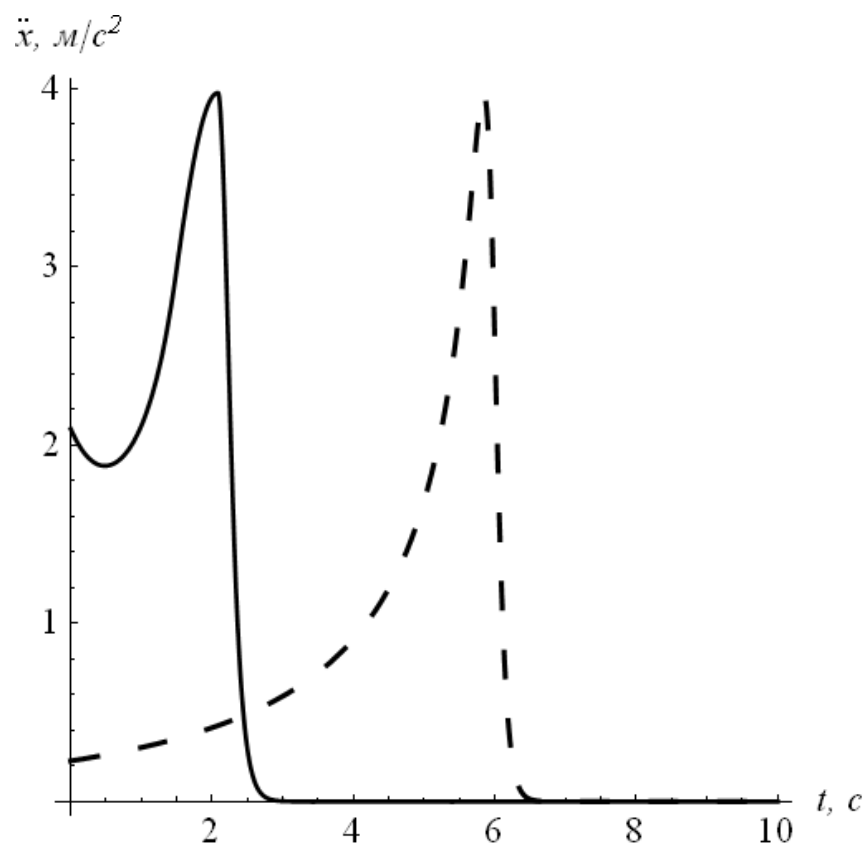


Рис. 1.21. Прискорення механізму

Як впливає із приведених на рис. 1.19-1.21 графіків, рівняння Клосса дає досить грубу оцінку динаміки руху механізму. Наприклад: тривалість розгону при різних моделях механічної характеристики різняться приблизно у три рази, пік прискорення механізму для різних моделей настає у різний момент часу тощо. Така груба оцінка при використанні рівняння Клосса пов'язана з тим, що воно не враховує деякі фактичні дані для двигуна. Модель (1.57), (1.59), (1.60) враховує ці дані і тому її бажано використовувати для проведення аналітичних розрахунків для одномасової динамічної моделі різноманітних механізмів. Усі виконані розрахунки приведені для випадку, коли $W = const$, що характерно для вантажопідйомних та транспортуючих машин. Однак подібні розрахунки можуть бути проведені для випадків $W \sim \dot{x}$ (характерно для зернодробарок, генераторів постійного струму із незмінним зовнішнім навантаженням) та $W \sim \dot{x}^2$ (характерно для насосів, вентиляторів, гребних гвинтів тощо), при цьому зміняться коефіцієнти N_1 та N_2 відповідно.

1.6. Встановлення меж аналітичності моделі механічної характеристики загальнопромислового асинхронного приводу

Дослідимо, чи можливо використати прийняту сплайново-квадратичну модель механічної характеристики двигуна для більш складних динамічних моделей, наприклад, для моделі, зображеній на рис. 1.22. Динамічна модель зображена на рис. 6. описується такою системою диференціальних рівнянь [12]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 + \Omega_0^2(x_2 - x_1) = 0; \\ m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = F - W\text{sign}(\dot{x}_1), \end{cases} \quad (1.62)$$

де m_1 – приведена до поступального руху маса крана і приводного механізму; m_2 – маса вантажу із захватним пристроєм; x_1, x_2 – координати центрів мас відповідно крана та вантажу; Ω_0 - власна частота коливань вантажу відносно

нерухомої точки підвісу ($\Omega_0^2 = \frac{g}{l}$); g – прискорення вільного падіння; l – довжина гнучкого підвісу вантажу; F – сумарне тягове або гальмівне зусилля, що діє на кран; W – сила опору переміщенню крана.

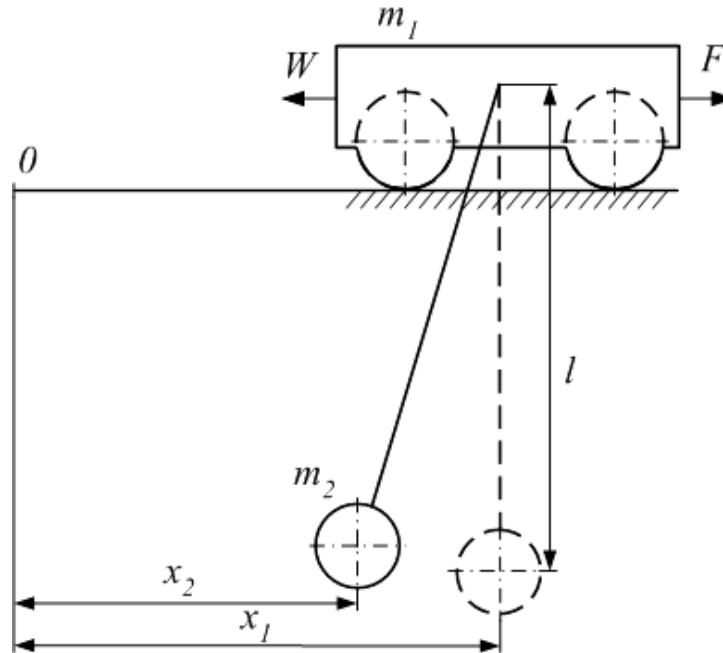


Рис. 1.22. Двомасова динамічна модель руху крана із вантажем на гнучкому підвісі

Систему рівнянь (1.62) можна звести до одного рівняння четвертого порядку:

$$x_2^{IV} + \Omega^2 \ddot{x}_2 = \frac{F - W \text{sign}(\dot{x}_2 + \Omega_0^{-2} \ddot{x}_2)}{m_1} \Omega_0^2, \quad (1.63)$$

де Ω – власна частота коливань вантажу відносно рухомої точки підвісу

($\Omega = \sqrt{\frac{(m_2 + m_1)}{m_1}} \Omega_0^2$). За умови, що $\dot{x}_2 + \Omega_0^{-2} \ddot{x}_2 > 0$ та враховуючи вираз (1.57)

можемо переписати рівняння (1.63) таким чином:

$$\ddot{v}_2 + \dot{v}_2^2 K_1 + \ddot{v}_2 \dot{v}_2 K_2 + \dot{v}_2^2 K_3 + \dot{v}_2 K_4 + v_2^2 K_5 + v_2 K_6 + K_7 = 0, \quad (1.64)$$

де v_2 – швидкість вантажу ($v_2 = \dot{x}_2$); $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7$ – деякі

коефіцієнти, які знаходяться із наступних виразів: $K_1 = -\frac{N_2 i^3 \eta}{m_1 r^3}$, $K_2 = -\frac{2N_2 i^3 \eta}{m_1 r^3}$,
 $K_3 = -\frac{N_1 i^2 \eta}{m_1 r^2}$, $K_4 = \Omega^2$, $K_5 = -\frac{N_2 i^3 \eta \Omega_0^2}{m_1 r^3}$, $K_6 = -\frac{N_1 i^2 \eta \Omega_0^2}{m_1 r^2}$, $K_7 = \frac{W \Omega_0^2}{m_1} - \frac{N_0 i \eta \Omega_0^2}{m_1 r}$. Рівняння

(1.64) - це нелінійне, кубічне однорідне диференціальне рівняння, розв'язок якого у аналітичному вигляді знайти неможливо. Таким чином, для двомасових (у загальному випадку для багатомасових) моделей використання апроксимаційної моделі (1.57), (1.59), (1.60) не дозволяє знаходити кінематичні та динамічні характеристики руху у аналітичному вигляді. Однак зберігається важлива перевага прийнятої моделі по відношенню до класичного рівняння Клосса - це врахування всіх каталожних даних двигуна.

Асинхронний двигун може працювати у всіх квадрантах. Для другого квадранту режим роботи двигуна є гальмівним. Існує три способи електричного гальмування асинхронного двигуна: 1) електродинамічне; 2) рекуперативне; 3) противмикання. Для розрахунку перехідного режиму гальмування для вказаних режимів використовуються відомі вирази механічної характеристики [1]. Для вказаних режимів відсутні каталожні дані. Тому використання сплайново-квадратичної апроксимації механічної характеристики може виявитись ускладненим. Ці складнощі можна „обійти” таким чином: необхідно розрахувати координати точок на механічній характеристиці для того чи іншого режиму гальмування за допомогою відомих виразів [1]. Надалі проводиться сплайново-квадратична апроксимація механічної характеристики. Сплайново-квадратична функція підставляється у праву частину рівняння руху динамічної системи і шукається розв'язок отриманого диференціального рівняння.

Висновки до першого розділу

1. Приведені дослідження дають змогу більш точно моделювати механічну характеристику асинхронного електроприводу за допомогою поліноміальної та сплайнової апроксимації за характерними довідниковими даними для того чи іншого двигуна. Оскільки динамічні процеси різноманітних кранових систем вимагають якомога точнішого моделювання зовнішнього збурення у системі, то використання вказаних методів дозволяє проводити динамічний аналіз руху системи із врахуванням значень пускового та мінімального моментів асинхронного приводу.
2. Приведені у даному розділі дослідження стосуються аналізу процесу пуску кранового механізму у першому наближенні (при використанні лінійної апроксимації механічної характеристики). Кубічна апроксимація механічної характеристики не дозволяє встановити аналітичні залежності для кінематичних параметрів руху кранового механізму. Така апроксимація не універсальна, а тому не представляє інтересу. Для знаходження аналітичного розв'язку поставленої задачі необхідно використовувати квадратичну апроксимацію механічної характеристики.
3. Отримані у роботі результати можна використати для уточнення розрахункових методик перехідних режимів руху кранових механізмів. Приведену у даному дослідженні методику апроксимації механічної характеристики електричного асинхронного привода можна поширити на інші види приводів: електричний (для двигунів постійного струму із послідовним збудженням), гідравлічний, пневматичний, тобто тих двигунів, механічна характеристика яких представляється нелінійною залежністю.
4. Проведене у розділі дослідження дає змогу встановити межі та доцільність використання сплайново-квадратичної моделі статичної механічної характеристики асинхронного двигуна із короткозамкненим

ротором. Пропонована модель може бути використана для отримання аналітичних залежностей кінематичних та динамічних характеристик механізмів із приводом від асинхронного двигуна у випадку, якщо механізм представляється одномасовою динамічною моделлю. Використання багатомасових динамічних моделей не дозволяє отримати аналітичних залежностей кінематичних та динамічних характеристик, однак, зберігається інша важлива властивість вказаної моделі – врахування всіх каталожних параметрів двигуна. При цьому існує можливість знаходити наближені розв'язки диференціальних рівнянь руху механізмів, наприклад, чисельними методами. Вказані розв'язки будуть більш наближеними до реальних кінематичних функцій, ніж отримані при використанні рівняння Клосса. Крім того, не виникає труднощів у випадку використання вказаної моделі для аналізу режимів гальмування двигуна за умови, якщо відомі величини крутних моментів двигуна при тій чи іншій його швидкості.

Література до першого розділу

1. Чиликин М.Г. Общий курс электропривода: учебник [для студ. вузов] / М.Г. Чиликин, А.С. Сандлер. – [6-е изд., доп. и перераб.]. – М.: Энергоиздат, 1981. – 576 с.
2. Олійник В.С. Довідник сільського електрика / Олійник В.С., Гайдук В.М., Гончар В.Ф. – 3-е видання, переробл і доповн. – К.: Урожай, 1989. – 264 с.
3. Вешеневский С.Н. Характеристики двигателей в электроприводе / С.Н. Вешеневский. – М.: Энергия, 1977. – 432 с.
4. Фираго Б.И. Теория электропривода: учебное пособие / Б.И. Фираго, Л.Б. Павлячик. – Мн.: ЗАО „Техноперспектива”, 2004. – 527 с.
5. Ключев В.И. Теория электропривода: учебник для вузов / В.И. Ключев. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 2001. – 704 с.
6. Иванов-Смоленский А.В. Электрические машины: учебник для вузов. В двух томах. Том 1. / А.В. Иванов-Смоленский – 3-е изд., стереот. – М.: Издательский дом МЭИ, 2006. – 652 с.
7. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
8. Корнейчук Н.П. Сплаины в теории приближения. / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
9. Прокопеня А.Н. Применение системы Mathematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений / Прокопеня А.Н., Чичурин А.В. – Мн.: БГУ, 1999. – 265 с.
10. Корн Г. Справочник по высшей математике для научных работников и инженеров / Корн Г., Корн Т. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
11. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / А.И. Егоров. – М.: Физматлит, 2005. – 384 с.
12. Комаров М.С. Динамика грузоподъемных машин / Комаров М.С. – М.: Машиностроение, 1969. – 206 с.

РОЗДІЛ 2

ЧАСТОТНЕ КЕРУВАННЯ АСИНХРОННИМ КРАНОВИМ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ

2.1. Обґрунтування введення модифікованого обмеження на функцію оптимального керування крановими механізмами

Робота сучасних кранових систем супроводжується значними динамічними навантаженнями, швидкоплинними перехідними процесами та значними енергетичними витратами на виконання технологічних процесів. Вимоги, які ставляться до вантажопідйомних машин різного роду суперечливі: з одного боку необхідно забезпечити найбільшу ефективність виробництва, а з іншого - зберегти наявне обладнання та не допустити його передчасний вихід з ладу. Одним зі способів підвищення ефективності виробництва є його інтенсифікація, яка може бути реалізована шляхом зменшення тривалості циклів руху вантажопідйомних машин. Як відомо, оптимальне за швидкодією керування має характер релейної функції [1]. Реалізація такого керування на практиці полягає у миттєвому перемиканні знаку керуючої функції, що підвищує динамічні навантаження у механічних елементах системи та зменшує їх надійність, а також збільшує струмові навантаження електроприводу. Для того, щоб усунути критичні динамічні навантаження у механічних частинах вантажопідйомних машин і механізмів та протікання великих струмів у електроприводі необхідно вводити модифіковані (некласичні) обмеження на функцію керування.

Обмеження на керування крановими механізмами можна обґрунтувати з точки зору обмеженості потужності джерел живлення, ліній електропередач, приводних та перетворювальних пристроїв і механізмів.

Одним з найпоширеніших перетворювальних пристроїв сучасних мехатронних кранових систем є частотний перетворювач [2], до якого підключається електродвигун. Обмеження на момент двигуна можна

визначити з його перевантажувальної здатності [3]. Обмеження на максимальний струм частотного перетворювача також задаються (паспортні дані). Однак ці обмеження різних видів: одне стосується механічної величини, а інше – електричної. При синтезі оптимального керування рухом того чи іншого кранового механізму врахування обох обмежень є складною задачею, якій приділено мало уваги, незважаючи на її практичну значимість.

За допомогою частотних перетворювачів досягаються такі ж регульовальні показники як і у двигунів постійного струму, у тому числі керування електромагнітним моментом двигуна. Необхідно зазначити, що живлення двигуна безпосередньо від мережі та від частотного перетворювача відрізняється [4]. Причина цього – частотний перетворювач не в змозі витримувати значних струмових навантажень. Отже, окрім обмежень накладених на двигун (максимальне значення приводного моменту) необхідно враховувати струмові, або часо-струмові обмеження накладені на частотний перетворювач, від якого здійснюється живлення двигуна. Таким чином, у даній роботі розглядається єдина електромеханічна система.

Насамперед вкажемо припущення, прийняті при приведенні даного дослідження:

- не враховується в'язке тертя у приводній системі та у робочій машині;
- усі маси вважаємо зосередженими;
- нехтуємо електромагнітними перехідними процесами (розглядаємо статичну електромеханічну характеристику двигуна);
- вважаємо, що частотний перетворювач миттєво „відпрацьовує” задане значення керуючої функції (моменту).

Для дослідження використаємо найпростішу одномасову модель руху кранової системи. Такою моделлю можна описувати рух ланки робота, вентилятора, насоса, дробарки, крана-маніпулятора, різноманітних транспортних механізмів тощо. Запишемо диференціальне рівняння, яким описується рух вказаних систем:

$$J\ddot{\varphi} = M - M_{on}, \quad (2.1)$$

де J – приведений до вала двигуна момент інерції системи „двигун-робоча машина”; φ – кут повороту вала двигуна; M – електромагнітний момент на валу двигуна; M_{on} - момент опору руху робочої машини, зведений до вала двигуна. Крапкою над символом позначене диференціювання за часом.

Як відомо, оптимальне за швидкістю керування технічною системою при врахуванні обмежень на швидкість її руху має такий вигляд:

$$M = \begin{cases} M_{\max}, & t \in [0, t_n]; \\ M_{on}, & t \in [t_n, t_n + t_{ном}]; \\ -M_{\max}, & t \in [t_n + t_{ном}, T], \end{cases} \quad (2.2)$$

де M_{\max} - максимальне значення моменту на валу двигуна; T - тривалість циклу руху системи; t_n - тривалість розгону системи; $t_{ном}$ - тривалість руху системи на номінальній швидкості.

Проаналізуємо умови роботи частотного перетворювача протягом розгону системи $t \in [0, t_n]$. Для цього знайдемо струм асинхронного двигуна, який споживається ним з джерела живлення, яким у даному випадку є частотний перетворювач, протягом розгону [5]:

$$I_1 = \sqrt{\frac{M_{\max} s \dot{\varphi}_0}{3R'_2}} + I_\mu, \quad (2.3)$$

де I_1 - струм фази статора; $\dot{\varphi}_0$ - кутова швидкість ідеального холостого ходу асинхронного двигуна; s - поточне ковзання двигуна; R'_2 - приведений опір ротора; I_μ - струм контуру намагнічування (як правило, $I_\mu \approx (0,2...0,4)I_{ном}$). З виразу (2.3) знайдемо залежність максимального моменту двигуна від його кутової швидкості з врахуванням того, що струм, який проходить по обмотках двигуна є максимальним для частотного перетворювача:

$$M_{\max} = \frac{3(I_{1\max} - I_{\mu})^2 R_2'}{\dot{\phi}_0 - \dot{\phi}}, \quad (2.4)$$

де $I_{1\max}$ - максимально можливий струм на виході з перетворювача частоти. Величина $I_{1\max}$ знаходиться з умови, що частотний перетворювач працює з 150-ти процентним перевантаженням за струмом. Як правило, сучасні перетворювачі витримують таке перевантаження протягом 60 секунд [2]. Зменшення величини перевантаження призводить до можливості збільшення тривалості перевантаження. Отже необхідно враховувати не тільки величину перевантаження, а й її тривалість. Тому потрібно розглядати не струмові, а часо-струмові характеристики інверторів, які є вихідним елементом частотних перетворювачів. У даному дослідженні обмежується лише величина струмового перевантаження, яка не може тривати більше 60 секунд.

Вираз (2.4) встановлює залежність обмеження на керуюче зусилля, накладене на механічну частину системи від швидкості її руху при умові, що електрична частина системи працює на межі допустимої області ($I_1 = I_{1\max}$). Запишемо остаточно обмеження накладені на керування (момент двигуна):

$$M = \begin{cases} \frac{3(I_{1\max} - I_{\mu})^2 R_2'}{\dot{\phi}_0 - \dot{\phi}} \text{ при } 0 < \dot{\phi} \leq \dot{\phi}_0 - \frac{3(I_{1\max} - I_{\mu})^2 R_2'}{M_{\max}}; \\ M_{\max} \text{ при } \dot{\phi} > \dot{\phi}_0 - \frac{3(I_{1\max} - I_{\mu})^2 R_2'}{M_{\max}}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Для отриманого виразу (2.5) побудуємо графічну залежність (рис. 2.1), яка ілюструє її „кусочність”. Рис. 2.1 побудований при таких параметрах двигуна МТКМ312-8 [3]: $P_{\text{ном}}=7,5$ кВт; $R_2'=1,04$ Ом; $\dot{\phi}_0 = 78,5$ рад/с; кратність максимального моменту двигуна $M_{\max}^* = 2,5$; $I_{\text{ном}}=19,1$ А; $I_{\mu} = 0,4I_{\text{ном}}$ та частотного перетворювача $I_{\max} = 60$ А, що відповідає потужності 15кВт. Зазначимо, що для побудови цього графіку свідомо обрано частотний перетворювач потужністю у 2 рази більшою за потужність двигуна, оскільки

при цьому область допустимих значень струму збільшується і привод може інтенсивніше здійснювати розгін.

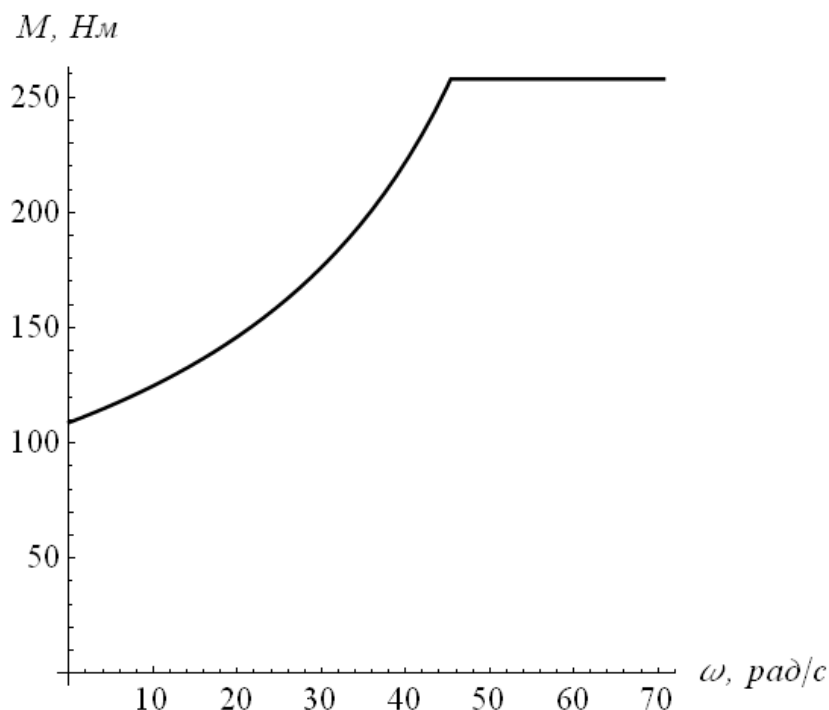


Рис. 2.1. Залежність максимального моменту на валу двигуна від його кутової швидкості

Очевидно, що обмеження (2.5) не є класичним. Ефективними методами синтезу оптимальних керувань для систем з обмеженнями типу (2.5) є різноманітні ітераційні процедури [6] (методи локальних варіацій, послідовних наближень та інші методи, у яких на кожній ітерації проходить перевірка величини керування). Однак для найпростіших систем задачі оптимальної швидкодії можуть бути розв'язані аналітично.

2.2. Розв'язання задач оптимальної швидкодії із модифікованими обмеженнями на керування крановими механізмами

Надалі розв'яжемо дві задачі для руху механізму зі стану спокою до моменту досягнення номінальної швидкості: 1) для руху без навантаження (розгін на холостому ході); 2) для руху з постійним навантаженням, що характерно для вантажопідійомних машин.

Розв'язок першої задачі полягає у знаходженні функції-розв'язку нелінійного диференціального рівняння:

$$J\ddot{\varphi} = \frac{3(I_{1\max} - I_{\mu})^2 R_2'}{\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}} \quad (2.6)$$

при початкових умовах $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$ та перевірці умови $M \leq M_{\max}$ для $t \in [0, t_n]$. Розв'язок даної задачі Коші - функція $\varphi(t)$, диференціюючи яку за часом знайдемо залежність кутової швидкості двигуна від часу $\dot{\varphi}(t)$ (ми навмисне притримуємося описового характеру, оскільки такі математичні розрахунки мають значний об'єм). Надалі знайдемо момент часу, при якому кутова швидкість досягає свого номінального значення, тобто розв'яжемо рівняння $\dot{\varphi}(t_n) = \dot{\varphi}_{\text{ном}}$ або у розгорнутому вигляді:

$$\dot{\varphi}_0 - J^{\frac{1}{2}} \sqrt{J\dot{\varphi}_0 - 6(I_{1\max} - I_{\mu})^2 R_2' t_n} = \dot{\varphi}_{\text{ном}}. \quad (2.7)$$

Знайшовши розв'язок рівняння (2.7), можемо побудувати графіки функцій $\varphi(t)$ та $M(t)$ (рис. 2.2-2.3). Знайдемо момент двигуна у кінці розгону при параметрах, використаних для побудови графіків (рис. 2.2-2.3):

$$M = \frac{3(I_{1\max} - I_{\mu})^2 R_2'}{(\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_{\text{ном}})} = 1485 \text{ Нм}, \quad (2.8)$$

що більш ніж у 5,5 разів перевищує максимальний момент двигуна. Таким чином умова $M \leq M_{\max}$ не виконується.

Знайдемо проміжок часу $t \in [0, t_1]$, для якого умова $M \leq M_{\max}$ буде справедливою. Для цього необхідно розв'яжемо рівняння $M(t_1) = M_{\max}$ або у розгорнутому вигляді:

$$3(I_{1\max} - I_{\mu})^2 R_2' \sqrt{\frac{J}{J\dot{\varphi}_0 - 6(I_{1\max} - I_{\mu})^2 R_2' t_1}} = \frac{3(I_{1\max} - I_{\mu})^2 R_2'}{(\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}_{\text{ном}})}. \quad (2.9)$$

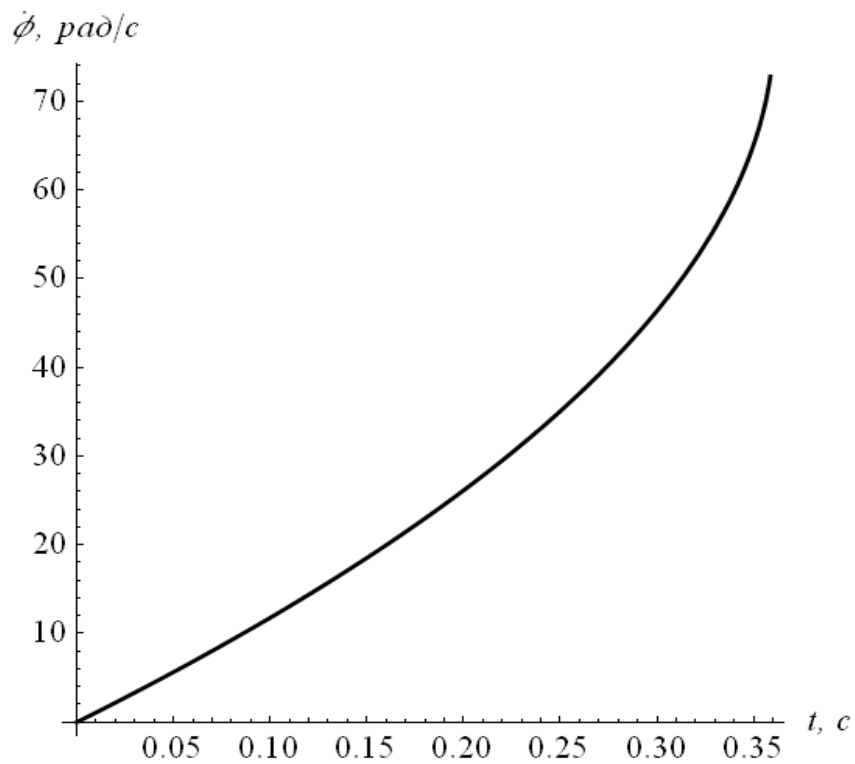


Рис. 2.2. Графік функції кутової швидкості двигуна протягом розгону системи до номінальної швидкості зі стану спокою

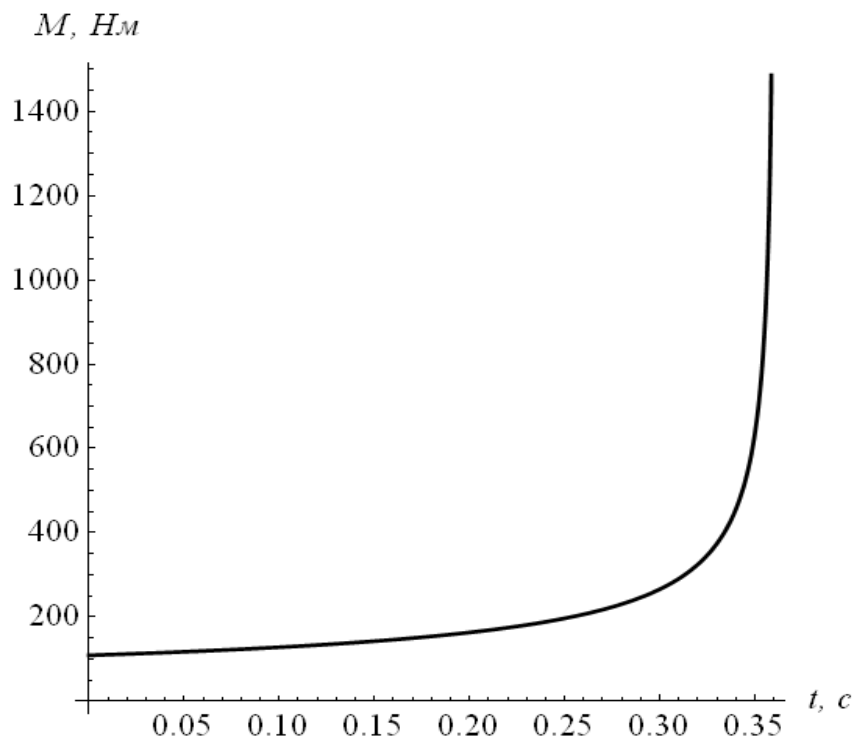


Рис. 2.3. Графік функції моменту на валу двигуна протягом розгону системи до номінальної швидкості зі стану спокою

Знайшовши вираз для моменту часу t_1 , визначимо фазові координати приводу у цей момент часу $\varphi(t_1)$ та $\dot{\varphi}(t_1)$. Ці дані необхідні для того, щоб сформулювати початкові умови для розв'язання задачі Коші:

$$J\ddot{\varphi} = M_{\max}. \quad (2.10)$$

Не будемо зупинятися на розв'язуванні цього рівняння, а побудуємо графіки функцій для усього періоду розгону системи при виконанні обмежень накладених на момент та на струм (рис. 2.4-2.5).

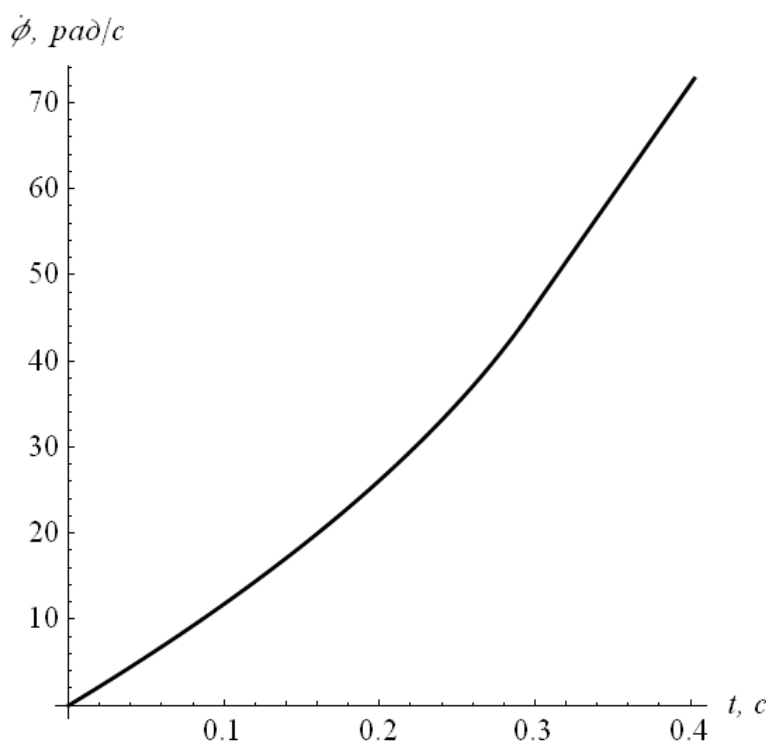


Рис. 2.4. Графік функції кутової швидкості двигуна протягом розгону системи до номінальної швидкості зі стану спокою при виконанні обмежень

$$M \leq M_{\max} \text{ та } I_1 \leq I_{1\max}$$

Таким чином, отримано „зшивку” розв'язків при виконанні обох обмежень. Відмітимо, що у даному прикладі тривалість перехідного режиму руху приводу збільшується на 0,1 секунди у порівнянні з випадком, який не враховує обмеження $M \leq M_{\max}$.

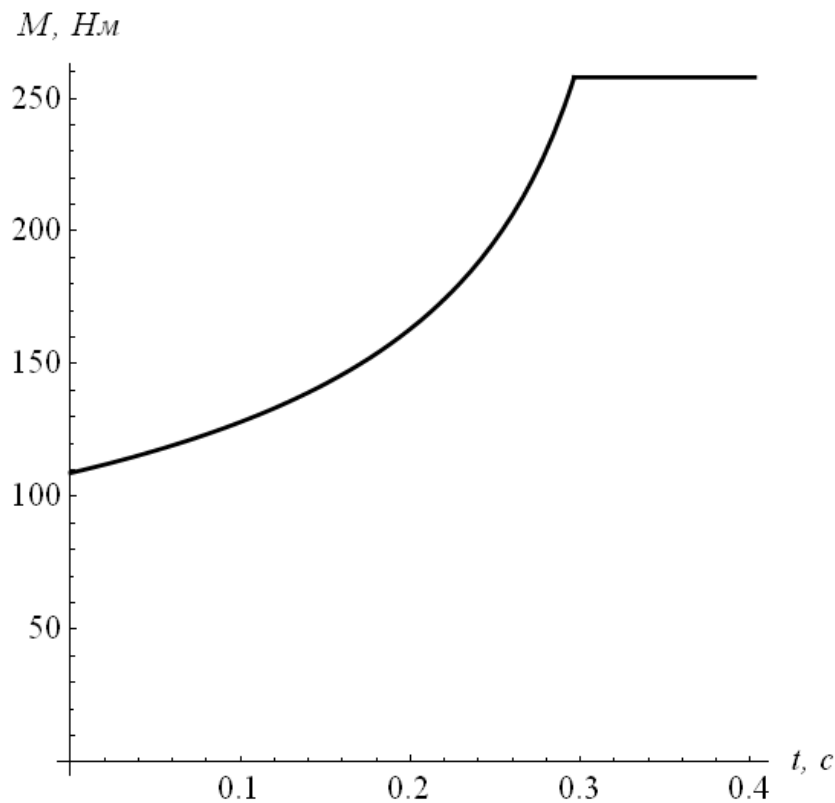


Рис. 2.5. Графік функції моменту на валу двигуна протягом розгону системи до номінальної швидкості зі стану спокою при виконанні обмежень

$$M \leq M_{\max} \text{ та } I_1 \leq I_{1\max}$$

Приведемо аналогічні графіки функцій (рис. 2.6-2.7) при умові, що максимальний вихідний струм частотного перетворювача становить 22 А і таке ж значення струму приймемо у якості максимального $I_{\max} = 22 \text{ А}$. Фактично це означає, що потужність частотного перетворювача відповідає потужності двигуна і відсутнє струмове перевантаження частотного перетворювача. У даному випадку (рис. 2.6-2.7) привод взагалі „не виходить” на обмеження $M \leq M_{\max}$ і весь час рухається при обмеженні $I_1 \leq I_{1\max}$. Це впливає на тривалість руху системи, яка збільшується у порівнянні з варіантом $I_{\max} = 60 \text{ А}$ на 4,37 секунди, або майже у 12 разів.

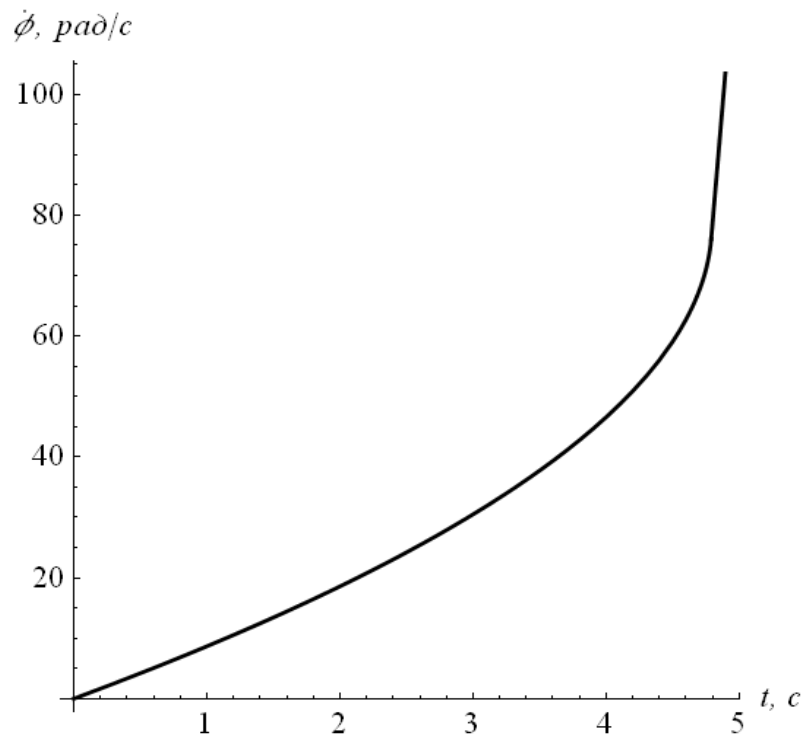


Рис. 2.6 Графік функції кутової швидкості протягом розгону системи до номінальної швидкості зі стану спокою при $I_{\max} = 22$ А

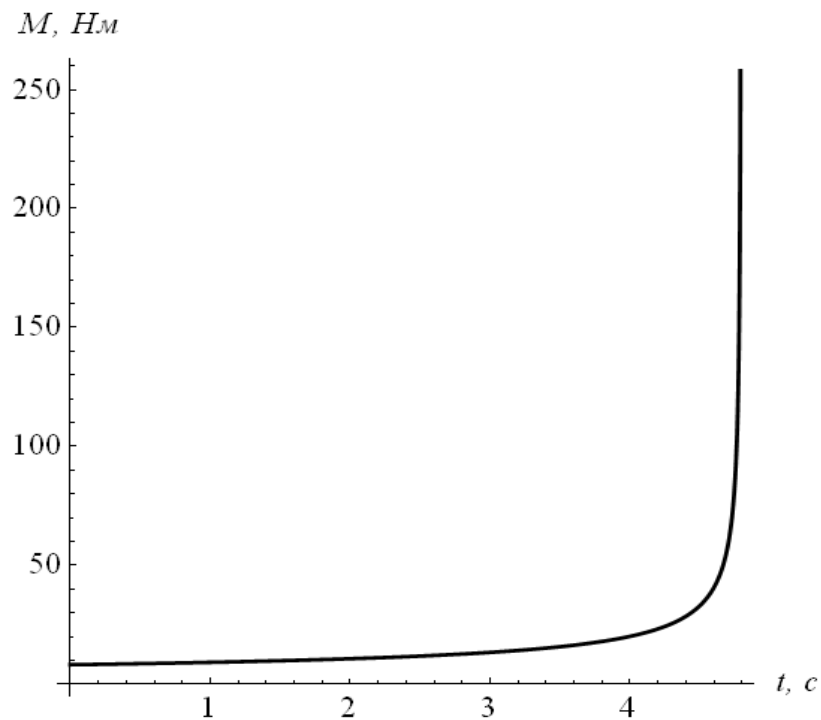


Рис. 2.7 Графіки функції моменту протягом розгону системи до номінальної швидкості зі стану спокою при $I_{\max} = 22$ А

Звідси можна зробити попередні висновки:

- 1) якщо забезпечити достатню потужність частотного перетворювача, то, очевидно, можна добитись результату, при якому обмеження $I_1 \leq I_{1\max}$ вже не буде відігравати важливої ролі, а залишиться лише класичне обмеження виду $M \leq M_{\max}$;
- 2) необґрунтований вибір потужності частотного перетворювача може привести до збільшення тривалості перехідних процесів (тут постає практична задача „тривалість перехідного процесу - потужність частотного перетворювача”, яка трансформується у еквіваленту задачу „підвищення продуктивності технологічного процесу за рахунок зниження тривалості руху машин і механізмів – збільшення вартості частотного перетворювача, пов’язаної зі збільшенням його потужності”). Ці задачі необхідно вирішувати для кожного конкретного технологічного процесу.

Перейдемо до розв’язування другої задачі. Для цього розв’яжемо диференціальне рівняння (2.1) за умови, що момент, який входить у праву частину цього рівняння описується функцією (2.5). Використаємо чисельне інтегрування цього нелінійного диференціального рівняння [7]. У результаті отримаємо набір точок, які можна інтерполювати сплайном. Графічний результат сплайн-функцій для кутової швидкості та крутного моменту двигуна показані на рис. 2.8-2.9. Зазначимо, що для розв’язування цього рівняння необхідно використовувати перевірку умови (2.5) на кожній ітерації.

Аналогічну процедуру необхідно виконувати при синтезі оптимального керування для наближених методів розв’язування задач оптимального керування.

Узагальнюючи отримані результати можна сказати, що задачі синтезу оптимального керування повинні враховувати модифіковані обмеження накладені на керуючу функцію при її реалізації за допомогою частотного асинхронного електроприводу.

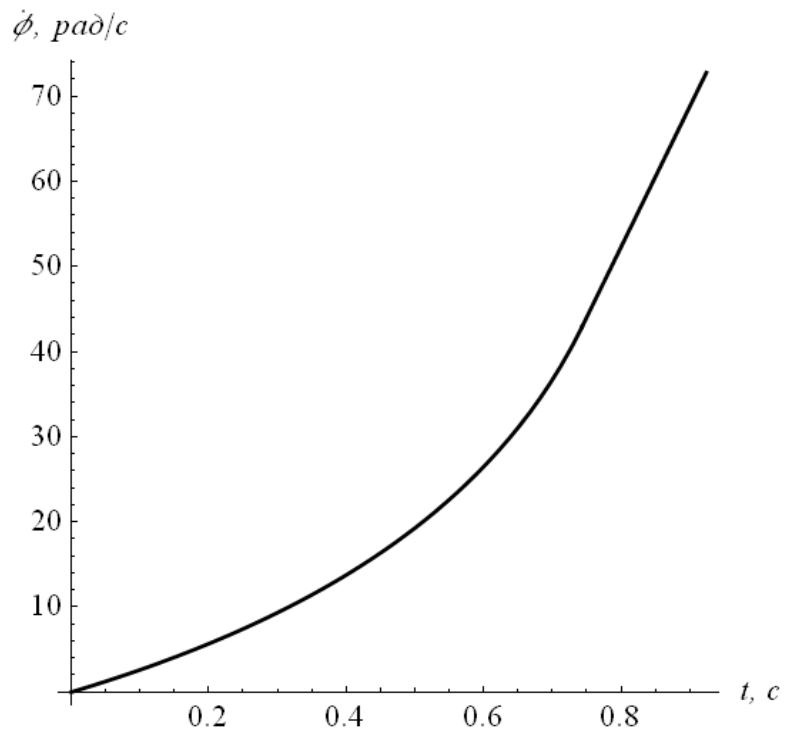


Рис. 2.8. Графік функції кутової швидкості двигуна протягом розгону системи до номінальної швидкості зі стану спокою при моменті опору не рівному нулю

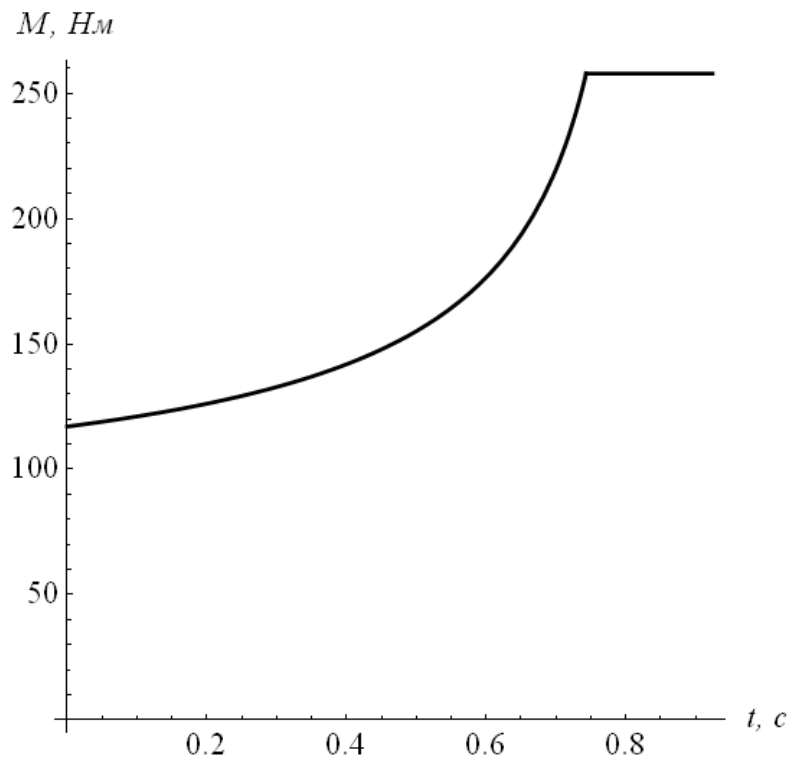


Рис. 2.9. Графік функції моменту на валу двигуна протягом розгону системи до номінальної швидкості зі стану спокою при дії моменту опору

У даній роботі розглянуто найпростіша одномасова модель руху динамічної системи, яка здійснює розгін на одному інтервалі сталості керуючої функції (2.2). Однак відомі роботи як теоретичного [8, 9], так і прикладного [10-12] характеру, які встановлюють декілька перемикань керування протягом розгону системи. У цих випадках на систему накладаються більш жорсткіші обмеження, що впливає з аналізу виразу (2.3). Дійсно, як тільки двигун досяг деякої швидкості на першому етапі розгону (перший етап додатного керування) відбувається перемикання керування і воно стає від'ємним. Таке перемикання повинно проходити миттєво, що означає реверсування двигуна, тобто $\dot{\varphi}_0 \rightarrow -\dot{\varphi}_0$. При цьому ковзання двигуна зростає значно $s = \frac{\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0} \rightarrow \frac{\dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0}$, а разом з ним і зростає струм статора. Однак постає питання, чи зможе частотний перетворювач забезпечити значний струм на виході? Для відповіді на це питання необхідно проводити аналіз функції керування на кожному кроці його розрахунку.

2.3. Обґрунтування раціональних законів керування рухом кранових механізмів

2.3.1. Двомасова динамічна модель

Велика кількість вантажопідйомних машин та механізмів представляється двомасовими динамічними моделями [10, 11, 13, 14]. Таке представлення необхідне для того, щоб провести динамічний аналіз руху цих машин, що дає змогу оцінити величину та характер зміни динамічних навантажень у їх ланках. Це, у свою чергу, дозволяє розрахувати елементи машини чи механізму за діючими навантаженнями.

Виникнення та еволюція динамічних навантажень пов'язана із структурою машини, її параметрами (коефіцієнти жорсткості та дисипації, маси та моменти інерції окремих елементів тощо) та зовнішніми впливами.

Під зовнішніми впливами слід розуміти всі діючі на вантажопідйомну машину зусилля та моменти. Джерелами зовнішніх впливів є зовнішнє (технологічне) середовище та приводні сили (моменти) від їх двигунів. Вибір раціональних шляхів зміни зовнішніх впливів від приводного механізму є актуальною задачею, оскільки дозволяє значно зменшити динамічні навантаження у елементах машини, що, у свою чергу, підвищує її надійність та довговічність.

Для зменшення динамічних вантажень у механізмах вантажопідйомних машин природно використати потужний математичний апарат оптимального керування [1, 8, 9, 12, 15-18]. Такий підхід є науково обґрунтованим, оскільки дозволяє оптимально, найвигідніше із деяких позицій, синтезувати режим руху системи. Якщо критерій оптимальності відображає динамічні показники руху системи, то при цьому її рух відбувається із якнайменшими динамічними навантаженнями. Однак, для проведення процедури оптимізації необхідно мати детерміновану математичну модель машини. Це вимагає параметричної ідентифікації об'єкта дослідження (машини чи механізму) із наступним дослідженням адекватності математичної моделі [19, 20]. Звичайно, такі дослідження не можуть бути проведені для всіх машин, оскільки вимагають значних ресурсів та часу. Крім того, навіть незначне конструктивне вдосконалення машини змінює параметри моделі, яка їй відповідає. У практичних розрахунках можна лише приблизно оцінити параметри моделі, тобто встановити деякий інтервал, в який величини параметрів входять із заданою вірогідністю. Зазначимо, що відомі розрахунки [21], які подібні приведеним у даному пункті. Однак, на відміну від роботи [21] у даному пункті використовуються суто „кінематичне” задання зовнішнього збурення, тобто задається швидкість веденої маси (у роботі [21] зовнішнім збуренням виступає момент прикладений до ведучого колеса). Таке задання швидкості можна здійснити шляхом частотного керування асинхронного приводу механізмів вантажопідйомних машин. Для досліджень приймемо динамічну модель, яка показана на рис. 2.10. Якщо

прийняти, що $c = \frac{m_2 g}{l}$ (тут m_2 - маса вантажу, g - прискорення вільного падіння, l - довжина гнучкого підвісу, на якому закріплена маса вантажу), то приведена на рис. 2.10 схема описує рух математичного рухомого маятника [22].

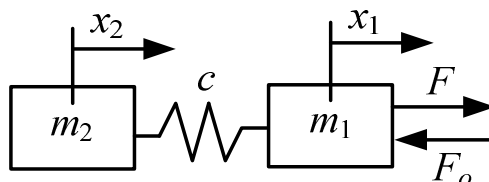


Рис. 2.10. Динамічна модель двомасової системи

Прийнята динамічна модель описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c(x_1 - x_2) = F - F_0; \\ m_2 \ddot{x}_2 = c(x_1 - x_2), \end{cases} \quad (2.11)$$

де m_1 – ведуча маса; m_2 – ведена маса; x_1, x_2 – координати центрів відповідних мас, F – приводне (тягове або гальмівне) зусилля, що діє на ведучу масу; F_0 – сила опору переміщенню, що діє на ведену масу, c – жорсткість зв’язку, який поєднує ведену і ведучу маси.

Друге рівняння системи рівнянь (2.11) можна подати у такому вигляді:

$$x_1 = x_2 + \Omega_0^{-2} \ddot{x}_2, \quad (2.12)$$

де Ω_0 - частота власних коливань динамічної системи ($\Omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_2}}$).

Проаналізуємо, які способи задання режимів розгону можуть реалізувати сучасні частотно-керовані асинхронні електроприводи [23-25]. Прийmemo для подальших досліджень такі основні (базові) закони зміни швидкості руху механізму (рис. 2.11). Необхідно зробити таке зауваження: у даному дослідженні прийнято припущення щодо „ідеальності”

відпрацювання швидкості веденої маси. У першому наближенні таке припущення можна використовувати. Для більш точного аналізу динаміки руху динамічної системи це припущення потребує обґрунтування. Сучасні частотно-керовані приводи дозволяють достатньо точно відпрацьовувати задання швидкості, однак якщо для динамічної системи справедлива нерівність $m_2 \gg m_1$ і динамічні характеристики приводу невисокі, то відпрацювання законів швидкості приведених на рис. 2.11 може мати певні похибки.

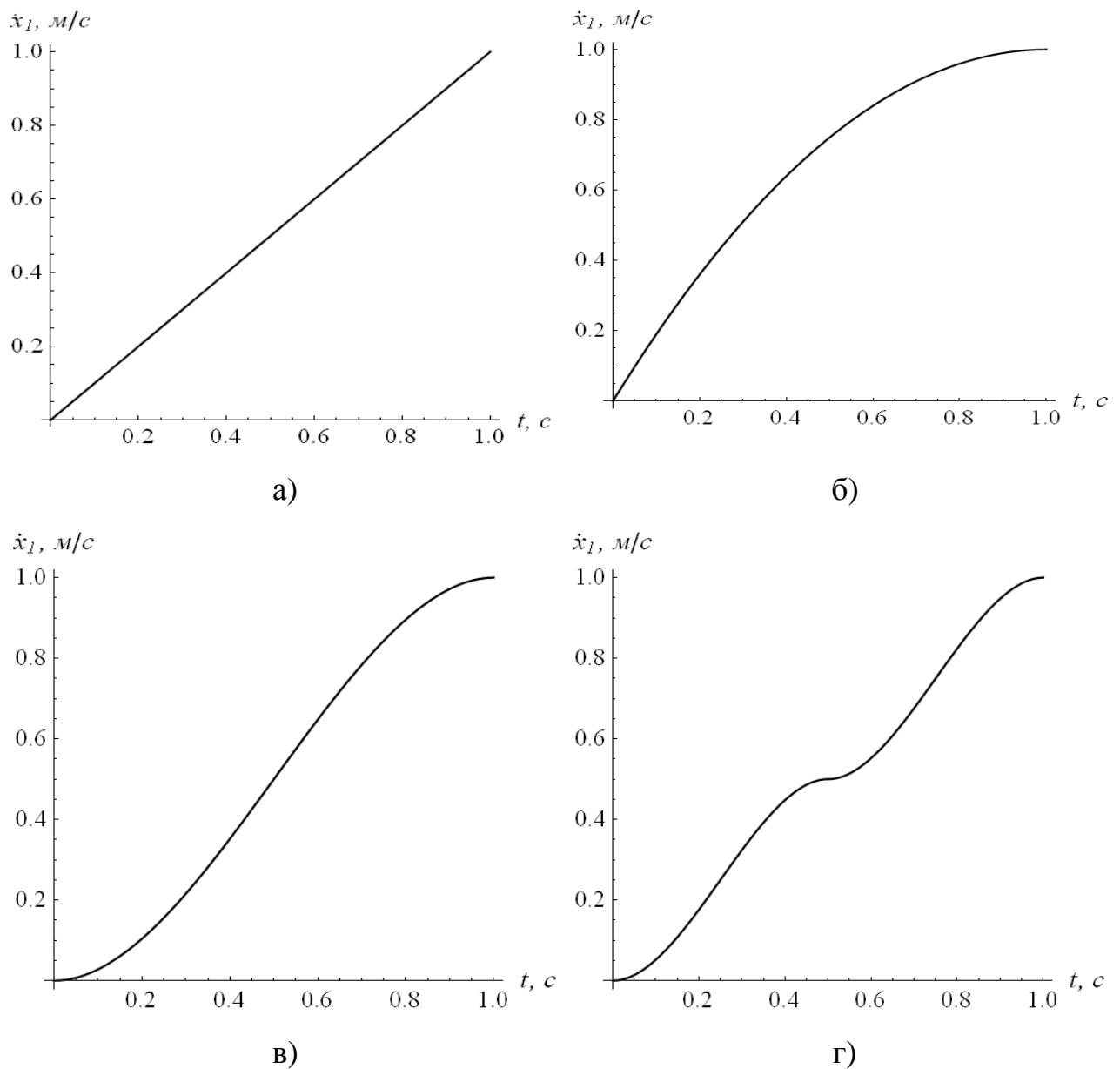


Рис. 2.11. Базові закони зміни швидкості ведучої маси при її розгоні: а) лінійний, б) U-подібний, в) S – подібний, г) подвійний S – подібний

Приведені на рис. 2.11 закони зміни швидкості ведучої маси при розгоні динамічної системи описуються такими функціями:

$$\dot{x}_1 = \frac{vt}{T} - \quad (2.13)$$

для лінійного закону;

$$\dot{x}_1 = \frac{vt}{T^2}(2T - t) - \quad (2.14)$$

для U-подібного закону;

$$\dot{x}_1 = \frac{vt^2}{T^3}(3T - 2t) - \quad (2.15)$$

для S – подібного закону;

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} \frac{v_1 t^2}{T_1^3}(3T_1 - 2t), \text{ при } t \in [0, T_1]; \\ \frac{v_1(2t - 2T_1 + T)(T_1 + T - t)^2 - v(t - T_1)^2(2t - 2T_1 - 3T)}{T^3}, \text{ при } t \in [T_1, T], \end{cases} - \quad (2.16)$$

для подвійного S – подібного закону; тут T – тривалість процесу розгону до швидкості v ; T_1 – тривалість розгону до швидкості v_1 ; v – усталена швидкість руху ведучої маси; v_1 – „проміжна” швидкість руху ведучої маси; t – час.

Оцінку „раціональності” того чи іншого закону руху динамічної системи будемо виконувати за показником питомої енергії залишкових коливань веденої маси, яка визначається таким чином:

$$\tilde{E}(T) = \frac{E_{кин}(T) + E_{ном}(T)}{E_{кин.уст.m_2}}, \quad (2.17)$$

де $E_{кин}(T)$ – кінетична енергія коливань маси m_2 в момент часу T ; $E_{ном}(T)$ – потенціальна енергія пружного елемента c в момент часу T ; $E_{кин.уст.m_2}$ –

кінетична енергія руху маси m_2 при її усталеній швидкості v . Вирази для $E_{кін}(T)$, $E_{пот}(T)$ та $E_{кін.уст.m_2}$ мають такий вигляд:

$$E_{кін}(T) = \frac{m_2(v - \dot{x}_2(T))^2}{2}; \quad (2.18)$$

$$E_{пот}(T) = \frac{c(x_1(T) - x_2(T))^2}{2}; \quad (2.19)$$

$$E_{кін.уст.m_2} = \frac{m_2 v^2}{2}. \quad (2.20)$$

Пояснимо вибір показника (2.17) для оцінки якості того чи іншого закону руху динамічної системи. Величину залишкових коливань необхідно оцінювати за їх енергією або положенням зображуючої точки у фазовому просторі. Перший показник дає змогу оцінити кількісну картину коливань, а другий – якісну. Використаємо енергетичну характеристику для оцінки величини залишкових коливань веденої маси.

Чисельник правої частини виразу (2.17) показує повну енергію коливань маси m_2 у момент часу T : вона є різницею повної енергії руху маси m_2 та її кінетичної енергії при швидкості v або це сума потенціальної та кінетичної енергій коливань. Знаменник правої частини виразу (2.17) дає змогу привести енергетичну оцінку до безрозмірного вигляду, оскільки для всіх законів справедлива рівність:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \tilde{E}(T) = E_{кін.уст.m_2}. \quad (2.21)$$

Для того, щоб знайти показник (2.17) для кожного із законів руху (2.13)-(2.16) необхідно розв'язати задачу Коші (неоднорідне диференціальне рівняння (2.12) із початковими умовами). Права частина рівняння (2.12) змінюється для кожного закону. Початкові умови для розв'язування задачі Коші приймаємо нульовими. Для кусочного закону (2.16) розв'язувати рівняння (2.12) необхідно двічі: для проміжку $t \in [0, T_1]$ та для проміжку

$t \in [T_1, T]$, причому для другого проміжку $t \in [T_1, T]$ початкові умови є ненульовими - це кінцеві умови для проміжку $t \in [0, T_1]$ (таким чином відбувається „зшивка” розв’язків).

Не будемо зупинятись на методиці розв’язання. Запишемо отримані результати. Для лінійного закону (рис. 2.11, а) показник (2.17) рівний:

$$\tilde{E}_{lin}(T) = \frac{m_2(\cos(T\Omega_0) - 1)}{cT^2}. \quad (2.22)$$

Для U-подібного закону (рис. 2.11, б) цей показник визначається залежністю:

$$\tilde{E}_U(T) = \frac{(2m_2 + cT^2 - 2m_2(\cos(T\Omega_0) + \Omega_0 T \sin(T\Omega_0)))}{c^2 T^4}. \quad (2.23)$$

Для S-подібного закону (рис. 2.11, в) маємо:

$$\tilde{E}_S(T) = \frac{72m_2^2 \left(\sqrt{cT} \cos\left(\frac{T\Omega_0}{2}\right) - 2\sqrt{m_2} \sin\left(\frac{T\Omega_0}{2}\right) \right)^2}{c^3 T^6}. \quad (2.24)$$

Для подвійного S-подібного закону (рис. 2.11, г) вираз для показника (2.17) досить громіздкий, тому не будемо його приводити.

Вирази (2.22)-(2.24) та вираз показника (2.17) для подвійного S-подібного закону необхідно проаналізувати для того, щоб встановити раціональний параметр T , який досить легко можна налаштувати у сучасних частотних перетворювачах. Для цього побудуємо графіки отриманих функцій у одній площині (рис. 2.12).

На рис. 2.12: закону (2.13) відповідає штрихова товста лінія, закону (2.14) – штрихова тонка лінія, закону (2.15) – суцільна тонка лінія, закону (2.16) – суцільна сіра товста лінія (для побудови цього графіка прийнято, що $T_1 = 0,5T$ і $v_1 = 0,5v$). Точками на рис. 2.12 позначені величини часу T , які є кратними до тривалості періоду власних коливань динамічної системи.

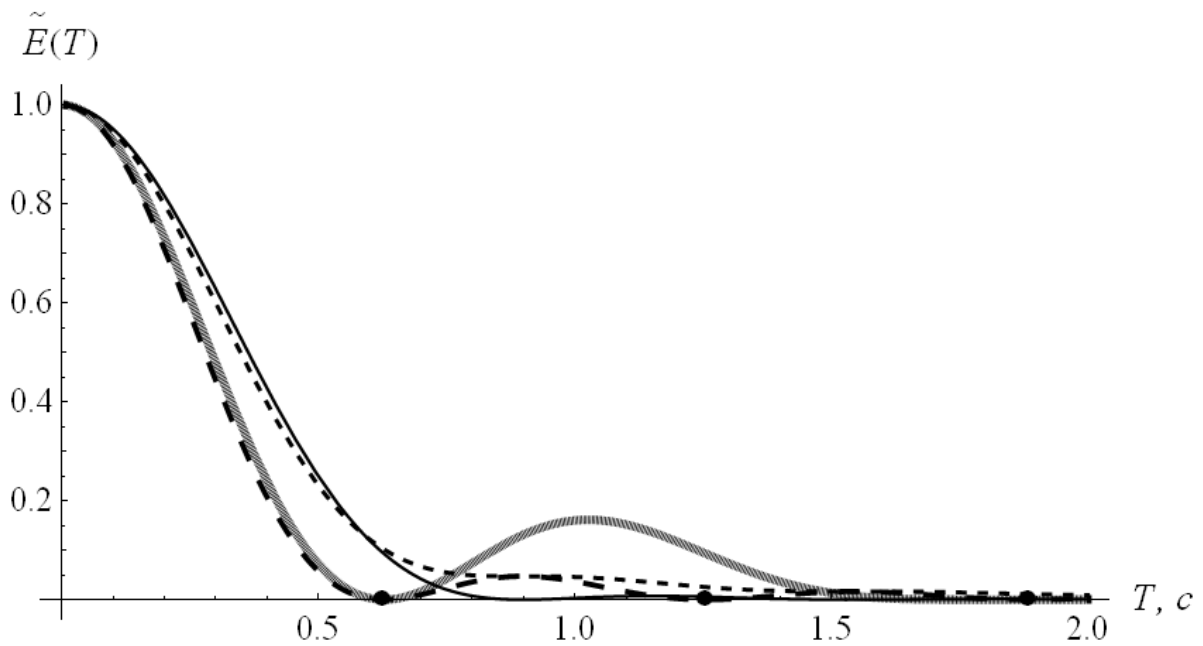


Рис. 2.12. Графіки енергії залишкових коливань веденої маси m_2 при різних законах зміни швидкості ведучої маси m_1

Тепер по-черзі проведемо аналіз графічних залежностей на рис. 2.12. Величина питомої енергії залишкових коливань для закону (2.13) стає рівною нулю у моменти часу, кратні періоду власних коливань динамічної системи. Цей висновок вже відомий у науковій літературі [13]. Якщо прийняти $\frac{2\pi}{\Omega_0} < T < \frac{4\pi}{\Omega_0}$, то коливання веденої маси залишаються, але амплітуда цих коливань є невеликою. При подальшому збільшенні тривалості розгону маси $\frac{4\pi}{\Omega_0} < T < \frac{6\pi}{\Omega_0}$ залишкові коливання продовжують зменшуватись. Однак, надмірне збільшення тривалості перехідного процесу може викликати зменшення продуктивності роботи машини та перевантаження електроприводу, особливо частотного перетворювача. Якщо невідома величина частоти власних коливань динамічної системи, то використання цього закону є небажаним, за винятком тих випадків, коли тривалість перехідного процесу не є визначальним фактором якості технологічного процесу, а електропривод може бути значно перевантажений (мається на увазі струмове перевантаження).

Для закону (2.14) відсутність коливань досягається при $T \rightarrow \infty$, що, звичайно, не є фізичним. Однак, при збільшенні тривалості перехідного процесу залишкові коливання зменшуються значно. Можна зробити висновок: використовувати закон (2.14) для розгону двомасової динамічної системи не рекомендується. Виняток може становити лише випадок значної тривалості розгону.

Закон розгону динамічної двомасової системи (2.15) має цінні властивості з позицій зниження коливань веденої маси у кінці розгону. У моменти часу:

$$T_i = \frac{2\pi\sqrt{2i}}{\Omega_0}, \quad i=1, 3, 6, 10, 15, 21\dots \quad (2.25)$$

коливання веденої маси взагалі усуваються. Після моменту часу $T > \frac{2\pi\sqrt{2}}{\Omega_0}$

коливання веденої маси залишаються, але їх енергія є дуже малою. Таким чином, можна зробити висновок: для динамічних систем, власна частота коливань яких не може бути визначена точно, а лише є приблизна їх оцінка необхідно виконувати їх розгін і гальмування за законом зміни швидкості (2.25), при цьому тривалість розгону та гальмування необхідно априорі встановлювати згідно виразу:

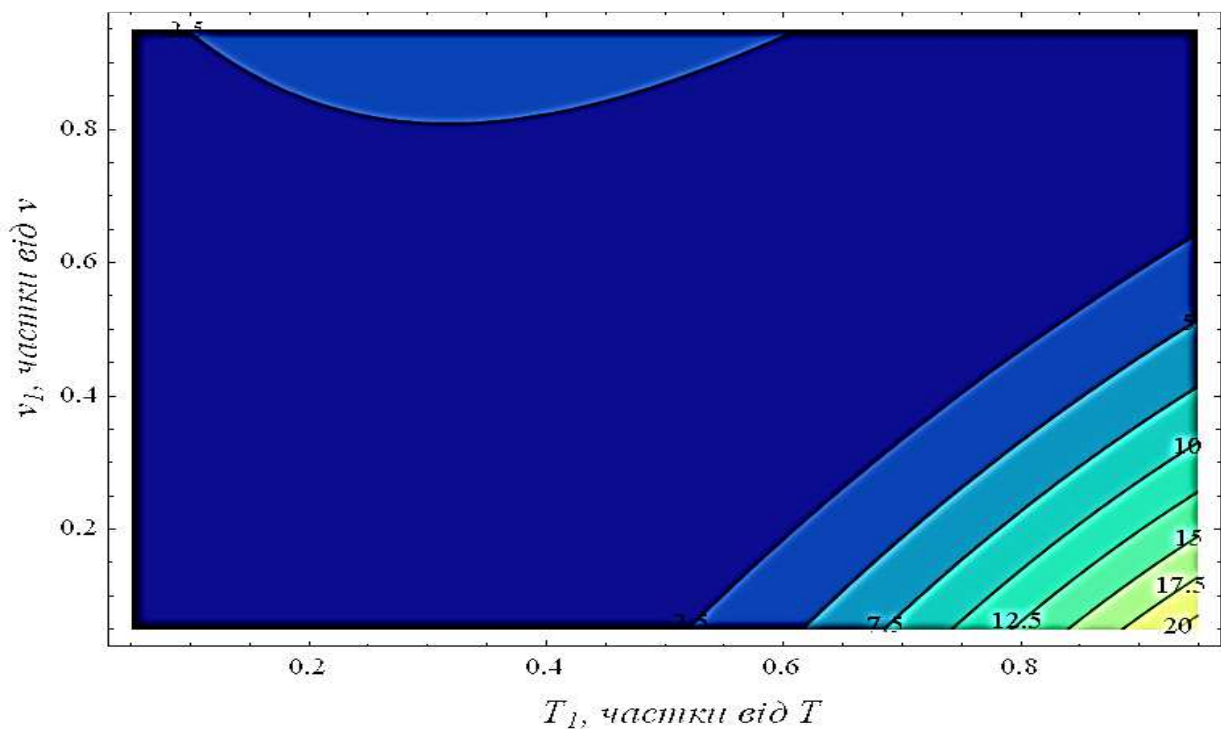
$$T \geq \frac{2\pi\sqrt{2}}{\Omega_{0\min}}, \quad (2.26)$$

де $\Omega_{0\min}$ - найменше значення оцінки частоти власних коливань динамічної системи. Таке налаштування буде гарантувати значне зменшення залишкових коливань веденої маси у кінці розгону та гальмування.

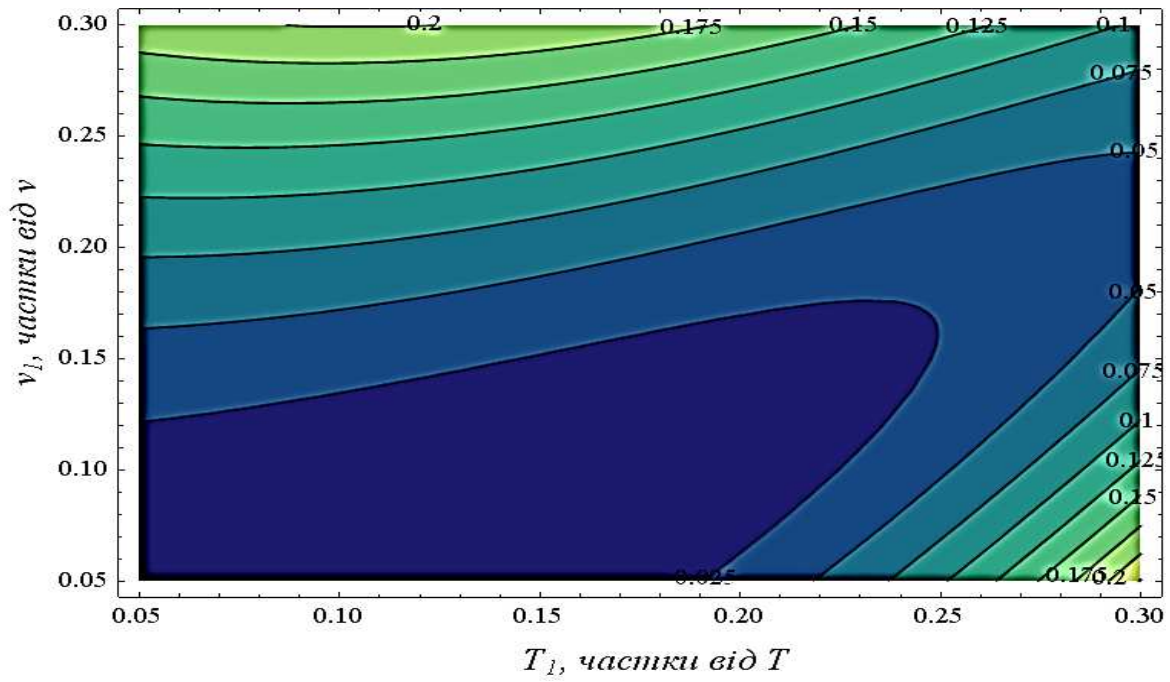
Закон руху динамічної системи, який відповідає подвійному S-подібному характеру зміни швидкості ведучої маси має такі властивості: коливання веденої маси припиняються у моменти часу:

$$T_j = \frac{j\pi}{\Omega_0}, \quad j = 2, 6, 10, 14, \dots \quad (2.27)$$

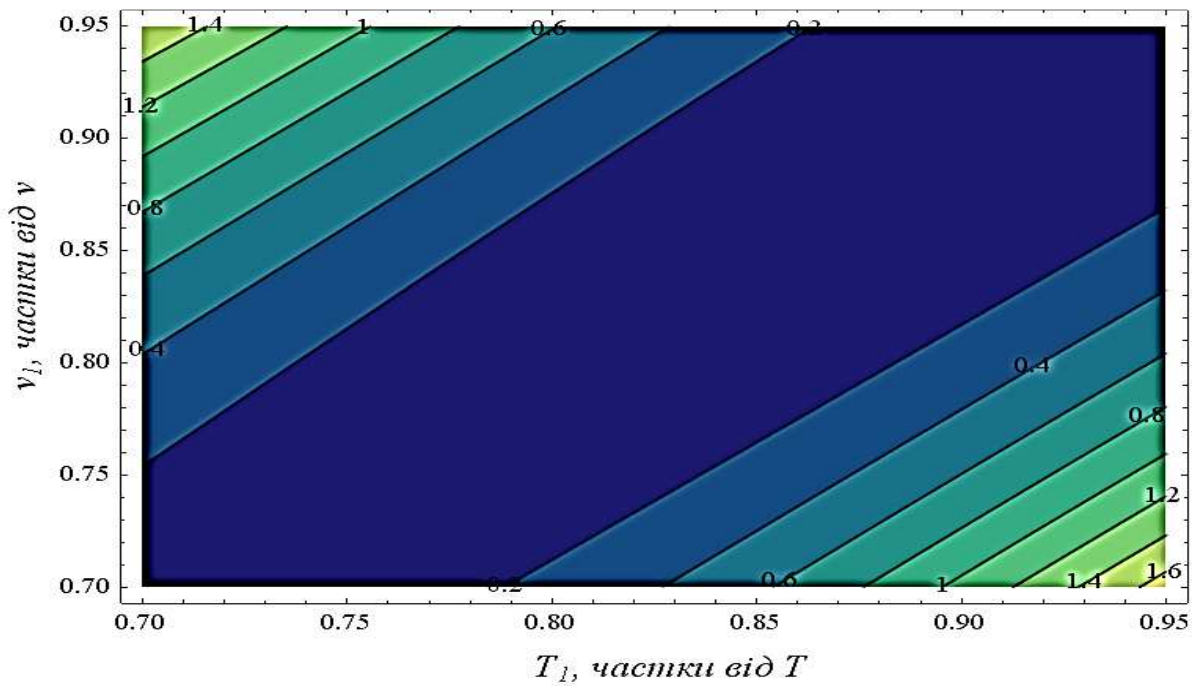
Зазначимо, що при $j=2$ коливання веденої маси усуваються – в цьому цей закон подібний до лінійного закону зміни швидкості (2.13). Однак, при $\frac{2\pi}{\Omega_0} < T < \frac{6\pi}{\Omega_0}$ залишкові коливання веденої маси мають значну енергію. Це є серйозним недоліком цього закону, тому його використання потребує обґрунтування, наприклад, виходячи із деяких технологічних аспектів. Однак, необхідно пам'ятати про те, що графік побудований на рис. 2.12 справедливий для випадку коли $T_1 = 0,5T$ і $v_1 = 0,5v$. Якщо ж змінити коефіцієнти біля величин T та v відповідно зміниться і властивості закону. На рис. 2.13 показано, як змінюється залишкова питома енергія коливань веденої маси в залежності від тривалості першого етапу T_1 та від величини проміжної швидкості v_1 .



а)



б)



в)

Рис. 2.13. Графіки функції залишкової питомої енергії коливань веденої маси в залежності від параметрів T_1 і ν_1 : а) для меж зміни параметрів $T_1 \in [0,05T; 0,95T]$ та $\nu_1 \in [0,05\nu; 0,95\nu]$; б) для меж зміни параметрів $T_1 \in [0,05T; 0,5T]$ та $\nu_1 \in [0,05\nu; 0,5\nu]$; в) для меж зміни параметрів $T_1 \in [0,7T; 0,95T]$ та $\nu_1 \in [0,7\nu; 0,95\nu]$

Лінії на рис. 2.13 із відповідними числовими позначками показують енергію залишкових коливань веденої маси. Аналізуючи отримані графіки, можна прийти до висновку про те, що існують певні комбінації T_1 та v_1 , за яких енергія коливань веденої маси є невеликою. Таким чином, попередній висновок щодо значної величини енергії залишкових коливань веденої маси при $\frac{2\pi}{\Omega_0} < T < \frac{6\pi}{\Omega_0}$ є лише частинним. Необхідно зробити таке зауваження: функція питомої енергії залишкових коливань веденої маси при законі розгону ведучої маси (2.16) є складним виразом:

$$\tilde{E}_{2s}(T) = f(T_1, T, v_1). \quad (2.28)$$

Дослідження цієї функції на мінімум є непростю задачею, яка пов'язана із необхідністю розв'язування системи трансцендентних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{E}_{2s}(T)}{\partial T_1} = 0; \\ \frac{\partial \tilde{E}_{2s}(T)}{\partial T} = 0; \\ \frac{\partial \tilde{E}_{2s}(T)}{\partial v_1} = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Крім того, ситуація ускладнюється обмеженнями накладеними на параметри:

$$\begin{cases} v_1 < v; \\ T_1 < T. \end{cases} \quad (2.30)$$

Задача (2.29)-(2.30) є досить складною задачею нелінійного програмування.

Отже, дати однозначну відповідь про те, які параметри частотного електроприводу необхідно налаштовувати (і як це зробити) для даного закону руху досить важко. Можна порекомендувати скористатись графічними залежностями приведеними на рис. 2.13.

2.3.2. Тримасова динамічна модель

Для досліджень прийємо динамічну модель, яка показана на рис. 2.14.

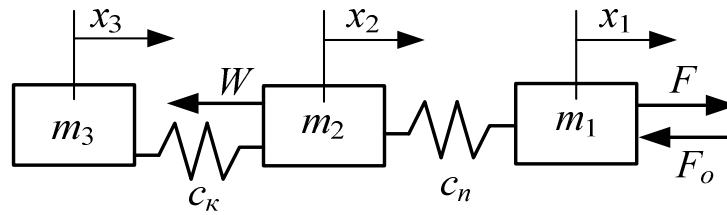


Рис. 2.14. Динамічна три масова динамічна модель крана

Така динамічна модель представляє рух крана із вантажем на гнучкому підвісі і, крім того, враховує динамічні процеси, які виникають у приводі крана. Прийнята динамічна модель описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_n (x_1 - x_2) + F_o = F; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_k (x_2 - x_3) + W = c_n (x_1 - x_2); \\ m_3 \ddot{x}_3 = c_k (x_2 - x_3), \end{cases} \quad (2.31)$$

де m_1 – приведена до поступального руху маса рухомих елементів приводу; m_2 – приведена до поступального руху маса крана (кранового візка); m_3 – приведена до поступального руху маса вантажу; x_1, x_2, x_3 – координати центрів відповідних мас, F – приведене приводне (тягове або гальмівне) зусилля приводу; F_o – приведена сила сухого тертя у приводі; W – сила опору переміщенню крана; c_n – приведена жорсткість приводу; c_k – приведена поперечна жорсткість гнучкого підвісу [22] ($c_k = m_3 \frac{l}{g}$).

Параметром, який задає рух у системі є зусилля F . Однак, будемо досліджувати динаміку системи при заданні швидкості маси m_1 . Це відповідає заданню частоти напруги живлення двигуна, що виконується частотним перетворювачем. Варто відмітити, що сучасні частотні перетворювачі мають досить гарні динамічні показники, щодо керування швидкістю руху двигуна.

Для оцінки руху крана із вантажем на гнучкому підвісі необхідно знайти вираз $x_3 = x_3(x_1)$. Пояснимо чому саме таку функцію необхідно шукати. Якщо буде відома функція x_3 , то функцію x_2 неважко буде знайти із третього рівняння системи (2.31). Для цього подамо третє рівняння системи (2.31) у такому вигляді:

$$x_2 = x_3 + \frac{m_3}{c_k} \ddot{x}_3. \quad (2.32)$$

Отже, знайшовши залежність $x_3 = x_3(x_1)$, можна легко записати всі функції x_1 , x_2 та x_3 . Залежність $x_3 = x_3(x_1)$ представляється у вигляді диференціального рівняння, яке можна отримати із системи рівнянь (2.31):

$$x_3^{IV} + \ddot{x}_3 A_1 + x_3 A_2 = x_1 \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} + A_3, \quad (2.33)$$

де A_1 , A_2 , A_3 - коефіцієнти, що залежать від параметрів системи

$$\left(A_1 = \frac{\left(\frac{m_3}{c_k} + \frac{m_3}{c_n} + \frac{m_2}{c_n} \right) c_n c_k}{m_2 m_3}, A_2 = \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}, A_3 = -W \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} \right).$$

Диференціальне рівняння (2.33) є неоднорідним. Його розв'язок є сумою загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Перший доданок завжди буде один і той самий:

$$x_3^* = C_1 e^{t \sqrt{\frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}}} + C_2 e^{-t \sqrt{\frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}}} + C_3 e^{t \sqrt{\frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}}} + C_4 e^{-t \sqrt{\frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}}}. \quad (2.34)$$

де C_1 , C_2 , C_3 , C_4 - постійні інтегрування. Другий буде залежати від виду функції x_1 : $x_3^{**} = x_3^{**}(x_1)$. Будемо задавати „стандартні” закони зміни частоти напруги живлення двигуна, які реалізує частотний перетворювач (2.13)-(2.15).

Крім того, оцінімо динаміку кранової системи при такому законі руху маси m_1 :

$$\dot{x}_1 = \frac{t^3}{T^5} v(6t^2 - 15Tt + 10T^2). \quad (2.35)$$

Закон (2.35) умовно назвемо S-подібним плавним. На рис. 2.15. показано графік функції (2.35) при $v=1\text{ м/с}$ та $T=1\text{ с}$.

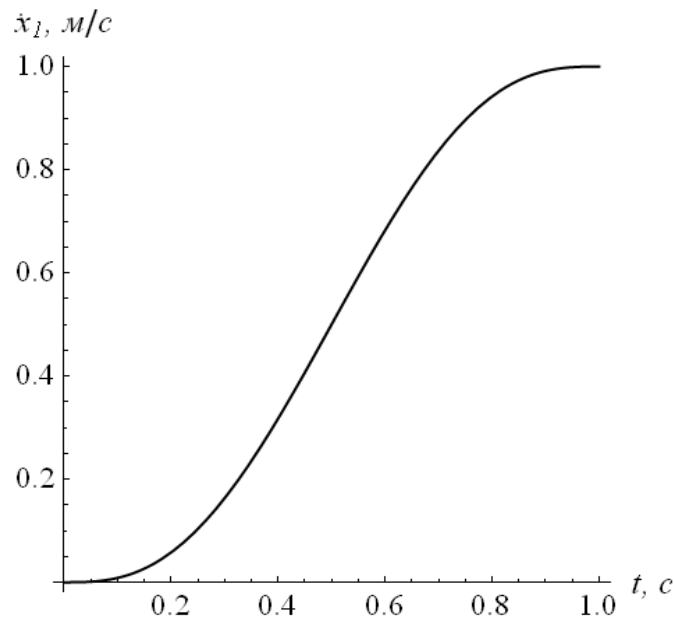


Рис. 2.15. S – подібний плавний закон зміни швидкості маси m_1 при розгоні

Розв’язок диференціального рівняння (2.33) включає чотири постійні інтегрування. Для їх знаходження необхідно задати початкові умови. Будемо розглядати рух кранової системи протягом пуску. Тоді початковими умовами для всіх фазових координат є нульові:

$$\begin{cases} x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0; \\ x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0; \\ x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Із умов (2.36) можна записати початкові умови руху маси m_3 :

$$x_3(0) = \dot{x}_3(0) = \ddot{x}_3(0) = \ddot{\ddot{x}}_3(0) = 0. \quad (2.37)$$

Тепер запишемо праві частини диференціального рівняння (2.33) для законів руху (2.13)-(2.15), (2.35). Для лінійного закону (2.13):

$$x_1 \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} + A_3 = t^2 B_1 + A_3, \quad (2.38)$$

де B_1 - коефіцієнт ($B_1 = \frac{v}{2T} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$). Для U-подібного закону (2.14):

$$x_1 \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} + A_3 = t^3 D_1 + t^2 D_2 + A_3, \quad (2.39)$$

де D_1, D_2 - коефіцієнти ($D_1 = \frac{-v}{3T^2} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$, $D_2 = \frac{v}{T} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$). Для S-подібного закону (2.15):

$$x_1 \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} + A_3 = t^4 E_1 + t^3 E_2 + A_3, \quad (2.40)$$

де E_1, E_2 - коефіцієнти ($E_1 = \frac{-v}{3T^3} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$, $E_2 = \frac{v}{T^2} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$). Для S-подібного плавного закону (2.35):

$$x_1 \frac{c_n c_k}{m_2 m_3} + A_3 = t^6 G_1 + t^5 G_2 + t^4 G_3 + A_3, \quad (2.41)$$

де G_1, G_2, G_3 - коефіцієнти ($G_1 = \frac{v}{T^5} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$, $G_2 = \frac{-3v}{T^4} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$, $G_3 = \frac{5v}{2T^3} \frac{c_n c_k}{m_2 m_3}$).

Тепер необхідно задатись показником, за яким будемо проводити оцінку динаміки руху кранової динамічної системи. Таким показником оберемо відносну енергію залишкових коливань елементів крана, аналогічну тій, яка використовувалась у попередньому пункті (2.17). Залишкова потенціальна енергія у крановій системі, при якій небажані коливання його елементів будуть присутні, знаходиться за таким виразом:

$$E_{nom}(T) = \frac{c_n}{2} \left(x_1(T) - x_2(T) - \frac{W}{c_n} \right)^2 + \frac{c_k}{2} (x_2(T) - x_3(T))^2. \quad (2.42)$$

Такий вираз означає суму потенціальних енергій у пружних елементах c_n та c_k , причому для подолання опору руху W пружний зв'язок c_n повинен бути розтягнутий, а отже повинен мати певну енергію. Ця енергія повинна залишатись при усталеному русі, тобто коли коливання елементів крана відсутні. Тому у виразі (2.42) у перших дужках міститься доданок $-\frac{W}{c_n}$.

Залишкова кінетична енергія у крановій системі, при якій небажані коливання його елементів будуть присутні, знаходиться за таким виразом:

$$E_{кин}(T) = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2(T) - v)^2 + \frac{m_3}{2} (\dot{x}_3(T) - v)^2. \quad (2.43)$$

Вираз (2.43) означає суму кінетичних енергій коливань мас m_2 та m_3 відносно маси m_1 у кінці розгону крана із вантажем.

Подальший аналіз показує, що для всіх законів справедлива рівність:

$$E(T)_{T \rightarrow 0} = \lim_{T \rightarrow 0} (E_{nom}(T) + E_{кин}(T)) = \frac{1}{2} \left((m_2 + m_3)v^2 + \frac{W^2}{c_n} \right). \quad (2.44)$$

Тому будемо проводити оцінку динаміки руху кранової системи за таким показником:

$$\tilde{E}(T) = \frac{E_{кин}(T) + E_{nom}(T)}{E(T)_{T \rightarrow 0}}. \quad (2.45)$$

Таким чином, показник (2.45) дає змогу оцінити відносну енергію залишкових небажаних коливань у приводі крана та коливань вантажу відносно точки його закріплення в залежності від тривалості розгону крана. Даний показник є безрозмірним, оскільки чисельник і знаменник мають однакові розмірності (Джоуль). Надалі для кожної правої частини (2.38)-

(2.41) диференціального рівняння (2.33) необхідно знайти частинний розв'язок. Сумуючи загальний розв'язок (2.34) однорідного диференціального рівняння та знайдені частинні неоднорідні розв'язки, отримаємо невідомі функції переміщення маси m_3 для різних законів руху маси m_1 (2.13)-(2.15), (2.35). Не будемо зупинятись на описі вказаних розрахунків та не будемо приводити остаточні результати для показника (2.45), оскільки вони мають значний об'єм. Приведемо лише графічну інтерпретацію отриманих результатів (рис. 2.16). На рис. 2.16: закону (2.13) відповідає штрихова товста лінія, закону (2.14) – суцільна тонка лінія, закону (2.15) – штрихова тонка лінія, закону (2.35) – суцільна сіра товста лінія. Точками на рис. 2.26 позначені величини часу T , які є кратними до тривалості періоду власних коливань динамічної двомасової кранової системи, тобто:

$$T = i\pi \sqrt{\frac{m_3}{c_k}}, \quad i = 2, 4, 6... \quad (2.46)$$

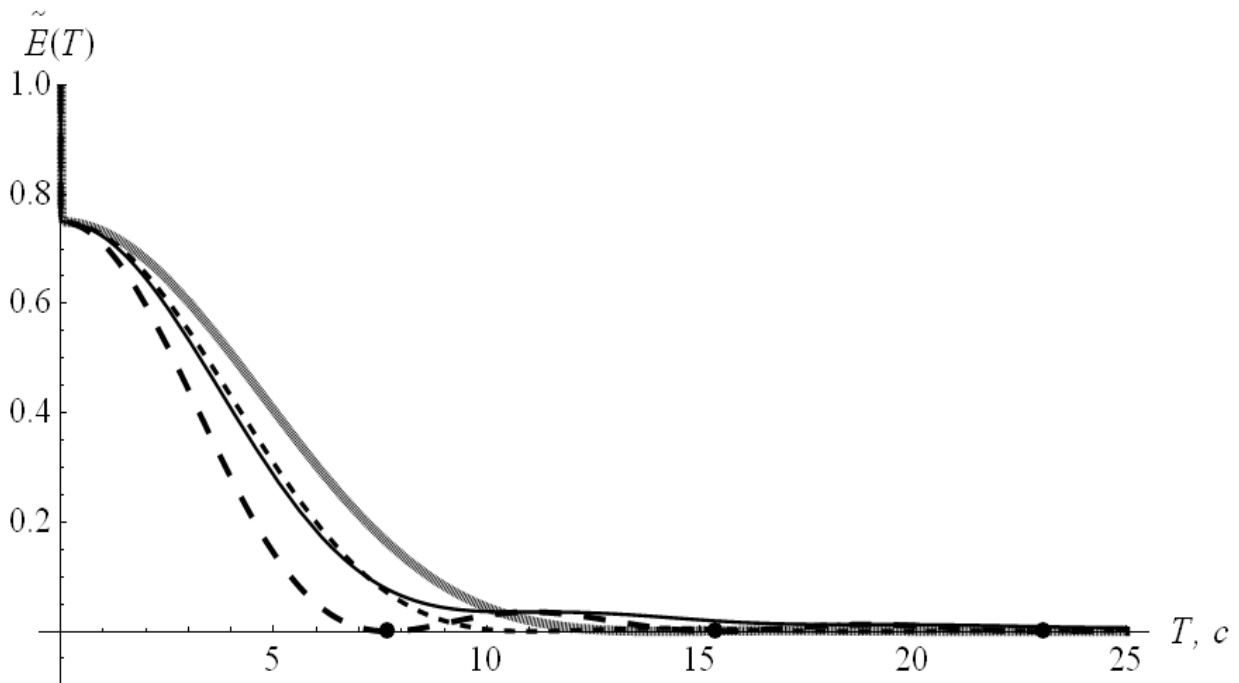


Рис. 2.16. Графіки відносної залишкової енергії коливань елементів крана при різних законах зміни швидкості маси m_1

Із графіків на рис. 2.16. видно, що енергія залишкових коливань зі збільшенням тривалості перехідного процесу зменшується. Цікавим є те, що на початку графіків йде стрибок відносної енергії (показника (2.45)). Для з'ясування природи цього стрибка графіка приведемо аналогічний рисунок, але для значно меншої тривалості розгону (рис. 2.17).

Через значні осциляції графік функції (2.45) для S-подібного плавного закону ми не приводимо. Аналіз приведених графіків показує, що вже незначна (фізично нереалізована) тривалість розгону дає значне зменшення енергії коливань. Це відбувається за рахунок зменшення енергії коливань маси m_2 , яка становить частину $\frac{m_2}{m_2 + m_3}$ від всієї енергії коливань.

Для побудови графіків використовувались такі параметри: $m_1 = 100 \text{ кг}$, $m_2 = 500 \text{ кг}$, $m_3 = 1500 \text{ кг}$, $c_n = 5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$, $c_k = 10^3 \text{ Н/м}$, $W = 0,2 \cdot m_2 g$ (при таких параметрах частота коливань у приводі рівна 100 Гц, а вантажу відносно точки його закріплення 0,8 Гц). Тому одна четверта енергії коливань елементів крана „зникає” вже при незначній тривалості розгону крана.

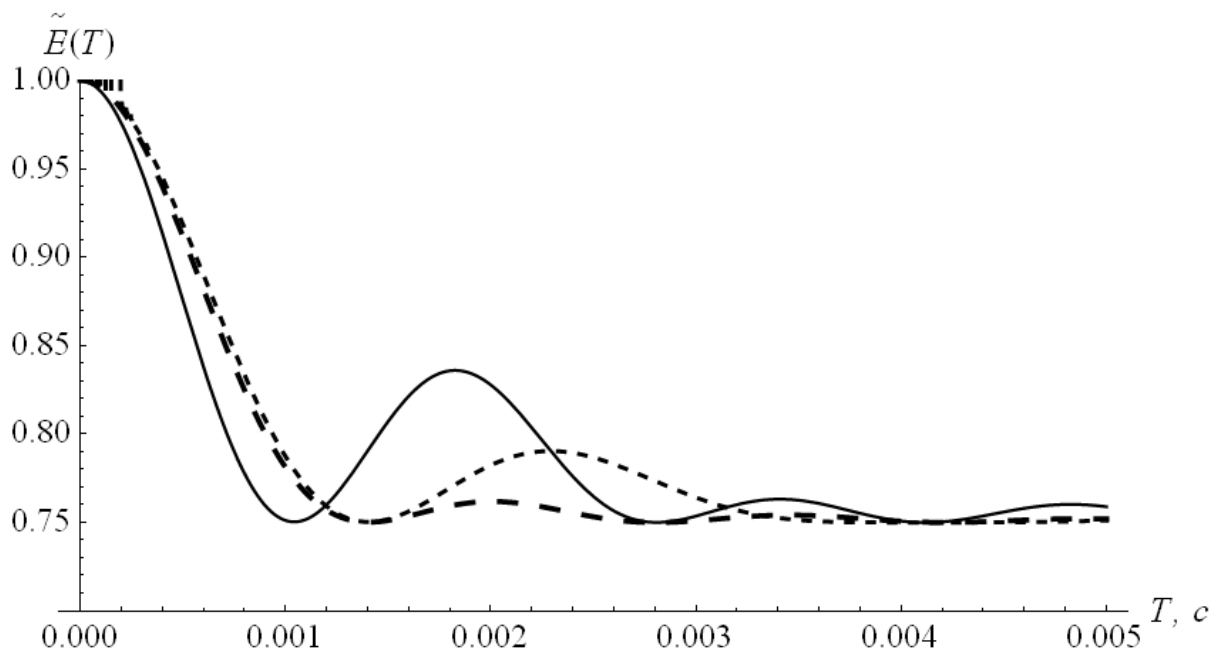


Рис. 2.17. Графіки енергії залишкових коливань елементів крана при різних законах зміни швидкості маси m_1 для невеликої тривалості розгону цієї маси

Отже, фізично реалізовані тривалості перехідних процесів (одиниці секунд) крана дають змогу усунути високочастотні коливання у його приводі. Даний висновок також можна „підкріпити” таким чином: у моделі (2.31) не враховане в’язке тертя у приводі. Якщо його врахувати, то отримаємо ще швидше затухання енергії коливань. Аналіз графіка для закону (2.13) на рис. 2.16 показує, що енергія коливань перетворюється у нуль при (2.46). Якщо наперед невідомі значення m_3 та c_k , то використовувати цей закон не рекомендується. При такій ситуації (m_3 та c_k невідомі) варто використовувати закон (2.15) або (2.35). В останньому випадку необхідно збільшувати тривалість перехідного процесу щоб досягти значного зменшення енергії коливань. Закон (2.14) також не рекомендується використовувати, оскільки енергія залишкових коливань є відносно значною навіть при значній тривалості розгону. Загалом, висновки щодо отриманих графіків (рис. 2.16) можна перенести із дослідження двомасової динамічної моделі крана із вантажем, в якій не враховується приведена пружність приводу. Приведемо графіки на рис. 2.18 у іншому масштабі – це дозволить проаналізувати залишкову величину показника (2.45) для значної тривалості перехідного процесу.

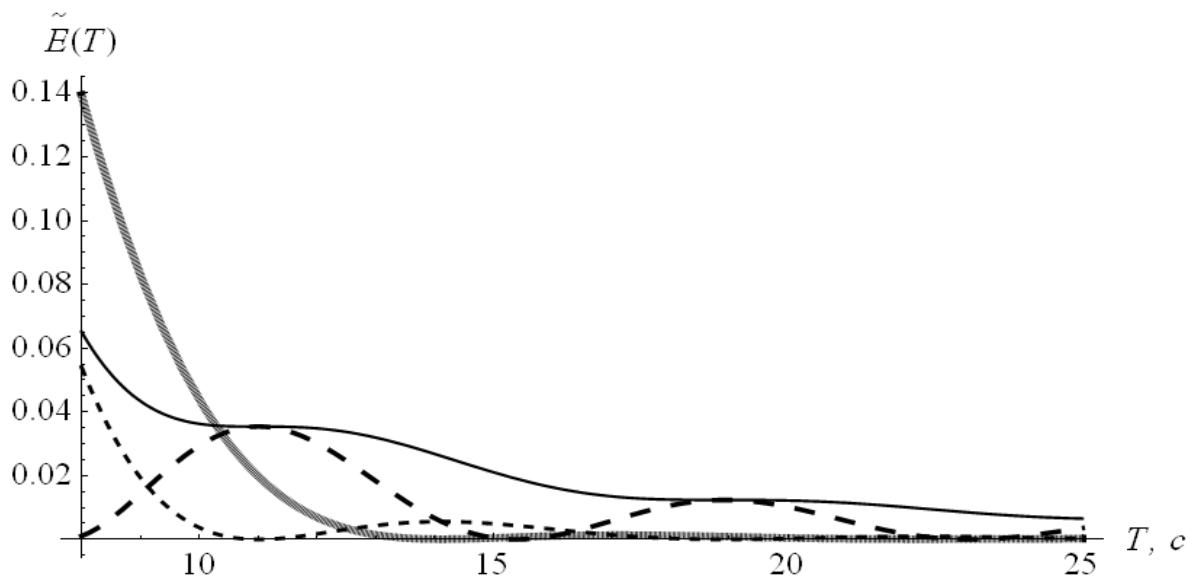


Рис. 2.18. Графіки енергії залишкових коливань елементів крана та вантажу при різних законах зміни швидкості маси m_1 для значної тривалості розгону

Із рис. 2.18 можна зробити висновок: збільшення тривалості перехідного процесу дозволяє зменшити показник (2.45) – для всіх законів (2.13)-(2.15), (2.35). Крім того, збільшення плавності руху приводу крана зумовлює певні зміни у динаміці крана. Ці зміни полягають у тому, що зі збільшенням плавності руху необхідно збільшувати тривалість перехідного процесу для досягнення практичної відсутності енергії залишкових коливань елементів крана.

2.4. Раціональне та оптимальне керування краном із частотно-керуваним приводом

Для керування крановими механізмами переміщення останнім часом досить часто використовують частотні перетворювачі [23-25]. Вони практично витіснили традиційні електроприводи постійного струму та приводи на основі асинхронних двигунів із фазним ротором. Дійсно, частотно-керувані електроприводи наближаються за своїми регульовальними властивостями до двигунів постійного струму і навіть в дечому їх перевищують. За енергетичними показниками частотне керування, як відомо [26, 27], є надзвичайно ефективним. Таким чином, необхідно чітко знати властивості (регульовальні, енергетичні, динамічні) сучасного частотного приводу та вміти їх використовувати. Що стосується кранових механізмів, то тут використання частотного електроприводу пов'язане із важливою задачею – усуненням коливань вантажу закріпленого на гнучкому підвісі. Необхідно знаходити певний компроміс між задачами усунення коливань вантажу і використання електроприводу без перевантажень. Для цього потрібно синтезувати керування, яке б задовольняло вказані вимоги. Однак, більш ефективним буде керування, яке дає змогу поєднати вказані задачі і, більше того, задовольнити деякі додаткові вимоги, які формулюються у вигляді критеріїв оптимізації руху крана із вантажем.

Задачею усунення коливань вантажу закріпленого на гнучкому підвісі займалось багато дослідників [10-14, 28-33]. Ці дослідження базувались на методах оптимального керування: варіаційного числення, принципу максимуму, динамічного програмування та теорії моментів. Отримані результати є оптимальними за певними критеріями: енергетичними, швидкодії, кінематичними, динамічними тощо. Необхідно зазначити, що оптимальні за одними критеріями закони руху крана є неоптимальними за іншими. Наприклад, оптимальне за швидкодією керування є неоптимальним за енергетичними витратами, динамічними та кінематичними показниками. Це пояснюється тим, що у процесі руху крана його швидкість може змінювати свій знак на протилежний, що досягається за рахунок реверсування електроприводу. При цьому витрачається значна кількість електроенергії. Зміна знаку електромагнітного моменту двигуна при оптимальному керуванні викликає підвищення коефіцієнту динамічності у приводі крана: отже такий режим руху є неоптимальним за цим показником.

Крім того, існує значний масив результатів, присвячених задачі усунення коливань вантажу на гнучкому підвісі, які можна назвати раціональними. Для їх знаходження не використовуються методи оптимального керування, а інші методи, наприклад нечіткої логіки [34, 35]. Результати оптимізації за допомогою цього методу мають свої недоліки та переваги. Головна їх перевага – керування представляється у вигляді зворотного зв'язку, а головний недолік – значна амплітуда коливань вантажу протягом процесу усунення коливань, що у деяких випадках неприпустимо із технологічних міркувань.

Для проведення досліджень прийнято динамічну модель, яка показана на рис. 2.19. Таку динамічну модель використовували багато дослідників [10-14, 28-33]. Приведена на рис. 2.19. модель руху крана із гнучким підвісом вантажу описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = F - W \operatorname{sign} \dot{x}_1; \\ \ddot{x}_2 + \frac{g}{l} (x_2 - x_1) = 0, \end{cases} \quad (2.47)$$

де m_1 – приведена до поступального руху маса приводного механізму і крана; m_2 – маса вантажу; x_1, x_2 – координати центрів мас відповідно крана і вантажу; F – сумарне тягове або гальмівне зусилля, що діє на кран; W – приведена сила опору переміщенню крана.

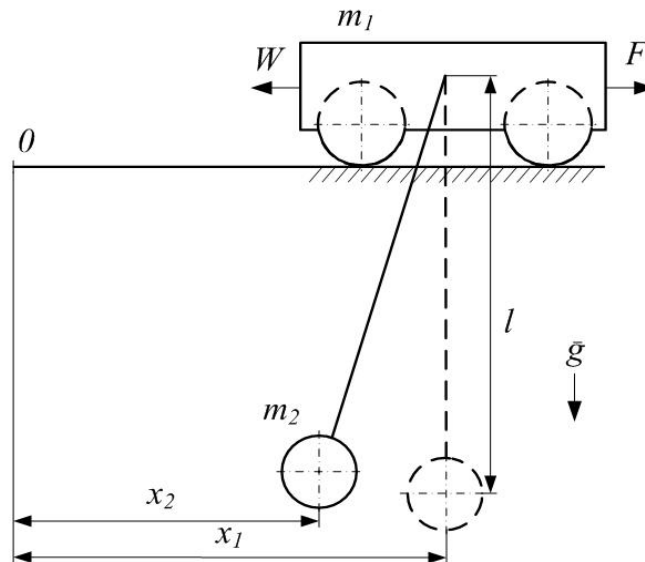


Рис. 2.19. Динамічна модель крана із вантажем на гнучкому підвісі

Будемо вважати, що при переміщенні крана протягом розгону він не змінює свою швидкість, тобто $\text{sign } \dot{x}_1 = 1$. Дане твердження обґрунтовується такими положеннями: приймемо, що кран (точка підвісу вантажу) рухається за таким законом:

$$x_1 = \begin{cases} \frac{t^2 v_1}{2T_1^2}, \text{ при } t \in [0, T_1]; \\ v_1 \left(t - \frac{T_1}{2} \right), \text{ при } t \in [T_1, T_1 + \Delta T]; \\ \frac{v_1(t^2 - T_1^2 - 2t\Delta T + (T_1 + \Delta T)^2)}{2T_1}, \text{ при } t \in [T_1 + \Delta T, 2T_1 + \Delta T], \end{cases} \quad (2.48)$$

де v_1 - проміжна швидкість руху крана; T_1 - тривалість розгону крана до заданої швидкості; ΔT - тривалість руху крана на проміжній швидкості v_1 ; t - час. Для проведення подальших досліджень приймемо, що:

$$v_1 = \frac{v}{2}, \quad (2.49)$$

де v - усталена швидкість руху крана. Вираз (2.49) використовується лише в рамках даного дослідження і не є універсальним.

Для того, щоб наочно оцінити рух крана приведемо його графік зміни швидкості при розгоні (рис. 2.20).

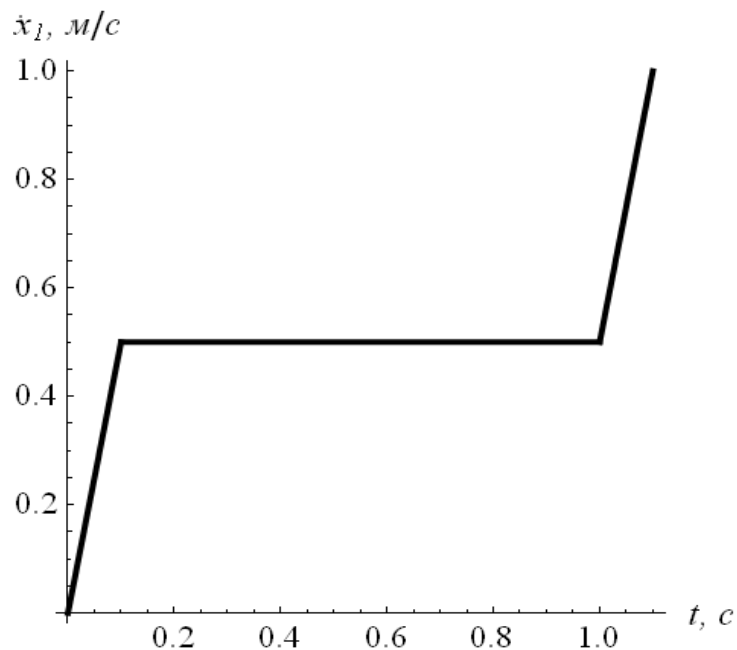


Рис. 2.20. Графік зміни швидкості крана протягом розгону

Для побудови цього графіка прийнято: $v = 1 \text{ м/с}$, $\Delta T = 0,9 \text{ с}$, $T_1 = 0,1 \text{ с}$.

Зазначимо, що діаграма зміни швидкості приведена на рис. 2.20 досить легко реалізується за допомогою сучасного частино-керованого приводу. Для цього необхідно провести лише три налаштування: встановити дві номінальні швидкості, причому перша у двічі менша другої, а друга рівна швидкості усталеного руху крана, також необхідно встановити тривалість розгону T_1 .

Надалі знайдемо закони руху вантажу для кожного етапу: для $t \in [0, T_1]$, $t \in [T_1, T_1 + \Delta T]$ і для $t \in [T_1 + \Delta T, 2T_1 + \Delta T]$. Знаходження законів руху вантажу пов'язане із розв'язуванням диференціального рівняння:

$$x_{2i} + \Omega_0^{-2} \ddot{x}_{2i} = x_{1i}, \quad (2.50)$$

де x_{2i} - шуканий закон руху вантажу на i -тому етапі руху; x_{1i} - закон руху крана на i -тому етапі руху; Ω_0 - частота власних коливань нерухомого маятника ($\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$). Показник i пробігає значення від 1 до 3 по мірі руху крана із вантажем. Приймаємо нульовими початкові умови для першого етапу руху. Для другого та третього етапів руху вантажу початкові умови знаходяться за умовою „зшивки” розв’язків, тобто кінцеві умови для першого етапу є початковими для другого, аналогічно кінцеві умови для другого етапу є початковими для третього.

Не будемо приводити хід розв’язку приведеної задачі, а лише запишемо остаточні результати:

$$x_2 = \begin{cases} \frac{1}{2T_1\Omega_0^2} (v_1(-2 + t^2\Omega_0^2 + 2\cos(t\Omega_0))), & \text{при } t \in [0, T_1]; \\ \frac{1}{2\Omega_0^2} ((2t - T_1)v_1\Omega_0 + (2x_2(T_1) - T_1v_1)\Omega_0 \cos((t - T_1)\Omega_0) + 2(\dot{x}_2(T_1) - v_1) \times \\ \times \sin((t - T_1)\Omega_0)), & \text{при } t \in [T_1, T_1 + \Delta T]; \\ \frac{1}{2T_1\Omega_0^2} (v_1(-2 + (t^2 + 2tT_1 - T_1^2 - 2t(T_1 + \Delta T)^2 + (T_1 + \Delta T)^2)\Omega_0^2) + (2v_1 + T_1 \times \\ \times (T_1v_1 - 2(T_1 + \Delta T)v_1 + 2\dot{x}_2(T_1 + \Delta T))\Omega_0^2) \cos((t - T_1 - \Delta T)\Omega_0) + 2T_1(\dot{x}_2(T_1 + \\ + \Delta T) - v_1)\Omega_0 \sin((t - T_1 - \Delta T)\Omega_0)), & \text{при } t \in [T_1 + \Delta T, 2T_1 + \Delta T]. \end{cases} \quad (2.51)$$

Знайдемо тепер вирази, які описують кінцеві значення положення та швидкості вантажу:

$$x_2(2T_1 + \Delta T) = \frac{v_1}{T_1\Omega_0^2} (-1 + T_1(2T_1 + \Delta T)\Omega_0^2 + \cos(T_1\Omega_0) - \cos((T_1 + \Delta T)\Omega_0) + \cos((2T_1 + \Delta T)\Omega_0)), \quad (2.52)$$

$$\dot{x}_2(2T_1 + \Delta T) = \frac{v_1}{T_1\Omega_0} (2T_1\Omega_0 - \sin(T_1\Omega_0) + \sin((T_1 + \Delta T)\Omega_0) - \sin((2T_1 + \Delta T)\Omega_0)). \quad (2.53)$$

На основі виразів (2.52) та (2.53) знайдемо формулу, яка описує енергію залишкових коливань вантажу на гнучкому підвісі:

$$E(2T_1 + \Delta T) = E_{кин}(2T_1 + \Delta T) + E_{ном}(2T_1 + \Delta T) = \frac{m_2 v_1^2}{2T_1^2 \Omega_0^2} (2 - 2\cos(T_1 \Omega_0) - 2\cos(\Delta T \Omega_0) + 2\cos((T_1 + \Delta T)\Omega_0) - \cos((2T_1 + \Delta T)\Omega_0)) \Omega_0. \quad (2.54)$$

де $E_{кин}(2T_1 + \Delta T)$ - кінетична енергія коливань вантажу в момент часу $2T_1 + \Delta T$, тобто у момент закінчення розгону крана; $E_{ном}(2T_1 + \Delta T)$ - потенціальна енергія коливань вантажу в момент часу $2T_1 + \Delta T$.

Поставимо задачу: знайти розв'язок рівняння:

$$E(2T_1 + \Delta T) = 0 \quad (2.55)$$

відносно параметра ΔT . Рівняння (2.55) є трансцендентним алгебраїчним рівнянням розв'язок якого представляється у такому вигляді:

$$\Delta T = \frac{\pi}{\Omega_0} - T_1. \quad (2.66)$$

Приведемо порівняння за швидкодією усунення коливань вантажу отриманого та відомого [13] способів. Для цього побудуємо графік функції тривалості процесу усунення коливань вантажу від аргументу довжини гнучкого підвісу (рис. 2.21).

На рис. 2.21 штриховою лінією зображено графік для способу описаного в [13]. Аналізуючи графіки приведені на рис. 2.21 можна прийти до висновку, що до деякої межі тривалості T_1 закон руху крана (2.48) за швидкодією переважає „базовий” закон, запропонований у праці [13]. Можна просто отримати значення T_1 при якому ще доцільно за критерієм швидкодії використовувати закон руху (2.48). Для цього необхідно розв'язати рівняння, яке встановлює рівність тривалостей розгону за законами (2.48) та за

„базовим” законом [13]. У розгорнутому вигляді це рівняння записується таким чином:

$$T_1 + \frac{\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0} \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}. \quad (2.67)$$

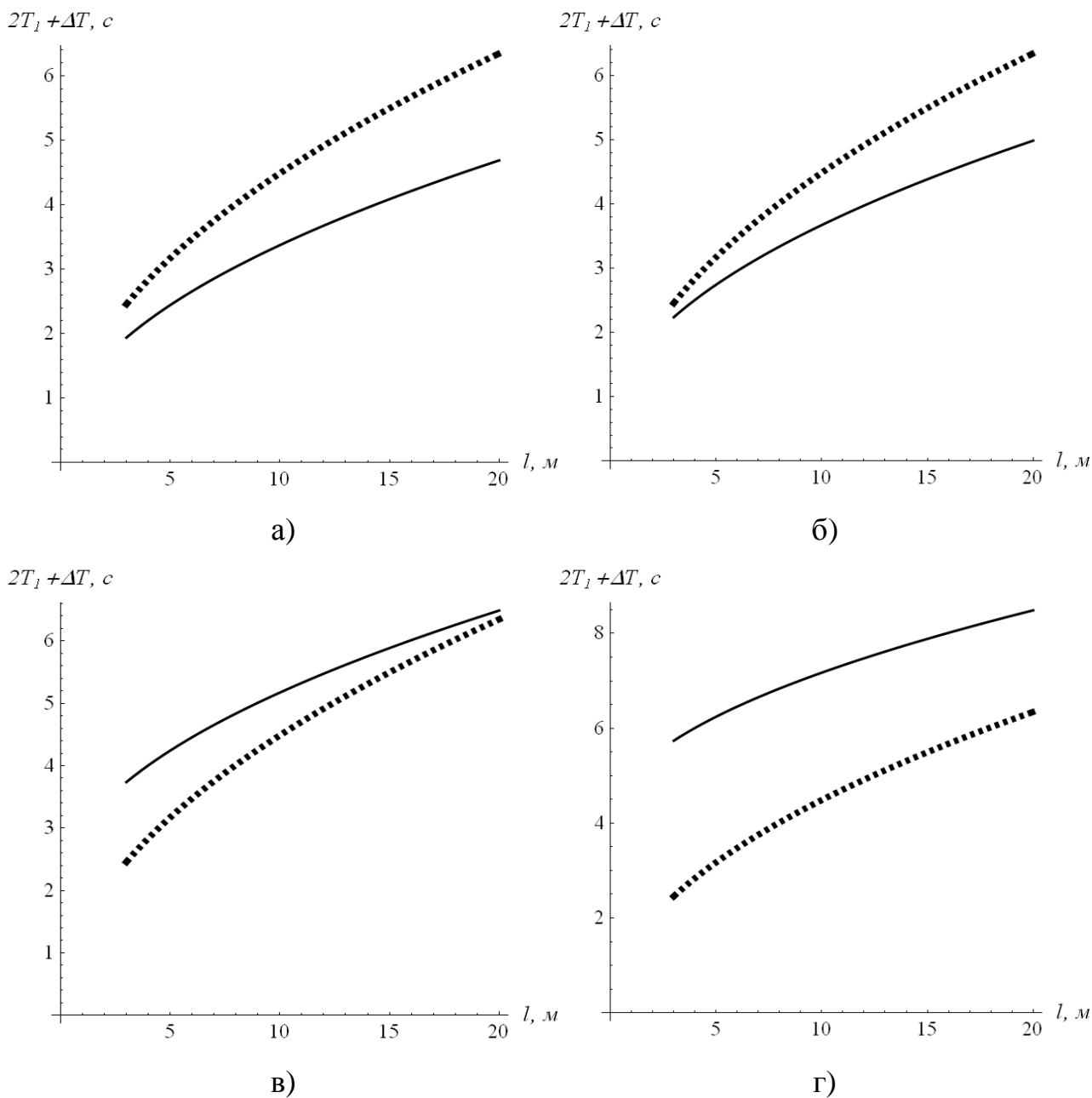


Рис. 2.21. Графіки тривалості розгону до номінальної швидкості крана при різній тривалості розгону до проміжної швидкості $T_1 = 0,2\text{ c}$ (а), $T_1 = 0,5\text{ c}$ (б), $T_1 = 2\text{ c}$ (в), $T_1 = 4\text{ c}$ (г)

Розв’язок рівняння (2.67) такий:

$$T_1 = \frac{\pi}{\Omega_0} \left(2 \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} - 1 \right). \quad (2.68)$$

Приведемо графіки функції динамічної складової приводного зусилля, яке дозволяє реалізувати заданий спосіб (рис. 2.22.).

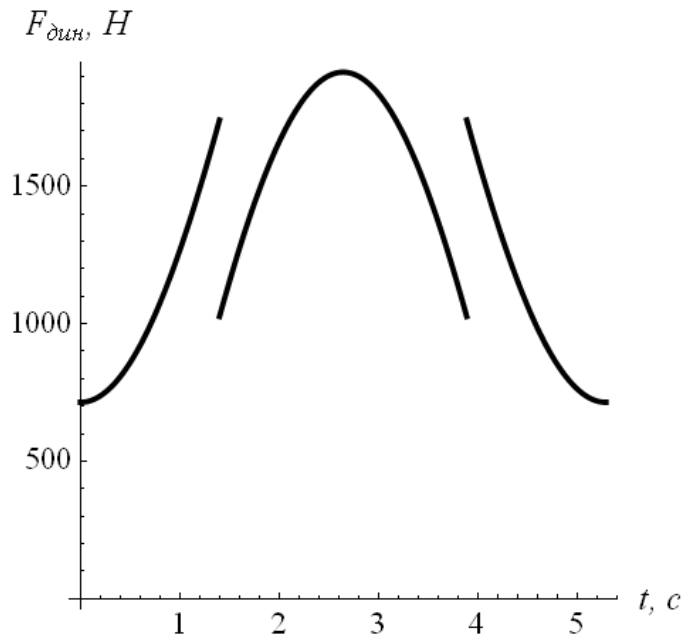


Рис. 2.22. Графік зміни динамічної складової зусилля приводу для закону руху (2.48) і (2.66)

Аналізуючи графік функції динамічної складової приводного зусилля приходимо до висновку, що вона (функція) має розривний характер. Подальший аналіз способу усунення коливань вантажу показує його цінну властивість: незмінність знаку динамічної складової приводного зусилля. Динамічна складова приводного зусилля згідно першого рівняння системи (2.47) записується таким чином:

$$F_{дин} = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2. \quad (2.69)$$

Дійсно, прискорення крана – це кусочно-постійна функція, яка не має від’ємних значень: перший та третій етапи кран рухається із додатнім прискоренням, а другий із нульовим. Що стосується прискорення вантажу, то

аналіз цієї функції дає змогу встановити те, що вона також додатна на всьому проміжку розгону крана. Таким чином, є справедливою нерівність $F_{дин} \geq 0$.

Огляд патентної інформації показує, що спосіб описаний вище, є відомим – він запатентований фірмою Konecranes [36, 37]. Перейдемо до недоліків способу. Головний недолік даного способу керування рухом крана – розривність функції $F_{дин}$. Крім того, на початку та у кінці розгону $F_{дин}$ не дорівнює нулю, що додатково збільшує динамічну навантаженість кранового приводу та викликає струмові перевантаження електродвигуна та частотного перетворювача. Звичайно ці небажані властивості можна зменшити шляхом подовження тривалості розгону крана до проміжної швидкості.

Поставимо задачу: знайти таке керування, при якому б забезпечувались вимоги щодо невід'ємності функції $F_{дин}$ із одночасною мінімізацією термінальних критеріїв:

$$\begin{cases} F_{дин}^2(0) \rightarrow \min; \\ F_{дин}^2(2T_1 + \Delta T) \rightarrow \min. \end{cases} \quad (2.70)$$

Абсолютні мінімуми термінальних функціоналів (2.70) досягаються за умов:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(0) = \ddot{x}_2(0) = 0; \\ \ddot{x}_1(2T_1 + \Delta T) = \ddot{x}_2(2T_1 + \Delta T) = 0. \end{cases} \quad (2.71)$$

Для забезпечення умов (2.71) необхідно певним чином підібрати функцію x_1 . Прийнемо функцію x_1 у такому вигляді:

$$x_1 = \begin{cases} \frac{t^3(t - 2T_1)v_1}{2T_1^3}, \text{ при } t \in [0, T_1]; \\ v_1 \left(t - \frac{T_1}{2} \right), \text{ при } t \in [T_1, T_1 + \Delta T]; \\ \frac{v_1}{2T_1^3} (-t^4 - 6t^2(T_1 + \Delta T)(2T_1 + \Delta T) + t^3(6T_1 + 4\Delta T) - (2T_1 + \Delta T)(2T_1^3 + 4T_1^2\Delta T + 4 \times \\ \times T_1\Delta T^2 + \Delta T^3) + 2t(6T_1^3 + 12T_1^2\Delta T + 9T_1\Delta T^2 + 2\Delta T^3)), \text{ при } t \in [T_1 + \Delta T, 2T_1 + \Delta T]. \end{cases} \quad (2.72)$$

Приведемо графік функції швидкості руху крана (рис. 2.23).

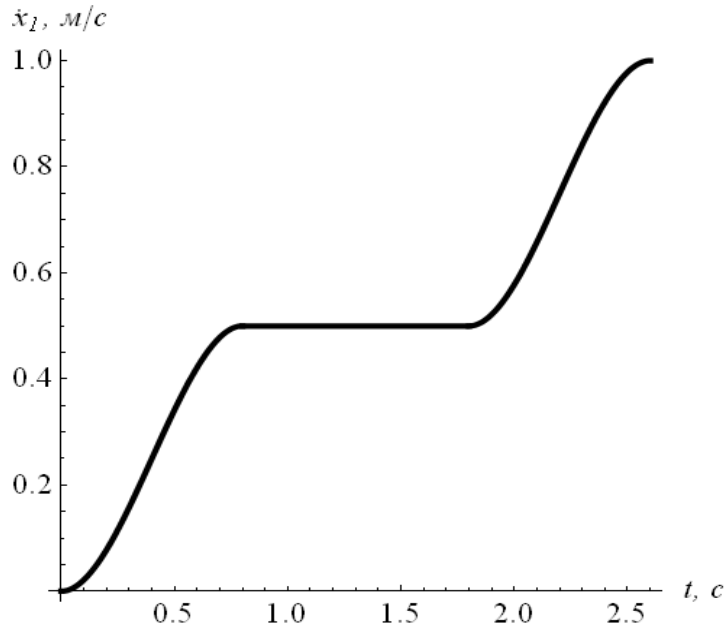


Рис. 2.23. Графік зміни швидкості крана протягом розгону

Не будемо зупинятись на методиці знаходження енергії залишкових коливань вантажу при русі крана за законом (2.72) оскільки вона подібна до приведеної вище для закону (2.48). Зазначимо, що закон руху (2.72) також можна досить просто реалізувати за допомогою частотно-керованого асинхронного електроприводу крана. Для цього необхідно лише змінити профіль кривої за яким здійснюється розгін із лінійного на S-подібний [23]. Однак, тут необхідно зробити одне зауваження: для лінійних та S-подібних ділянок зміни швидкості крана повинна бути виконана умова рівності переміщення крана на величину $\frac{v_1 T_1}{2}$.

Запишемо вираз енергії залишкових коливань вантажу:

$$E(2T_1 + \Delta T) = \frac{288m_2 v_1^2 \cos\left(\frac{1}{2}(T_1 + \Delta T)\Omega_0\right)^2 \left(T_1 \Omega_0 \cos\left(\frac{T_1 \Omega_0}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{T_1 \Omega_0}{2}\right)\right)^2}{T_1^6 \Omega_0^6}. \quad (2.73)$$

Трансцендентне рівняння (2.73) має розв'язок, який співпадає із (2.66). Таким чином, зробивши лише одне налаштування у частотному

перетворювачі можна переходити від раціонального керування до оптимального. Представимо графік зміни функції $F_{дин}$ (рис. 2.24).

Аналіз графіка представленого на рис. 2.24 показує, що розриви функції першого роду зникли, що позитивно позначається на приводі та металоконструкції крана. Однак, функція $F_{дин}$ для закону (2.66), (2.72) має різкі перегини у точках переходу від одного етапу до іншого – це є небажаною властивістю закону руху, оскільки може викликати „м’які” удари у кінематичних зачепленнях приводу. Значення $F_{дин}$ посередині інтервалу розгону не змінилось.

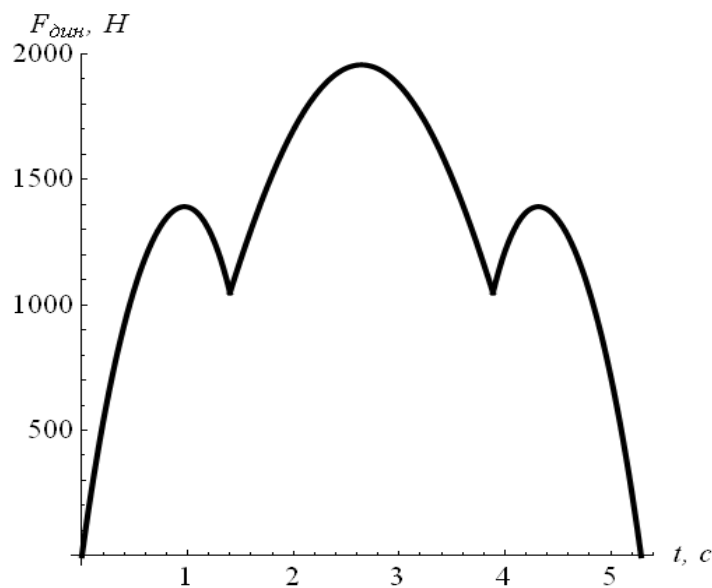


Рис. 2.24. Графік зміни динамічної складової зусилля приводу для закону руху (2.66) і (2.72)

Для того, щоб забезпечити експлуатацію механізму переміщення крана без „м’яких” ударів необхідно забезпечити виконання наступних умов:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(0) = \ddot{x}_2(0) = \ddot{x}_1(0) = \ddot{x}_2(0) = 0; \\ \dot{x}_1(T_1) = \dot{x}_2(T_1) = \ddot{x}_1(T_1) = \ddot{x}_2(T_1) = 0; \\ \ddot{x}_1(T_1 + \Delta T) = \ddot{x}_2(T_1 + \Delta T) = \ddot{x}_1(T_1 + \Delta T) = \ddot{x}_2(T_1 + \Delta T) = 0; \\ \ddot{x}_1(2T_1 + \Delta T) = \ddot{x}_2(2T_1 + \Delta T) = \ddot{x}_1(2T_1 + \Delta T) = \ddot{x}_2(2T_1 + \Delta T) = 0. \end{cases} \quad (2.74)$$

Забезпечення умов (2.74) дає змогу синтезувати оптимальний закон руху за термінальними критеріями:

$$\begin{cases} F_{\text{дин}}^2(0) \rightarrow \min; \dot{F}_{\text{дин}}^2(0) \rightarrow \min; \\ \dot{F}_{\text{дин}}^2(T_1) \rightarrow \min; \\ \dot{F}_{\text{дин}}^2(T_1 + \Delta T) \rightarrow \min; \\ F_{\text{дин}}^2(2T_1 + \Delta T) \rightarrow \min; \dot{F}_{\text{дин}}^2(2T_1 + \Delta T) \rightarrow \min. \end{cases} \quad (2.75)$$

Не будемо приводити розв'язок даної задачі, оскільки вона подібна до наведених вище, а лише проілюструємо кінцевий результат (рис. 2.25). Зазначимо, що закон зміни динамічної складової приводного зусилля, графік якого приведено на рис. 2.25, доставляє абсолютні мінімуми термінальним критеріям (2.75).

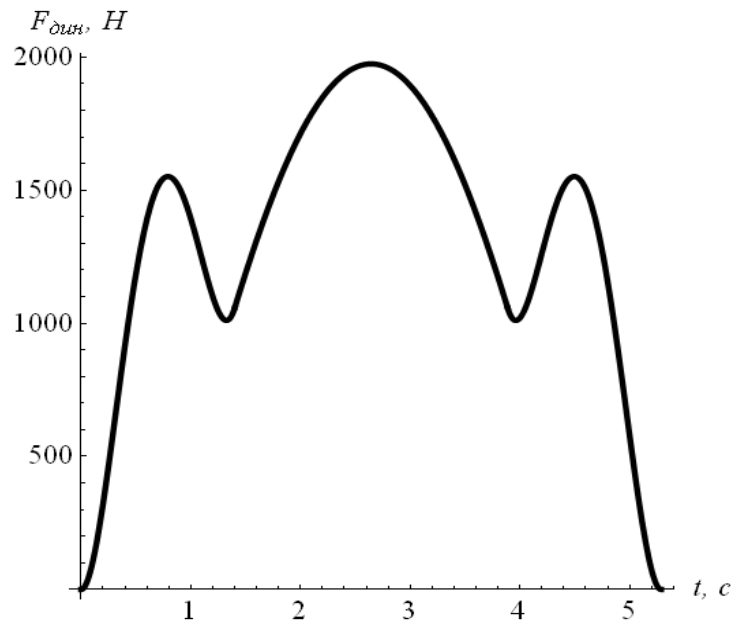


Рис. 2.25. Графік зміни динамічної складової зусилля приводу для екстремалі термінальних критеріїв (2.75)

Відзначимо, що значення $F_{\text{дин}}$ у середині інтервалу руху для даного закону не змінилось у порівнянні із законом (2.66) і (2.72). Для більш детального дослідження отриманих законів руху введемо показник

відношення максимальних значень динамічних складових приводного

зусилля для відповідних законів $\gamma = \frac{F_{дин1}}{F_{дин2}}$. Приведемо вирази:

$$\gamma = \begin{cases} \frac{3(8m_2 + (m_1 + m_2)T_1^2\Omega_0^2 - 8m_2 \cos\left(\frac{T_1\Omega_0}{2}\right) - 4m_2T_1\Omega_0 \cos\left(\frac{T_1\Omega_0}{2}\right))}{2T_1^3}, & \text{при } t \in [0, T_1]; \\ 1, & \text{при } t \in [T_1, T_1 + \Delta T]; \\ \frac{3(8m_2 + (m_1 + m_2)T_1^2\Omega_0^2 - 8m_2 \cos\left(\frac{T_1\Omega_0}{2}\right) - 4m_2T_1\Omega_0 \cos\left(\frac{T_1\Omega_0}{2}\right))}{2T_1^3}, & \text{при } t \in [T_1 + \Delta T, 2T_1 + \Delta T] \end{cases} \quad (2.76)$$

для відношення максимальних зусиль на відповідних етапах руху законів (2.48) та (2.72). Аналогічний показник для законів руху (2.72) та закону руху який показаний на рис. 2.25 має такий вигляд:

$$\gamma = \begin{cases} \frac{60}{T_1^2\Omega_0^2} + \frac{5(-48m_1 - 32m_2 + (m_1 + m_2)T_1^2\Omega_0^2 + 32m_2 \cos\left(\frac{T_1\Omega_0}{2}\right))}{4(8m_2 + (m_1 + m_2)T_1^2\Omega_0^2 - 8m_2 \cos\left(\frac{T_1\Omega_0}{2}\right) - 4m_2T_1\Omega_0 \cos\left(\frac{T_1\Omega_0}{2}\right))}, & \text{при } t \in [0, T_1]; \\ 1, & \text{при } t \in [T_1, T_1 + \Delta T]; \\ \frac{60}{T_1^2\Omega_0^2} + \frac{5(-48m_1 - 32m_2 + (m_1 + m_2)T_1^2\Omega_0^2 + 32m_2 \cos\left(\frac{T_1\Omega_0}{2}\right))}{4(8m_2 + (m_1 + m_2)T_1^2\Omega_0^2 - 8m_2 \cos\left(\frac{T_1\Omega_0}{2}\right) - 4m_2T_1\Omega_0 \cos\left(\frac{T_1\Omega_0}{2}\right))}, & \text{при } t \in [T_1 + \Delta T, 2T_1 + \Delta T]. \end{cases} \quad (2.77)$$

Для отриманих залежностей (2.76), (2.77) приведемо їх графіки (рис. 2.26, 2.26). На рис. 2.26 та рис. 2.27 числами розташованими на лініях показані значення показника γ .

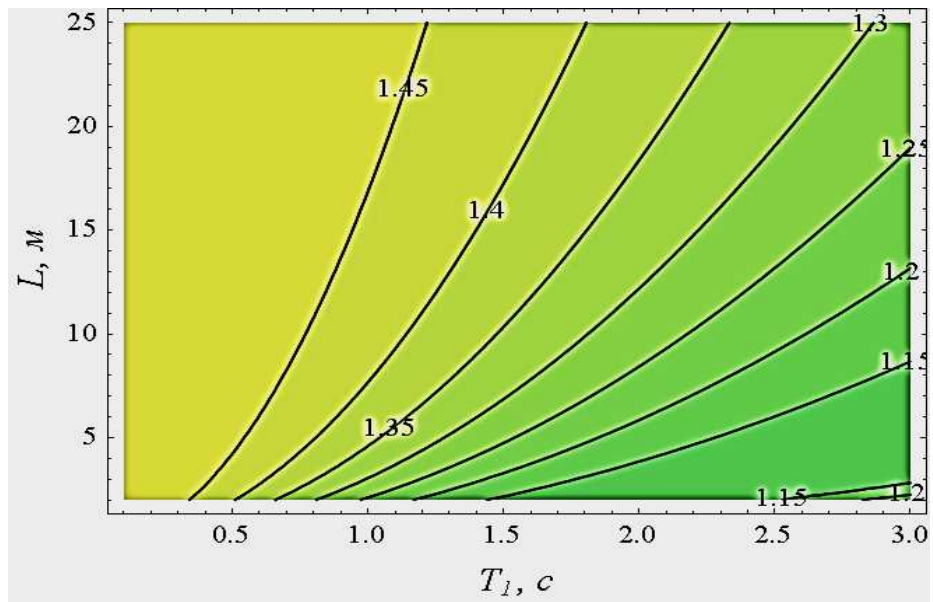


Рис. 2.26. Графік зміни γ для законів (2.48) та (2.72)

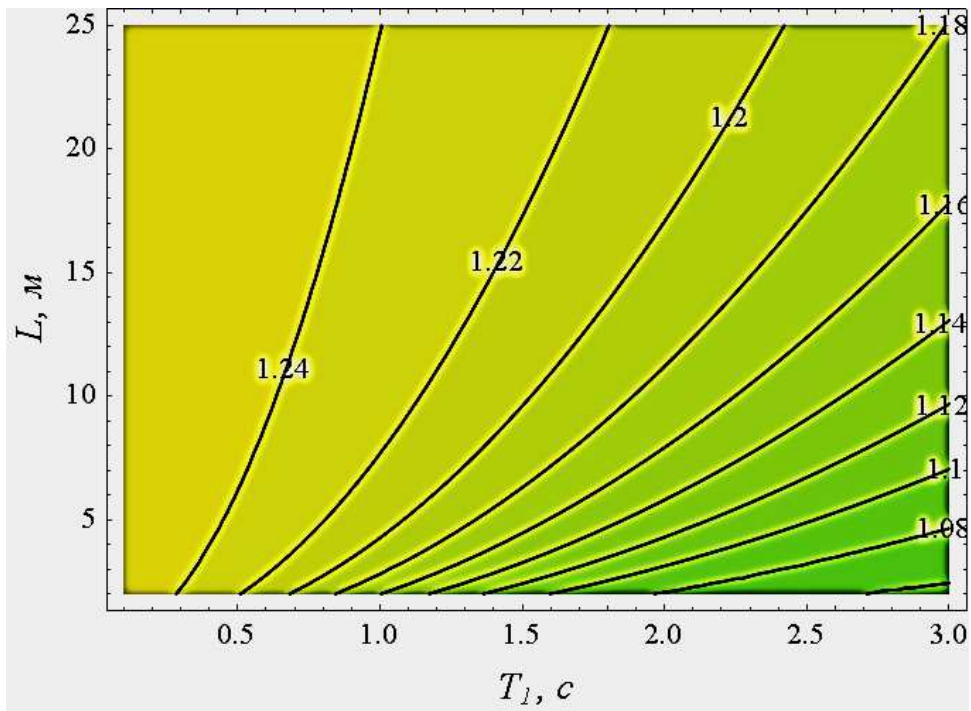


Рис. 2.27. Графік зміни γ для закону (2.72) та для екстремалі критеріїв (2.75)

Висновки до другого розділу

1. Для забезпечення належної реалізації оптимального керування різними технічними системами з частотним електроприводом при синтезі оптимального керування необхідно вводити модифіковане обмеження на величину керування. Модифікація обмеження полягає у введенні додаткової умови щодо неперевикнення струму на виході частотного перетворювача деякої величини, яка еквівалентна умові неперевикнення моменту двигуна деякого значення, яке змінюється з плином часу.
2. За показником питомої енергії залишкових коливань веденої маси для двомасової динамічної моделі механізму вантажопідйомної машини S-подібний та подвійний S-подібний закони мають найкращі характеристики. Однак при цьому тривалість перехідного процесу розгону динамічної системи є дещо „затягнутою” (у масштабах періоду коливань системи). Для динамічних систем у яких параметр власної частоти коливань визначається лише приблизно можна користуватись такими законами: вони є стандартними для сучасних частотних перетворювачів і необхідно лише провести відповідне налаштування. Для подвійного S-подібного закону зміни швидкості ведучої маси при розгоні необхідно уникати певних комбінацій проміжної швидкості та тривалості часу першого етапу розгону для того, щоб зменшити енергію коливань веденої маси після закінчення перехідного процесу. Серед інших законів зміни швидкості можна також рекомендувати лінійний закон. Однак при цьому необхідно мати точне значення частоти власних коливань системи. Якщо ж таких даних немає, то єдиним шляхом зменшення енергії залишкових коливань є подовження процесу розгону, що у свою чергу зменшує продуктивність машини чи механізму. U-подібний закон зміни швидкості ведучої маси не дозволяє у кінці розгону повністю усувати коливання веденої маси і тому не рекомендується до застосування. Необхідно також зробити загальне

зауваження: всі приведені висновки стосуються нульових початкових умов (коливання веденої маси на початку руху відсутні). Якщо ж коливання присутні, то необхідно враховувати їх фазу, що є більш складною задачею, яка, крім того, ускладнюється у плані технічної реалізації через необхідність використання датчика коливань веденої маси.

3. Для тримасової динамічної моделі механізму вантажопідійомної машини встановлено, що вже незначна тривалість процесу розгону двигуна призводить до значного зменшення показника відносної енергії залишкових коливань елементів механізму переміщення. Таким чином, при використанні „стандартних” законів зміни частоти напруги живлення за допомогою частотного перетворювача механізм переміщення крана можна розглядати як двомасовий, а коливання елементів привода не враховувати. Усі висновки, які зроблені для двомасової динамічної моделі механізму можна перенести на тримасову динамічну модель. Тобто, вже двомасова динамічна модель руху крана із вантажем є прийнятною для оцінки енергії залишкових коливань елементів системи „кран-вантаж”. Збільшення плавності руху приводу кранового механізму переміщення зумовлює необхідність збільшення тривалості перехідного процесу. Тому необхідно досить зважено підходити до питання вибору того чи іншого „стандартного” закону зміни частоти у частотному перетворювачі, який живить асинхронний приводний двигун. Якщо на тривалість перехідного процесу не накладаються обмеження, то варто вибирати досить плавні закони зміни швидкості приводу, якщо ж такі обмеження існують, то необхідно виконувати синтез оптимальних за певними критеріями законів руху крана у тому числі за критерієм швидкодії.
4. Приведені у даному розділі дослідження дали змогу математично обґрунтувати відомий спосіб усунення коливань вантажу закріпленого на гнучкому підвісі. Даний спосіб у дослідженні названо раціональним,

оскільки при його реалізації динамічна складова приводного зусилля не змінює свій знак. Це є цінною властивістю закону руху, оскільки виключає значні струмові перевантаження електроприводу крана та динамічні навантаження у кінематичних зачепленнях приводу. Однак, раціональне керування має певні небажані характеристики: розриви першого роду функції динамічної складової приводного зусилля та нерівність її нулю на початку та у кінці розгону. Було поставлено задачу синтезувати такий закон руху при якому залишились би бажані характеристики закону руху і були мінімізовані небажані, що є задачею оптимального керування. У даному дослідженні знайдено розв'язок такої задачі та проаналізовано отримані результати. Встановлено, що реалізація оптимального закону руху крана досягається відповідним налаштуванням опції частотного перетворювача. Було поставлено більш „жорсткіші” умови для оптимізації руху крана та отримано розв'язок задачі. Збільшення термінальних критеріїв для синтезу оптимального керування дає ще кращі показники руху крана із збереженням бажаних характеристик для попереднього закону руху. Що стосується величини динамічної складової приводного зусилля у середині інтервалу розгону крана, то вона не змінилась.

Література до другого розділу

1. Понтрягин Л.С., Болтнянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.
2. Технический каталог частотных преобразователей для асинхронных двигателей DELTA-VFD, 2007. – 39 с.
3. Вишеневский С.Н. Характеристики двигателей в электроприводе. М: Энергия, 1977. – 432 с.
4. Булгаков А. А. Частотное управление асинхронным двигателем / Булгаков А. А. - М.: Энергоиздат, 1982. - 216 с.
5. Чиликин М.Г. Общий курс электропривода: учебник [для студ. вузов] / М.Г. Чиликин, А.С. Сандлер. – [6-е изд., доп. и перераб.]. – М.: Энергоиздат, 1981. – 576 с.
6. Вычислительные и приближенные методы оптимального управления. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Итоги науки и техники. Серия Математический анализ. - 1977, Т 14, С. 101–166.
7. Васильев Н.А. Mathematica. Практический курс с примерами решения прикладных задач / Васильев Н.А. – К.: ВЕК+. – 448 с.
8. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003. – 614 с.
9. Киселев Ю.Н., Авакумов С.Н., Орлов М.В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. М: Изд. отдел факультета ВМиК МГУ им. Ломоносова, 2007 – 270 с.
10. Григоров О.В. Совершенствование рабочих характеристик крановых механизмов: дисс. на соиск. степ. доктора техн. наук: 05.05.05 / Григоров Отто Владимирович. – Х., 1995. – 386 с.
11. Мельникова Л.В. Автоматизация технологического процесса перемещения механизма с подвешенным грузом средствами

микропроцессорного управления: дисс. на соиск. степ. канд техн. наук: 05.09.03 / Мельникова Любовь Васильевна. - Одесса, 2000. – 116 с.

12. Черноусько Ф.Л. Управление колебаниями / Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. - М.: Наука, 1980. - 384 с.
13. Комаров М.С. Динамика грузоподъемных машин / Комаров М.С. – М.: Машиностроение, 1969. – 206 с.
14. Моделювання динаміки механізмів вантажопідйомних машин / [Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Пастушенко С.І.]. – К.-Миколаїв: РВВ МДАУ, 2004. – 286 с.
15. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.
16. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования / [перевод с англ. Митрофановой, Н.М., Первозванского А.А., Хусу А.П., Шалаевского О.В.] – М.: Наука, 1965. – 460 с.
17. Кротов В.Ф. Методы и задачи оптимального управления / В.Ф. Кротов, В.И. Гурман. – М.: Наука, 1973. – 389 с.
18. Красовский И.И. Теория управления движением (линейные системы). - М.: Наука, 1968. - 476 с.
19. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем: учебник для вузов / В.П. Тарасик. – Мн: ДизайнПРО, 2004. – 640 с.
20. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит. 2001. – 320 с.
21. Грузоподъемные краны. Кн. 2 / Шеффлер М., Дресиг Х., Курт Ф.; [пер. с немецкого М.М. Рунов, В.Н. Федосеев]; под ред. М.П. Александрова. – М.: Машиностроение, 1981. – 287 с.
22. Лобов Н. А. Динамика грузоподъемных кранов / Лобов Н. А. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.

23. FR-E700. Преобразователь частоты. Инструкция по эксплуатации (FR-E720 EC, FR-E740 EC): [каталог]. – [Москва: Mitsubishi Electric Europe B.V.]. – 526 с.: ил.
24. Руководство пользователя преобразователей MICROMASTER 440: [каталог]. – [Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский технический центр поддержки SIEMENS]. – 140 с.: ил.
25. Altivar 31. Преобразователи частоты для асинхронных электродвигателей. Руководство по программированию: [каталог]. – [Telemecanique]. – 77 с.: ил.
26. Фираго Б.И. Теория электропривода: учебн. пособие / Б.И. Фираго, Л.Б. Павлячик. – Мн.: ЗАО „Техноперспектива”, 2004. – 527 с.
27. Панкратов В.В. Энергооптимальное векторное управление асинхронными электроприводами: учебн. пособие / В.В. Панкратов, Е.А. Зима. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. – 120 с.
28. Бушер В.В. Асинхронный электропривод подъемно-транспортных механизмов с микропроцессорным управлением: автореф. дисс. на соиск. степ. канд. техн. наук: спец. 05.09.03 „Электрические комплексы и системы, включая их управление и регулирование” / В.В. Бушер. – Одесса, 1993. – 16 с.
29. Свиргун В.П. Разработка оптимальных законов управления мостовым грейферным краном и применение микропроцессорной системы для их реализации: автореф. дисс. на соиск. степ. канд. техн. наук: спец. 05.05.05 „Подъемно-транспортные машины” / В.П. Свиргун. – Х., 1989. – 15 с.
30. Смехов А.А. Оптимальное управление подъемно-транспортными машинами / А.А. Смехов, Н.И. Єрофеев. – М.: Машиностроение, 1975. – 239 с.
31. Будиков Л.Я. Многопараметрический анализ динамики грузоподъемных кранов мостового типа / Будиков Л.Я. – Луганск: Издательство ВУГУ, 1997. – 210 с.

32. Герасимьяк Р.П. Анализ и синтез крановых электромеханических систем / Р.П. Герасимьяк, В.А. Лещёв. – Одесса.: СМІЛ, 2008. – 192 с.
33. Геронимус Я.Л. О некоторых методах определения оптимального закона движения, рассматриваемого как управляющее воздействие / Я.Л. Геронимус, М.М. Перельмутер // Машиноведение. – 1966. – № 6. – С. 6-24.
34. Сохадзе А.Г. Мехатронная система грузоподъемного крана для автоматической стабилизации положения груза и управления его движением: дисс. на соиск. степ. канд. тех. наук: 05.02.05 / Сохадзе Александр Георгиевич. – Новочеркасск, 2006. – 218 с.
35. Терехов В.М., Осипов О.И. Системы управления электроприводов: учебник / Терехов В.М., Осипов О.И.; под ред. Терехова В.М. – Саратов: Изд. центр „Академия”, 2005. – 300 с.
36. Пат. 2007/0023378 А1 США МПК В66С 13/06. Method for controlling a crane / Mikko Porma, Kimmo Hytonen; заявник та власник KCI Konecranes PLC; заявл. 16.07.2004; опубл. 22.06.2006.
37. Пат. 7484632 В2 США МПК В66С 13/06. Method for controlling a crane / Kimmo Hytonen; заявник та власник KCI Konecranes PLC; заявл. 16.07.2004; опубл. 13.01.2006.

РОЗДІЛ 3

ПРЯМІ ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ МЕХАНІЗМАМИ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МАШИН

3.1. Класифікація критеріїв оптимізації режимів руху вантажопідйомних машин

Ефективність використання вантажопідйомних машин залежить від багатьох показників, серед яких найважливіше місце займають: продуктивність, енергоефективність, надійність, безпечність, зручність у експлуатації, екологічність тощо. Найкраща ефективність використання вантажопідйомних кранів відповідає екстремальним значенням перерахованих показників для досягнення яких, необхідно провести їх оптимізацію. Оптимізація, як відомо, виконується формальними математичними методами і тому вимагає чіткої математичної постановки задачі. Одним із елементів оптимізаційної задачі є критерій, вибір якого впливає на ефективність експлуатації вантажопідйомної машини.

У роботах [1-4] достатньо повно викладена математична постановка задачі оптимального керування динамічними системи, які описуються звичайними диференціальними рівняннями, а також приводяться деякі види критеріїв оптимізації. Зокрема у роботі [4] наводяться інтегральні критерії для оптимізації систем автоматичного керування та регулювання і розкривається їх фізична сутність. У роботах [5-8] викладено теоретичні та прикладні питання оптимізації керування динамічними системами із розподіленими параметрами. Однак, у цих та інших роботах, присвячених оптимальному керуванню, не приводиться класифікація критеріїв та не вказуються області їх застосування.

Для оптимізації режимів руху вантажопідйомних машин використовуються різноманітні критерії: швидкодії [9-18], енергетичні [11], динамічні [19, 20], кінематичні [19, 21, 22] та інші. Однак, для того, щоб

здійснити правильний вибір критерію оптимізації руху вантажопідйомного крана необхідно певним чином структурувати множину існуючих критеріїв та вказати доцільність їх використання для того чи іншого механізму чи режиму руху.

Рух вантажопідйомних машин та механізмів описується, як правило, звичайними неоднорідними диференціальними рівняннями або/і рівняннями у частинних похідних. Від того яка функція стоїть у правій частині рівняння (функція керування) буде залежати рух однієї чи декількох ланок вантажопідйомного крана. Метою руху ланки того чи іншого механізму вантажопідйомного крана є переміщення її із одного положення у інше за деякий час. Якщо розглядати вантажопідйомний кран як динамічну систему, яка характеризується вектором фазових координат $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, то мета керування полягає у переведенні фазової точки із початкового положення $\mathbf{x}(0)$ у кінцеве $\mathbf{x}(t_p)$ у фазовому просторі розмірності n . Однак, існує нескінченна кількість фазових траєкторій, які з'єднують вказані точки. Отже мета керування може бути досягнута декількома різними способами. Для того, щоб обрати один спосіб (одну функцію керування) необхідно поставити додаткові вимоги. Математичний вираз, що дає кількісну оцінку ступеню виконання вимог, накладених на спосіб керування, називається **критерієм оптимізації**. Спосіб керування, який задовольняє поставлені вимоги найкраще, тобто перетворює критерій оптимізації у екстремум, називається **оптимальним керуванням**.

Перед тим як привести класифікацію оптимізаційних критеріїв режимів руху вантажопідйомних машин необхідно зробити два зауваження. Перше стосується того, що у прийнятій класифікації не розглядаються параметричні критерії оптимізації, наприклад: жорсткість, демпфування, маси ланок механізмів та їх похідні, наприклад, власні частоти коливань ланок. Як правило, ці параметри входять у диференціальні рівняння руху ланок механізмів у вигляді постійних коефіцієнтів. Математично визначення оптимальних значень цих параметрів виконується у замкненому просторі

параметрів. Оптимізації конструктивних параметрів машин та механізмів присвячені роботи Банічука М.В. [23], Соболя І.М., Статнікова Р.Б. [24], Реклейтіса Г., Рейвіндрана А., Регдела К. [25, 26], Голубенцева М.О. [27], Горського Б.Є. [28], Хітрика В.Є. [29], Бербюка В.Є. [30] та інших дослідників. На більш широку постановку задачі оптимізації вказує Р.Беллман [31], зауважуючи, що мінімізація оптимізаційного критерію повинна виконуватись одночасно у просторах керувань і параметрів. У даному дослідженні ми обмежимося лише задачами оптимального керування і не розглядаємо задачі визначення оптимальних параметрів крана.

Другим зауваженням є те, що приведена нижче класифікація не включає економічні критерії оскільки кожне підприємство, на якому працюють вантажопідйомні крани має власну специфіку. Загалом екстремізація економічних критеріїв виконується методами логістики, які засновані на математичних методах лінійного [32] та нелінійного програмування [33], динамічного програмування [34, 35] та інших методах.

Враховуючи приведені вище зауваження будемо розглядати такі оптимізаційні критерії, мінімізація яких виконується лише шляхом знаходження функції керування із деякого замкненого простору. Крім того, розглядаємо вантажопідйомний кран як динамічну систему заданої і незмінної конфігурації у сенсі динаміки.

У наведеній класифікації не розглядаються оптимізаційні критерії за типом екстремуму, що досягається у процесі оптимізації. Відповідним підбором знаку критерію його можна привести до вимоги мінімізації або максимізації.

Класифікацію оптимізаційних критеріїв, які використовуються для оптимізації керування рухом механізмів вантажопідйомних кранів, як динамічних систем виконаємо за певними показниками.

1. **За фізичною сутністю** критерії поділяються на: динамічні, кінематичні, енергетичні, швидкодії. Приведемо приклади вказаних критеріїв на прикладі одномасової динамічної моделі. Динамічний критерій:

$$I_{F_{\text{дин}}^2} = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} F_{\text{дин}}^2 dt = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} (m\ddot{x})^2 dt, \quad (3.1)$$

де m – приведена до поступального руху маса ланки механізму; t_p – тривалість руху механізму; x – узагальнена координата ланки механізму (x є функцією однієї незалежної змінної – часу t , якщо не вказано інше); $F_{\text{дин}}$ – динамічна складова приводного зусилля. Точка над символом означає диференціювання за часом. Критерій (3.1) відображає середнє, за час руху, значення квадрату динамічної складової приводного зусилля. Динамічні критерії дають змогу оцінити зусилля та моменти, що діють у елементах вантажопідйомної машини, а також їх вищі похідні за часом. Мінімізація динамічних критеріїв дозволяє зменшити діючі у елементах механізмів зусилля та, як наслідок, подовжити їх строк служби.

Кінематичний критерій:

$$I_{\dot{x}^2} = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} \dot{x}^2 dt. \quad (3.2)$$

Критерій (3.2) відображає середнє, за час руху, значення квадрату швидкості руху ланки механізму. Використання кінематичних критеріїв дозволяє дати оцінку кінематичним характеристикам руху ланок механізму: переміщенням, швидкостям, прискоренням, ривкам тощо. Мінімізація цих критеріїв дає змогу реалізувати режими руху, які враховують різноманітні кінематичні обмеження: на величину швидкості, прискорення тощо.

Енергетичний критерій:

$$I_{N_{\text{дин}}^2} = \sqrt{t_p \int_0^{t_p} N_{\text{дин}}^2 dt} = \sqrt{t_p \int_0^{t_p} (m\ddot{x})^2 dt}, \quad (3.3)$$

де $N_{\text{дин}}$ – динамічна складова потужності. Критерій (3.3) виражає квадрат енергетичних витрат протягом тривалості руху механізму. Енергетичні критерії відображають витрати або/і втрати енергії (механічної,

електричної) при виконанні руху. Енергетичні критерії варто використовувати для потужних механізмів або/і у випадках коли вартість використовуваної краном енергії (електричної, дизельного палива тощо) є значною. Необхідно зазначити, що у деяких випадках чітке розмежування між кінематичними, динамічними та енергетичними критеріями провести неможливо, оскільки енергетичні та динамічні характеристики механізму виражаються через його кінематичні функції, як це видно із виразів (3.1) та (3.3). Критерій швидкодії:

$$I_{t_p} = \int_0^{t_p} dt = t_p \quad (3.4)$$

відображає тривалість руху ланки механізму. Даний критерій бажано використовувати для синтезу оптимальних режимів руху портових кранів-перевантажувачів та контейнерних кранів. Однак необхідно пам'ятати про те, що оптимальне за швидкодією керування завжди є релейним, що погіршує динаміку руху крана та врешті-решт веде до передчасного виходу його із ладу. Тому використання критерію (3.4) рекомендується виконувати у структурі комплексного критерію, у який входять також інші складові, наприклад, динамічні критерії.

2. **За математичним представленням** критерії бувають: інтегральні, термінальні, інтегрально-термінальні (узагальнені), інтегрально-термінальні (для систем із розподіленими параметрами). Приведемо вирази вказаних критеріїв. Інтегральний критерій:

$$I = \int_0^{t_p} P(x, \dot{x}, \dots, x^{(k)}, t) dt, \quad (3.5)$$

де P – підінтегральний вираз критерію; k – найвищий порядок похідної за часом у підінтегральному виразі P . Інтегральний критерій відображає показник якості руху вантажопідійомної машини протягом усього проміжку часу $[0, t_p]$. Термінальний критерій:

$$T = T\left(t_\alpha, x, \dot{x}, \dots, x^z\right), \quad t_\alpha \in [0, t_p], \quad (3.6)$$

де z – найвищий порядок похідної за часом у термінальному критерії T ; t_α – моменти часу із часового проміжку $[0, t_p]$, ($\alpha=1, 2, \dots, r$); r – кількість моментів часу, в які проводиться „оцінка” руху за допомогою термінального критерію. Зазначимо, що у випадку зведення оптимізаційної задачі до крайової, підбором крайових умов можна досягнути глобального мінімуму термінального критерію. При цьому розв’язок оптимізаційної задачі шукається у звуженому класі функцій, які задовольняють вимозі мінімізації термінального критерію [36]. Необхідно зробити зауваження стосовно інтегральних та термінальних критеріїв. Інтегральний критерій дає оцінку показнику якості руху на всьому проміжку руху динамічної системи. У деякі моменти часу підінтегральний вираз критерію (3.5) може приймати великі значення. Але, оскільки, тривалість таких моментів незначна, то вони не значно вплинуть на величину критерію. Однак, великі значення оцінюваного показника руху, який виражається підінтегральною функцією у (3.5), можуть кардинально впливати, наприклад, на надійність крана. У випадку використання інтегрального критерію (3.1) короточасні „пікові” динамічні зусилля можуть викликати поломку кінематичних зачеплень у приводі. Вказаний недолік інтегрального критерію компенсує термінальний: дійсно, вираз цього критерію можна підібрати так, щоб він оцінював значення динамічного зусилля у певні „критичні” моменти часу (пуск, реверс тощо). Однак термінальний критерій не дає змоги дати оцінку режиму руху ланки механізму на всьому проміжку $[0, t_p]$, що, звичайно, є недоліком цього критерію. Для того, щоб поєднати бажані властивості і позбутись недоліків інтегрального та термінального критеріїв використовують інтегрально-термінальний (узагальнений) критерій:

$$IT = I + T. \quad (3.7)$$

Зазначимо, що критерій IT можна розглядати як модифікований інтегральний критерій, оскільки моменти часу t_α у структурі термінального критерію входять у проміжок часу $[0, t_p]$, за яким проводиться оцінка за допомогою інтегрального критерію. Критерій (3.5) можна перетворити у (3.7), якщо назначити значну „ціну” підінтегрального виразу у моменти часу t_α . Варіаційні задачі, які відповідають приведеним критеріям (3.5)-(3.7) відомі під назвами: Лагранжа, Майера та Больца відповідно [37]. Інтегрально-термінальний (для систем із розподіленими параметрами) критерій:

$$IT_{p.n.} = \int_0^L P \left(x(t, l), \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial l}, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial l^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial l}, \dots, \frac{\partial^{k+s} x}{\partial t^k \partial l^s}, t, l \right) dl \Bigg|_{t=t_\alpha}, \quad (3.8)$$

де s – найвищий порядок похідної за незалежною змінною l у підінтегральному виразі P ; l – незалежна змінна (параметр) динамічної системи; L – найбільше значення параметру l . Диференціальними рівняннями у частинних похідних описуються коливальні рухи канатів (поперечні та повздовжні), балок кранових мостів, довгих валів у передачах тощо. Для оцінки руху цих та інших елементів крана можуть бути використані критерії (3.8). Ці критерії, наприклад, можуть представляти вимоги щодо мінімізації енергії коливань елемента із розподіленими параметрами у моменти часу t_α (зокрема при $t = t_p$).

3. **За структурою** оптимізаційні критерії бувають: одиничні та комплексні. Одиничні критерії вимагають мінімізації одного небажаного показника. Якщо цей показник вибрано невдало, то мінімізація критерію не може у значній мірі вплинути на підвищення ефективності роботи вантажопідйомного крана. Для відображення декількох небажаних

показників використовуються комплексні критерії, загальна структура яких представляється у вигляді:

$$IT_{\text{компл}} = \sum_{j=1}^{\tilde{j}} \delta_j \frac{I_j}{\tilde{I}_j} + \sum_{i=1}^{\tilde{i}} \delta_i \frac{T_i}{\tilde{T}_i}, \quad (3.9)$$

де δ_j - ваговий коефіцієнт, який відображає „вагу” j -того одиничного інтегрального критерію I_j ; δ_i - ваговий коефіцієнт, який відображає „вагу” i -того одиничного термінального критерію T_i ; \tilde{j} та \tilde{i} - кількість відповідно інтегральних та термінальних критеріїв; \tilde{I}_j та \tilde{T}_i - мінімальні можливі значення інтегральних та термінальних критеріїв. Вагові коефіцієнти δ_j і δ_i пов’язані співвідношенням [19]:

$$\sum_{j=1}^{\tilde{j}} \delta_j + \sum_{i=1}^{\tilde{i}} \delta_i = 1. \quad (3.10)$$

Якщо прийняти, наприклад, $\sum_{j=1}^{\tilde{j}} \delta_j + \sum_{i=1}^{\tilde{i}-1} \delta_i = 0$, то критерій $IT_{\text{компл}}$

перетворюється у одиничний термінальний критерій. Якщо $\sum_{j=1}^{\tilde{j}-1} \delta_j + \sum_{i=1}^{\tilde{i}} \delta_i = 0$,

то критерій $IT_{\text{компл}}$ перетворюється у одиничний інтегральний критерій.

4. **За розмірністю** критерії поділяються на: розмірні та безрозмірні. Розмірні критерії дають змогу наглядно оцінити ефект від їх мінімізації. Наприклад, критерій (3.3), одиницею якого є Джоуль, показує енергетичні витрати при реалізації оптимізованого режиму руху механізму. Критерій (3.4), який вимірюється у секундах, відображає тривалість часу на виконання руху. Зазначимо, що використання комплексного розмірного критерію вимагає приведення різних фізичних величин до однієї розмірності. Це виконується шляхом множення їх на відповідні розмірні коефіцієнти, наприклад: сталі часу, жорсткості, коефіцієнти демпфування тощо. Приведемо найпростіший приклад:

$$I_{\text{компл}} = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} F_{\text{ин}}^2 dt + \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} F_{\text{пр}}^2 dt = \frac{m^2}{t_p} \int_0^{t_p} \dot{x}^2 dt + \frac{c^2}{t_p} \int_0^{t_p} x^2 dt, \quad (3.11)$$

де $F_{\text{ин}}$ - сила інерції одномасової коливної системи; $F_{\text{пр}}$ - сила пружності пружного елемента системи; m - зосереджена маса елемента системи; c - жорсткість пружного елемента системи; x - координата зосередженої маси системи. Критерій (3.11) відображає середньоквадратичні, за період часу $[0, t_p]$, значення сил інерції та пружної сили, які виникають у коливній системі. Безрозмірні критерії вимагають приведення усіх їх складових до безрозмірних величин. Прикладом безрозмірного критерію є безрозмірна питома дія [38, 39].

5. *За видом математичного виразу* критерії розрізняють: лінійні та нелінійні. Лінійні критерії оптимізації вимагають розв'язання лінійних екстремальних задач. Прикладом лінійних критеріїв є функціонали (3.1) та (3.2) Розв'язок цих задач, як правило, шукають аналітичними методами. Мінімізація нелінійних критеріїв вимагає знаходження розв'язку нелінійних оптимізаційних задач. У загальному випадку ці розв'язки неможливо знайти у аналітичному вигляді і тому використовуються наближені чисельні методи. Прикладом нелінійного критерію є критерій виду:

$$I = \int_0^{t_p} (\dot{x} - v)^b dt, \quad (3.12)$$

де v - задана швидкість руху ланки механізму; b - показник степеня підінтегрального виразу критерію. Якщо $b=2$, то оптимізаційна задача називається лінійно-квадратичною. У випадку $b>2$, наприклад, $b=4$ критерій (3.12) є нелінійним. Такий критерій „штрафує” значні відхилення швидкості ланки механізму від заданого значення v протягом часу $t \in [0, t_p]$. Якщо обрати $b=0,2$, то критерій (3.12) приблизно однаково „штрафує” як невеликі так і великі відхилення швидкості ланки

механізму від заданого значення v протягом часу $t \in [0, t_p]$. У загальному випадку показник степеня b є несталим, який змінюється в залежності від величини динамічної похибки швидкості руху системи $\dot{x}-v$. У випадку $b \rightarrow 0$ критерій (3.12) перетворюється у критерій швидкодії (3.4). Загалом найбільший інтерес для оптимізації режимів руху механізмів вантажопідйомних машин представляють нелінійні критерії. Тому актуальним завданням є вибір чисельних методів їх розв'язку. При виконанні вказаного вибору чисельного методу необхідно враховувати обчислювальні можливості цифрової системи, необхідність розв'язувати оптимізаційну задачу в режимі реального часу, складність самої задачі та інші фактори.

3.2. Аналіз прямих варіаційних методів для розв'язування задач оптимального керування

Еволюція динамічних кранових систем, на які можна справляти певний вплив, як правило, представляється неоднорідними диференціальними рівняннями, права частина яких є керуванням. Таким чином, існує можливість керувати такими системами, однак керування необхідно певним чином обрати із всієї множини допустимих керувань. Критерієм вибору є деякий показник, який називається критерієм оптимізації і який математично представляється термінальним чи інтегральним функціоналом. Задача вибору такого керування, при якому кранова система переходить із одного стану в інший, при екстремізації критерію оптимізації, називається задачею оптимального керування. Різні математичні методи дають різні необхідні та достатні умови оптимальності процесу керування: варіаційне числення – рівняння Ейлера-Пуассона; принцип максимуму – умова максимуму Гамільтоніана; динамічне програмування – функціональне рівняння Беллмана тощо.

У подальшому будемо розглядати процес розв'язку задачі оптимального керування за допомогою класичного варіаційного числення. Рівняння Ейлера-Пуассона, яке є необхідною умовою екстремуму функціоналу, різних оптимізаційних задач інтегруються у кінцевому виді лише у небагатьох випадках [37]. У зв'язку з цим виникає потреба в інших методах розв'язку цих задач. Основна ідея прямих методів полягає у тому, що варіаційна задача розглядається як гранична, для деякої задачі на екстремум функції кінцевого числа змінних. Ця задача на екстремум функції кінцевого числа змінних розв'язується звичайними методами, а потім граничним переходом отримується розв'язок відповідної варіаційної задачі.

Різниця між прямими методами та аналітичними методами розв'язування варіаційних задач полягає у тому, що у другому випадку спочатку знаходять множину екстремалей, а потім із цієї множини виділяють ту екстремаль (шляхом підбору крайових умов), яка задовольняє початкові та кінцеві координати фазового простору. Однак до розв'язування задач оптимального керування можна підійти і з іншого боку – спочатку знаходять множину допустимих кривих, при яких система переходить з початкового у кінцевий стан, а потім з цієї множини кривих обирають ту, яка мінімізує (максимізує) заданий функціонал [4].

Для оптимізації режимів руху динамічних систем використовуються різноманітні математичні методи. Найстарішим серед вказаних методів є метод варіаційного числення [37], зародження і розвиток котрого пов'язаний з іменами Ейлера, Лагранжа, Пуассона, Вейерштрасса та інших вчених. Одним із найвідоміших методів для розв'язування задач оптимального керування є принцип максимуму [40], розроблений Л.С. Понтрягіним та його учнями. Даний метод дозволяє врахувати обмеження накладені на керування динамічною системою. Потужним методом для розв'язування задач оптимального керування є динамічне програмування [41]. Автором даного методу є американський математик Р. Беллман. Крім вказаних методів, також використовується метод моментів [3], розвиток якого пов'язаний з ім'ям

академіка М.М. Красовського. Відома також теорема В.Ф. Кротова про достатні умови оптимальності процесу керування [42].

Всі перераховані методи дозволяють знаходити оптимальне керування у вигляді функції часу і лише деякі з них – у вигляді оптимального зворотного зв'язку (задача синтезу оптимального керування).

Розроблений значний клас наближених методів розв'язування задач оптимального керування. Серед цього класу наближених методів існує підклас, який можна назвати „варіаційним” – це ті методи, які безпосередньо мінімізують функціонал на множині допустимих траєкторій руху системи.

Наведемо найпростіший інтегральний функціонал деякої варіаційної задачі:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} P(t, x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad (3.13)$$

де P - підінтегральна функція; t_0 та t_1 - межі інтегрування (для задач оптимального керування початок та кінець оптимального процесу відповідно); $x(t)$ - функція, від якої залежить значення функціоналу (крапка над символом означає диференціювання за часом), можна розглядати як функцію нескінченної кількості змінних. Це твердження стає очевидним, якщо припустити, що допустимі функції можуть бути розкладені у степеневі ряди, у ряди Фур'є або взагалі в деякі ряди виду:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n(t), \quad (3.14)$$

де $\varepsilon_n(t)$ - задані функції, a_n - коефіцієнти при функціях. Таким чином, для задання функції у вигляді ряду (3.14) достатньо задати значення всіх коефіцієнтів a_n , і значення функціоналу (3.13) у цьому випадку визначається заданням нескінченної послідовності чисел: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, тобто функціонал

є функцією нескінченної кількості змінних: $I = I(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = \varphi(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Отже, відмінність між варіаційними задачами і задачами на екстремум функцій кінцевого числа змінних полягає у тому, що у варіаційному випадку доводиться досліджувати на екстремум функцію нескінченної кількості змінних.

У багатьох випадках виконати граничний перехід при $n \rightarrow \infty$ не вдається, тому звичайно обмежуються невеликим числом $n = 3, 4, 5$, а іноді навіть $n = 1$. Звичайно, чим більше n , тим краще значення функціоналу наближається до екстремуму.

Якщо прямими методами визначається абсолютний мінімум функціоналу, то наближене значення мінімуму функціоналу знаходиться з надлишком. При знаходженні прямими методами максимального значення функціоналу отримуємо наближене значення функціоналу з недостатком.

Прямі варіаційні методи можна використовувати для функціоналів декількох аргументів $I = I(x(t_1, t_2, \dots, t_n))$ або декількох функціональних аргументів $I = I(x(t), y(t), \dots, w(t))$.

Ейлер перший у своїх працях в області варіаційного числення використовував метод, який тепер називається кінцево-різницеvim прямим методом. Цікаво відмітити, що саме за допомогою цього методу Ейлер у 1744 році вивів знамените рівняння, яке є необхідною умовою екстремуму найпростішого функціонала (3.13) і яке носить його ім'я [37].

Суть даного методу полягає у тому, що значення функціоналу, наприклад:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} P(t, x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad x(t_0) = a, \quad x(t_1) = b, \quad (3.15)$$

розглядаються не на довільних у даній варіаційній задачі кривих, а лише на ломаних, які складені з заданого числа n прямолінійних ділянок, з заданими абсцисами вершин $t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots, t_0 + (n-1)\Delta t$, де $\Delta t = \frac{t_1 - t_0}{n}$.

На таких ломаних функціонал перетворюється у функцію ординат $I = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ вершин ломаної, оскільки ломана визначається цими координатами. Обираємо координати так, щоб функція $I = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ досягала екстремуму, тобто x_1, x_2, \dots, x_{n-1} визначаємо з системи рівнянь:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} = 0. \quad (3.16)$$

Визначивши ординати ломаної кривої, отримаємо наближений розв'язок варіаційної задачі. Граничним переходом при $n \rightarrow \infty$ можемо отримати точний розв'язок варіаційної задачі.

Зручніше, однак, значення функціоналу I на вказаних вище ломаних обчислювати наближено, наприклад, у найпростішій задачі заміняти інтеграл (3.15) інтегральною сумою:

$$I \approx \sum_{i=1}^n P(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{\Delta t}). \quad (3.17)$$

До недоліків цього методу слід віднести те, що розв'язком варіаційної задачі є ломана крива, складена з прямих, що означає розривність похідної у точках, які відповідають ординатам x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Тому реалізація оптимального за критерієм (3.15) закону руху деякої (технічної) системи на практиці є складною задачею. Збільшуючи кількість ординат n , можна в деякій мірі усунути цей недолік, але тоді збільшується об'єм і складність обчислень.

Ще одним, доволі розповсюдженим, прямим варіаційним методом є метод запропонований Рітцом [43]. Ідея цього методу полягає у тому, що

значення деякого функціоналу розглядається не на довільних допустимих кривих даної варіаційної задачі, а лише на лінійних комбінаціях:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \beta_i W_i(t), \quad (3.18)$$

з постійними коефіцієнтами, які складені з функцій на деякій обраній послідовності функцій: $W_1(t), W_2(t), \dots, W_n(t) \dots$. Ці функції повинні бути допустимими у розглядуваній задачі, що накладає деякі обмеження на вибір послідовності $W_1(t), W_2(t), \dots, W_n(t)$. На таких лінійних комбінаціях функціонал перетворюється у функцію $I = \varphi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ коефіцієнтів $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Ці коефіцієнти обираються так, щоб функціонал досягав екстремуму, отже $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ повинні бути визначені з системи рівнянь:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.19)$$

Виконуючи граничний перехід при $n \rightarrow \infty$ отримаємо, у випадку існування границі, функцію $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i W_i(t)$, яка є точним розв'язком розглядуваної варіаційної задачі.

До недоліків методу слід віднести необхідність відшукувати функцій $W_1(t), W_2(t), \dots, W_n(t)$, які повинні відповідати крайовим умовам. В деяких випадках це доволі складно виконати, особливо при неоднорідних крайових умовах з заданням значень вищих похідних. Крім того, необхідно пам'ятати про вимоги гладкості та неперервності функцій, що досить часто вимагається за умовами задачі.

Метод Канторовича використовується для знаходження функції, яка доставляє екстремум функціоналу і яка, крім того, залежить від декількох аргументів [44]. Цей метод де вчому схожий з попередньо розглянутим методом Рітца. За цим методом також необхідно обрати координатну систему функцій, які є функціями декількох аргументів

$W_1(t_1, t_2, \dots, t_n), W_2(t_1, t_2, \dots, t_n), \dots, W_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ і наближений розв'язок варіаційної задачі шукається у вигляді:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x_m) W_i(t_1, t_2, \dots, t_n), \quad (3.20)$$

однак коефіцієнти $\eta_i(x_m)$ не постійні, а є незалежними функціями однієї з незалежних змінних. Функціонал на класі функцій виду (3.20) перетворюється у функціонал $\tilde{I}(\eta_1(x_m), \eta_2(x_m), \dots, \eta_i(x_m))$, який залежить від n функцій однієї незалежної змінної $\eta_1(x_m), \eta_2(x_m), \dots, \eta_i(x_m)$. Ці функції обираються так, щоб функціонал $\tilde{I}(\eta_1(x_m), \eta_2(x_m), \dots, \eta_i(x_m))$ набував екстремуму. При цьому необхідно розв'язати систему з m рівнянь Ейлера-Пуассона для функціоналу $\tilde{I}(\eta_1(x_m), \eta_2(x_m), \dots, \eta_i(x_m))$, який після інтегрування за всіма аргументами окрім x_m перетворюється у функціонал, в який входить лише один аргумент. Знайшовши функції $\eta_i(x_m)$, які є екстремалами функціонала $\tilde{I}(\eta_1(x_m), \eta_2(x_m), \dots, \eta_i(x_m))$ та підставляючи їх у вираз (3.20), отримаємо наближений розв'язок варіаційної задачі.

Якщо здійснити перехід $n \rightarrow \infty$, то при деяких умовах можна отримати точний розв'язок, якщо ж граничного переходу не здійснювати, то цим методом буде отримано наближений розв'язок, причому, взагалі кажучи, значно більш точніший, ніж при використанні методу Рітца з тими ж координатними функціями і з тим же числом параметрів n . Це викликано тим, що клас функцій (3.20) зі змінними $\eta_i(x_m)$ значно ширше класу функцій (6) де коефіцієнти β_i постійні. Отже серед функцій (3.20) можна підібрати функції, які краще апроксимують розв'язок варіаційної задачі, ніж серед функцій (3.18).

Приведені вище прямі варіаційні методи не вичерпують усю їх множину. Це лише „класичні” методи, які були розроблені раніше інших і які досить широко використовуються. Однак з'являються нові прямі методи, що

вказує на актуальність проблем, які вирішуються методами варіаційного числення. Ми не зможемо дати вичерпну інформацію щодо прямих методів, деякі з яких описані у роботах [45-53].

Викладемо сутність одного із прямих методів розв'язування варіаційних задач. Нехай потрібно знайти екстремум функціоналу, у підінтегральний вираз якого входить похідна k -го порядку. При цьому рівняння Ейлера-Пуассона є рівнянням $2k$ -го порядку. Тому для його розв'язування необхідно задати $2k$ крайових умов (наприклад, k умов на початку руху та k в кінці). Новий спосіб визначення оптимальної траєкторії руху системи полягає у тому, щоб розв'язати диференціальне рівняння $(2k+p+r)$ -го порядку:

$$x^{(2k+p+r)} = 0, \quad (3.21)$$

де p – кількість додаткових крайових умов, які необхідно поставити для покращення умов руху системи (на початку і/або у кінці руху системи), тобто для усунення „жорстких” ударів [29] (у частинному випадку може бути $p=0$); r – кількість додаткових умов, які ставляться в інтервалі $[t_0, t_1]$, позначимо їх через q_1, q_2, \dots, q_r . Таким чином, розв'язок диференціального рівняння містить r параметрів. Тепер можемо визначити інтеграл (3.13), у який також будуть входити r параметрів. Тобто функціонал (3.13) перетворюється у функцію параметрів q_1, q_2, \dots, q_r . Надалі диференціюємо функціонал $I = \varphi(q_1, q_2, \dots, q_r)$ за параметрами q_1, q_2, \dots, q_r і розв'язуємо систему рівнянь:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (3.22)$$

Підставляючи визначені значення q_1, q_2, \dots, q_r у розв'язок диференціального рівняння (3.21) і спрощуючи його, отримаємо наближений розв'язок варіаційної задачі.

Необхідно зазначити, що постановку додаткових r умов можна робити декількома способами: 1) задати значення функції у різні моменти часу, наприклад $x\left(\frac{i(t_1-t_0)}{r+1}\right) = q_i, i = 1, 2, \dots, r$; 2) задати значення функції та її вищих похідних у один конкретний момент часу, наприклад посередині інтервалу $[t_0, t_1]$ $x^{(i)}\left(\frac{t_1-t_0}{2}\right) = q_i, i = 0, 1, \dots, r-1$; 3) задати значення функції та її вищих похідних у різні моменти часу (поєднання двох попередніх способів). Всі способи задання додаткових умов приводять до одних і тих же результатів.

Основна перевага приведеного прямого варіаційного методу полягає у тому, що наближений розв'язок варіаційної задачі шукається у класі функцій, до яких належить і точний розв'язок. Крім того, відпадає необхідність шукати послідовність функцій, на яких функціонал набуває екстремуму. Все це полегшує розрахунки. До переваг цього методу слід віднести і те, що є можливість визначити закони руху механізмів з „пом'якшеними” кінематичними та динамічними характеристиками, що дуже важливо для сучасних механізмів та машин, і чого, в деяких випадках, неможливо досягти навіть точними розв'язками варіаційних задач (за допомогою інтегрування рівняння Ейлера-Пуассона).

Приведемо детальний опис методики, за якою здійснюється оптимізація режимів руху механічних систем за допомогою приведеного прямого варіаційного методу. Насамперед необхідно задатись режимом руху системи, для якого буде проведена оптимізація. Надалі потрібно визначитись з метою оптимізації, тобто чітко сформулювати задля чого вона проводиться і які результати в процесі оптимізації повинні бути досягнуті. Формально цей крок означає встановлення виду критерію (інтегрального чи термінального) та виразу, який входить у критерій і який визначає його характер. Для різних режимів руху системи характерними є різні критерії (наприклад, для режиму розгону – критерієм може бути приводне зусилля, що діє на систему, а для усталеного руху – різниця між реальними координатами механічної системи

та заданими за програмою руху). Нехай критерій руху механічної системи заданий у вигляді інтегрального функціоналу:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} P(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(k)}(t)) dt, \quad (3.23)$$

де k – максимальний порядок похідної функції $x(t)$, яка входить у підінтегральний вираз P критерію (3.23), який відображає небажані характеристики руху системи протягом періоду часу $[t_0, t_1]$ і тому такий критерій повинен бути мінімізований. Умовою мінімуму функціоналу (3.23) є рівняння Ейлера-Пуассона, яке представляється диференціальним рівнянням $2k$ -го порядку.

Оптимізація режиму руху системи за прямим варіаційним методом полягає у тому, що шукають розв'язок диференціального рівняння (3.21). Пояснимо вибір порядку диференціального рівняння (3.21). Рівняння Ейлера-Пуассона, яке є умовою мінімуму критерію (3.23), має порядок $2k$. Тому порядок рівняння (3.21) повинен бути не меншим за порядок рівняння Ейлера-Пуассона. Якщо ця умова не виконується, то неможливо буде визначити закон руху системи, який задовольняє фізичні умови її руху. Однак, часто буває, що постановка фізичних крайових умов призводить до того, що знайдений з їх допомогою оптимальний режим руху системи не задовольняє певних вимог, наприклад, щодо плавності руху (на початку або у кінці руху системи). Це може спричинити додаткові динамічні навантаження у механізмах та, як наслідок, викликати передчасне виведення їх з ладу. Тому у прямому варіаційному методі додатково ставляться p крайових умов, які б враховували ці вимоги.

Постановка додаткових r крайових умов, при розв'язуванні рівняння (3.21) пояснюється таким чином: вони дають змогу „ввести” у розв'язок рівняння (3.21) r параметрів q_1, q_2, \dots, q_r . Таким чином, розв'язок рівняння (3.21) буде залежати від $2k$ крайових умов, які задаються з фізичних міркувань, p додаткових умов, які задаються з міркувань покращення режиму

руху механічної системи та r додаткових умов, які у подальшому будуть використовуватись для знаходження наближеного розв'язку варіаційної задачі. Оскільки $2k$ та p крайових умов відомі, то необхідно задати лише параметри q_1, q_2, \dots, q_r , щоб однозначно отримати шуканий розв'язок рівняння (3.21). Ці параметри можна задати довільно. Однак метою прямого варіаційного методу є отримання наближеного розв'язку варіаційної задачі. Очевидно, що такий наближений розв'язок повинен з достатнім ступенем точності відповідати умові екстремізації функціоналу, в який він входить (доставляти екстремум функціоналу). Тому можна використати r додаткових параметрів, які входять у функцію, яка є розв'язком рівняння (3.21), для того, щоб наблизити цю функцію до розв'язку варіаційної задачі (до екстремалі функціоналу). Як це зробити? Потрібно за допомогою функції-розв'язку рівняння (3.21) сформулювати підінтегральний вираз інтегралу (3.23), при цьому необхідно взяти відповідні похідні за часом, включно до k -тої:

$$P(t, x(t, q_1, q_2, \dots, q_r), \dot{x}(t, q_1, q_2, \dots, q_r), \dots, x^{(k)}(t, q_1, q_2, \dots, q_r)).$$

Після цього необхідно знайти визначений інтеграл (11) (сформулювати вираз інтегралу). У вираз цього інтегралу будуть входити параметри q_1, q_2, \dots, q_r . Таким чином, інтеграл перетворюється у функцію цих параметрів. Щоб знайти екстремум функції багатьох змінних необхідно розв'язати систему рівнянь (3.22). Розв'язки цієї системи – вирази параметрів q_1, q_2, \dots, q_r необхідно підставити у функцію-розв'язок диференціального рівняння (3.21). Таким чином, ця функція позбавляється невідомих параметрів q_1, q_2, \dots, q_r і доставляє наближений екстремум функціоналу (3.23).

3.3. Знаходження оптимального керування без врахування обмежень на керування

Рух одномасової динамічної системи, якою у першому наближенні можуть бути описані різноманітні вантажопідйомні машини та їх механізми, представляється диференціальним рівнянням другого порядку:

$$m\ddot{x} = F - W, \quad (3.24)$$

де x – узагальнена координата (лінійне переміщення машини); m – зведена до поступального руху маса машини та її приводного механізму; F – зведена до поступального руху сила приводного механізму; W – сила опору переміщення механізму у тому числі технологічного характеру.

Оптимізацію режиму розгону динамічної системи, що описується рівнянням (3.24) виконаємо за критерієм мінімуму інтегрального функціоналу:

$$I_{P_{\text{дин}}^2} = \int_0^{t_1} P_{\text{дин}}^2 dt = \int_0^{t_1} (m\ddot{x})^2 dt \rightarrow \min, \quad (3.25)$$

де $P_{\text{дин}}$ – динамічна складова потужності приводного механізму; t_1 – тривалість розгону механічної системи. Такий критерій дозволяє зменшити динамічну потужність приводного механізму і, отже, його вартість. Умовою мінімуму критерію (3.25) є рівняння Ейлера-Пуассона [37]:

$$\ddot{x}^3 + 4\dot{x}\ddot{x}\ddot{\ddot{x}} + \dot{x}^2 x^{IV} = 0. \quad (3.26)$$

Рівняння (3.26) є нелінійним диференціальним рівнянням четвертого порядку. Для знаходження інтегральної кривої із сімейства інтегральних кривих, для яких є справедливим рівняння (3.26) необхідно поставити крайові умови:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = 0; \\ \dot{x}(t_1) = v; \ddot{x}(t_1) = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Крайова задача (3.26)-(3.27) є нелінійною. Її розв'язок можна знайти наближеними методами. Використаємо для розв'язку крайової задачі (3.26)-

(3.27) метод Гальоркіна. Згідно з методом Гальоркіна наближений розв'язок крайової задачі шукається у вигляді суми:

$$x^*(t) = x_0(t) + \sum_{i=1}^n A_i x_i(t), \quad (3.28)$$

де $x^*(t)$ - функція наближеного розв'язку крайової задачі; $x_0(t)$ - функція, яка відповідає прийнятим крайовим умовам для шуканого розв'язку крайової задачі; A_i - коефіцієнти при функціях, які необхідно визначити; $x_i(t)$ - функції, які відповідають нульовим крайовим умовам.

Знайдемо функцію (3.28). Спочатку задамо функцію $x_0(t)$. Таку функцію можна шукати у вигляді поліному, що ми й зробимо. Зазначимо, що до розгляду можуть допускатись також інші функції (наприклад, тригонометричні, експоненціальні). Крім того, для забезпечення відсутності жорстких ударів у початковий момент зрушення з місця ($t=0$) поставимо вимогу, щоб функція $x_0(t)$ задовольняла також іще одній умові:

$$\ddot{x}_0(0) = 0. \quad (3.29)$$

Поліном, який відповідає поставленим вимогам представляється у вигляді:

$$x_0(t) = \frac{-t^3(t-2t_1)v}{2t_1^3}. \quad (3.30)$$

Тепер запишемо функцію $x_1(t)$ із суми (3.28):

$$x_1(t) = t^3(t-t_1)^3. \quad (3.31)$$

Ця функція відповідає нульовим крайовим умовам до другої похідної включно. Аналогічно, для знаходження функцій $x_i(t)$ можна використовувати різні їх класи.

Обмежимося лише однією функцією $x_1(t)$ для знаходження наближеного розв'язку крайової задачі (3.26)-(3.27), що дозволить у подальшому досить легко знайти шукану функцію $x^*(t)$. Підставляючи у вираз (3.28) формули (3.30) і (3.31), знаходимо функцію $x^*(t)$. Надалі необхідно знайти нев'язку рівняння (3.26) для функції $x^*(t)$:

$$(\ddot{x}^*)^3 + 4\dot{x}^* \ddot{x}^* \ddot{\ddot{x}}^* + (\dot{x}^*)^2 \overset{IV}{x}^* = \varepsilon. \quad (3.32)$$

де ε - нев'язка розв'язку рівняння (3.26) ($\varepsilon \neq 0$). Не будемо приводити вираз функції ε оскільки від досить об'ємний.

Для того щоб нев'язка була якомога ближчою до нуля необхідно забезпечити ортогональність функцій $x_1(t)$ та ε , що записується у вигляді умови:

$$\int_0^{t_1} \varepsilon x_1(t) dt = 0. \quad (3.33)$$

Підінтегральний вираз формули (3.33) є функцією кількох змінних, а саме: часу t , тривалості перехідного процесу t_1 , усталеної швидкості руху системи v та коефіцієнту A_1 , який входить у вираз (3.28) (коефіцієнт A_1 є множником функції (3.31)). Отже, інтеграл (3.33) є лише функцією трьох змінних t_1 , v та A_1 . Після нескладних перетворень запишемо рівняння (3.33) у такому вигляді:

$$A_1^3 + aA_1^2 + bA_1 + c = 0, \quad (3.34)$$

$$\text{де } a = -\frac{722361 v}{385840 t_1^5}; \quad b = \frac{15504 v^2}{25025 t_1^{10}}; \quad c = \frac{126939 v^3}{1515800 t_1^{15}}.$$

Розв'язок кубічного алгебраїчного рівняння (3.34) будемо шукати методом Кардано [54]. Запишемо розв'язок:

$$A_1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{-a^2 + b}{9} + \frac{b}{3}\right)^3 + \left(\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{6} + \frac{c}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{-a^2 + b}{9} + \frac{b}{3}\right)^3 + \left(\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{6} + \frac{c}{2}\right)^2}} \quad (3.35)$$

Підставляючи знайдений коефіцієнт у формулу (3.28) знаходимо наближений розв'язок оптимізаційної задачі – функцію $x^*(t)$. Побудуємо для отриманої функції графіки кінематичних характеристик руху механічної одномасової системи (рис. 3.1-3.3) при $t_1 = 1c$, $v = 1m/c$.

Для збільшення точності знаходження наближеного розв'язку рівняння (3.26) необхідно збільшити кількість функцій у сумі (3.28). Наступні функції у сумі (3.28) можна задавати таким чином:

$$x_i(t) = t^{i+2}(t-t_1)^{i+2}. \quad (3.36)$$

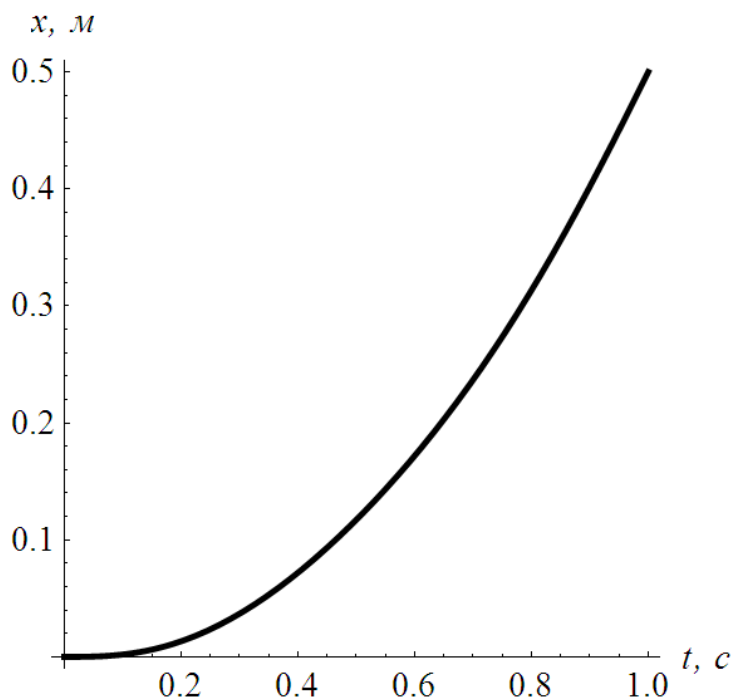


Рис. 3.1. Графік функції переміщення механізму крана

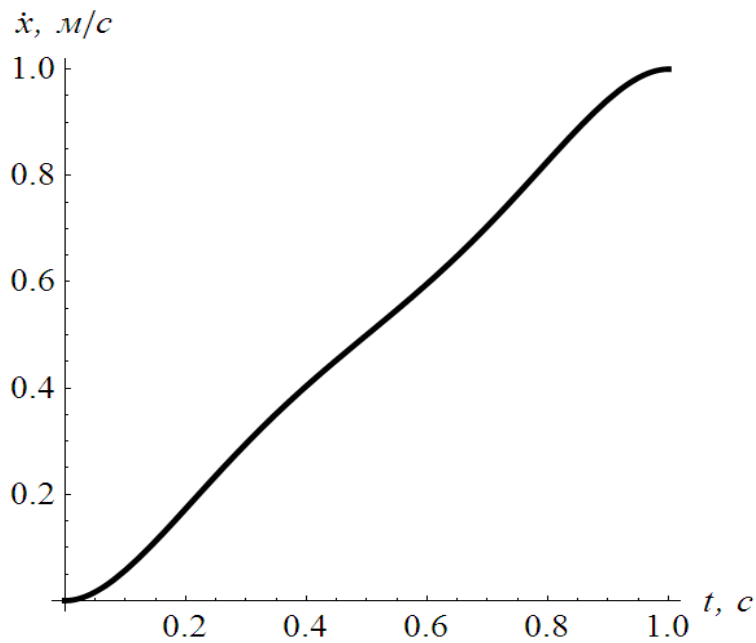


Рис. 3.2. Графік функції швидкості механізму крана

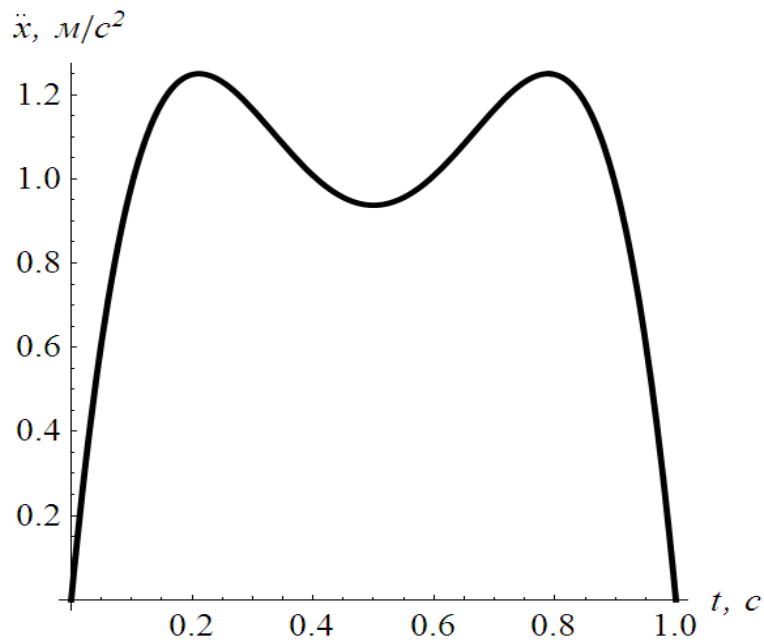


Рис. 3.3. Графік функції прискорення механізму крана

Будемо послідовно збільшувати кількість функцій у сумі (3.28) і розв'язувати отримані задачі для знаходження невідомих коефіцієнтів A_i . У результаті функція наближеного розв'язку оптимізаційної задачі $x^*(t)$ буде змінюватись.

Приведемо графіки функцій прискорення механічної системи $\ddot{x}^*(t)$ оскільки вони найбільш повно відображають динаміку руху (рис. 3.4-3.5).

Аналізуючи приведені графічні залежності можна сказати, що графік функції прискорення, зі збільшенням кількості функцій у сумі (5) збільшує коливний характер, що негативно позначається на динаміці руху системи. Разом з тим, відбувається зменшення максимального значення прискорення, що означає зменшення динамічної складової приводного зусилля.

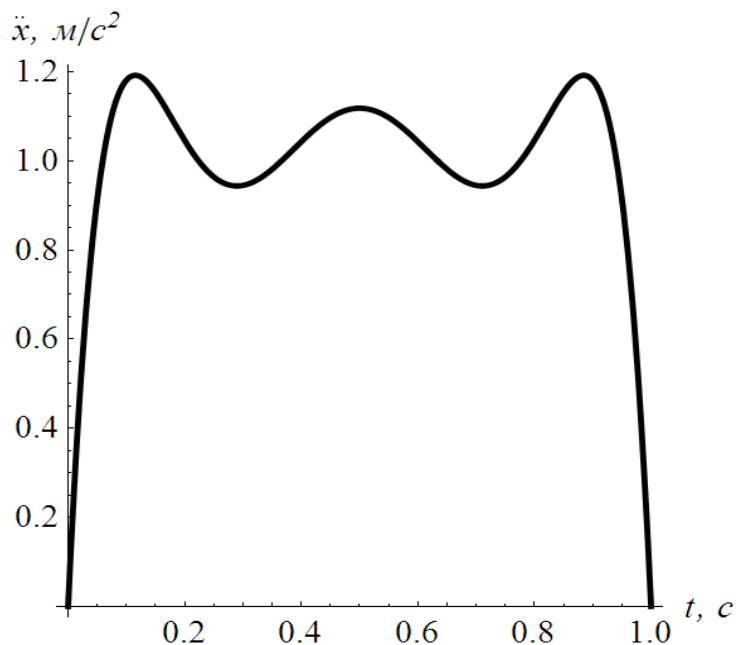


Рис. 3.4. Графік функції прискорення механічної системи при $i=2$

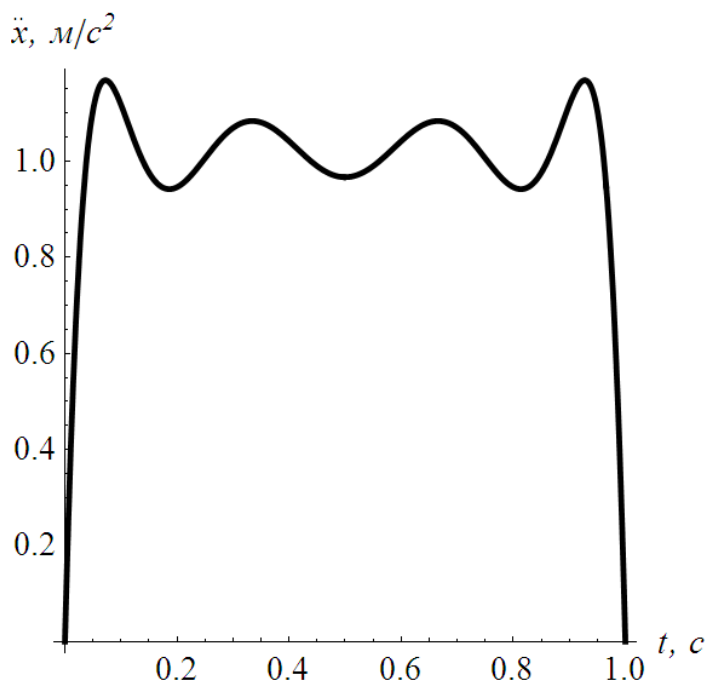


Рис. 3.5. Графік функції прискорення механічної системи при $i=3$

3.4. Знаходження оптимального керування з врахуванням обмежень на керування

Для проведення оптимізації режиму руху одномасової механічної системи необхідно забезпечити мінімум критерію (3.25).

Запропонуємо інший підхід до цієї задачі, відмінний від того, який був використаний у попередньому пункті.

Відомо, що для того, щоб перевести систему з однієї точки фазового простору у іншу за найкоротший проміжок часу необхідно, щоб керування приймало свої екстремальні значення (так зване „релейне” керування [1]). При цьому приводне зусилля буде константою:

$$F_{дин} = \frac{mv}{t_1} = \text{const}, \quad (3.37)$$

де v - усталена швидкість руху механізму. Це означає, що на початку та у кінці руху на механічну систему діє ненульове зусилля. Такий режим призводить до „м'яких” ударів у кінематичних зачепленнях приводу, їх зношуванню, збільшенню пускових струмів у двигуні, що є небажаним. Необхідно прагнути до „пом'якшення” режимів руху, тобто до плавного наростання та зменшення зусилля. Крім того, величина керування не повинна перевищувати деякої величини, наприклад, максимального моменту у асинхронному двигуні. Ця вимога формулюється таким чином:

$$F_{дин} \leq F_{max}, \quad (3.38)$$

де F_{max} - максимальне приводне зусилля, діюче на механічну систему.

Для врахування поставлених вимог до руху механічної системи використаємо наближений метод розв'язку варіаційної задачі (3.25). Мінімум критерію (3.25) будемо шукати на деякій функції. Знайдемо цю функцію. Для цього розв'яжемо диференціальне рівняння тринадцятого порядку:

$$x = 0, \quad (3.39)$$

при таких крайових та допоміжних умовах:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = 0; \\ \ddot{x}(\frac{t_1}{2}) = \frac{F_{max}}{m}; \quad \ddot{\ddot{x}}(\frac{t_1}{2}) = \ddot{\ddot{\ddot{x}}}(\frac{t_1}{2}) = \dots = \ddot{\ddot{\ddot{\ddot{x}}}}(\frac{t_1}{2}) = 0; \\ \dot{x}(t_1) = v. \end{cases} \quad (3.40)$$

Відомо, що розв'язок диференціального рівняння (3.39) буде представляти собою поліноміальну залежність з коефіцієнтами, які залежатимуть від поставлених крайових умов руху системи (3.40) [54]. Порядок диференціального рівняння (3.39) рівний кількості крайових та допоміжних умов (3.40).

Пояснимо вибір саме таких крайових та допоміжних умов. Постановка таких крайових умов не встановлює початкові та кінцеві нульові прискорення. Однак подальший аналіз отриманих результатів встановлює, що ці крайові умови виконуються, навіть без їх постановки у системі (3.40). Додаткові умови поставлені посередині інтервалу розгону системи встановлюють рівність прискорення деякій величині $\ddot{x}(\frac{t_1}{2}) = \frac{F_{max}}{m}$. При цьому динамічне зусилля посередині інтервалу руху рівне F_{max} . Нульові вищі похідні посередині інтервалу руху формують характерну „площадку” графіка динамічного зусилля або пропорційної йому величини – прискорення (це буде видно на графіку), тобто майже незмінності функції вліво та вправо від точки $t = t_1 / 2$.

Зазначимо, що збільшення порядку похідної у точці $t = t_1 / 2$ наближає графік функції динамічної складової приводного зусилля до прямої, горизонтальної до осі абсцис.

Не будемо приводити розв'язок крайової задачі (3.39)-(3.40). Запишемо лише значення функціоналу за виразом (3.25), яке йому відповідає:

$$I_{P_{\text{дин}}}^2 = \frac{1}{269997m^2t_1} (35000F_{\text{max}}^4t_1^4 + 10500F_{\text{max}}^3mt_1^3v + 328250F_{\text{max}}^2m^2t_1^2v^2 - 862615F_{\text{max}}m^3t_1v^3 + 578864m^4v^4), \quad (3.41)$$

Перетворимо вираз (3.41). Для цього з формули (3.37) виразимо тривалість розгону системи, замінивши динамічне зусилля $F_{\text{дин}}$ на максимальне F_{max} : $t_1 = \frac{mv}{F_{\text{max}}}$. Очевидно, що яким би виразом не описувався наближений до оптимального режим руху системи тривалість її розгону буде більша ніж тривалість руху системи за законом (3.37). Тому можемо записати:

$$t_1 = \frac{nm_{\text{прив}}v}{F_{\text{max}}}, \quad (3.42)$$

де n - деякий коефіцієнт.

Підставимо вираз (3.42) у формулу (3.41) та отримаємо:

$$I_{P_{\text{дин}}}^2 = \frac{F_{\text{max}}m v^3}{269997n} (578864 + 5n(-172523 + 50n(1313 + 14n(3 + 10n)))). \quad (3.43)$$

Знайдемо таке значення коефіцієнту n , при якому вираз (3.43) набуває мінімуму. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$\frac{\partial I}{\partial n} = 0. \quad (3.44)$$

Рівняння (3.44) представляється алгебраїчним рівнянням четвертої степені, яке, як відомо, буде мати чотири корені. Відкинувши два комплексні корені та один від'ємний корінь, можемо записати:

$$n = \frac{11}{10}. \quad (3.45)$$

Враховуючи вирази (3.43) та (3.45) знайдемо значення функціоналу (3.25):

$$I = \frac{83990 F_{max} m v^3}{269997}. \quad (3.46)$$

Підставляючи вирази (3.42) та (3.45) у розв'язок крайової задачі (3.39)-(3.40) можемо знайти наближений розв'язок оптимізаційної задачі (3.25). Зазначимо, що отриманий вираз не буде містити величини t_1 , але буде містити величину F_{max} . Тобто задаючи обмеження на максимальне зусилля однозначно отримуємо мінімальну тривалість розгону механічної системи. Цим отриманий закон руху нагадує закони руху механічних систем знайдених за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. Відмітимо, що пошук мінімуму функціоналу (3.25) здійснюється у дуже вузькому класі функцій: цей клас можна отримати розв'язавши крайову задачу (3.39)-(3.40) та підставивши у розв'язок вираз (3.42). У результаті отримаємо клас функцій з одним параметром n . Однак такий клас містить наперед задані властивості: нульові другі похідні функції у околах крайніх точок та неперевищення функцією другої похідної встановленого обмеження. Для синтезованої функції та її вищих похідних включно до третьої побудуємо графіки функцій (рис. 3.6) при таких параметрах: $F_{max} = 100\text{Н}$, $v = 1\text{м/с}$, $m = 100\text{кг}$.

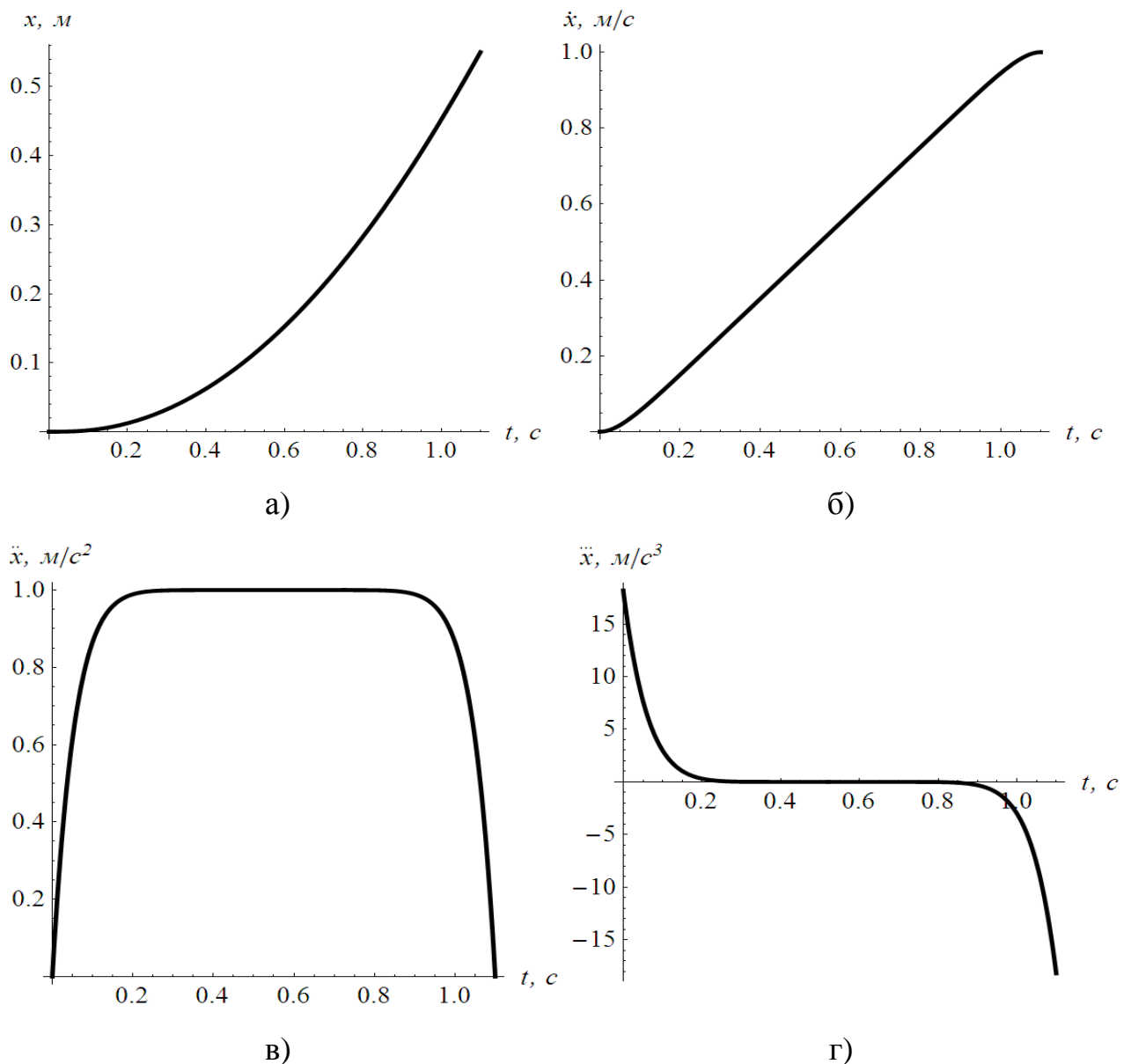


Рис. 3.6. Графіки функцій переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) та ривка (г) механічної системи

Аналізуючи графік прискорення механічної системи (рис. 3.6, в) відмітимо, що він плавно змінюється і ніде не перевищує величини $\frac{F_{max}}{m}$. У роботі [36] отриманий розв'язок такої ж задачі (3.25). Порівняємо розв'язки спочатку за величинами функціоналів. Для цього побудуємо графіки функціоналів в залежності від приведеної маси механізму крана (рис. 3.7).

Пряма лінія характеризує зростання функціоналу для отриманого у даній роботі функції керування. Нелінійний характер зростання функціоналу

відповідає вже відомому результату з роботи [36]. Очевидно, що при невеликих приведених масах краще використовувати все ж таки відомий результат з [36], а при значних – отриманий у даній роботі. Визначимо ту межу мас, для яких вигідно використовувати саме відомий результат [36]. Для цього розв’яжемо рівняння:

$$I_1 = \frac{83990 F_{max} m v^3}{269997}, \quad (3.47)$$

де I_1 - значення функціоналу отримане у роботі [36].

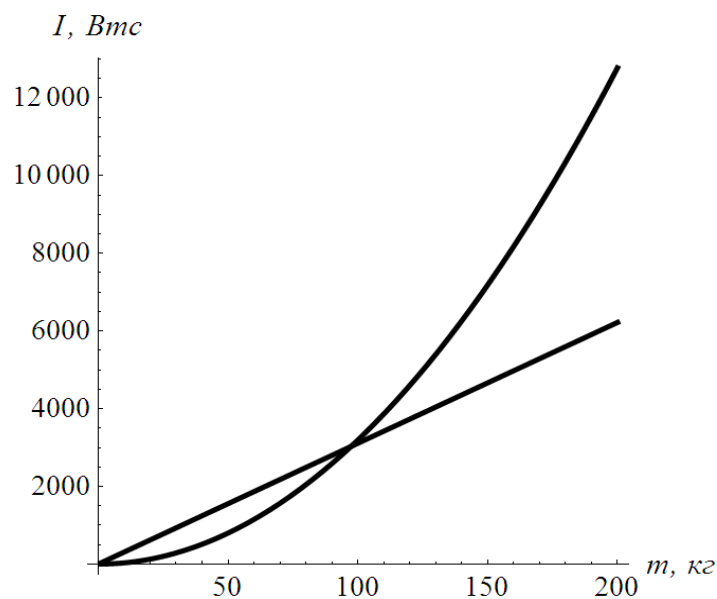


Рис. 3.7. Графіки функціоналів за виразом (3.25) при різних функціях, які входять у їх підінтегральний вираз

Рівняння (3.47) представляється квадратним рівнянням, відкидаючи нульовий розв’язок якого можемо записати:

$$m = (9263852421 \ 1200 \ F_{max} \ t_1^3 v)(989 (-(19 t_1^2 v^2 \times \\ \times (-8166322355 \ 5912888917 \ 4650938331 \ 229 + \\ + 1708731379 \ 9992274620 \ 6191616 \ \sqrt{4302049521 \ 6186}))^{\frac{1}{3}} - \\ - 4741448519 \ 3 t^2 v^2 + (19 t_1^2 v^2 (8166322355 \ 5912888917 \ 4650938331 \ 229 + \\ + 1708731379 \ 9992274620 \ 6191616 \ \sqrt{4302049521 \ 6186}))^{\frac{1}{3}})^{-1}. \quad (3.48)$$

Проведемо аналіз результатів за динамічними показниками. Для цього побудуємо у одній площині графіки функцій динамічних зусиль – відомого та отриманого у даній роботі (рис. 3.8): суцільна лінія представляє отримані у даній роботі результати, а штрихова – відомі результати [36].

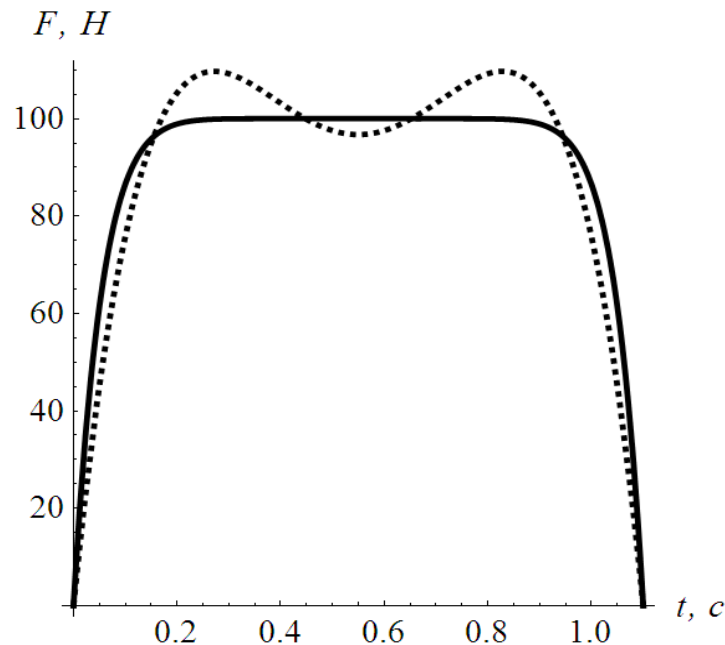


Рис. 3.8. Графіки функцій динамічних зусиль відомого та отриманого у даній роботі

Перевагою отриманого у даній роботі оптимального керування є те, що динамічне зусилля не перевищує наперед задану величину, що є актуальним для приводних систем сучасних роботів, які повинні мати мінімальні габарити [55]. Відповідно до цього вони не можуть розвивати значний крутний момент.

3.5. Оптимізація перехідних режимів руху механізму переміщення крана із електроприводом постійного струму

Значна кількість вантажопідійомних машин мають електричний привод постійного струму. Використання електроприводів постійного струму зумовлене насамперед його високими регульовальними та динамічними

показниками (перевантажувальна здатність, жорсткість механічної характеристики).

Велика кількість механізмів кранів із приводом постійного струму працюють із частими пусками і зупинками. Усталений рух таких систем може бути взагалі відсутнім. Відомо, що при роботі електричного двигуна постійного струму в перехідних режимах витрачається значна кількість електричної енергії, яка йде на виконання механічної роботи, тобто на зміну кінетичної енергії механізму і на втрати у самому двигуні або його регулювальних реостатах. Таким чином, постає проблема зменшення енергетичних витрат двигуна протягом його перехідних режимів руху із врахуванням параметрів мехатронної системи.

Оптимізацією режимів руху електродвигунів постійного струму займалось багато дослідників [37, 56-58]. У цих дослідженнях використана модель двигуна постійного струму із незалежним (паралельним) збудженням.

За критеріальною постановкою всі задачі оптимізації режимів руху двигуна постійного струму діляться таким чином: 1) задача максимальної швидкодії; 2) задача мінімального енергоспоживання; 3) задача максимальної продуктивності.

Методами, які використовуються для знаходження оптимальних законів руху двигуна постійного струму, є варіаційне числення, принцип максимуму та динамічне програмування. Крім перерахованих методів оптимального керування існує цілий масив наближених методів, які дозволяють знайти не точний розв'язок задачі, а лише деяке наближення до точного розв'язку. Зазначимо, що використання прямих варіаційних методів дозволяє у деяких випадках отримати цінні властивості наближених розв'язків оптимізаційних задач, наприклад, досягти абсолютних мінімумів термінальних критеріїв оптимізаційної задачі.

Для синтезу наближеного оптимального керування електричним двигуном постійного струму із незалежним збудженням необхідно отримати його математичну модель. Спочатку проведемо математичну модель двигуна

для режиму його пуску. Доцільно розглядати такий режим як двоетапний. На першому етапі відбувається збільшення струму i , відповідно, моменту на валу двигуна до величини моменту статичного опору. При цьому вал двигуна знаходиться в стані спокою. Математична модель першого етапу описується такими рівняннями:

$$\begin{cases} U = FA_2 + \dot{F}A_3; \\ |F| \leq \mu m g, \end{cases} \quad (3.49)$$

де U - напруга на якірній обмотці двигуна; F - приведене до поступального руху зусилля двигуна ($F = \frac{M_{\text{дв}} i \eta}{r}$); $M_{\text{дв}}$ - момент на валу двигуна; i - передаточне число приводу; η - ККД приводу; r - радіус приведення, наприклад, радіус колеса вантажного візка; A_2 - коефіцієнт ($A_2 = \frac{R_{\text{я}} r}{i \eta c \Phi}$); $R_{\text{я}}$ - опір обмотки якоря; c - коефіцієнт, який визначається конструкцією двигуна ($c = \frac{pN}{2\pi a}$); p - число пар полюсів двигуна; N - число активних провідників обмотки якоря; a - число паралельних віток обмотки якоря; Φ - магнітний потік двигуна (приймаємо, що магнітний потік є постійною величиною. Для цього необхідно підтримувати постійним величину струму в обмотці збудження); A_3 - коефіцієнт ($A_3 = \frac{Lr}{i \eta c \Phi}$); L - індуктивність якірної обмотки двигуна; m - маса мехатронної системи; μ - коефіцієнт тертя маси m ; g - прискорення вільного падіння. Права частина першого рівняння складається із двох доданків. Перший доданок відповідає спаду напруги на опорі обмотки якоря, а другий – ЕРС самоіндукції обмотки якоря. Математична модель (3.49) побудована із врахуванням наступного співвідношення:

$$M_{\text{дв}} = c \Phi I_{\text{я}}. \quad (3.50)$$

Перше рівняння (3.49) відповідає другому закону Кірхгофа [59], а друге рівняння у системі (3.49) відповідає закону Кулона [60]. На першому етапі прикладається напруга на обмотку якоря двигуна. При цьому збільшується струм від нульового значення до номінального, яке відповідає зусиллю статичного опору рівному $\mu m g$. Тобто перший етап закінчується тоді, коли нестрога нерівність у системі (3.49) перетвориться у рівність.

Другий етап розгону кранового механізму описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} U = \dot{x}A_1 + FA_2 + \dot{F}A_3; \\ F - \mu m g = m_n \ddot{x}, \end{cases} \quad (3.51)$$

де A_1 - коефіцієнт ($A_1 = \frac{c\Phi i}{r}$); x - узагальнена координата руху кранового механізму, у даному випадку координата лінійного переміщення; m_n - приведена до поступального руху маса механізму. Крапка над символом означає диференціювання за часом. Другий етап починається із моменту зрушення механізму з місця і закінчується у момент виходу двигуна на усталену швидкість, коли приводне зусилля стане рівним зусиллю опору руху, а струм стане рівним номінальному.

Математична модель для режиму гальмування кранового механізму переміщення із двигуном постійного струму збігається із системою (3.51).

Для обох етапів розгону мехатронної системи використаємо такий інтегральний критерій:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} P_{\text{спож}}^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} (UI_{\text{я}})^2 dt \rightarrow \min, \quad (3.52)$$

де $P_{\text{спож}}$ - споживана двигуном потужність; t_1, t_2 - моменти часу початку та закінчення етапу руху. Для першого етапу із врахуванням виразу (3.49) критерій (3.52) буде мати такий вигляд:

$$I_1 = A_0^2 \int_0^{T_1} F^2 (FA_2 + \dot{F}A_3)^2 dt \rightarrow \min, \quad (3.53)$$

де A_0 - коефіцієнт ($A_0 = \frac{r}{i\eta c\Phi}$); T_1 - тривалість першого етапу. Для другого етапу руху критерій (3.52) прийме такий вигляд:

$$I_2 = A_0^2 \int_{T_1}^T \{m_n \ddot{x} + \mu m g\}^2 \{\dot{x}A_1(m_n \ddot{x} + \mu m g)A_2 + m_n \ddot{x}A_3\}^2 dt \rightarrow \min. \quad (3.54)$$

Рівняння Ейлера-Пуассона [37] для критерію (3.53) буде мати такий вигляд:

$$F^3(3A_2^2 F^2 - 2A_3^2 \dot{F}^2 - A_3^2 F\ddot{F}) = 0. \quad (3.55)$$

Рівняння (3.55) є нелінійним однорідним диференціальним рівнянням. Воно розпадається на два рівняння:

$$F^3 = 0 \quad (3.56)$$

та

$$3A_2^2 F^2 - 2A_3^2 \dot{F}^2 - A_3^2 F\ddot{F} = 0. \quad (3.57)$$

Рівняння (3.56) тривіальне. Розв'язок рівняння (3.57) представляється у такому вигляді:

$$F = C_2 \sqrt[3]{\cosh\left(A_2\left(\frac{3t}{A_3} - A_3 C_1\right)\right)}, \quad (3.58)$$

де C_1 та C_2 - постійні інтегрування, які знаходяться із крайових умов. Для даного етапу крайові умови записуються таким чином:

$$\begin{cases} F(0) = 0, \\ F(T_1) = \mu m g. \end{cases} \quad (3.59)$$

Умови (3.59) несумісні із виразом (3.58), тобто неможливо знайти такі постійні інтегрування C_1 та C_2 , які б задовольняли рівняння (3.59).

Спробуємо для розв'язування даної задачі використати метод динамічного програмування. Основне функціональне рівняння (рівняння Беллмана [41]) для даної задачі із врахуванням позначень: $u = \frac{U}{A_3}$, $A^* = \frac{A_2}{A_3}$,

$F = F_1$, $\dot{F}_1 = F_2$ записується таким чином:

$$\min \left((F_1 u A_3)^2 + \frac{\partial S}{\partial F_1} F_2 + \frac{\partial S}{\partial F_2} (u - F_1 A^*) \right) = 0, \quad (3.60)$$

де S - функція Беллмана. Продиференціюємо вираз (3.60) за параметром u та прирівняємо отримане до нуля, будемо мати:

$$2F_1^2 A_3^2 u + \frac{\partial S}{\partial F_2} = 0 \quad (3.61)$$

звідки знайдемо вираз для функції u :

$$u = -\frac{1}{2F_1^2 A_3^2} \frac{\partial S}{\partial F_2}. \quad (3.62)$$

Для знаходження функції u необхідно знати функцію Беллмана S . Побудова цієї функції є складною задачею. Якщо її представити у вигляді квадратичної форми, як це прийнято робити при розв'язуванні лінійно-квадратичних оптимізаційних задач [1], то ми отримаємо:

$$S = Q_1 F_1^2 + Q_2 F_2^2 + Q_3 F_1 F_2, \quad (3.63)$$

де Q_1, Q_2, Q_3 - коефіцієнти, які необхідно визначити. Надалі необхідно розв'язати алгебраїчне нелінійне рівняння, в яке перетворюється рівняння Беллмана:

$$-\frac{Q_3^2}{4A_3^2} - A^* Q_3 F_1^2 - \frac{Q_2 Q_3 F_2}{A_3^2 F_1} - \left(\frac{Q_2 F_2}{A_3 F_1} \right)^2 + Q_3 F_2^2 + 2F_1 F_2 (Q_1 - A^* Q_2). \quad (3.64)$$

Рівняння (3.64) повинно бути справедливим при будь яких F_1 і F_2 , тому його необхідно „розкласти” на три рівняння для знаходження невідомих коефіцієнтів Q_1, Q_2, Q_3 . Однак, цього не вдається зробити через наявність нелінійного підінтегрального виразу критерію (3.52). Очевидно, що для знаходження коефіцієнтів Q_1, Q_2, Q_3 необхідно функцію Беллмана представляти у іншій не квадратичній формі. Не існує загальних рекомендацій щодо представлення функції Беллмана для того чи іншого типу критерію оптимізації, тому використання методу динамічного програмування для даної задачі пов'язано із складнощами обчислювального характеру.

Використання принципу максимуму також не дає корисного для побудови оптимального закону руху результату. Можна показати, що використання методів варіаційного числення, принципу максимуму чи динамічного програмування на другому етапі руху також не дає якого-небудь результату. Тому необхідно використати інші методи, зокрема прямий варіаційний метод [36] або змінювати саму постановку задачі.

Очевидно, що складнощі, які виникають при розв'язуванні оптимізаційної задачі (3.53), (3.59) полягають у самій постановці задачі. Чи можна видозмінити задачу таким чином, щоб отримати її розв'язок без значних ускладнень? Крайові умови (3.59) змінювати неможна, однак можна змінити критерій оптимізації. Оберемо інший критерій для першого етапу розгону мехатронної системи:

$$I_1^* = \int_0^{T_1} U^2 dt = \int_0^{T_1} (FA_2 + \dot{F}A_3)^2 dt \rightarrow \min. \quad (3.65)$$

Критерій (3.65) мінімізує напругу на клеммах двигуна. Сутність цього критерію полягає у тому, що він дає змогу отримати закон зміни приводного зусилля, який реалізовується за допомогою мінімального значення напруги джерела живлення двигуна. Таким джерелом, як правило, є керований тиристорний регулятор напруги.

Умовою мінімуму критерію (3.65) є рівняння Ейлера-Пуассона:

$$\ddot{F} - \left(\frac{A_2}{A_3} \right)^2 F = 0. \quad (3.66)$$

Розв'язок рівняння (3.66) при крайових умовах (3.59) такий:

$$F = \frac{e^{-\frac{A_2}{A_3}(T_1-t)} \left(e^{\frac{2t A_2}{A_3}} - 1 \right) m g \mu}{e^{\frac{2T_1 A_2}{A_3}} - 1}. \quad (3.67)$$

Приведемо графіки функцій струму якірної обмотки та напруги на ній для отриманого закону зміни приводного зусилля (рис. 3.9).

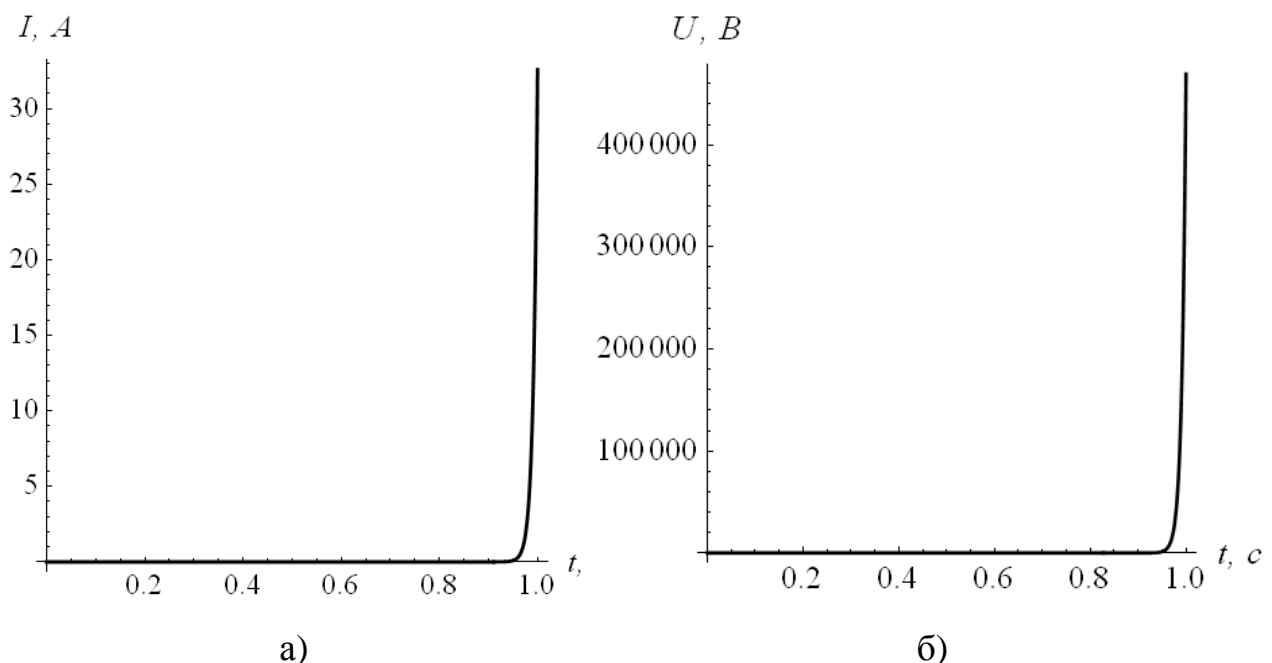


Рис. 3.9. Графіки зміни струму (а) та напруги (б) двигуна, які відповідають закону зміни приводного зусилля (3.67)

Очевидно, що реалізація такого закону керування на практиці неможлива через значну напругу, яка прикладається до якірної обмотки двигуна. Причиною значної напруги у кінці першого етапу є велика ЕРС самоіндукції, що викликана значною швидкістю зростання струму.

Аналізуючи критерій (3.65) можна прийти до висновку, що складова FA_2 у підінтегральному виразі цього критерію не вносить значної зміни напруги на обмотці двигуна, тому її можна відкинути і розглядати критерій:

$$I_1^{**} = \int_0^{T_1} E^2 dt = \int_0^{T_1} (\dot{FA}_3)^2 dt \rightarrow \min, \quad (3.68)$$

де E - ЕРС самоіндукції двигуна. Умовою мінімуму критерію (3.68) є рівняння Ейлера-Пуассона:

$$\ddot{F} = 0, \quad (3.69)$$

розв'язуючи яке при крайових умовах (3.59) отримаємо лінійний закон зміни зусилля:

$$F = \frac{t}{T_1} m g \mu. \quad (3.70)$$

Отримавши оптимальний закон руху, не будемо відмовлятися від мінімізації критерію (3.53). Підставимо закон (3.70) та його вищу похідну у підінтегральний вираз критерію (3.53) та знайдемо значення критерію:

$$I_1 = \frac{A_0^4 (10A_3^2 + 15A_2A_3T_1 + 6A_2^2T_1^2)W^4}{30T_1}. \quad (3.71)$$

Побудуємо графік функції (3.71) від аргументу T_1 (рис. 3.10).

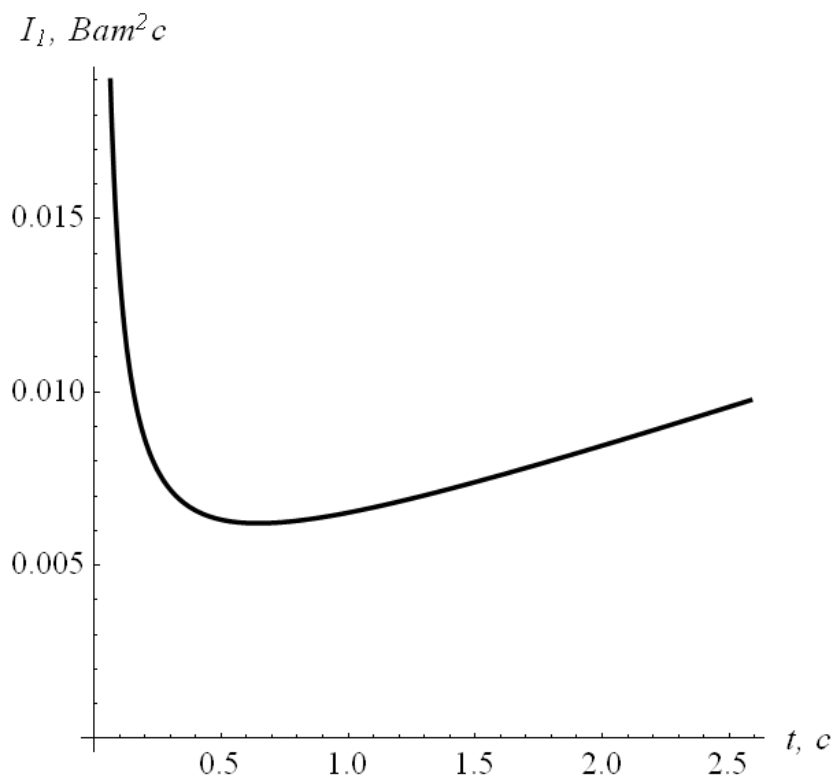


Рис. 3.10. Графік зміни величини критерію I_1 в залежності від тривалості першого етапу розгону механізму переміщення крана

Аналізуючи графік (рис. 3.10) можна прийти до певних висновків. Критерій (3.53) має виражений мінімум, тому необхідно шукати таке значення тривалості першого етапу, при якому критерій (3.53) набуває мінімуму. Для цього необхідно розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial I_1}{\partial T_1} = 0, \quad (3.72)$$

яке у розгорнутому вигляді приймає такий вид:

$$\frac{(A_0 m g \mu)^4 (3A_2^2 T_1^2 - 5A_3^3)}{15T_1^2} = 0. \quad (3.73)$$

Відкидаючи від'ємний розв'язок, запишемо остаточно:

$$T_1 = \frac{A_3}{A_2} \sqrt{\frac{5}{3}}. \quad (3.74)$$

Зазначимо, що отриманий результат може затягувати перший етап і тому, у деяких випадках, необхідно скорочувати тривалість першого етапу, відхиляючись від виразу (3.74) у сторону менших значень T_1 .

З аналізу графіка на рис. 3.10 та із приведених вище розрахунків можемо зробити певний висновок: зменшення тривалості першого етапу незначно зменшить енергетичну ефективність приводу (критерій I_1 збільшиться) і незначно збільшить його швидкодію. Питання зменшення тривалості першого етапу необхідно вирішувати для конкретного технологічного процесу, для якого однозначно можна відповісти на питання: що важливіше швидкодія чи енергоефективність.

Для максимальної швидкодії першого етапу необхідно якомога швидше збільшення струму до номінального. Це можливо із умовою найповнішого використання регульованого джерела живлення двигуна. Для проходження першого етапу необхідно прикласти до якірної обмотки двигуна імпульс напруги у формі трапеції із кінцевим значенням $U(T_1) = U_{ном}$ або у розгорнутій формі:

$$m g \mu \left(A_2 + \frac{A_3}{T_1} \right) = U_{ном}. \quad (3.75)$$

Звідки знайдемо T_1 :

$$T_1 = \frac{A_3 m g \mu}{U_{ном} - A_2 m g \mu}. \quad (3.76)$$

Форма імпульсу напруги у вигляді трапеції впливає із першого рівняння системи (3.49): вираз (3.70) є лінійно зростаючим, отже його похідна є постійною величиною. Додавання цих двох складових у виразі напруги визначає її форму.

Для обох формул (3.74) та (3.76) приведемо значення, що відповідають конкретним значенням параметрів механізму переміщення крана: $m = 2000 \text{ кг}$,

$U_{ном} = 220В$, $\eta = 0,8$, $r = 0,3 м$, $i = 9,7$, $R_r = 0,54 Ом$, $\Phi = 9,2 \cdot 10^{-3} Вб$, $p = 2$, $a = 1$, $N = 810 вит$ (параметри двигуна постійного струму П71 [61]) тривалість першого етапу за формулою (3.74) становить 0,01099 с, а за формулою (3.76) – 0,00068 с. Зазначимо, що такі маленькі тривалості не можуть бути реалізовані навіть сучасними тиристорними регуляторами напруги. Однак, для інших параметрів мехатронної системи значення отримані за формулами (3.74) та (3.76) можуть бути фізично реалізовані. Вирази (3.74) та (3.76) є певними орієнтирами у питанні встановлення тривалості першого етапу розгону мехатронної системи.

Для другого етапу розгону мехатронної системи умовою мінімуму критерію (3.54) є рівняння Ейлера-Пуассона, яке представляється нелінійним однорідним диференціальним рівнянням шостого порядку. Через його значний об'єм не будемо його приводити. Використання методів динамічного програмування та принципу максимуму не дають переваг у плані спрощення розрахунків. Одним із способів отримати прийнятний із теоретичної точки зору результат є використання прямого варіаційного методу [36]. Для цього необхідно розв'язати таке диференціальне рівняння:

$$\overset{viii}{x} = 0, \quad (3.77)$$

при наступних крайових умовах:

$$\begin{cases} x(T_1) = \dot{x}(T_1) = \ddot{x}(T_1) = 0, \quad \ddot{\ddot{x}}(T_1) = b; \\ x(T) = s, \quad \dot{x}(T) = v, \quad \ddot{x}(T) = 0, \quad \ddot{\ddot{x}}(T) = 0, \end{cases} \quad (3.78)$$

де b - величина ривка у кінці першого етапу ($b = \frac{g\mu}{T_1}$); s - переміщення механізму протягом другого етапу; v - швидкість механізму у кінці другого етапу; T - тривалість розгону двигуна. Дамо пояснення крайовим умовам (3.78). Початкові умови (3.78), за виключенням ривка, є нульовими, оскільки на першому етапі вал двигуна не обертався. Ривок у кінці першого етапу не

рівний нулю оскільки необхідно забезпечити неперервність функції струму двигуна при переході від першого етапу розгону до другого (перший закон комутації електричних кіл). Приймаємо рівними ривки у кінці першого та на початку другого етапів.

Розв'язок крайової задачі (3.77), (3.78) представляється у вигляді:

$$x = \frac{-(t-T_1)^3}{(T-T_1)^7} (6s(t-T_1)(20t^3 - 35T^3 + 21T^2T_1 - 7TT_1^2 + T_1^3 + 10t^2 \times \\ \times (T_1 - 7T) + 4t(21T^2 - 7TT_1 + T_1^2)) - (t-T)(T-T_1)(b(t-T)^3(T-T_1)^2 + \\ + 6(t-T_1)(10t^2 + 15T^2 - 6TT_1 + T_1^2 + 4t(T_1 - 6T))v)). \quad (3.79)$$

Надалі можемо знайти вищі похідні виразу (3.71) за часом та визначити інтегральний функціонал (3.54), який є функцією параметра s . Для того, щоб знайти мінімум функціоналу (3.54) необхідно знайти розв'язок рівняння:

$$\frac{\partial I_2}{\partial s} = 0. \quad (3.80)$$

Рівняння (3.80) у розгорнутому вигляді приймає вигляд кубічного рівняння:

$$s^3 B_1 + s^2 B_2 + s B_3 + B_4 = 0, \quad (3.81)$$

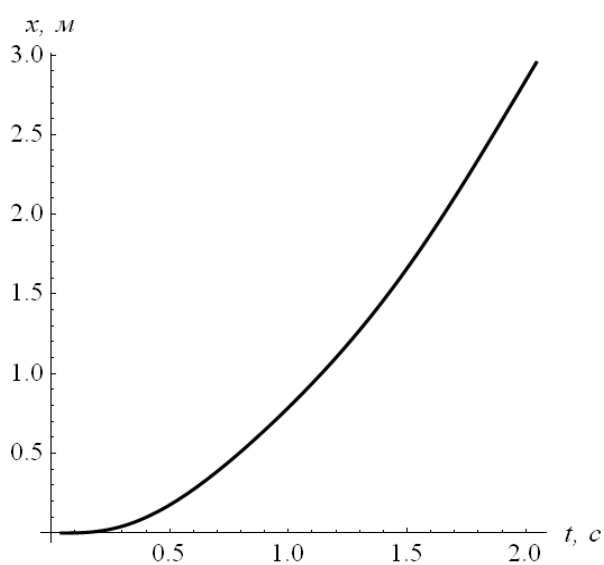
де B_1, B_2, B_3, B_4 - коефіцієнти, які залежать від параметрів механізму переміщення крана. Знайшовши розв'язки рівняння (3.81) [54] та відкинувши два комплексно-спряжених розв'язки знайдемо вираз для параметру s . Підставимо отримане значення s у вираз (3.79) і знайдемо наближений розв'язок оптимізаційної задачі.

Для двох етапів розгону механізму побудуємо графіки функцій кінематичних, динамічних та електричних характеристик (рис. 3.11).

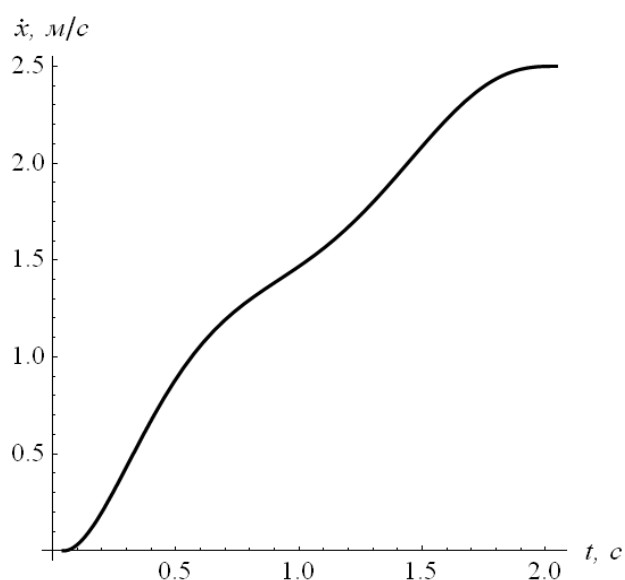
Аналіз графіків показує, що механізм рухається плавно, без різких ривків, що мінімізує динамічні навантаження у його приводі. Максимальне

значення струму приблизно у три рази більше ніж його номінальне значення, що допустимо за умовами нормальної комутації у колекторному вузлі двигуна. Напруга при розгоні двигуна зростає плавно. Формування напруги – це задача керованого тиристорного випрямляча.

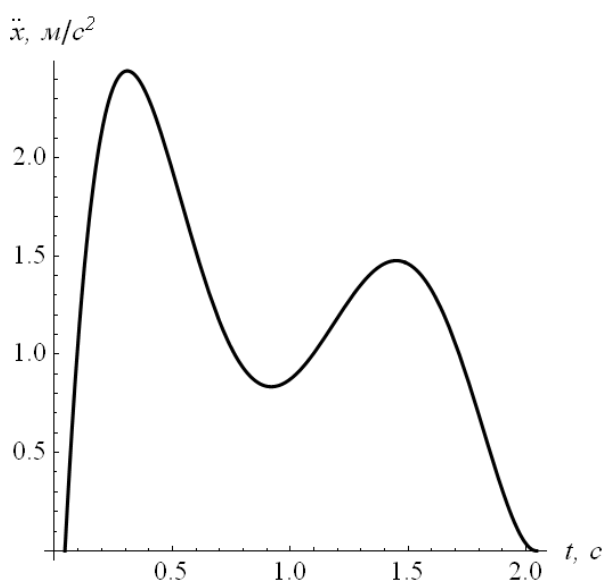
Потужність споживана двигуном із джерела живлення має максимальне значення приблизно у 2,3 рази більше ніж споживана потужність двигуна. Для реалізації такого керування необхідно, щоб керований тиристорний випрямляч мав змогу витримувати короткочасні перевантаження.



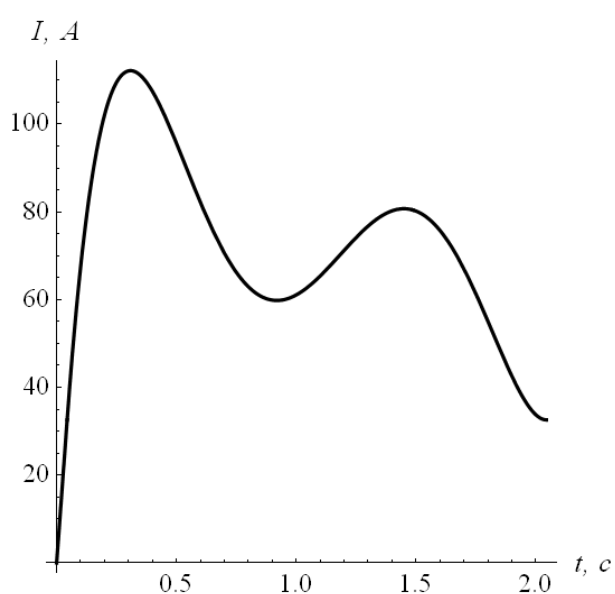
а)



б)



в)



г)

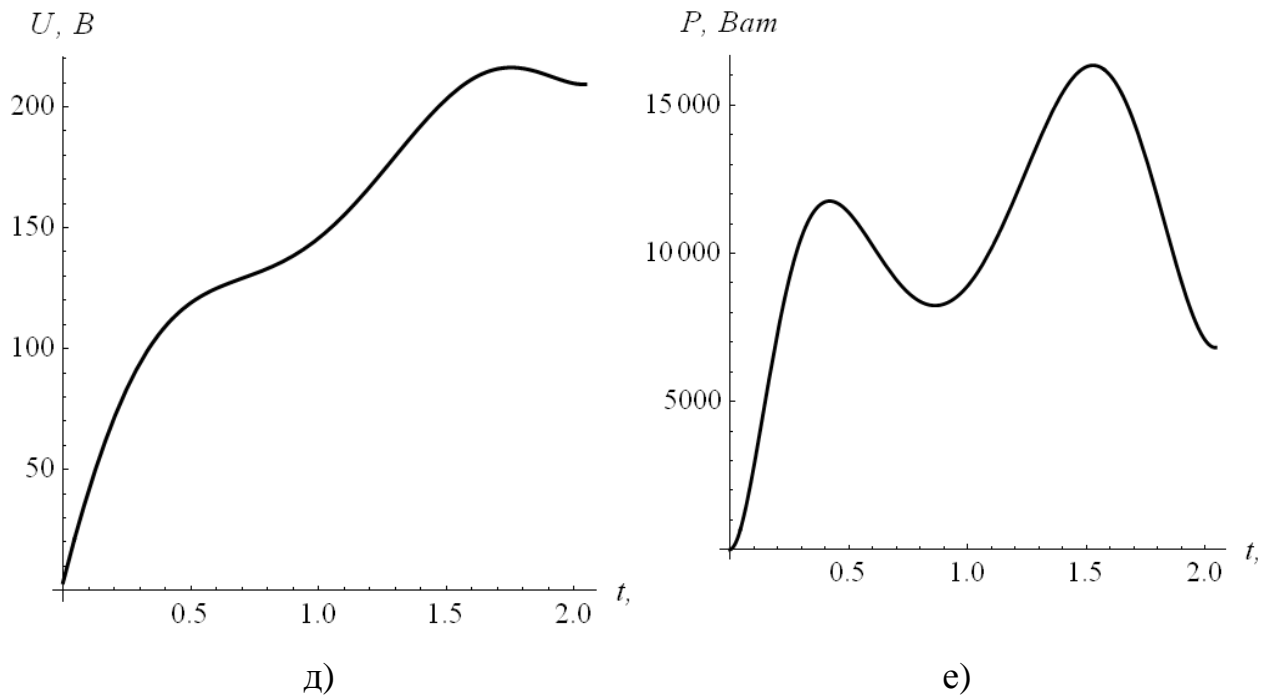


Рис. 3.11 Графіки функцій переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) мехатронної системи, струму (г), напруги (д) двигуна та споживаної ним потужності (е) при розгоні механізму переміщення крана

Для оптимізації гальмування механізму також використаємо прямий варіаційний метод [36]. Для цього розв'яжемо диференціальне рівняння (3.77) при таких крайових умовах:

$$\begin{cases} x(T_{n.z.}) = 0, \dot{x}(T_{n.z.}) = v, \ddot{x}(T_{n.z.}) = 0, \ddot{\ddot{x}}(T_{n.z.}) = 0; \\ x(T_y) = s_z, \dot{x}(T_y) = 0, \ddot{x}(T_y) = -g \mu, \ddot{\ddot{x}}(T_y) = 0, \end{cases} \quad (3.82)$$

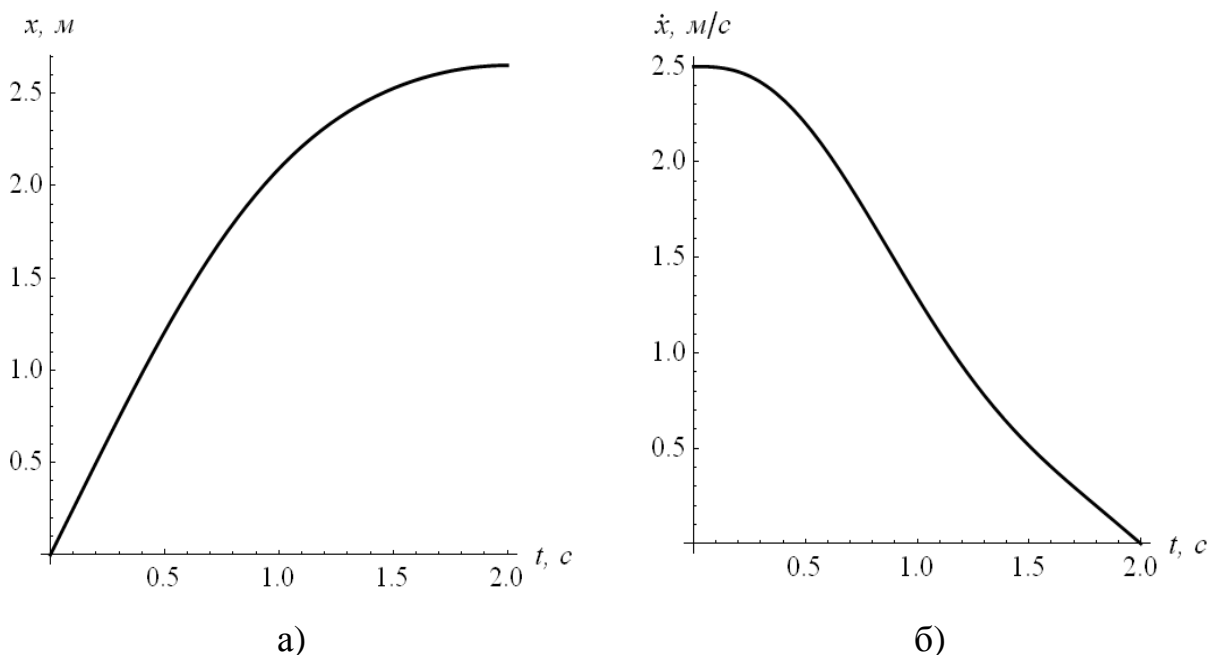
де $T_{n.z.}$ - момент початку гальмування (сума тривалостей розгону та усталеного руху); s_z - відстань переміщення механізму переміщення крана при гальмуванні; T_y - тривалість циклу переміщення механізму переміщення крана. Розв'язок крайової задачі (3.77), (3.82) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} x = & \frac{(t - T_{n.z.})}{2(T_{n.z.} - T_y)^7} (2s_z (t - T_{n.z.})^3 (20t^3 + 10t^2 T_{n.z.} + 4t T_{n.z.}^2 + T_{n.z.}^3 - 7(10t^2 + 4t T_{n.z.} + \\ & + T_{n.z.}^2) T_{n.z.} + 21(4t + T_{n.z.}) T_{n.z.}^2 - 35T_y^3) + (t - T_y)^2 (T_y - T_{n.z.})^2 (10t^2 + 15T_{n.z.}^2 - 6T_{n.z.} \times \\ & \times T_y + T_y^2 + 4t(T_y - 6T_{n.z.})) v). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Отриманий закон руху містить параметр s_2 , який також буде присутнім у інтегралі (3.54) (верхня і нижня межі інтегрування замінені відповідно $T_{n.z.}$ та T_y). Таким чином, інтеграл є функцією від аргументу s_2 . Отже можемо виконати процедуру мінімізації функціонала (3.54) за даним параметром. Не будемо приводити розрахунки та їх опис, оскільки вирази мають великий об'єм, а опис повторює попередній пункт даної роботи.

Приведемо отримані результати (рис. 3.12). Графіки побудовані для „локального” часу, тобто для процесу гальмування системи (прийнято, що $T_{n.z.} = 0$).

На рис. 3.12, є показано, що у процесі гальмування потужність споживана двигуном змінює свій знак (стає від'ємною). Фізично це означає, що двигун переходить у режим генератора і починає механічну енергію рухомих мас мехатронної системи перетворювати у електричну і віддавати у джерело живлення. Таким чином, до джерела живлення двигуна постійного струму із незалежним збудженням пред'являється ще одна вимога – можливість рекуперації енергії у мережу живлення або її погашення за допомогою відповідних реостатів, що знижує енергетичну ефективність приводу, але дещо здешевлює його у порівнянні із рекупераційним приводом.



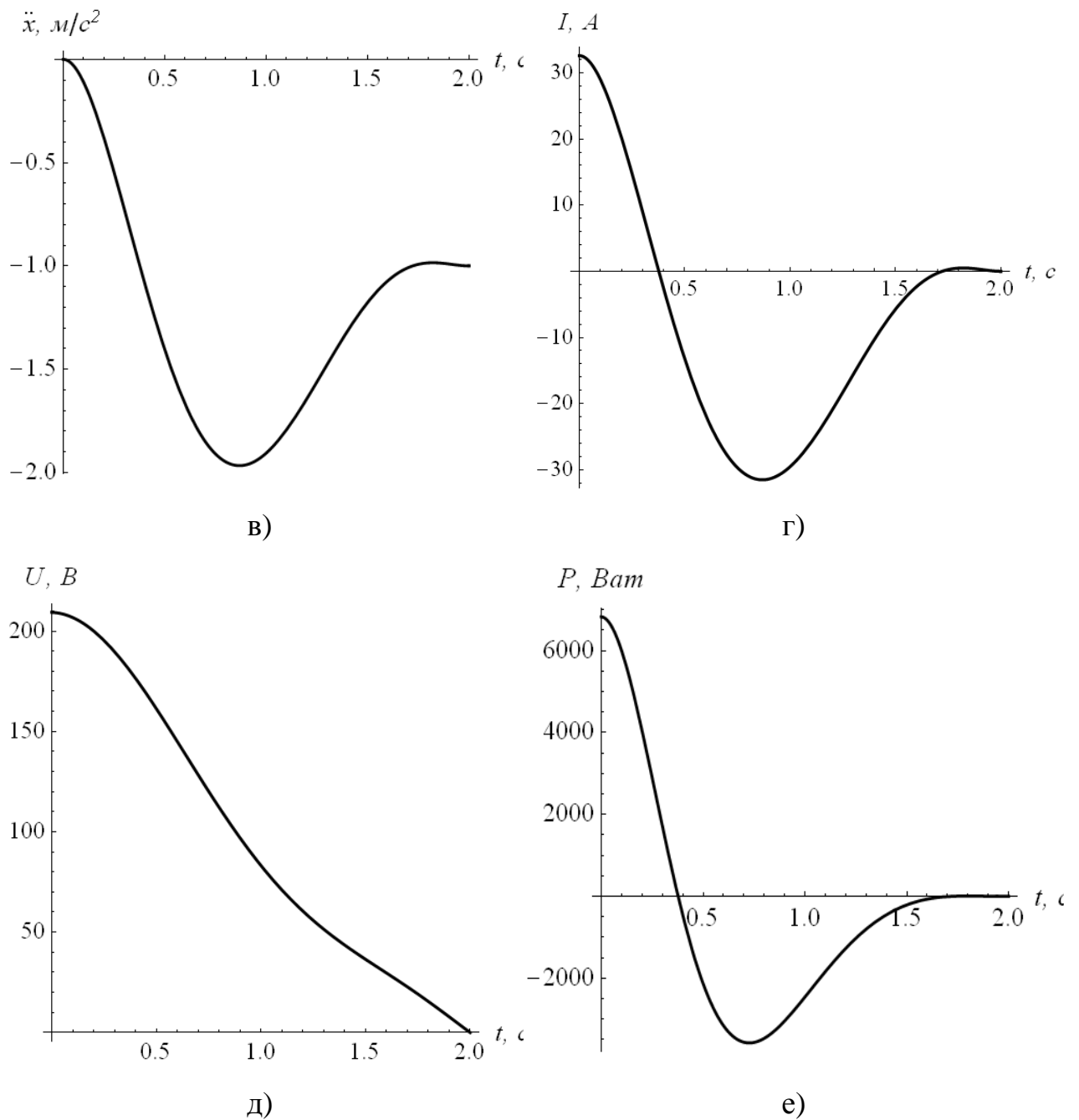


Рис. 3.12. Графіки функцій переміщення (а), швидкості (б), прискорення (в) механізму, струму (г), напруги (д) двигуна та споживаної ним потужності (е) при гальмуванні механізму переміщення крана

Таким чином, виконано оптимізацію перехідних режимів руху кранового механізму переміщення із електроприводом постійного струму. Отримані результати дозволяють проводити експлуатацію крана при мінімальних енергетичних витратах та із значно зменшеними (у порівнянні із неоптимальними режимами руху) динамічними навантаженнями.

Висновки до третього розділу

1. У розділі приведено класифікацію критеріїв оптимізації, які використовуються для синтезу режимів руху кранових механізмів. Проаналізовано властивості, переваги та недоліки критеріїв та вказані раціональні області їх використання. Приведені результати можуть бути використані для подальших досліджень оптимальних режимів руху механізмів вантажопідйомних кранів. Крім того, деякі із приведених критеріїв можуть бути використані при виконанні динамічного аналізу вантажопідйомних машин у якості характерних показників руху системи.
2. Викладено сутність прямих варіаційних методів, які використовуються для розв'язання задач оптимального керування. На основі аналізу прямих варіаційних методів виявлено основні їх недоліки і переваги. Приведено сутність прямого варіаційного методу та методика мінімізації інтегральних функціоналів, які містять вищі похідні від фазових координат динамічної системи.
3. Знайдено наближено-оптимальний закон руху кранового механізму переміщення, який характеризується плавністю руху системи без врахування обмежень накладних на керування (у даному дослідженні це динамічна складова приводного зусилля).
4. Встановлено, що використання методів теорії оптимального керування (варіаційне числення, динамічне програмування, принцип максимуму) не дає змоги знайти оптимальне керування у задачі із нелінійним критерієм (інтегральним функціоналом) при оптимізації перехідних режимів руху механізму переміщення крана обладнаного електроприводом постійного струму. Для розв'язування задачі було використано прямий варіаційний метод, який зводить задачу оптимального керування до алгебраїчного кубічного рівняння, розв'язок якого неважко знайти. Однак, отримані оптимальні закони не

можна вважати оптимальними, вони є деяким наближенням до оптимальних законів.

5. Аналізом фізичних процесів у електроприводі постійного струму встановлена необхідність розглядувати режим розгону у два етапи: на першому етапі струм двигуна збільшується до номінального і лише в кінці першого етапу система починає рухатись; на другому етапі система рухається і в кінці етапу досягає номінальної швидкості, тобто виходить на усталений рух. У розділі знайдено конкретні значення тривалості першого етапу за критеріями швидкодії та енергетичної ефективності першого етапу. Всі отримані у роботі результати ілюструються графіками для конкретного двигуна постійного струму із яких видно, що рух механізму переміщення крана є плавним без різких ривків. Це дозволяє зменшити динамічні навантаження у приводі. Результати дослідження можуть бути використані для програм керування різноманітними механізмами вантажопідйомних машин системами із електричними приводами постійного струму незалежного збудження. Крім того, такі електроприводи повинні бути обладнані регуляторами напруги із можливістю рекуперації енергії у електричну мережу або її погашення на реостатах та можливістю переносити пікові перевантаження по потужності.

Література до третього розділу

1. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Высшая школа, 2003. – 614 с.
2. Александров В.В. Оптимальное управление движением / В.В. Александров, В.Г. Болтянский, С.С. Лемак, Н.А. Парусников, В.М. Тихомиров. – М.: Физматлит, 2005. – 376 с.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
4. Фельдбаум А.А. Методы теории автоматического управления / А.А. Фельдбаум, А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1971. – 744 с.
5. Ж.Л. Лионс Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными [пер. с франц. Н.Х. Розова]. – М.: Мир, 1972. – 416 с.
6. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики / К.А. Лурье. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
7. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 352 с.
8. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский – М.: Наука, 1965. – 476 с.
9. Григоров О.В. Совершенствование рабочих характеристик крановых механизмов: дисс. на соиск. степ. доктора техн. наук: 05.05.05 / Григоров Отто Владимирович. – Х., 1995. – 386 с.
10. Свиргун В.П. Разработка оптимальных законов управления мостовым грейферным краном и применение микропроцессорной системы для их реализации: автореф дисс. на соиск. степ. канд техн. наук: спец. 05.05.05 „Подъемно-транспортные машины” / В.П. Свиргун. – Х., 1989. – 15 с.

11. Смехов А.А. Оптимальное управление подъемно-транспортными машинами / А.А. Смехов, Н.И. Єрофєєв. – М.: Машиностроение, 1975. – 239 с.
12. Герасимьяк Р.П. Анализ и синтез крановых электромеханических систем / Р.П. Герасимьяк, В.А. Лещєв. – Одесса.: СМІЛ, 2008. – 192 с.
13. Бушер В.В. Асинхронный электропривод подъемно-транспортных механизмов с микропроцессорным управлением: автореф. дисс. на соиск. степ. канд. техн. наук: спец. 05.09.03 „Электрические комплексы и системы, включая их управление и регулирование” / В.В. Бушер. – Одесса, 1993. – 16 с.
14. Базил Ш. Управление электроприводом циклически работающих механизмов горизонтального перемещения: дисс. на соиск. степ. канд. техн. наук: 05.09.03 / Базил Шафик. - Одесса, - 1993. – 186 с.
15. Мельникова Л.В. Автоматизация технологического процесса перемещения механизма с подвешенным грузом средствами микропроцессорного управления: дисс. на соиск. степ. канд. техн. наук: 05.09.03 / Мельникова Любовь Васильевна. - Одесса, 2000. – 116 с.
16. Зайцев Ю.И. Исследование нестационарных колебаний и оптимальные режимы работы грузоподъемных машин с поступательными движениями: автореф. дисс. на соиск. степ. канд. техн. наук: спец. 01.02.06 „Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры” / Ю.И. Зайцев. – Х., 1981. – 26 с.
17. Черноусько Ф.Л. Управление колебаниями / Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. - М.: Наука, 1980. - 384 с.
18. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления / Л.Д. Акуленко – М.: Наука, 1987. – 368 с.
19. Ловейкин В. С. Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин / В.С. Ловейкин – К.: УМК ВО, 1990. – 168 с.

20. Будіков Л.Я. Багатопараметричний аналіз динаміки вантажопідйомних кранів мостового типу: монографія / Л.Я. Будіков. – Луганськ: вид-во СНУ ім. Даля, вид. 2-е, 2003. – 210 с.
21. Геронимус Я.Л. О некоторых методах определения оптимального закона движения, рассматриваемого как управляющее воздействие / Я.Л. Геронимус, М.М. Перельмутер // Машиноведение. – 1966. – № 6. – С. 6-24.
22. Перельмутер М.М. Устранение колебаний груза, подвешенного к крановой тележке, воздействием на его электропривод / М.М. Перельмутер, Л.Н. Поляков // Известия вузов. Электромеханика. – 1971. – № 7. – С. 769-774.
23. Баничук Н.В. Введение в оптимизацию конструкций / Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1986. – 303 с.
24. Соболев И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И.М. Соболев, Р.Б. Статников – М.: Наука, 1981 – 110 с.
25. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2-х кн. Кн. 1. [пер. с англ. В.А. Алтаева, В.И. Моторина] – М.: Мир, 1986. – 349 с.
26. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2-х кн. Кн. 2. [пер. с англ. В.А. Алтаева, В.И. Моторина]. – М.: Мир, 1986. – 320 с.
27. Голубенцев М.О. Интегральные методы в динамике / М.О. Голубенцев – К.: Техніка, 1967. – 351 с.
28. Горский Б.Е. Динамическое совершенствование механических систем / Б.Е. Горский. – К.: Техніка, 1987. – 200 с.
29. Хитрик В.Э. Методы динамической оптимизации механизмов машин-автоматов / В.Э. Хитрик. – Л.: из-во Ленинградского ун-та, 1974. – 116 с.
30. Бербюк В.Е. Динамика и оптимизация робототехнических систем / В.Е. Бербюк – К.: Наукова думка, 1989. – 192 с.

31. Bellman R. Notes on control processes. I. On the minimum of maximum deviation. / R. Bellman // Quarterly. Oppl. Math. - January 1957. - Vol. 14. - P. 419-423.
32. Банди Б. Основы линейного программирования. [пер. с англ. О.В. Шихеева]. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.
33. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. Единый подход. [пер. в англ. Д.А. Бабаева]. – М.: Советское радио, 1973. – 312 с.
34. Арис Р. Дискретное динамическое программирование. [пер. в англ. Ю.П. Плотникова]. – М.: Мир, 1969. – 172 с.
35. Смехов А.А. Автоматизированные склады / А.А. Смехов. М.: Машиностроение. 1987. – 296 с.
36. Ловейкін В.С. Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом: монографія / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич – Ніжин: Видавець ПП Лисенко М.М., 2010. – 184 с.
37. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю.П. Петров– Л.: Энергия, 1977. – 280 с.
38. Горский Б.Е. Безразмерные критерии динамического совершенствования механических систем / Горский Б.Е., Ловейкин В.С. // Критерии качества и эффективности механических систем. – К.: Знание, 1978. – С. 12-15.
39. Горский Б.Е. Расширение понятия коэффициента полезного действия на все удельные действия / Горский Б.Е., Ловейкин В.С. // Динамика и прочность тяжелых машин. – Днепропетровск.: из-во ДГУ, 1982. – Вып. 6. – С. 13-20.
40. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.
41. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования / [перевод с англ. Митрофановой Н.М.,

- Первозванского А.А., Хусу А.П., Шалаевского О.В.] – М.: Наука, 1965. – 460 с.
42. Кротов В.Ф. Методы и задачи оптимального управления / В.Ф. Кротов, В.И. Гурман. – М.: Наука, 1973. – 389 с.
 43. Тараненко В.Т. Прямой вариационный метод в краевых задачах динамики полета / В.Т. Тараненко, В.Г. Момоджи. – М.: Машиностроение, 1986. – 127 с.
 44. Краснов М.Л. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения / М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев. – М.: Наука, 1973. – 191 с.
 45. Бутов В.Г. Исследование вариационных задач прямыми методами. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. – №3. – С. 373-386.
 46. Сеньо П.С. Прямые интервальные методы решения вариационных задач и задач оптимального управления. // Динамические системы. – 2004. – Вып. 18. – С. 44-50.
 47. Страховский Р.И. Изохронно-итеративный метод решения задач оптимального управления. // Методы оптимизации автоматических систем. Сборник статей под ред. Цыпкина Я.З. – М.: Энергия, 1972. – С. 223-237.
 48. Барский И.Л. Локальная интерполяция в прямых методах вариационного исчисления / И.Л. Барский, И.А. Румянцев, Ю.А. Флеров. – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1982. – 56 с.
 49. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1971. – 424 с.
 50. Черноусько Ф.Л. Вариационные задачи механики и управления (Численные методы) / Ф.Л. Черноусько, Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1973. – 107 с.

51. Стренг Г. Теория метода конечных элементов [первод с англ. В.И. Агошкова, В.А. Василенко, В.В. Шайдурова] / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М.: Мир, 1977. – 351 с.
52. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р.П. Федоренко – М.: Наука, 1978. – 488 с.
53. Miele A., Damoulakis J. N., Cloutier J. R., Tietze J. L. Sequential gradient-restoration algorithm for optimal control problems with nondifferential constraints. // JOTA. – 1974. – №2. – P. 13.
54. Корн Г. Справочник по высшей математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука, 1973. – 832 с.
55. Robert H. Bishop. The Mechatronics handbook / Robert H. Bishop. – Austin: The University of Texas at Austin, 2002. – 1229 p.
56. Чистов В.П. Оптимальное управление электрическими приводами постоянного тока / В.П. Чистов, В.И. Бондаренко, В.А. Святославский. - М.: Энергия, 1968. – 232 с.
57. Бор-Раменский А.Е. Быстродействующий электропривод / А.Е. Бор-Раменский, Б.Б. Воронежский, В.А. Святославский. - М.: Энергия, 1969. – 168 с.
58. Ключев В.И. Ограничение динамических нагрузок электропривода / В.И. Ключев. – М. Энергия, 1971. – 320 с.
59. Касаткин А.С. Электротехника: ученик для вузов / А.С. Касаткин, М.В. Немцов. – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр „Академия”, 2005. – 544 с.
60. Зоммерфельд А. Механика / А. Зоммерфельд – Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 368 с.
61. Вешеневский С.Н. Характеристики двигателей в электроприводе / С.Н. Вешеневский. – 6-е изд., испр. – М.: Энергия”, 1977. – 432 с.

РОЗДІЛ 4

ОПТИМІЗАЦІЯ ПЕРЕХІДНИХ РЕЖИМІВ РУХУ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МЕХАНІЗМІВ, ПРЕДСТАВЛЕНИХ ОДНОМАСОВОЮ ДИНАМІЧНОЮ МОДЕЛЛЮ

4.1. Дослідження та аналіз методів оптимального керування механізмами вантажопідйомних машин

Експлуатація сучасних вантажопідйомних машин та механізмів пов'язана із значними динамічними навантаженнями, енергетичними витратами та швидкоплинними перехідними процесами. Явища, які супроводжують протікання перехідних процесів у різноманітних динамічних системах, часто носять небажаний характер. Наприклад, небажаним є нагрівання обмоток електричного привода, оскільки це призводить до старіння ізоляції та зменшує енергетичну ефективність машини. Для зменшення небажаних або/і збільшення бажаних факторів використовуються різноманітні процедури оптимізації машин, які ґрунтуються на відомих математичних методах. У даному дослідженні висвітлюються лише питання оптимізації керування динамічними (крановими) системами і не розглядаються питання оптимізації її конструктивних параметрів.

Важливою задачею, яка носить не тільки теоретичний, але й прикладний характер, є встановлення взаємозв'язків між відомими методами оптимального керування. Це дає змогу розкрити важливі співвідношення між цими методами, що в результаті дозволяє намітити шляхи розв'язання оптимізаційних задач альтернативними шляхами.

Для оптимізації режимів руху механічних систем використовуються різноманітні математичні методи. Найстарішим серед вказаних методів є метод варіаційного числення [1], зародження і розвиток котрого пов'язаний з іменами Ейлера, Лагранжа, Пуассона, Вейерштрасса та інших вчених. Одним із найвідоміших методів для розв'язування задач оптимального керування є

принцип максимуму [2], розроблений Л.С. Понтрягіним та його учнями. Даний метод дозволяє врахувати обмеження накладені на керування динамічною системою. Потужним методом для розв'язування задач оптимального керування не тільки технічними, але й економічними, соціальними та системами іншої природи, є динамічне програмування [3]. Автором даного методу є американський математик Р. Беллман. Крім вказаних методів, також використовується метод моментів [4], розвиток якого пов'язаний з ім'ям академіка М.М. Красовського. Відома також теорема В.Ф. Кротова про достатні умови оптимальності процесу керування [5].

У даному аналізі не вказано значний масив наближених методів оптимального керування, які дозволяють у тій чи іншій мірі наблизитись до розв'язку задачі. Аналіз цих методів можна знайти у працях [6, 7].

Всі перераховані методи дозволяють знаходити оптимальне керування у вигляді функції часу і лише деякі з них – у вигляді оптимального зворотного зв'язку (задача синтезу оптимального керування). Загалом аналіз вказаних методів є досить складною задачею, оскільки кожен із них має власні переваги і недоліки.

Для великої кількості механізмів вантажопідійомних машин динаміка їх руху у першому наближенні представляється у вигляді найпростішого диференціального рівняння:

$$m\dot{x} = F - W, \quad (4.1)$$

де m - приведена до поступального руху маса системи; x - узагальнена координата системи (поступальне переміщення); F - приводне зусилля, що діє на систему; W - сила статичного опору руху системи, у тому числі технологічного характеру. Крапка над символом означає диференціювання за часом.

Рівняння (4.1), з урахуванням позначень $x = x_1$, $\frac{F-W}{m} = u$, можна подати у канонічному вигляді:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \quad (4.2)$$

Критерієм оптимізації процесу, який необхідно мінімізувати, оберемо інтегральний функціонал, який за структурою є комплексним критерієм:

$$I = \int_0^T (\delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + \delta_3 u^2) dt, \quad (4.3)$$

де T – тривалість руху системи; δ_1 , δ_2 та δ_3 - вагові коефіцієнти, які враховують важливість відповідних доданків у підінтегральному виразі критерію (4.3).

Будемо шукати оптимальне керування при таких крайових умовах:

$$\begin{cases} x_1(0) = s_0, x_2(0) = v_0; \\ x_1(T) = x_2(T) = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

де s_0 та v_0 - початкове положення та початкова швидкість динамічної системи.

Таким чином, необхідно перевести динамічну систему з деякого початкового положення, яке характеризується ненульовими значеннями положення s_0 та швидкості v_0 у нульове положення при мінімізації критерію за виразом (4.3). Для механічної системи такий режим руху означає загальмовування.

Для того, щоб розв'язати поставлену задачу методом принципу максимуму необхідно записати функцію Гамільтона:

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - \delta_1 x_1^2 - \delta_2 x_2^2 - \delta_3 u^2, \quad (4.5)$$

де ψ_1 і ψ_2 - спряжені змінні. Згідно принципу максимуму необхідно таким чином керувати процесом, щоб Гамільтоніан (4.5) був максимальним. Для відкритої області керування ($u \in (-\infty; \infty)$) таке керування знаходиться з умов стаціонарності функції Гамільтона:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_2 - 2\delta_3 u = 0. \quad (4.6)$$

З рівняння (4.6) отримаємо:

$$u = \frac{\psi_2}{2\delta_3}. \quad (4.7)$$

Для того, щоб пересвідчитись, що отримане керування (4.7) доставляє максимум Гамільтоніану (4.5), необхідно проаналізувати знак другої похідної Гамільтоніана по керуванню:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2\delta_3 < 0, \quad (\delta_3 > 0). \quad (4.8)$$

Вираз (4.7) справедливий для відкритої області керування. Однак, як правило, на керування накладаються обмеження у вигляді нестрогих нерівностей:

$$u_{\max} \geq u \geq u_{\min}, \quad (4.9)$$

де u_{\max} та u_{\min} - відповідно максимальне та мінімальне значення керування. Тоді область допустимих керувань буде обмежена границями u_{\max} та u_{\min} . Враховуючи обмеження (4.9) оптимальне керування можна подати у такому вигляді:

$$u = \begin{cases} u_{\max}, & \text{якщо } \frac{\psi_2}{2\delta_3} \geq u_{\max}; \\ \frac{\psi_2}{2\delta_3}, & \text{якщо } u_{\max} \geq \frac{\psi_2}{2\delta_3} \geq u_{\min}; \\ u_{\min}, & \text{якщо } \frac{\psi_2}{2\delta_3} \leq u_{\min}. \end{cases} \quad (4.10)$$

Таким чином, отримано структуру оптимального керування (4.10). Для знаходження невідомої спряженої змінної ψ_2 необхідно знайти розв'язки спряженої системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 2x_1\delta_1; \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 + 2x_2\delta_2. \end{cases} \quad (4.11)$$

Продиференціюємо останнє рівняння системи (4.11) за часом та враховуючи перше рівняння (4.11) отримаємо:

$$\ddot{\psi}_2 = -2x_1\delta_1 + 2u\delta_2. \quad (4.12)$$

Надалі двічі продиференціюємо вираз (4.7) за часом та підставимо у отриманий вираз (4.12). В результаті будемо мати:

$$\ddot{u} = \frac{\ddot{\psi}_2}{2\delta_3} = \frac{-2x_1\delta_1 + 2u\delta_2}{2\delta_3}. \quad (4.13)$$

Враховуючи, що $\ddot{u} = \overset{IV}{x}$ і $u = \ddot{x}$ запишемо рівняння (4.13) у такому вигляді:

$$\overset{IV}{x} - \ddot{x} \frac{\delta_2}{\delta_3} + x \frac{\delta_1}{\delta_3} = 0. \quad (4.14)$$

Рівняння (4.14) є рівнянням Ейлера-Пуассона для функціоналу (4.3).

Для знаходження оптимального керування як функції фазових змінних динамічної системи використаємо метод динамічного програмування. Основне функціональне рівняння Беллмана прийме такий вигляд:

$$\min_u \left\{ \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} u + \delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + \delta_3 u^2 \right\} = 0, \quad (4.15)$$

де S - функція Беллмана.

Мінімум правої частини рівняння (4.9) будемо шукати по параметру керування u для чого продиференціюємо її за u та прирівняємо отримане до нуля:

$$2\delta_3 u + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0. \quad (4.16)$$

Знайдемо з рівняння (4.16) керування u :

$$u = -\frac{1}{2\delta_3} \frac{\partial S}{\partial x_2} \quad (4.17)$$

та підставимо отримане у рівняння (4.15), в результаті чого будемо мати:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 - \frac{1}{4\delta_3} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 = 0. \quad (18)$$

Рівняння (4.18) є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Будемо шукати його розв'язок у вигляді квадратичної форми:

$$S = A_1 x_1^2 + A_2 x_1 x_2 + A_3 x_2^2. \quad (4.19)$$

Візьмемо частинні похідні з виразу (4.19) за параметрами x_1 та x_2 :

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = 2A_1 x_1 + A_2 x_2, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = A_2 x_1 + 2A_3 x_2. \quad (4.21)$$

Підставимо вирази (4.20) і (4.21) у рівняння (4.18) і отримаємо:

$$x_1^2 \left(\delta_1 - \frac{A_2^2}{4\delta_3} \right) + x_2^2 \left(\delta_2 + A_2 - \frac{A_3^2}{\delta_3} \right) + x_1 x_2 \left(2A_1 - \frac{A_2 A_3}{\delta_3} \right) = 0. \quad (4.22)$$

Рівняння (4.22) буде справедливим у тому випадку, коли вирази у дужках будуть рівні нулю, оскільки $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$. Тому рівняння (4.22) можна замінити на систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \delta_1 - \frac{A_2^2}{4\delta_3} = 0, \\ \delta_2 + A_2 - \frac{A_3^2}{\delta_3} = 0, \\ 2A_1 - \frac{A_2 A_3}{\delta_3} = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Розв'язок системи рівнянь (4.23) буде мати два дійсних та два комплексних корені. Оберемо один дійсний, який не приводить до втрати стійкості системи.

Підставивши отримані корені у вираз (4.17), отримаємо функцію оптимального керування у вигляді синтезу:

$$u = -\frac{\sqrt{\delta_1} \sqrt{\delta_3}}{\delta_3} x_1 - \frac{\sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1} \sqrt{\delta_3}) \delta_3}}{\delta_3} x_2. \quad (4.24)$$

Крім того, знайдемо функції для фазових координат системи. Для цього підставимо керування (4.24) у систему диференціальних рівнянь (4.2) та розв'яжемо її при відповідних початкових умовах (4.4). У результаті отримаємо:

$$x_1 = \left[\sqrt{-\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1} \sqrt{\delta_3}} s_0 \cos \left(\frac{\sqrt{-\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1} \sqrt{\delta_3}} t}{2\sqrt{\delta_3}} \right) + (2\delta_3 v_0 + \sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1} \sqrt{\delta_3}) \delta_3} s_0) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \sin\left(\frac{\sqrt{-\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3}t}}{2\sqrt{\delta_3}}\right) \left\{ \cosh\left(\frac{\sqrt{\delta_2 - 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3}t}}{2\sqrt{\delta_3}}\right) - \sinh\left(\frac{\sqrt{\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3}t}}{2\sqrt{\delta_3}}\right) \right\} \times \\ & \times [\sqrt{-\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3}}\sqrt{\delta_3}]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} x_2 = & -\left\{ -\sqrt{-\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3}}\sqrt{\delta_3}v_0 \cos\left(\frac{\sqrt{-\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3}t}}{2\sqrt{\delta_3}}\right) + (\sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3})\delta_3} + v_0 + \right. \\ & + 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3}s_0) \sin\left(\frac{\sqrt{-\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3}t}}{2\sqrt{\delta_3}}\right) \left. \right\} \left\{ \sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3})\delta_3} \cosh\left(\frac{\sqrt{-\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3}t}}{2\sqrt{\delta_3}}\right) - \right. \\ & - \sqrt{\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3}}\sqrt{k_3} \sinh\left(\frac{\sqrt{-\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3}t}}{2\sqrt{\delta_3}}\right) \left. \right\} [\sqrt{-\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3}}\sqrt{\delta_3} \times \\ & \times \sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3})\delta_3}]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Розглянемо рівняння Беллмана (4.15). Виконаємо перетворення цього рівняння:

$$\min_u (-1) \left\{ \left(-\frac{\partial S}{\partial x_1} \right) x_2 + \left(-\frac{\partial S}{\partial x_2} \right) u - \delta_1 x_1^2 - \delta_2 x_2^2 - \delta_3 u^2 \right\} = 0 \quad (4.27)$$

або

$$\max_u \left\{ \left(-\frac{\partial S}{\partial x_1} \right) x_2 + \left(-\frac{\partial S}{\partial x_2} \right) u - \delta_1 x_1^2 - \delta_2 x_2^2 - \delta_3 u^2 \right\} = 0. \quad (4.28)$$

Вираз у фігурних дужках представляє собою функцію Гамільтона, якщо прийняти $-\frac{\partial S}{\partial x_1} = \psi_1$ та $-\frac{\partial S}{\partial x_2} = \psi_2$. Зазначимо, що синтез оптимального керування за допомогою рівняння Беллмана виконувався для відкритої області керування, тобто обмеження (4.9) не враховувались. Принцип максимуму дозволяє врахувати обмеження і тому оптимальне керування у формі зворотного зв'язку при обмеженнях (4.9) можна записати таким чином:

$$u = \begin{cases} u_{\max}, & \text{якщо } -\frac{\sqrt{\delta_1 \sqrt{\delta_3}}}{\delta_3} x_1 - \frac{\sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1 \sqrt{\delta_3}})\delta_3}}{\delta_3} x_2 \geq u_{\max}; \\ -\frac{\sqrt{\delta_1 \sqrt{\delta_3}}}{\delta_3} x_1 - \frac{\sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1 \sqrt{\delta_3}})\delta_3}}{\delta_3} x_2, & \text{якщо } u_{\max} \geq -\frac{\sqrt{\delta_1 \sqrt{\delta_3}}}{\delta_3} x_1 - \frac{\sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1 \sqrt{\delta_3}})\delta_3}}{\delta_3} x_2 \geq u_{\min}; \\ u_{\min}, & \text{якщо } -\frac{\sqrt{\delta_1 \sqrt{\delta_3}}}{\delta_3} x_1 - \frac{\sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1 \sqrt{\delta_3}})\delta_3}}{\delta_3} x_2 \leq u_{\min}. \end{cases} \quad (4.29)$$

Побудуємо графіки оптимального процесу (рис. 4.1-4.2) для таких параметрів системи $\delta_1 = 0,2$, $\delta_2 = 0,3$, $\delta_3 = 0,5$, $u_{\max} = 1$, $u_{\min} = -1$, $x_0 = 0$ м, $v_0 = 1$ м/с.

Для практичної реалізації керування (4.29) необхідно мати датчики положення та швидкості механізму вантажопідійомної машини. Формування керуючої величини у конкретний момент часу повинен базуватись на вимірах цих датчиків. Таким чином, керуюча функція наперед невідома, вона синтезується протягом руху системи за допомогою зворотного зв'язку. Для якісної реалізації керування (4.29) потрібно використовувати високошвидкісні мікроконтролерні системи.

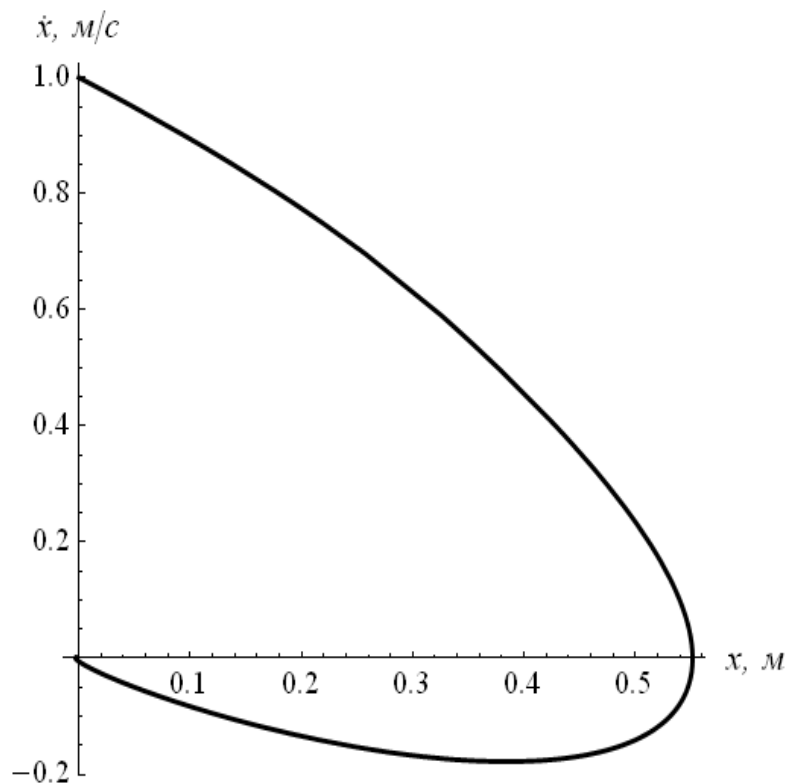


Рис. 4.1. Фазовий портрет руху динамічної системи

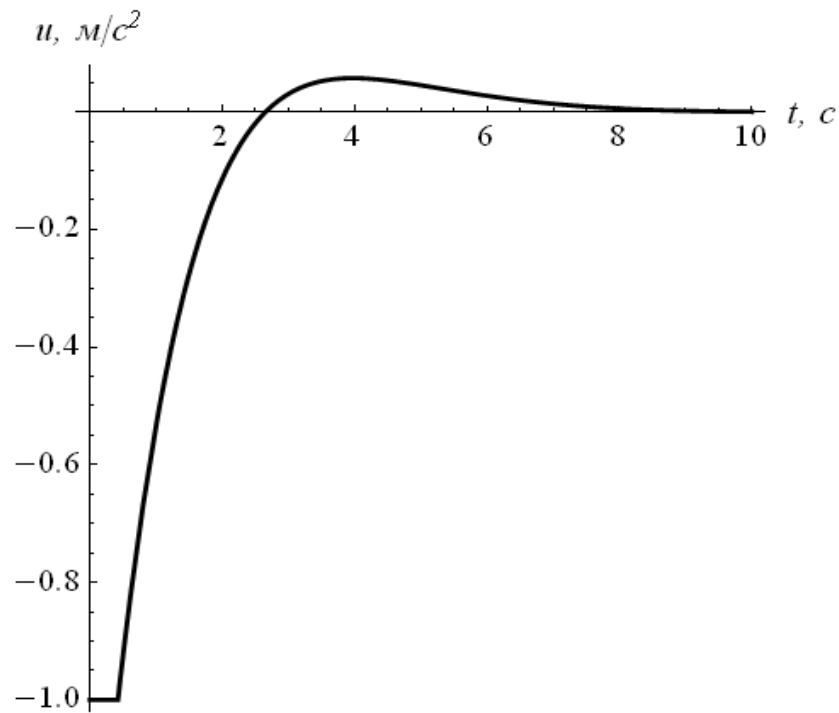


Рис. 4.2. Графік функції оптимального керування динамічною системою

4.2. Синтез оптимального керування механізмами вантажопідйомних машин із врахуванням першої похідної функції керування

Сучасні вантажопідйомні механізми та машини працюють у важких умовах. Вони можуть зазнавати значних перевантажень динамічними зусиллями та моментами, що призводить до зниження надійності та зношування їх елементів. Звичайно, бажано забезпечити безвідмовну експлуатацію машини. Очевидно, що значну роль у вирішенні цієї задачі відіграють режими руху окремих механізмів, раціонально обираючи які, можна також підвищити енергетичні показники роботи. Отже, зниження витрат енергії на створення руху механізмів і машин, підвищення їх надійності та довговічності за рахунок зниження динамічних навантажень у їх елементах і визначає проблематику даної роботи.

Вирішення комплексної проблеми вибору режиму руху механізмів вантажопідйомних машин можливе за допомогою математичних методів оптимального керування. Ці методи дають змогу синтезувати функцію

керування механізмом і забезпечити перераховані вище вимоги щодо її надійнісних, динамічних та енергетичних характеристик. Математично вимоги, які висуваються до режиму руху динамічної системи, представляються у вигляді оптимізаційного критерію, який необхідно мінімізувати. Критерії, як правило, є інтегральними функціоналами, які відображають зазвичай, небажані показники руху системи і тому вимагають мінімізації. Відомо декілька методів, які дозволяють успішно відшукувати оптимальну функцію керування. Одним з таких методів є динамічне програмування [3], розробка якого пов'язана з ім'ям американського математика Р.Беллмана. Використання даного методу дало змогу синтезувати керування у вигляді зворотного зв'язку [8]. Характерною рисою такого виду керування є те, що воно є функцією фазових координат динамічної системи. Отже, якщо організувати у системі керування рухом механізму зворотній зв'язок за відповідними координатами (переміщенням та його вищими похідними за часом), то можна добитись оптимальності руху даної динамічної системи навіть при дії на неї зовнішніх стохастичних збурень. Ця властивість є дуже цінною для тих механічних систем, які працюють у недетермінованих зовнішніх середовищах, наприклад робота вантажопідйомних кранів при дії вітру [9].

У попередньому пункті синтез оптимального керування виконується за умови мінімізації інтегрального функціоналу з підінтегральним виразом, який є квадратичною формою двох фазових координат динамічної системи (розглядається одномасова динамічна система) та керування. Критерій (4.3) враховує стан системи до досягнення її кінцевого (нульового) положення та витрати на керування. Однак, у деяких випадках, мінімізувати також необхідно швидкість зміни функції керування. Одним з прикладів такого роду випадків є зміна крутного моменту на валу електричного двигуна. Швидка зміна моменту, який є пропорційним до функції керування, викликає значні струмові перевантаження електричної частини приводу. Крім того, розриви функції керування можуть призвести до виникнення небажаних

коливань у механічних передачах, ударів і, врешті, до їх пошкоджень. Тому необхідно обмежувати швидкість наростання або спадання приводного зусилля у динамічній системі.

У роботі [10] швидкість зміни крутного моменту електроприводу протягом механічного перехідного процесу пропонується підтримувати постійною ($M = const$) з умов мінімальної тривалості механічного перехідного процесу приводу і, як наслідок, максимальної продуктивності механізму. Однак, з позиції мінімізації інших оптимізаційних критеріїв (подібних критерію (4.3)) вимагається щоб $M \neq const$.

Для проведення дослідження приймемо математичну модель руху механізму вантажопідійомної машини у вигляді (4.1) або у канонічному вигляді (4.2). У якості оптимізаційного критерію оберемо інтегральний функціонал:

$$I = \int_0^T (k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 u^2 + k_4 \dot{u}^2) dt, \quad (4.30)$$

де k_i – коефіцієнти, які враховують вагу відповідних доданків ($i=1, 2, 3, 4$). Для мінімізації критерію (4.30) введемо змінну-керування:

$$\dot{u} = \phi. \quad (4.31)$$

Система рівнянь (4.2), (4.31) буде визначати динаміку руху системи. Рух динамічної системи будемо шукати на траєкторіях, які задовольняють крайовим умовам:

$$\begin{cases} x_1(0) = s_0, x_2(0) = v_0, u(0) = u_0; \\ x_1(T) = x_2(T) = u(T) = 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Таким чином, необхідно перевести механічну систему з деякого початкового положення, яке характеризується ненульовими значеннями

положення s_0 та швидкості v_0 у нульове положення при мінімізації критерію за виразом (4.30).

Наведемо обґрунтування оптимізаційного критерію. Перший та другий доданки у підінтегральному виразі (4.30) визначають „вартість” досягнення динамічною системою нульового положення. Практично це означає те, що необхідно так вибирати керування, щоб забезпечити перехід динамічної системи з деякої точки фазового простору у початок координат при мінімальних відхиленнях фазових координат від нуля, тобто „штрафуються” ті положення динамічної системи, які характеризуються значною віддаленістю від початку координат у фазовому просторі.

Третій доданок у підінтегральному виразі (4.30) визначає „вартість” керування динамічною системою. Наприклад, для електроприводу мінімізація цієї складової знижує електромагнітний момент i , як наслідок, змінні електричні втрати у приводі [11], що збільшує енергоефективність процесу керування.

Нарешті, четвертий доданок у підінтегральному виразі (4.30) визначає „вартість” першої похідної функції керування за часом. Цей доданок обмежує швидкість наростання керування системою. Як правило, у технічних системах функція керування пропорційна моменту на валу двигуна. Якщо зміна моменту двигуна не обмежується, то можуть виникати перевантаження двигуна, а особливо силових електронних перетворювачів, які живлять двигун. Крім того, розривний характер прикладання рушійного зусилля у механізмі зумовлює удари у кінематичних парах при наявності люфтів та зазорів. Для того, щоб у деякій мірі знизити ці небажані явища необхідно обмежувати швидкість наростання функції керування, що і встановлюється останнім доданком у виразі під інтегралом (4.30).

Вагові коефіцієнти k_i ($i=1, 2, 3, 4$) встановлюють „вагу” кожного доданку у загальному виразі. Вони пов’язані співвідношенням:

$$\sum_{i=1}^4 k_i = 1. \quad (4.33)$$

Для розв'язання задачі (4.2), (4.31)-(4.33) використаємо динамічне програмування [3]. Основне функціональне рівняння Беллмана для критерію (4.30) має такий вигляд:

$$\min \left[k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 u^2 + k_4 \phi^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} u + \frac{\partial S}{\partial u} \phi \right] = 0, \quad (4.34)$$

де S - функція Беллмана.

Мінімум правої частини рівняння (4.34) будемо шукати по параметру керування ϕ для чого продиференціюємо її за ϕ та прирівняємо отримане до нуля:

$$2k_4 \phi + \frac{\partial S}{\partial u} = 0. \quad (4.35)$$

Знайдемо з рівняння (4.35) керування ϕ :

$$\phi = -\frac{1}{2k_4} \frac{\partial S}{\partial u} \quad (4.36)$$

та підставимо отримане у рівняння (4.34) в результаті чого будемо мати:

$$k_1 x_1^2 + x_2 \left(k_2 x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} \right) + u \left(k_3 u + \frac{\partial S}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{4k_4} \left(\frac{\partial S}{\partial u} \right)^2 = 0. \quad (4.37)$$

Рівняння (4.37) є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Будемо шукати його розв'язок за допомогою методу Гальоркіна [12]. Для цього необхідно задати опорну функцію, яка задовольняє крайові умови руху системи ($S(0, 0, 0) = 0$). Така функція представляється у вигляді квадратичної форми:

$$S = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 u^2 + A_4 x_1 x_2 + A_5 x_1 u + A_6 x_2 u. \quad (4.38)$$

Візьмемо частинні похідні з виразу (4.38) за параметрами x_1 , x_2 та u :

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = A_5 u + 2A_1 x_1 + A_4 x_2; \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = A_6 u + A_4 x_1 + 2A_2 x_2; \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial S}{\partial u} = 2A_3 u + A_5 x_1 + A_6 x_2. \quad (4.41)$$

Підставимо вирази (4.39)-(4.41) у рівняння (4.37) і отримаємо функцію нев'язки:

$$\begin{aligned} \xi = & k_3 u^2 + k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + u(A_6 u + A_4 x_1 + 2A_2 x_2) + \\ & + x_2(A_5 u + 2A_1 x_1 + A_4 x_2) - \frac{1}{4k_4} (2A_3 u + A_5 x_1 + A_6 x_2)^2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Надалі необхідно записати рівняння, які дають змогу визначити невідомі коефіцієнти A_j ($j=1, 2, 3, 4, 5, 6$) у виразі (4.38). Для цього, згідно з методом Гальоркіна, необхідно щоб нев'язка ξ була якомога ближчою до нуля. Це досягається ортогональністю функцій-множників, які стоять перед невідомими коефіцієнтами A_j у виразі (4.38) та нев'язкою ξ . Умови ортогональності записуються у такому вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{u_0}^0 \int_{v_0}^0 \int_{s_0}^0 (\xi x_1^2) dx_1 dx_2 du = 0, \\ & \int_{u_0}^0 \int_{v_0}^0 \int_{s_0}^0 (\xi x_2^2) dx_1 dx_2 du = 0, \\ & \int_{u_0}^0 \int_{v_0}^0 \int_{s_0}^0 (\xi u^2) dx_1 dx_2 du = 0, \\ & \int_{u_0}^0 \int_{v_0}^0 \int_{s_0}^0 (\xi x_1 x_2) dx_1 dx_2 du = 0, \\ & \int_{u_0}^0 \int_{v_0}^0 \int_{s_0}^0 (\xi x_1 u) dx_1 dx_2 du = 0, \\ & \int_{u_0}^0 \int_{v_0}^0 \int_{s_0}^0 (\xi x_2 u) dx_1 dx_2 du = 0. \end{aligned} \right. \quad (4.43)$$

Не будемо записувати систему рівнянь (4.43) у розгорнутому вигляді оскільки вона має значний об'єм. Для зменшення кількості розрахунків проаналізуємо вираз (4.36). Функція ϕ з урахуванням формули (4.41) приймає такий вигляд:

$$\phi = -\frac{2A_3u + A_5x_1 + A_6x_2}{2k_4}. \quad (4.44)$$

Отже, необхідно знайти лише три невідомі коефіцієнти, для того, щоб синтезувати функцію ϕ . Це полегшує розрахунки. Не будемо зупинятися на методиці знаходження невідомих коефіцієнтів. Приведемо лише результати. Всього існує вісім варіантів поєднання невідомих коефіцієнтів A_3 , A_5 та A_6 , які задовольняють системі рівнянь (4.43). Приведемо їх:

$$1. A_6 = -k_3 + \frac{A_3^2}{k_4}, A_5 = -2\sqrt{k_1k_4}, A_3 = A_{31};$$

$$2. A_6 = -k_3 + \frac{A_3^2}{k_4}, A_5 = 2\sqrt{k_1k_4}, A_3 = A_{31};$$

$$3. A_6 = -k_3 + \frac{A_3^2}{k_4}, A_5 = -2\sqrt{k_1k_4}, A_3 = A_{32};$$

$$4. A_6 = -k_3 + \frac{A_3^2}{k_4}, A_5 = 2\sqrt{k_1k_4}, A_3 = A_{32};$$

$$5. A_6 = -k_3 + \frac{A_3^2}{k_4}, A_5 = -2\sqrt{k_1k_4}, A_3 = A_{33};$$

$$6. A_6 = -k_3 + \frac{A_3^2}{k_4}, A_5 = 2\sqrt{k_1k_4}, A_3 = A_{33};$$

$$7. A_6 = -k_3 + \frac{A_3^2}{k_4}, A_5 = -2\sqrt{k_1k_4}, A_3 = A_{34};$$

$$8. A_6 = -k_3 + \frac{A_3^2}{k_4}, A_5 = 2\sqrt{k_1k_4}, A_3 = A_{34},$$

де A_{3q} ($q=1, 2, 3, 4$) - корені рівняння четвертої степені:

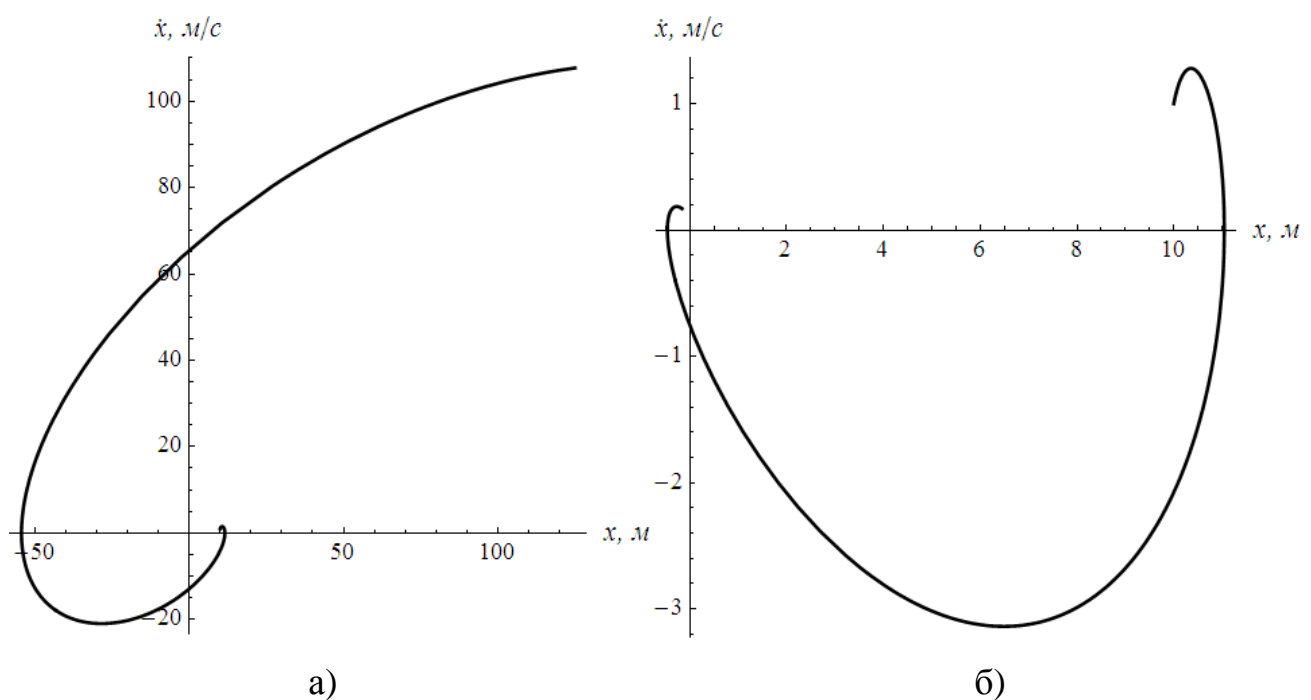
$$A_3^4 + aA_3^2 + bA_3 + c = 0, \quad (4.45)$$

де $a = -2k_3k_4$; $b = 8\sqrt{k_3k_4^5}$ (для випадку $A_5 = -2\sqrt{k_1k_4}$), $b = -8\sqrt{k_3k_4^5}$ (для випадку $A_5 = 2\sqrt{k_1k_4}$); $c = -k_4^2(4k_2k_4 - k_3^2)$. Корені рівняння (4.21) мають значний об'єм і приведені у вигляді умовних позначень A_{3q} ($q=1, 2, 3, 4$).

За допомогою підстановки конкретних значень вагових коефіцієнтів можна відсіяти комплексні коефіцієнти A_j [13]. Це варіанти 1, 3, 6, 8. Надалі необхідно знайти один варіант комбінації коефіцієнтів A_j , при якому динамічна система була б асимптотично стійкою. Для цього побудуємо фазові портрети для варіантів 2, 4, 5, 7 (рис. 4.3).

Аналіз приведених фазових портретів дає змогу обрати лише один варіант поєднання коефіцієнтів (варіант 4), при якому фазова точка з плином часу наближається до початку координат, тобто при $T \rightarrow \infty$ виконуються крайові умови (4.32).

Математично задача може вважатись розв'язаною, оскільки знайдена функція $\phi = \phi(u, x_2, x_1)$ мінімізує критерій (4.30). Однак, практично необхідно знайти функцію керування u , яка дасть змогу змінювати прискорення одномасової системи, пропорційне прикладеному до системи зусиллю (моменту).



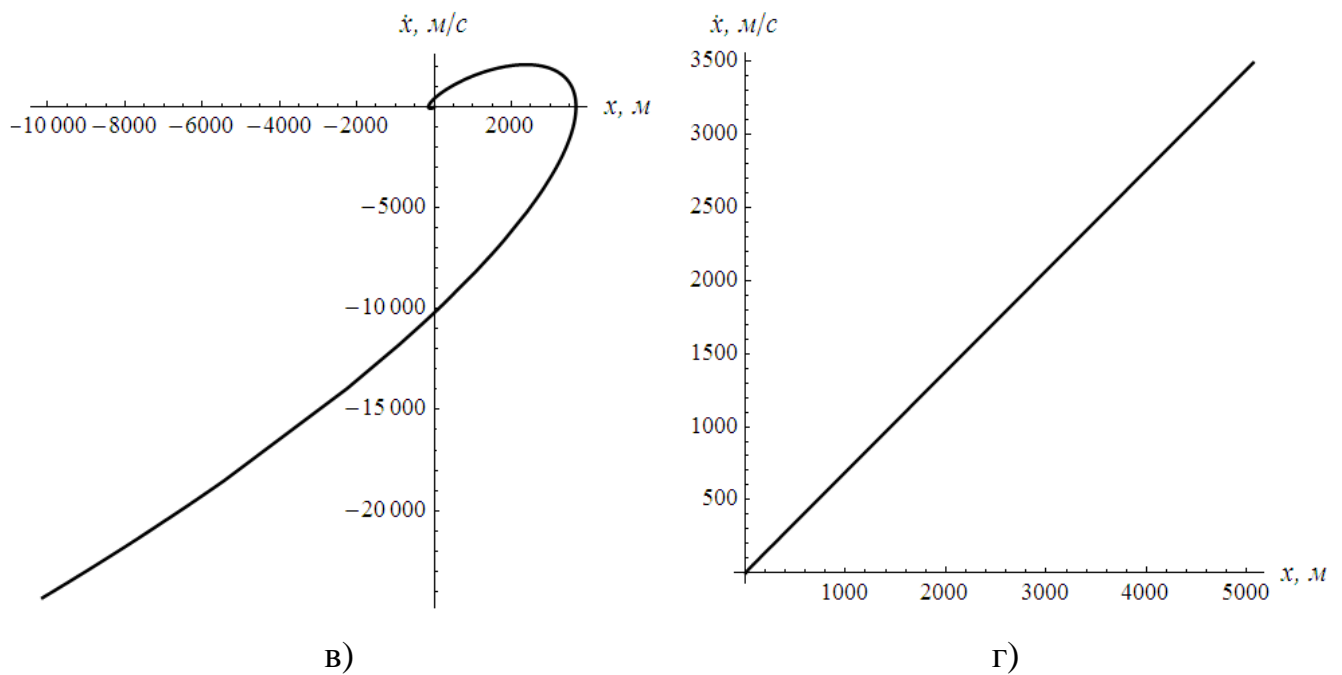


Рис. 4.3. Фазові портрети системи при різних комбінаціях невідомих коефіцієнтів A_j : а) варіант 2; б) варіант 4; в) варіант 5; г) варіант 7

Приведений нижче розрахунок дозволяє отримати функцію керування u , яка може бути реалізована практично за допомогою замкненої систем керування електроприводом змінного чи постійного струму. Для отримання функції u запишемо рівняння (4.44) у такому вигляді:

$$\dot{u} + \frac{2A_3u + A_5x_1 + A_6x_2}{2k_4} = 0. \quad (4.46)$$

Розв'яжемо це диференціальне рівняння. Для цього необхідно знайти інтеграл:

$$u = \frac{-1}{2k_4} \int (2A_3u + A_5x_1 + A_6x_2) dt + C_1, \quad (4.47)$$

де C_1 - постійна інтегрування, яку необхідно визначити. Враховуючи систему рівнянь (4.2) можемо подати вираз (4.47) у такому вигляді:

$$u = -\frac{A_5}{2k_4} \int x_1 dt - \frac{A_6}{2k_4} x_1 - \frac{A_3}{k_4} x_2 + C_1. \quad (4.48)$$

Для знаходження C_1 використаємо початкову умову, яка входить у систему (4.32) ($u(0) = u_0$). Враховуючи позначення $\int x_1(t)dt = x_0$ для моменту часу $t = 0$ запишемо рівняння (4.48):

$$-\frac{A_5}{2k_4}x_0(0) - \frac{A_6}{2k_4}s_0 - \frac{A_3}{k_4}v_0 + C_1 = u_0. \quad (4.49)$$

Розв'язок приведенного рівняння (4.49) відносно C_1 має такий вигляд:

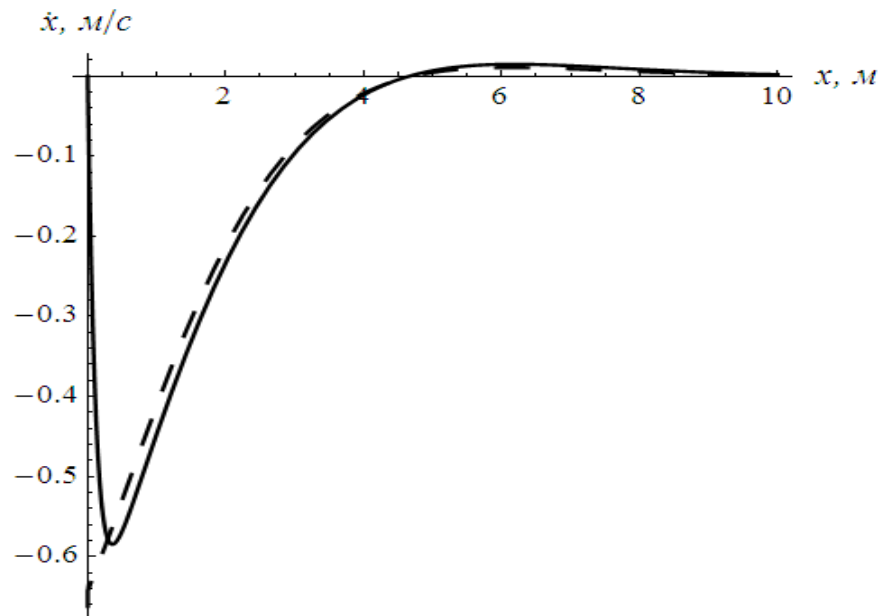
$$C_1 = u_0 + \frac{A_3}{k_4}v_0 + \frac{A_6}{2k_4}s_0 + \frac{A_5}{2k_4}x_0(0). \quad (4.50)$$

Підставляючи вираз (4.50) у формулу (4.48) остаточно запишемо функцію керування:

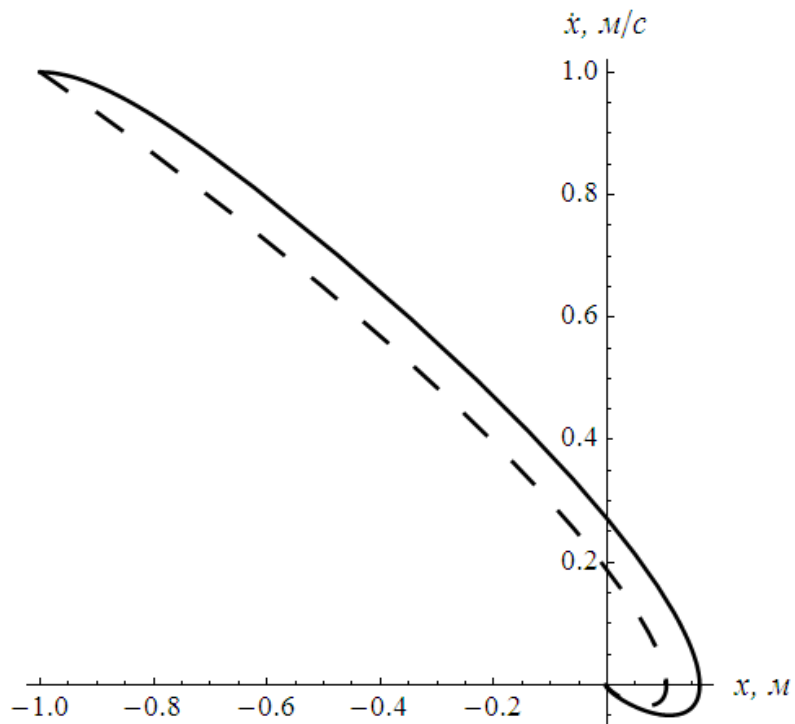
$$u = u_0 + \frac{A_3(v_0 - x_2)}{k_4} + \frac{A_6(s_0 - x_1)}{2k_4} - \frac{A_5(x_0(0) - x_0)}{2k_4}, \quad (4.51)$$

де $x_0 = \int x_1 dt$. Функція керування $u = u(x_2, x_1, x_0)$ знайдена. Насамперед необхідно зазначити, що принциповою різницею між результатами отриманими у попередньому та даному пунктах є можливість задавати величину початкового керування u_0 . Керування отримане у попередньому пункті, у тому числі початкова величина керування, залежить лише від поточного стану динамічної системи $u = u(x_2, x_1)$. Отже за певних значень фазових координат x_2 та x_1 керування може набувати значень, які неприпустимі за обмеженнями накладеними на керування. Проілюструємо сказане за допомогою рис. 4.4 (штрихова лінія показує криві отримані у попередньому пункті, суцільною лінією показані результати отримані у даному пункті). З рис. 4.4 (б) видно що обидва види керування переводять динамічну систему із одного положення у інше (нульове). У цьому ці керування однакові. Однак з рис. 4.4 (а) видно, що керування отримане у даній роботі $u = u(x_2, x_1, x_0)$ не має на початку розриву. Для побудови графіків

спеціально обрано $u_0 = 0$, що, практично, означає незмінність величини приводного зусилля у початковий момент часу (при $t = 0$). Отже, величина приводного зусилля буде рівною статичному опору переміщення механізму $F(0) = W(0)$.



а)



б)

Рис. 4.4. Графіки керування динамічною системою (а) та відповідні їм фазові портрети (б)

Ще однією перевагою отриманого у даній роботі керування є збільшення кількості вагових коефіцієнтів на одиницю. У подальшому можна здійснювати мінімізацію критерію (4.30) за параметрами вагових коефіцієнтів [14], мінімізувати інші додаткові критерії (інтегральні, термінальні або змішані), або задавати вагові коефіцієнти шляхом експертних оцінок [15].

Ваговий коефіцієнт k_4 визначає вагу „змінності” керування. Варіюючи цей коефіцієнт можна добитись підвищення інтенсивності перебігу перехідного процесу. Пояснимо це твердження. Нехай на початку руху системи ваговий коефіцієнт k_4 є незначним ($k_4 \rightarrow 0$). Тоді зміна величини керування буде відбуватись згідно зі зміною фазових координат системи $u = u(x_2, x_1, x_0)$. Якщо керування збільшиться до деякого максимально допустимого значення ($|u| \rightarrow u_{\max}$), то необхідно значно збільшити коефіцієнт k_4 ($k_4 \rightarrow 1$). У цьому випадку керування буде залишатись майже незмінним ($|u| \approx u_{\max}$), адже його зміна буде „штрафуватись” величиною критерію (4.30). При цьому динамічна система буде інтенсивно рухатись до свого кінцевого положення. У кінці руху ($t \rightarrow T$) фазові координати зменшаться значно, а разом з ним і керування u . Даний алгоритм зміни коефіцієнта k_4 може бути реалізований за допомогою цифрової системи керування приводом динамічної системи. Детальний опис алгоритму не входить у рамки даного дослідження.

4.3. Синтез оптимального керування механізмами вантажопідійомних машин із врахуванням першої та другої похідних функції керування

У п. 4.2. було синтезовано оптимальне керування рухом динамічної одномасової системи. Характерною рисою синтезованого оптимального керування є те, що початкове керування задається априорі. Це дозволяє отримати менш напружені, у сенсі динаміки, перехідні процеси руху

системи. Однак, варто зазначити, що вибір початкового значення керування не забезпечує усунення „м'яких” ударів у кінематичних парах приводу динамічної системи. Для досягнення цієї вимоги необхідно поставити більш жорсткі вимоги, а саме: забезпечити нульову швидкість наростання функції керування на початку руху системи [10].

Крім вказаної проблеми є іще одна, не менш важлива: оскільки оптимальне керування є функцією фазових координат системи, то великі значення фазових координат викличуть значне по величині керування (момент на валу приводного двигуна). Необхідно забезпечити умову неперевиконання величини керування, яка впливає із переважувальної здатності електроприводу та часошвидкісної характеристики частотного перетворювача, який виступає джерелом живлення для приводного двигуна.

У даному пункті буде синтезоване оптимальне керування, яке включає обмеження на величину керування і, крім того, мінімізує термінальні критерії початкового керування та швидкості зміни початкового керування. Зазначимо, що серед відомих методів, які дозволяють знайти оптимальне керування із подібними характеристиками, головне місце займає принцип максимуму [2]. Даний метод ґрунтується на максимізації функції Гамільтона з врахуванням обмежень на керування. Однак, принцип максимуму дозволяє знайти лише „якісну” картину оптимального керування. „Кількісні” характеристики, а саме моменти перемикання керування, необхідно знаходити використовуючи інші методи. Крім вказаних труднощів принцип максимуму у більшості випадків не дає змоги отримати керування у вигляді зворотного зв'язку, тобто оптимальне керування є програмним.

Одним із поширених методів, які дозволяють оптимізувати керування динамічною системою є метод локальних варіацій [16], який відноситься до наближених методів. Метод можна використовувати як для синтезу програмного керування так і для керування у вигляді зворотного зв'язку. У останньому випадку цифрова система керування виконує відносно велику кількість обчислень у режимі реального часу. Крім того, метод локальних

варіацій не забезпечує глобальний мінімум оптимізаційного функціоналу, досягається лише локальний мінімум, який залежить від першого наближення керування. Що стосується вибору такого наближення то він погано формалізований.

Не будемо зупинятись на інших наближених методах розв'язання оптимізаційних задач керування. Зазначимо лише, що кожен із цих методів має свої переваги та недоліки, які визначають клас задач, які розв'язуються з їх допомогою.

Для обґрунтування оптимізаційного критерію проведемо аналогію між результатами отриманими у попередньому пункті та теорією автоматичного регулювання [17].

Одним із найпоширеніших регуляторів, які використовуються у системах автоматики, є ПД-регулятор. Математично, даний тип регулятора виконує переведення фазової точки у початок координат. Поточні координати фазової точки визначаються величиною похибки керування об'єктом та першою похідною похибки за часом. Практично цей тип регулятора забезпечує усунення похибки керування об'єктом через деякий час. Усунення виконується за принципом зворотного зв'язку. Тобто кожному значенню координати фазової точки ставиться у відповідність певна величина керування. Синтезований у першій частині роботи оптимальний закон керування динамічною системою виконує переведення фазової точки у початок координат за аналогічним принципом. Отже даний тип керування можна використовувати для оптимального ПД-регулювання об'єктів, які описуються диференціальним рівнянням другого порядку (рівняння динаміки руху об'єкта).

Якщо використати більш загальний критерій оптимізації, наприклад:

$$I = \int_0^T (k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 u^2 + k_4 \dot{u}^2 + k_5 \ddot{u}^2) dt, \quad (4.52)$$

то у якості функції керування, за якою буде проводитись оптимізація величини критерію $I_{\text{ком.2}}$ необхідно прийняти \ddot{u} . Таким чином:

$$\ddot{u} = f(\dot{u}, u, x_2, x_1). \quad (4.53)$$

Для того, щоб знайти функцію u необхідно двічі проінтегрувати рівняння (4.53). У результаті ми отримаємо:

$$u = u(x_2, x_1, x_0, x_{00}), \quad (4.54)$$

де $x_{00} = \iint x_1 dt dt$. Такий тип регулювання, яке включає диференціальну, пропорціональну, інтегральну та подвійну інтегральну складову величини похибки задання координати механічної системи є нестандартним і нереалізованим у більшості прикладних розробок (мікроконтролерні ПІД-регулятори). Крім того, як відомо, значна вага інтегральної складової у ПІД-регуляторі призводить до нестійкості системи автоматичного регулювання. Можна очікувати, що подвійна інтегральна складова привнесе у систему регулювання ще більшу нестійкість. Назвемо ще один недолік критерію (4.52). Можна показати, що процедура мінімізації цього критерію за допомогою методу динамічного програмування зводиться до розв'язування алгебраїчного рівняння восьмого степеня, яке, як відомо, не має розв'язку у радикалах. Доводиться шукати його розв'язок чисельними методами, що пов'язане із заданням початкового наближення. Оскільки апіорі невідомо, яке початкове наближення необхідно взяти, то чисельний розв'язок рівняння може бути дійсним, комплексним або уявним. Це ускладнює процес знаходження одного лише дійсного кореня, при якому система оптимального регулювання є асимптотично стійкою. Отже, доцільно розв'язувати таку оптимізаційну задачу: знайти мінімум критерію оптимізації:

$$I = \int_0^T (k_2 x_2^2 + k_3 u^2 + k_4 \dot{u}^2 + k_5 \ddot{u}^2) dt, \quad (4.55)$$

при крайових умовах:

$$\begin{cases} x_1(0) = s_0, x_2(0) = v_0, u(0) = u_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0; \\ x_1(T) = x_2(T) = u(T) = \dot{u}(T) = 0. \end{cases} \quad (4.56)$$

Мінімізація критерію (4.55) дає змогу отримати ПД-регулятор із оптимальними коефіцієнтами підсилення окремих складових похибки задання.

Відзначимо також, що крайові умови (4.56) накладають більш жорсткі умови на клас функцій, серед яких шукається оптимальна. Однак це є виправданим, оскільки цей клас функцій доставляє абсолютні мінімуми таким термінальним критеріям:

$$\begin{cases} u^2(0) \rightarrow \min, \\ \dot{u}^2(0) \rightarrow \min, \\ u^2(T) \rightarrow \min, \\ \dot{u}^2(T) \rightarrow \min. \end{cases} \quad (4.57)$$

Система (4.57) фізично означає усунення „жорстких” та „м’яких” ударів у приводному механізмі механічної системи на початку та у кінці руху.

Для розв’язання задачі (4.55)-(4.57) використаємо динамічне програмування [3]. Основне функціональне рівняння Беллмана для критерію (4.55) має такий вигляд:

$$\min \left[k_1 x_2^2 + k_2 u^2 + k_3 \phi^2 + k_4 \gamma^2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} u + \frac{\partial S}{\partial u} \phi + \frac{\partial S}{\partial \phi} \gamma \right] = 0, \quad (4.58)$$

де S - функція Беллмана; ϕ - перша похідна функції u за часом; γ - друга похідна функції u за часом.

Мінімум правої частини рівняння (4.58) будемо шукати по параметру γ для чого продиференціюємо його за γ та прирівняємо отримане до нуля:

$$2k_4\gamma + \frac{\partial S}{\partial \phi} = 0. \quad (4.59)$$

Знайдемо з рівняння (4.59) керування:

$$\gamma = -\frac{1}{2k_4} \frac{\partial S}{\partial \phi} \quad (4.60)$$

та підставимо отримане у рівняння (4.58), в результаті чого будемо мати:

$$x_2(k_1x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_1}) + u(k_2u + \frac{\partial S}{\partial x_2}) + \phi(k_3\phi + \frac{\partial S}{\partial u}) - \frac{1}{4k_4} (\frac{\partial S}{\partial \phi})^2 = 0. \quad (4.61)$$

Рівняння (4.61) є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Будемо шукати розв'язок рівняння (4.61) у вигляді квадратичної форми:

$$S = A_1x_2^2 + A_2u^2 + A_3\phi^2 + A_4x_2u + A_5x_2\phi + A_6u\phi. \quad (4.62)$$

Зазначимо, у другій частині даного дослідження ми використаємо інший метод розв'язування рівняння (4.62) (метод запропонований академіком А.М. Летовим [18]). Обидва методи дають однакові результати.

Візьмемо частинні похідні з виразу (4.62) за параметрами x_2 , u , ϕ :

$$\frac{\partial S}{\partial x_2} = A_5\phi + 2A_1x_2 + A_4u; \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial S}{\partial u} = A_6\phi + A_4x_2 + 2A_2u; \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = 2A_3\phi + A_5x_2 + A_6u. \quad (4.65)$$

Підставимо вирази (4.63)-(4.65) у рівняння (4.61) і отримаємо:

$$\phi^2(A_6 + k_3 - \frac{A_3^2}{k_4}) + \phi u(2A_2 + A_5 - \frac{A_3A_6}{k_4}) + u^2(A_4 + k_2 - \frac{A_6^2}{4k_4}) +$$

$$+\phi x_2 \left(A_4 - \frac{A_3 A_5}{k_4} \right) + u x_2 \left(2A_1 - \frac{A_6 A_5}{k_4} \right) + x_2^2 \left(k_1 - \frac{A_5^2}{4k_4} \right) = 0. \quad (4.66)$$

Рівняння (4.66) буде справедливим для будь-яких значень змінних x_2 , u та ϕ лише за умови, що вирази у дужках рівні нулю. Це дає змогу сформулювати систему з шести алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів A_i ($i = 1, 2, \dots, 6$). Оскільки функція γ залежить лише від трьох невідомих коефіцієнтів:

$$\gamma = -\frac{1}{2k_4} (2A_3\phi + A_5x_2 + A_6u), \quad (4.67)$$

то необхідно шукати лише невідомі коефіцієнти A_3 , A_5 , A_6 . Порівнюючи отримане рівняння із аналогічним рівнянням у попередньому пункті можемо, опустивши проміжні перетворення та викладки, знайти оптимальні значення невідомих коефіцієнтів, які надають системі асимптотичну стійкість. Не будемо записувати їх формули, оскільки вони мають значний об'єм. Рівняння (4.67) можемо записати у дещо іншому вигляді:

$$\ddot{u} = -\frac{1}{2k_4} (2A_3\dot{u} + A_5x_2 + A_6u). \quad (4.68)$$

Із даного рівняння необхідно отримати функцію u . Для цього необхідно двічі проінтегрувати рівняння (4.68). У результаті будемо мати:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{k_4} \left(A_3 \iint \dot{u} dt + \frac{A_6}{2} \iint u dt + \frac{A_5}{2} \iint x_2 dt \right) + C_1 t + C_2 = \\ &= -\frac{1}{k_4} \left(A_3 x_2 + \frac{A_6}{2} x_1 + \frac{A_5}{2} x_0 \right) + C_1 t + C_2, \end{aligned} \quad (4.69)$$

де $x_0 = \int x_1 dt$; C_1 та C_2 - постійні інтегрування. Постійні інтегрування можна знайти використовуючи початкові умови руху динамічної системи (4.56). Запишемо їх значення:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{A_6 v_0 + 2\dot{u}_0 k_4 + 2A_3 u_0 + A_5 s_0}{2k_4}; \\ C_2 = \frac{2A_3 v_0 + A_5 x_0(0) + 2k_5 u_0 + A_6 s_0}{2k_4}. \end{cases} \quad (4.70)$$

Підставляючи отримані значення постійних інтегрування у вираз (4.69), остаточно запишемо вираз для оптимального керування:

$$u = (\dot{u}_0 t + u_0) + \frac{A_3}{k_4} (v_0 + u_0 t - x_2) + \frac{A_6}{k_4} (s_0 + v_0 t - x_1) + \frac{A_5}{k_4} (x_0(0) + s_0 t - x_0). \quad (4.71)$$

Функція керування $u = u(x_2, x_1, x_0)$ знайдена. Аналізуючи вираз (4.71) можемо сказати, з'являється можливість задавати початкове значення оптимального керування, не залежне від початкових значень фазових координат системи. Крім того, аналогічне твердження можна висловити про першу похідну функції керування за часом. Зазначимо, що керування (4.71) доставляє мінімуми термінальним критеріям (4.57), що збільшує плавність переходу руху динамічної системи із перехідного режиму на усталений і навпаки. Приведемо фазовий портрет системи та графік зміни оптимального керування (рис. 4.5). Узагальнюючи, можна сказати, що постановка більш складних оптимізаційних задач, які б враховували третю та вищі похідні функції керування, призводить до можливості формувати оптимальне керування за додатковими вимогами, накладеними на рух динамічної системи.

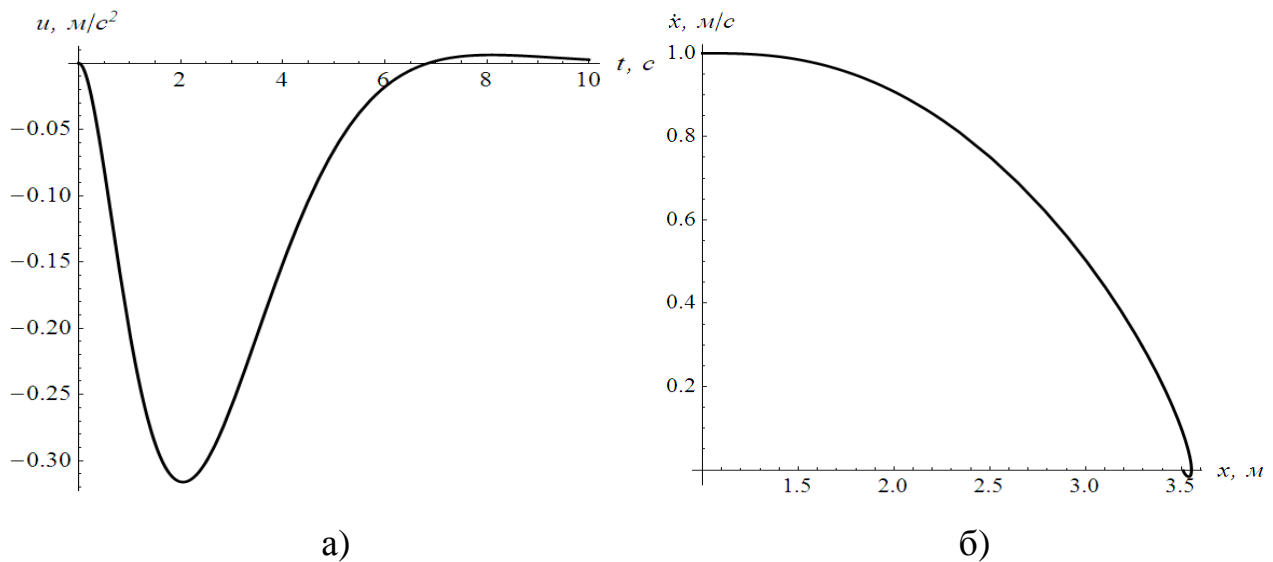


Рис. 4.5. Графіки керування динамічною системою (а) та відповідні їм фазові портрети (б)

4.4. Побудова оптимального режиму переміщення одномасової динамічної системи із обмеженням інтегрального типу

До руху вантажопідійомних машин та їх механізмів в першу чергу ставляться вимоги технологічного характеру, а саме: перемістити робочий орган із одного положення у інше, що означає виконання якогось технологічного руху. Однак рух машини може виконуватись із різними параметрами: тривалістю, енергетичними витратами, динамічними навантаженнями на елементи машини. Одні із цих показників повинні бути мінімальними, інші – максимальними. Крім того, на рух динамічної системи (механізму вантажопідійомної машини) також накладаються обмеження, як правило інтегрального типу, оскільки забороняється перевищувати деякі технологічні показники.

Синтез оптимального закону руху динамічної одномасової системи із врахуванням інтегральних обмежень є актуальною задачею. Використання синтезованих законів дозволить зменшити енергетичні витрати на виконання руху та забезпечити безаварійну експлуатацію наявного обладнання.

Для синтезу оптимального керування із врахуванням обмежень інтегрального типу можна використовувати будь-якими із методів [1-7]. Для цього необхідно лише використати правило множників Лагранжа, яке певним чином вводить „ціну” обмеженням. Тобто врахування обмежень відбувається за рахунок збільшення величини оптимізаційного функціоналу.

Будемо шукати траєкторії руху системи, які б задовольняли крайовим умовам:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = 0; \\ x(T) = x_1; \quad \dot{x}(T) = 0. \end{cases} \quad (4.71)$$

де T - тривалість руху динамічної системи; x_1 - координата динамічної системи у кінці переміщення.

Для оптимізації режиму руху динамічної одномасової системи використаємо такий інтегральний критерій, який відображає середнє за час руху значення кінетичної енергії системи:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{m}{2} \dot{x}^2 dt \rightarrow \min. \quad (4.72)$$

Мінімізація цього критерію дозволяє зменшити енергетичні витрати машини або механізму протягом руху.

Накладемо на оптимальний режим руху системи обмеження у вигляді середнього значення динамічної складової потужності приводного механізму. При цьому екстремаль функціонала (4.72) повинна задовольняти рівність:

$$\int_0^T \frac{m}{2} \ddot{x}^2 dt = \frac{k m x_1^2}{t_1^3}, \quad (4.73)$$

де k - деякий коефіцієнт. При $k=6$ досягається мінімум критерію (4.73) [14]. Очевидно, що одна і та сама екстремаль не може доставляти екстремум обом інтегралам (4.72) та (4.73). Отже, завжди $k > 6$.

Поставлена задача відноситься до варіаційних, а саме: необхідно дослідити на умовний екстремум інтегральний функціонал із врахуванням обмежень (4.73). Для її розв'язання необхідно певним чином сформулювати підінтегральний вираз нового функціоналу та знайти його екстремум без обмежень. Запишемо підінтегральний вираз нового функціоналу:

$$f = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{\lambda^2} \frac{m}{2} \ddot{x}^2, \quad (4.74)$$

де λ - деякий коефіцієнт (множник $\frac{1}{\lambda^2}$ у виразі (4.74) є не що інше як множник Лагранжа).

Для знаходження інтегрального функціоналу із підінтегральним виразом (4.74) використаємо необхідну умову екстремуму – рівняння Ейлера-Пуассона, які дають:

$$x - \lambda^2 \ddot{x} = 0. \quad (4.75)$$

Розв'язком даного однорідного диференціального рівняння при прийнятих крайових умовах (4.71) є вираз:

$$x = \frac{x_1(1 - e^{T\lambda} + e^{(T-t)\lambda} + t\lambda + e^{T\lambda}(t\lambda - 1))}{2 + T\lambda + e^{T\lambda}(T\lambda - 2)}. \quad (4.76)$$

Представимо також вищі похідні виразу (4.76) за часом:

$$\dot{x} = \frac{x_1\lambda(1 - e^{t\lambda} + e^{T\lambda} - e^{(T-t)\lambda})}{2 + T\lambda + e^{T\lambda}(T\lambda - 2)}; \quad (4.77)$$

$$\ddot{x} = \frac{x_1\lambda^2(e^{t\lambda} + e^{(T-t)\lambda})}{2 + T\lambda + e^{T\lambda}(T\lambda - 2)}. \quad (4.78)$$

Підставивши у вираз (4.73) другу похідну із формули (4.76), отримаємо:

$$\frac{e^{T\lambda} \lambda^3 (\text{Sinh}(T\lambda) - T\lambda)}{(2 + T\lambda + e^{T\lambda} (T\lambda - 2))^2} = \frac{k}{t_1^3}. \quad (4.79)$$

Необхідно розв'язати це трансцендентне рівняння відносно λ . Будемо шукати розв'язок рівняння (4.79) чисельним методом простих ітерацій. Нижче приведено тіло циклу, який використовується для наближеного знаходження невідомої величини λ :

$$1) \text{ розрахунок } \lambda^* = \sqrt[3]{\frac{k(2 + T\lambda + e^{T\lambda} (T\lambda - 2))^2}{e^{T\lambda} t_1^3 (\text{Sinh}(T\lambda) - T\lambda)}} \quad (\lambda^* - \text{уявний коефіцієнт}$$

введений для виконання ЕОМ логічних та арифметичних операцій).

2) очистка λ ;

3) $\lambda = \lambda^*$;

4) очистка λ^* .

Після кожного проходження тіла циклу перевіряється умова:

$$\lambda_i - \lambda_{i-1} > \Delta\lambda, \quad (4.80)$$

де λ_i , λ_{i-1} - значення невідомого коефіцієнту на i -тому та на $(i-1)$ -му проходженні тіла циклу; $\Delta\lambda$ - наперед встановлена абсолютна похибка визначення невідомого коефіцієнту. Якщо умова (4.80) виконується, то необхідно продовжувати виконання розрахунків. Якщо умова (4.80) не виконується, то це означає, що отримано достатньо точне значення коефіцієнта λ .

Для виконання приведенного вище алгоритму необхідно також задати початкове наближення коефіцієнта λ .

Приведемо графіки функцій швидкості руху динамічної системи для $k=50$ та $k=7$ (рис. 4.6).

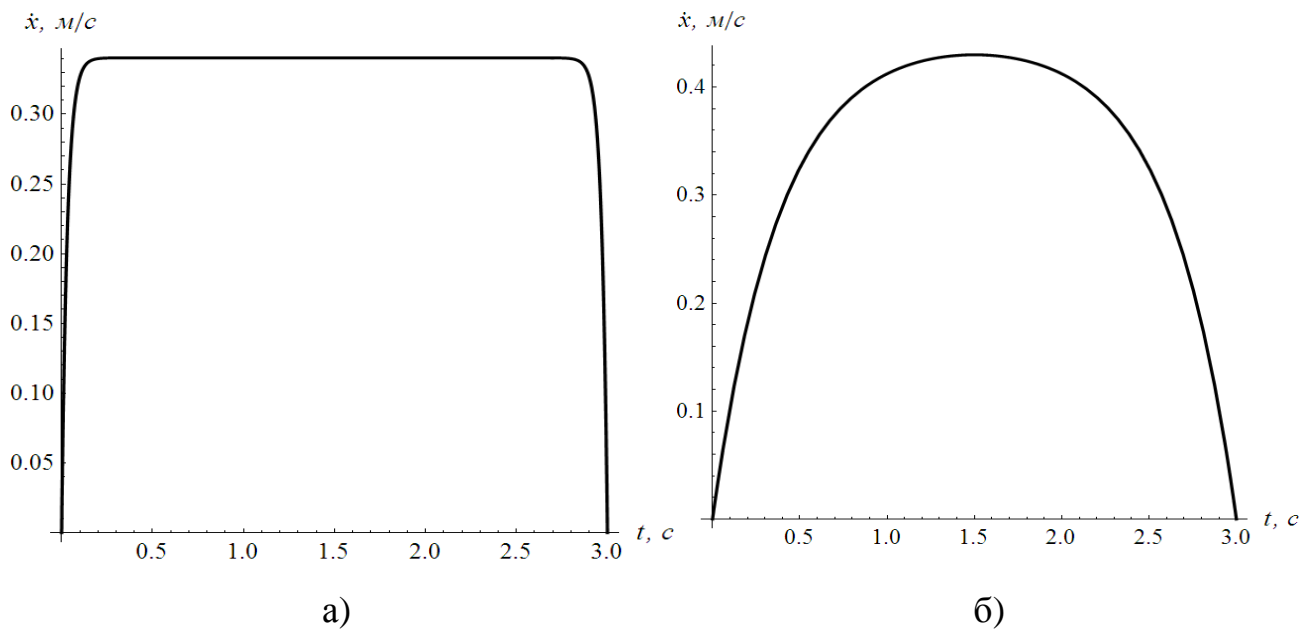


Рис. 4.6. Графіки функцій швидкості руху динамічної системи при $k=50$ (а) та при $k=7$ (б)

Приведемо також графіки зміни прискорення (рис. 4.7).

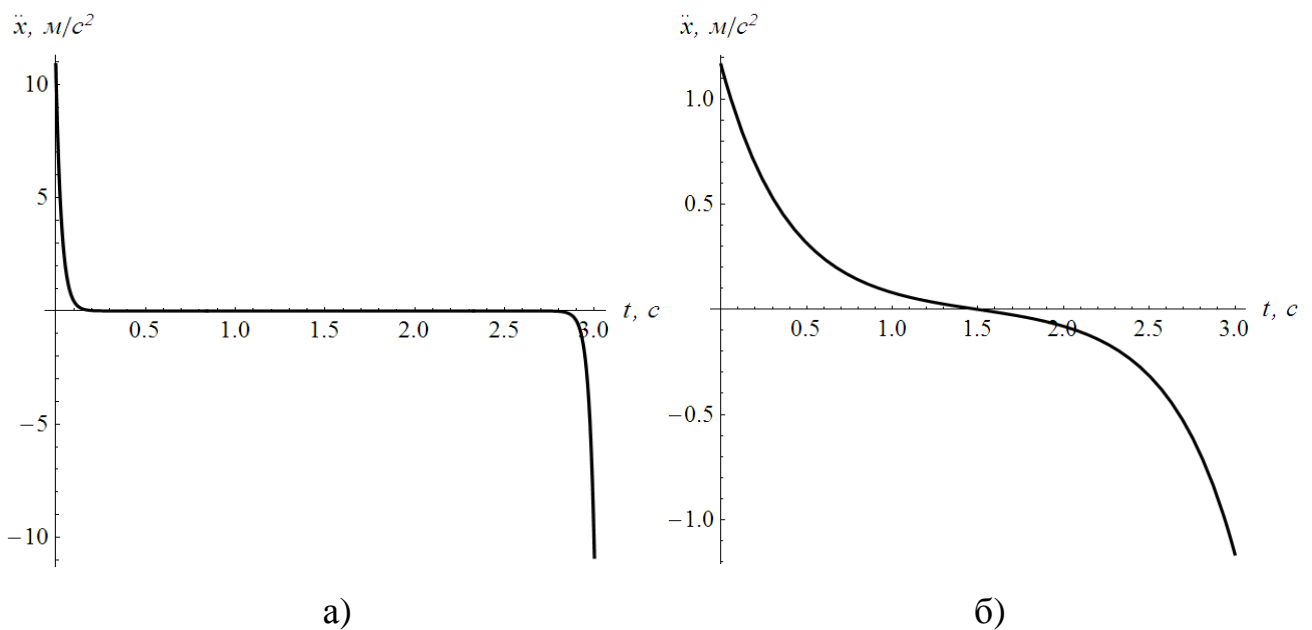


Рис. 4.7. Графіки функцій прискорення динамічної системи при $k=50$ (а) та при $k=7$ (б)

Для випадку коли $k=50$ обмеження накладене на рух системи є слабким. Це означає, що закон руху динамічної системи буде наближатись до екстремалі функціонала (4.72), яка є прямою лінією, горизонтальною осі часу

(рис. 4.6). При цьому функціонал (4.73) набуває значної величини. Для випадку коли $k=7$ на систему накладаються більш жорсткіші обмеження, відповідно закон руху системи змінюється: для забезпечення невеликого значення функціоналу (4.73) динамічна система не може мати значних та тривалих прискорень (рис. 4.7, б). Підбором величини коефіцієнта λ можна добитись також інших, бажаних для виконання руху, характеристик. Наприклад, необхідно, щоб прискорення динамічної одномасової системи не перевищувало задане. Дослідження закону прискорення системи (4.78) показує, що максимальне за модулем прискорення у системі виникає у моменти початку та закінчення руху. Вимога неперевіщення максимального прискорення, у цьому випадку, запишеться таким чином:

$$\ddot{x}(0) = -\ddot{x}(T) \leq \ddot{x}_{\max}. \quad (4.81)$$

Знаходити розв'язок цієї нерівності будемо методом простих ітерацій. У результаті отримаємо значення λ , при якому нестрога нерівність (4.81) перетворюється у рівність, тобто динамічна система розганяється та гальмує при максимально допустимому прискоренні. На рис. 4.8 показано графік швидкостей та прискорень системи причому $\ddot{x}_{\max} = 2 \text{ м/с}^2$.

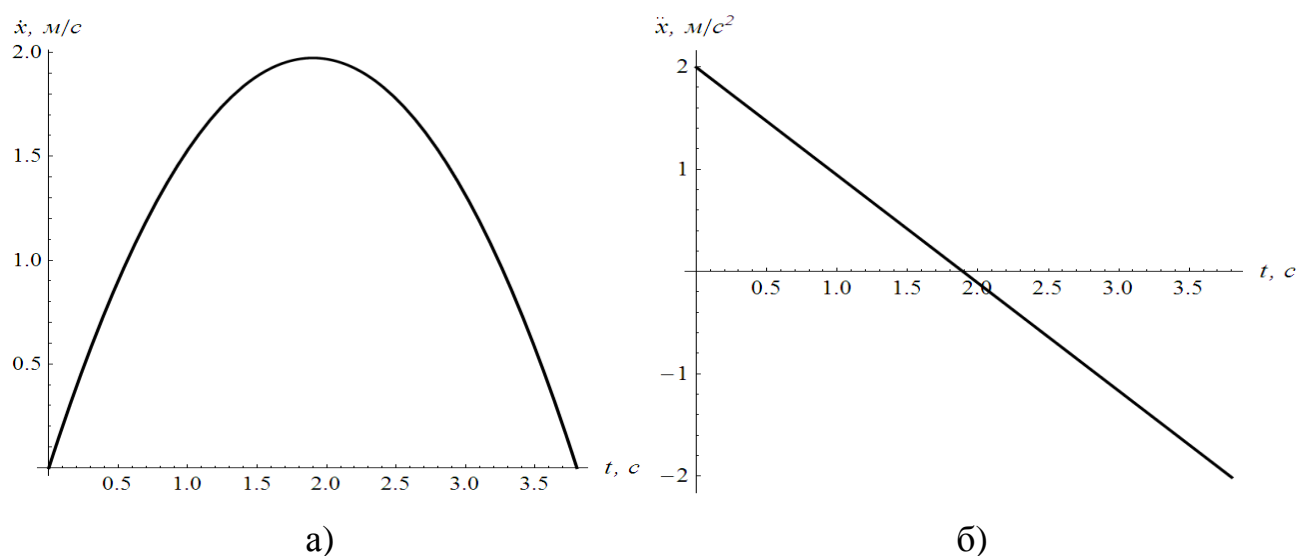


Рис. 4.8. Графіки функцій швидкості (а) та прискорення (б) динамічної системи при $|\ddot{x}_{\max}| = 2 \text{ м/с}^2$

4.5. Оптимізація режиму розгону механізмів вантажопідйомних машин із врахуванням сил опору

При синтезі оптимальних законів руху механізмів вантажопідйомних машин та їх механізмів необхідно враховувати зовнішні збурення, які діють із боку середовища, у якому експлуатується механізм. Ці збурення (сили опору технологічного характеру) викликають відхилення реального руху механізму від оптимального. Тому вони повинні бути враховані вже на етапі вибору оптимізаційного критерію.

Оптимізацію режиму розгону динамічної системи (механізму вантажопідйомної машини) (4.1) виконаємо за критерієм мінімуму інтегрального функціоналу [19]:

$$I_v = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} V dt = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} m (\ddot{x} + \ddot{x}^*)^2 dt \rightarrow \min, \quad (4.82)$$

де V – повна „енергія” прискорень динамічної системи; t_1 – тривалість розгону механічної системи; \ddot{x}^* – уявна складова повного прискорення, яка стиснена силами опору:

$$\ddot{x}^* = \frac{F_0}{m}, \quad (4.83)$$

де F_0 - сила опору, що виникає в результаті руху тіла. Точка над символом означає диференціювання за часом.

Якщо прийняти, що сила опору залежить від відносної швидкості руху системи і при збільшенні швидкості ця сила зменшується пропорційно швидкості, то можна отримати залежність:

$$F_0 = a - c\dot{x}, \quad (4.84)$$

де a - величина сили опору в момент зрушення тіла з місця; c – коефіцієнт пропорційності. Тоді:

$$\ddot{x}^* = \frac{a - c\dot{x}}{m}. \quad (4.85)$$

Також можемо записати:

$$V = \frac{1}{2} m \left(\ddot{x} + \frac{a - c\dot{x}}{m} \right)^2. \quad (4.86)$$

Запишемо необхідну умову мінімуму критерію за виразом (4.82) із врахуванням формули (4.86) – рівняння Ейлера-Пуассона [1]:

$$x - k\ddot{x} = 0, \quad (4.87)$$

де k – деякий коефіцієнт ($k = \sqrt{\frac{c}{m}}$). Для знаходження оптимального закону руху використаємо крайові умови:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = 0; \\ \dot{x}(t_1) = v; \quad \ddot{x}(t_1) = 0, \end{cases} \quad (4.88)$$

де v - швидкість усталеного руху системи. Запишемо розв'язок крайової задачі (4.87, 4.88):

$$x = - \frac{v \operatorname{Csch} \left(\frac{kt_1}{2} \right)^2 (-k t \operatorname{Cosh}(kt_1) + \operatorname{Sinh}(k(t - t_1)) + \operatorname{Sinh}(kt_1))}{2k}. \quad (4.89)$$

Розв'яжемо рівняння (4.87) при таких крайових умовах:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = 0; \quad \ddot{x}(0) = 0; \\ \dot{x}(t_1) = v. \end{cases} \quad (4.90)$$

Різниця у крайових умовах (4.88) та (4.90) полягає у тому, що кінцеву умову $\ddot{x}(t_1) = 0$ із системи (4.88) замінено на початкову умову $\ddot{x}(0) = 0$ із системи (4.90). Запишемо розв'язок крайової задачі (4.87), (4.90):

$$x = \frac{v (\text{Sinh}(kt) - kt)}{k(\text{Cosh}(kt_1) - 1)}. \quad (4.91)$$

Для розв'язування рівняння (4.87) можна використати інші крайові умови – симетричні:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = 0; \\ x(t_1) = s; \dot{x}(t_1) = v, \end{cases} \quad (4.92)$$

де s - переміщення системи у кінці розгону.

У результаті розв'язку крайової задачі (4.87), (4.92) отримаємо екстремаль:

$$x = \left[e^{-kt} (e^{2kt_1} (ks - v) + e^{k(t+2t_1)} (kt_1 - 1)(ks - v) + e^{2kt_1} (ks + v) - e^{kt} (kt_1 + 1)(ks + v) + 2e^{k(t+t_1)} k(s + (t - t_1)v + e^{kt_1} (-ks + v + kt_1 v) - e^{k(t+2t_1)} (v + k(s - t_1 v)))) \right] \left[(e^{kt_1} - 1)k(2 + kt_1 + e^{kt_1} (kt_1 - 2)) \right]^{-1}. \quad (4.93)$$

Знаючи екстремаль функціонала, не важко знайти його кінцевий вираз. Для цього необхідно знайти першу та другу похідні із виразу (4.93) за часом та підставити знайдені вирази у підінтегральну функцію критерію (4.82). Надалі візьмемо інтеграл (4.82). Вираз інтегралу є досить громіздким, тому не будемо приводити його. Зазначимо, що інтеграл є функцією невідомого параметру s , який можна підібрати таким чином, щоб мінімізувати критерій (4.82). Для мінімізації функціоналу (4.82) за параметром s необхідно розв'язати таке рівняння:

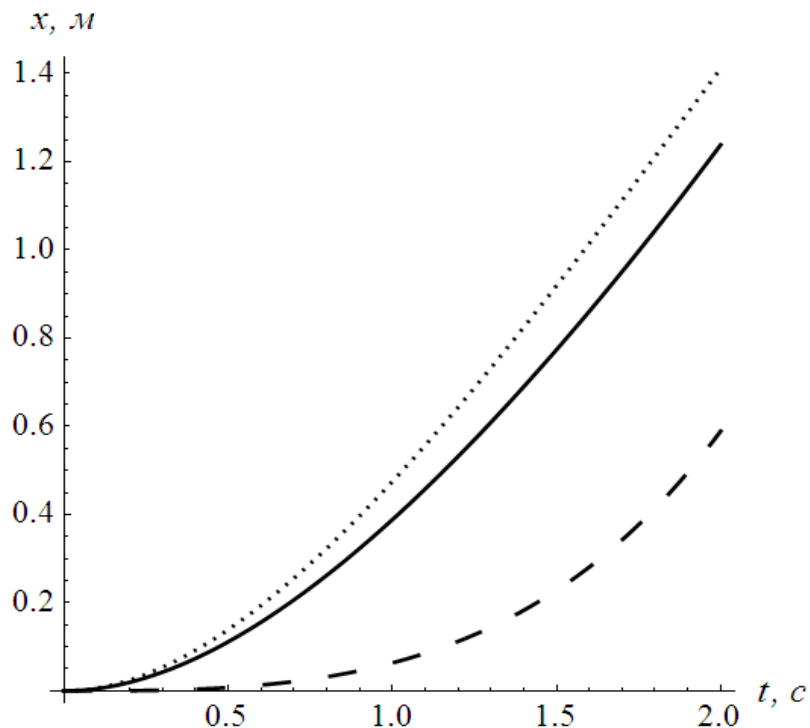
$$\frac{\partial I_v}{\partial s} = 0. \quad (4.94)$$

Запишемо розв'язок цього рівняння:

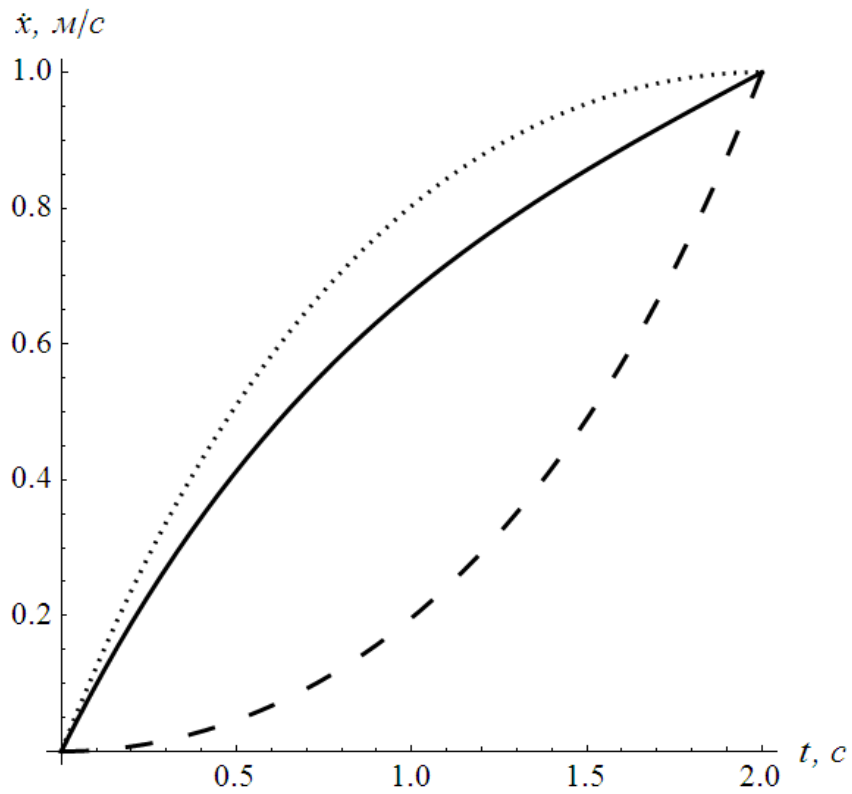
$$s = \frac{act_1 + m(cv - 2a)tgh\left(\frac{ct_1}{2m}\right)}{c^2}. \quad (4.95)$$

Підставляючи знайдений розв'язок (4.95) у вираз (4.93), знайдемо вираз екстремалі функціонала (4.82).

Таким чином, знайдено три екстремалі (4.89, 4.91, 4.93) при різних крайових умовах відповідно (4.88, 4.90, 4.92). Крайові умови (4.88) та (4.90) називаються несиметричними, оскільки порядок похідних функцій у моменти часу $t=0$ та $t=t_1$ є різним. Крайові умови (4.92) – симетричні, оскільки порядок похідних функцій у задані моменти часу однаковий. Для отриманих законів руху побудовані графіки функцій (рис. 4.9, 4.10). На рис. 4.9, 4.10 дрібна штриховка показує кінематичні функції екстремалі (4.89), груба штриховка – екстремалі (4.91), суцільна лінія – екстремалі (4.93).

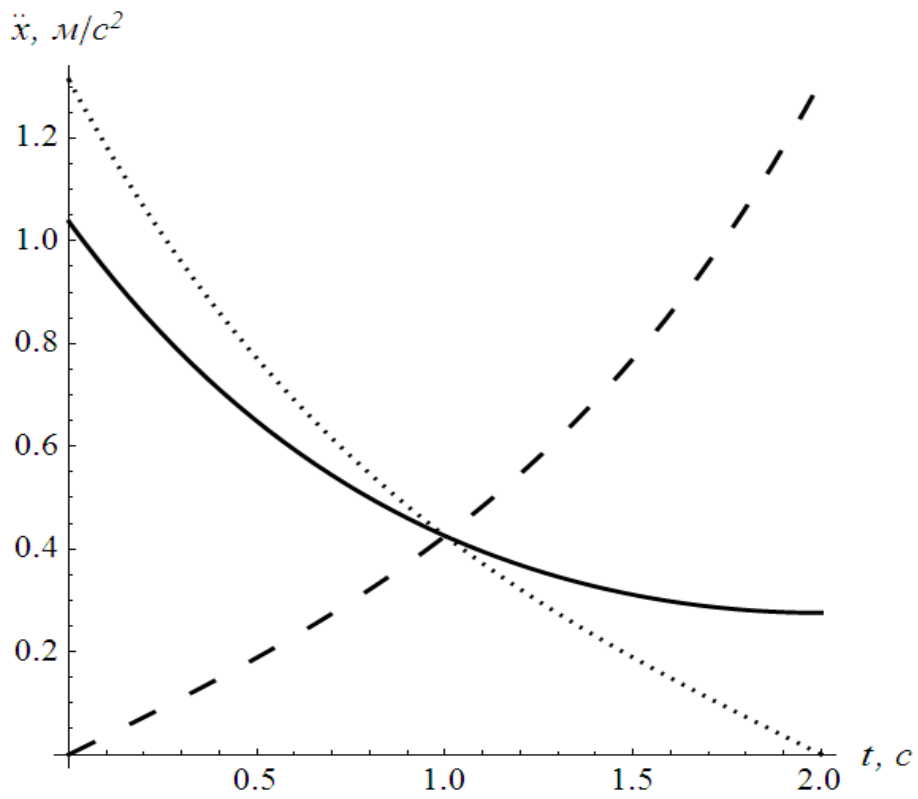


a)

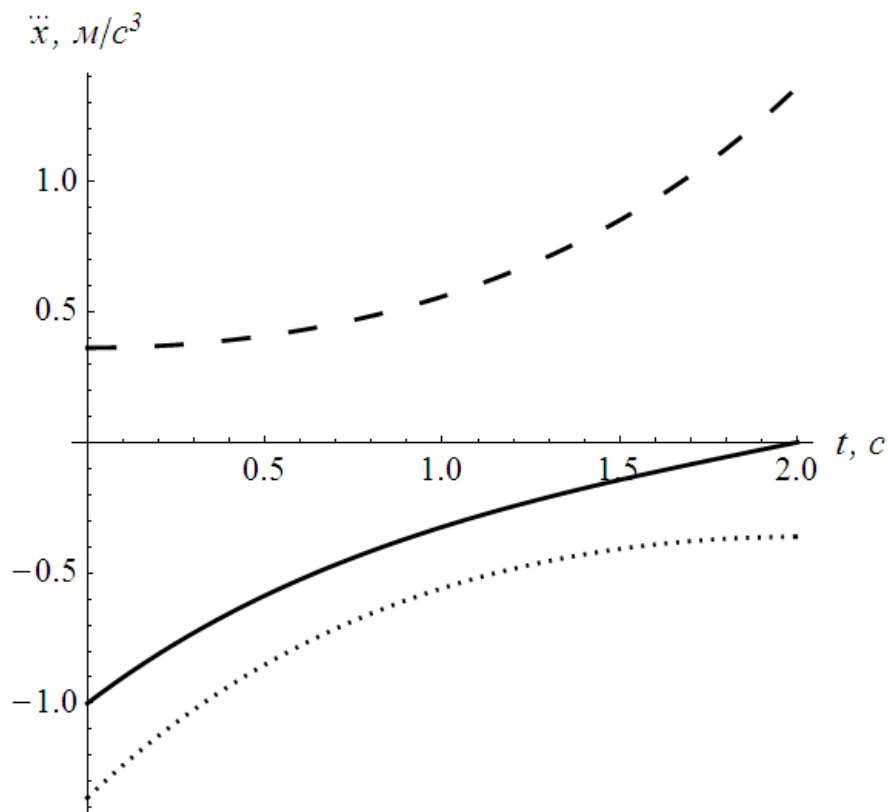


б)

Рис. 4.9. Графіки функцій переміщення (а) та швидкості (б) динамічної системи



а)



б)

Рис. 4.10. Графіки функцій прискорення (а) та ривка (б) динамічної системи

Порівняємо значення функціоналів отриманих при розв'язанні варіаційної задачі (4.82) при різних крайових умовах. Для цього побудуємо графіки функціоналів як функцій тривалості розгону динамічної системи (рис. 4.11). На рис. 4.11 штриховою лінією показано графік функціонала як функції тривалості руху системи для несиметричних крайових умов, а суцільною – для симетричних. Виявляється, що постановка несиметричних крайових умов приводить до того, що значення функціонала є однаковими. У цьому сенсі екстремалі (4.89) та (4.91) є тотожними.

Із приведених графіків видно, що розв'язання варіаційної задачі при симетричних крайових умовах дає менше значення функціоналу. Однак при збільшенні тривалості руху системи різниця між значеннями функціоналів майже зникає. Цей результат важливо враховувати при розгоні динамічних систем коли розгін є нетривалим.

Значення функціоналу є не єдиним критерієм, за яким можна дати оцінку якості перебігу перехідного процесу. У таблиці 1 зведено основні показники, які відносяться до отриманих вище результатів і які відображають якість режиму розгону динамічної системи.

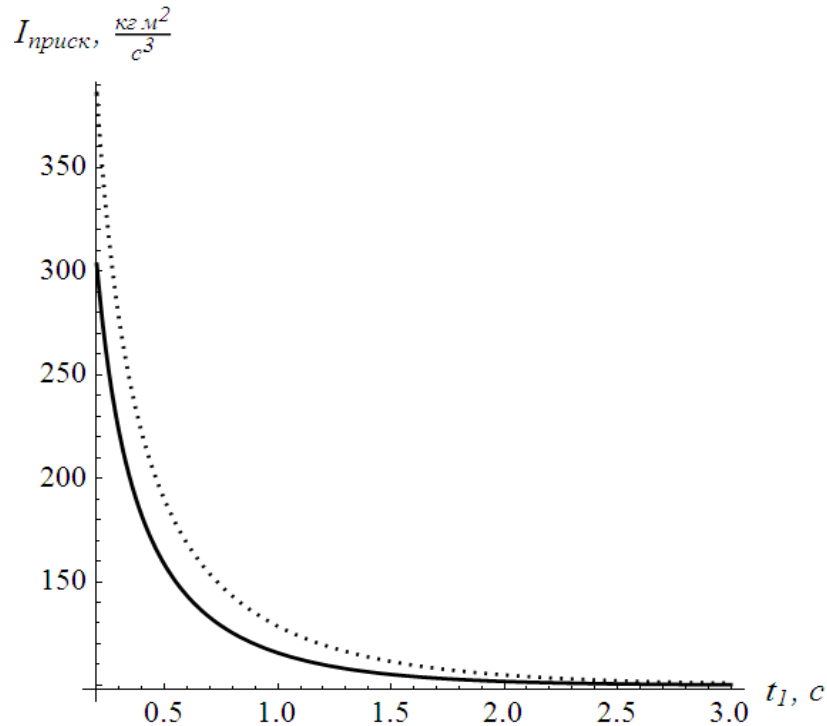


Рис. 4.11. Графіки функціонала (4.82) при несиметричних (4.88) і (4.90) при симетричних (4.92) крайових умовах

Таблиця 4.1. Значення показників якості руху динамічної системи для екстремалей (4.89), (4.91) та (4.93)

Значення показників	Оптимальний режим руху		
	Екстремаль (4.89)	Екстремаль (4.91)	Екстремаль (4.93)
1	2	3	4
$x(t_1)$	$v(kt_1 \cosh(kt_1) - \sinh(kt_1))A^{-1}$	$v(\sinh(kt_1) - kt_1)A^{-1}$	s (вираз 4.95)
$\ddot{x}(0)$	$kv \operatorname{cth}\left(\frac{kt_1}{2}\right)$	0	$k(-ks + kt_1v + ks \times \cosh(kt_1) - v \times \sinh(kt_1))$

1	2	3	4
$\ddot{x}(t_1)$	0	$kv \operatorname{cth}\left(\frac{kt_1}{2}\right)$	$k(ks + k(t_1v - s) \times \cosh(kt_1) - v \times \sinh(kt_1))$
\ddot{x}_{\max}	$\ddot{x}(0)$	$\ddot{x}(t_1)$	$\ddot{x}(0)$
$\ddot{x}(0)$	$-k^2v \cosh(kt_1)D^{-1}$	k^2vD^{-1}	$-k^2(ks + e^{kt_1} \times (ks - v) + v)C^{-1}$
$\ddot{x}(t_1)$	$-k^2vD^{-1}$	$-k^2v \cosh(kt_1)D^{-1}$	$k^2(v - e^{kt_1}v - (1 + e^{kt_1})k(s - vt_1))C^{-1}$

У табл. 4.1 введені такі позначення: $A = k(\operatorname{Cosh}(kt_1) - 1)$; $B = 2 - 2\operatorname{Cosh}(kt_1) + kt_1\operatorname{Sinh}(kt_1)$; $C = 2 + kt_1 + e^{kt_1}(kt_1 - 2)$; $D = \operatorname{Cosh}(kt_1) - 1$.

Приведемо розв'язання іншої оптимізаційної задачі: мінімізувати інтегральний функціонал [19]:

$$I_w = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} W dt = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} m(\ddot{x} + \ddot{x}^*)^2 dt \rightarrow \min, \quad (4.96)$$

де W – повна „енергія” ривків динамічної системи. Із врахуванням рівняння (4.86) необхідна умова екстремуму функціоналу (4.96) – рівняння Ейлера-Пуассона – набуває такого вигляду:

$$\overset{VI}{x} - k^2 \overset{IV}{x} = 0. \quad (4.97)$$

Дане диференціальне рівняння будемо розв'язувати при несиметричних крайових умовах:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0; \\ \dot{x}(t_1) = v; \quad \ddot{x}(t_1) = \ddot{\ddot{x}}(t_1) = 0 \end{cases} \quad (4.98)$$

та

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0; \\ \dot{x}(t_1) = v; \ddot{x}(t_1) = 0. \end{cases} \quad (4.99)$$

Крім наведених умов диференціальне рівняння (4.97) розв'язано при симетричних крайових умовах:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0; \\ x(t_1) = s; \dot{x}(t_1) = v; \ddot{x}(t_1) = 0. \end{cases} \quad (4.100)$$

Не будемо приводити вирази, які описують розв'язки відповідних крайових задач, оскільки вони мають значний об'єм.

Для випадку крайових умов (4.100) екстремаль буде залежати від параметра s . Отже, функціонал (4.96) також є функцією цього параметра. Для мінімізації критерію (4.96) необхідно розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial I_w}{\partial s} = 0. \quad (4.101)$$

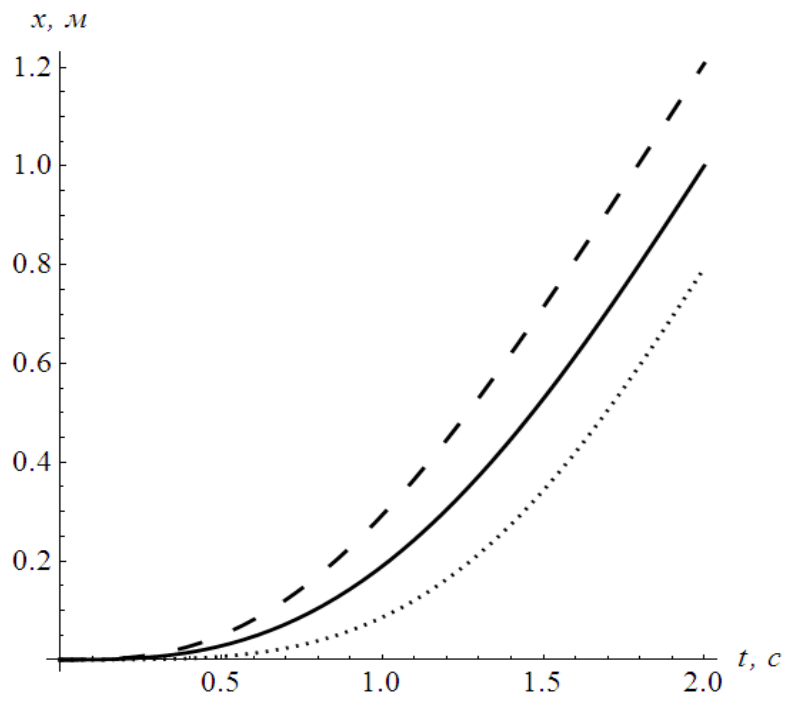
Розв'язком даного рівняння є вираз:

$$s = \frac{vt_1}{2}. \quad (4.102)$$

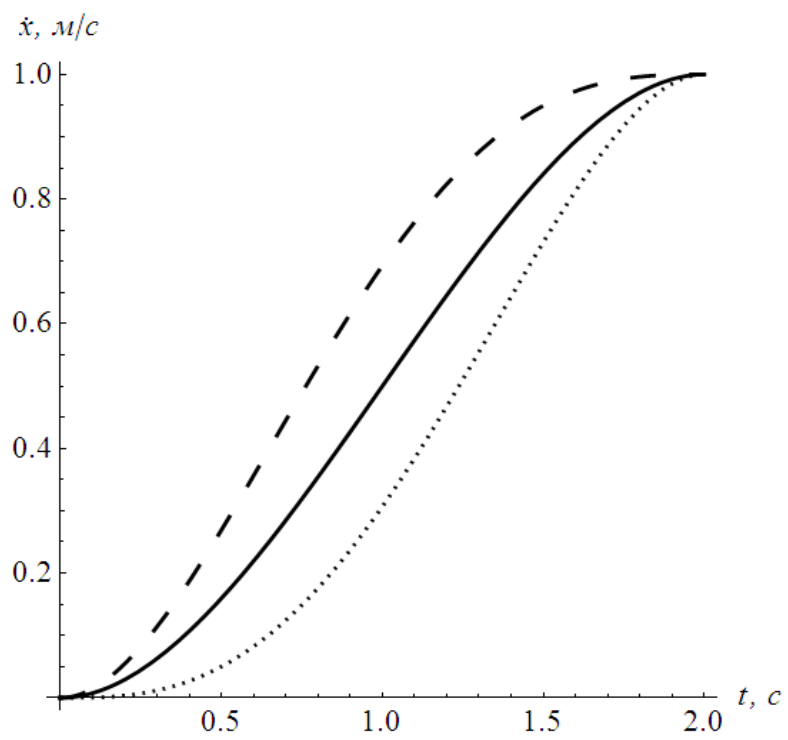
Підставивши даний вираз у розв'язок крайової задачі (4.97), (4.100), отримаємо екстремаль:

$$x = \frac{v(2 - 2e^{kt} - 2e^{k(t_1-t)} + kt(2 + kt) + e^{kt_1}(2 + kt(kt - v)))}{2k(2 + kt_1 + e^{kt_1}(kt_1 - 2))}. \quad (4.103)$$

Для знайдених законів руху динамічної системи побудовано графіки (рис. 4.12, 4.13). На рис. 4.12, 4.13 дрібна штриховка показує кінематичні функції розв'язку крайової задачі (4.97), (4.98); груба штриховка – крайової задачі (4.97), (4.99), суцільна лінія – екстремалі (4.103).

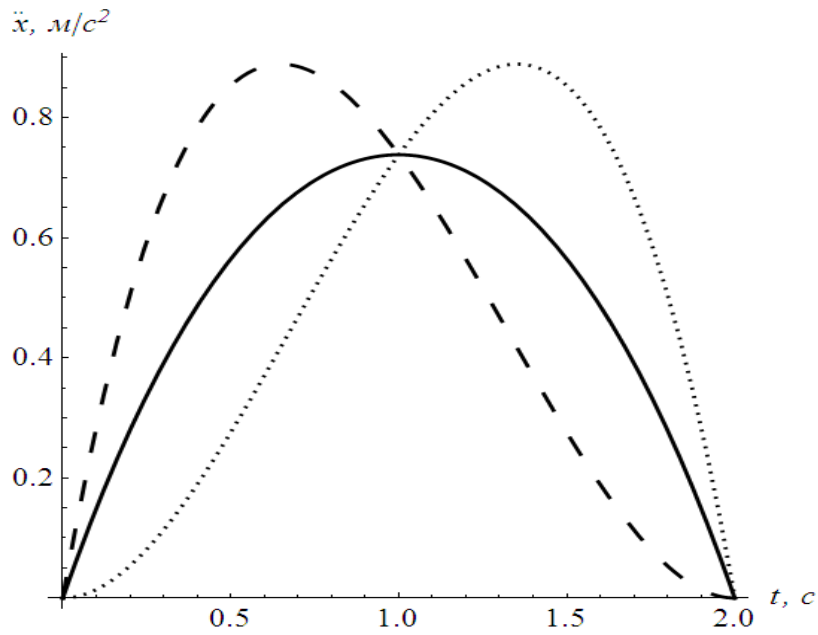


a)

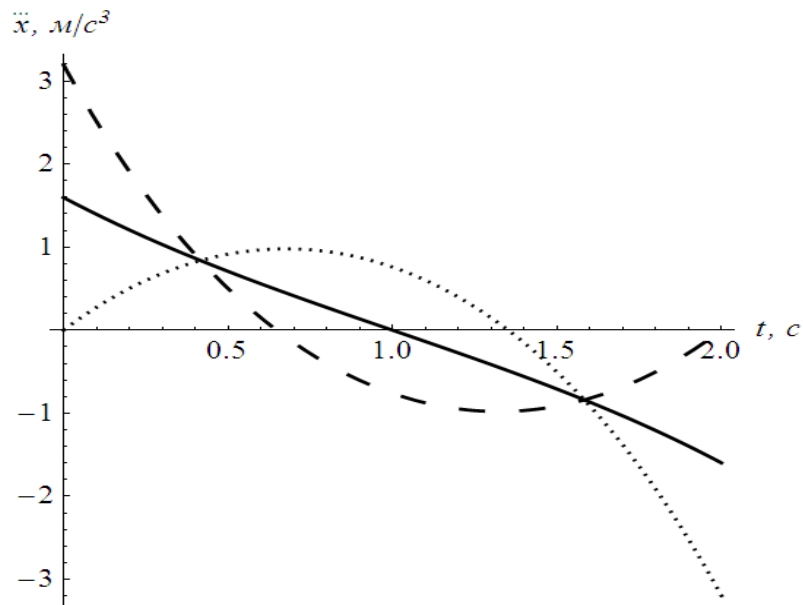


б)

Рис. 4.12. Графіки функцій переміщення (а) та швидкості (б) динамічної системи



а)



б)

Рис. 4.13. Графіки функцій прискорення (а) та ривка (б) динамічної системи

Порівняємо значення функціоналів отриманих при розв'язанні варіаційної задачі (4.96) при різних крайових умовах. Для цього побудуємо графіки функціоналів як функцій тривалості розгону динамічної системи (рис. 4.14). На рис. 4.14 штриховою лінією показано графік функціонала як функції тривалості руху системи для несиметричних крайових умов, а суцільною – для симетричних. Як і в попередній задачі постановка

несиметричних крайових умов приводить до того, що значення функціонала однакові. Із приведених графіків видно, що розв'язання варіаційної задачі при симетричних крайових умовах дає менше значення функціоналу. Однак при збільшенні тривалості руху системи різниця між значеннями функціоналів майже зникає. Проаналізуємо отримані результати шляхом визначення додаткових показників якості руху динамічної системи. Для цього усі показники занесемо у таблицю 4.2.

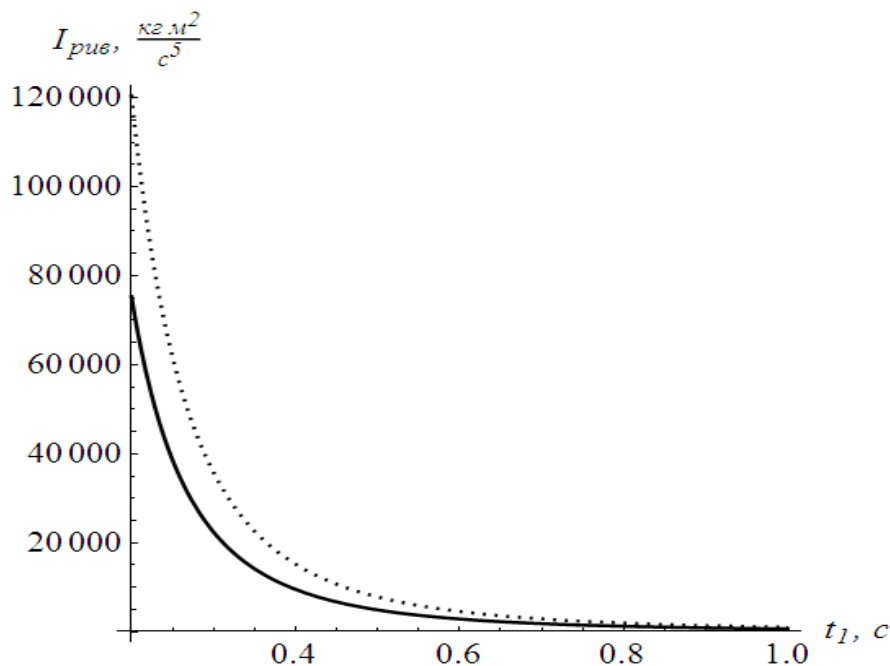


Рис. 4.14 Графіки функціонала (4.96) при несиметричних (4.98) і (4.99) при симетричних (4.100) крайових умовах

Таблиця 4.2. Значення показників якості руху динамічної системи для розв'язків крайових задач (4.97), (4.98); (4.97), (4.99) та екстремалі (4.103)

Значення показників	Оптимальний режим руху		
	Розв'язок крайової задачі (4.97), (4.98)	Розв'язок крайової задачі (4.97), (4.99)	Екстремаль (4.103)
1	2	3	4
$x(t_1)$	$2e^{kt_1} t_1 v ((kt_1)^2 - 12 + 2 \times (6 + (kt_1)^2) \cosh(kt_1) - 9kt_1 \sinh(kt_1)) (3C^2)^{-1}$	$2e^{kt_1} kt_1^2 v (kt_1 (2 + \cosh(kt_1) - 3 \times \sinh(kt_1))) (3C^2)^{-1}$	s (вираз 4.102)

Продовження табл. 4.2.

1	2	3	4
$\ddot{x}(0)$	0	0	0
$\ddot{x}(t_1)$	0	0	0
\ddot{x}_{\max}	$2(e^{kt_1} - 1)kv(kt_1 - \lg e^{kt_1})C^{-2}$ при $t = \frac{\lg e^{kt_1}}{k}$	$2(e^{kt_1} - 1)kv(kt_1 - \lg e^{kt_1})C^{-2}$ при $t = t_1 - \frac{\lg e^{kt_1}}{k}$	$kv(e^{\frac{kt_1}{2}} - 1)^2 C^{-1}$ при $t = \frac{t_1}{2}$
$\ddot{x}(0)$	$2k^2v(e^{kt_1} - 1)^2 C^{-1}$	0	$k^2v(e^{kt_1} - 1)^2 C^{-1}$
$\ddot{x}(t_1)$	0	$-2k^2v(e^{kt_1} - 1)^2 C^{-1}$	$-k^2v(e^{kt_1} - 1)^2 C^{-1}$

Важливим питанням оптимізації режимів руху динамічної системи є питання встановлення того, чи функціонали (4.82) та (4.96) можуть бути мінімізовані. Оскільки рівняння Ейлера-Пуассона (4.87) та (4.97) є необхідними умовами перетворення у нуль перших варіацій функціоналів (4.82) та (4.96) відповідно, то їх розв'язки не обов'язково перетворюють їх мінімуми. Для встановлення типу екстремумів функціоналів (4.82) та (4.96) використаємо умову Лежандра [1]. Згідно із цією умовою для того, щоб був можливий мінімум інтегрального функціоналу необхідне виконання умови:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^n} \geq 0, \quad (4.104)$$

де P - підінтегральна функція функціоналу; n - найвищий порядок похідної у виразі P . Для функціоналів (4.82) та (4.96) маємо:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \ddot{x}^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \ddot{x}^2} = m > 0. \quad (4.105)$$

Для обох інтегралів виконується посилена умова Лежандра. Це означає, що на екстремалях можуть досягатись мінімуми відповідних критеріїв.

Висновки до четвертого розділу

1. Використання методів оптимального керування (динамічне програмування та принцип максимуму) дозволяє знайти оптимальне керування динамічною системою у вигляді зворотного зв'язку. Використання лише одного із цих методів не дає бажаного результату: принцип максимуму встановлює „якісну” картину оптимального керування, а динамічне програмування – „кількісну” і лише поєднання цих методів дає бажаний результат. У даній роботі встановлено зв'язки між методами динамічного програмування, принципу максимуму та варіаційним численням.
2. На основі аналізу вимог до руху динамічних систем та приводних механізмів динамічних систем обґрунтовано оптимізаційний критерій якості перехідного процесу руху системи. За допомогою методу динамічного програмування знайдено оптимальну функцію керування рухом динамічної системи у вигляді зворотного зв'язку. Розв'язування нелінійного однорідного диференціального рівняння у частинних похідних Беллмана, яке є необхідною умовою мінімуму функціоналу, виконувалось за допомогою методу Гальоркіна. Зазначимо, що знаходження невідомих коефіцієнтів можна зробити іншим методом, використаним у роботі [8]. Результати розрахунків за обома методами однакові. Аналіз оптимальної функції $u = u(x_2, x_1, x_0)$ дає змогу встановити, що динамічна напруженість перехідного процесу буде невеликою, оскільки є змога мінімізувати початкове керування. Математично це означає мінімізацію термінального функціоналу $u^2(0) \rightarrow \min$, абсолютний мінімум якого, очевидно, є нулем. Вказані перспективи подальших досліджень, які полягають у розробці алгоритму зміни вагового коефіцієнту k_4 який стоїть при функції u у підінтегральному виразі критерію оптимізації. Такий вибір коефіцієнту дозволить інтенсифікувати перехідний процес та забезпечить виконання обмежень накладених на керування $|u| \leq u_{\max}$.

3. Синтезовано оптимальний ПД-регулятор, здатний забезпечити додаткові вимоги до руху динамічної одномасової системи: нульові значення початкового керування та його першої похідної за часом. Отримані результати можуть бути використані для налаштування коефіцієнтів підсилення відповідних складових похибки задання у системах автоматичного регулювання, які використовуються для динамічних систем, що описуються диференціальними рівняннями другого порядку.
4. Для оптимізації руху одномасової динамічної системи (механізму вантажопідійомної машини) із врахуванням обмежень інтегрального типу використано варіаційне числення, оскільки при цьому задача на умовний екстремум квадратичного функціоналу зводиться до розв'язування крайової задачі. Величина множника Лагранжа визначається із трансцендентного рівняння за допомогою чисельного методу простих ітерацій, що не дає універсального результату. Крім того, значення невідомого множника Лагранжа можна визначити із умови неперевищення максимально допустимого прискорення динамічної системи.
5. Розв'язано дві оптимізаційні задачі мінімізації „енергії” прискорень та ривків динамічної одномасової системи із врахуванням сили опору технологічного характеру. Сила опору моделюється у вигляді лінійної функції від швидкості руху механізму. Задачі розв'язуються методом варіаційного числення при симетричних та несиметричних крайових умовах. Для отриманих законів руху динамічної системи знайдені додаткові показники якості перехідного процесу. Крім того, показано, що постановка симетричних крайових умов дає змогу отримати такі закони руху системи, на яких інтегральні критерії набувають менших значень, ніж при законах, отриманих завдяки використанню несиметричних крайових умов.

Література до четвертого розділу

1. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю.П. Петров. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.
2. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтнянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.
3. Беллман Р. Динамическое программирование. – под. ред. Воробьева Н.Н. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.
4. Красовский И.И. Теория управления движением (линейные системы). / И.И. Красовский. - М.: Наука, 1968. - 476 с.
5. Кротов В.Ф. Методы и задачи оптимального управления / В.Ф. Кротов, В.И. Гурман. – М.: Наука, 1973. – 389 с.
6. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления / Р.П. Федоренко. – М.: Наука, 1978. – 488 с.
7. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Вычислительные и приближенные методы оптимального управления // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ., № 14, ВИНТИ. - М., 1977, 101–166.
8. Ловейкін В.С. Синтез С- та П-керування рухом механічних систем // Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О. Електронний ресурс: http://www.nbu.gov.ua/portal/chem_biol/nvnau/2010_144_4/10ryo.pdf.
9. Подобед Н.Е. Математическое моделирование ветровых нагрузок на механизмы передвижения порталных кранов с прямой стрелой // Подобед Н.Е., Подобед В.А., Меньшиков В.И. Вестник МГТУ, Том 12, №1, 2009. – 27-33 С.
10. Ключев В.И. Ограничение динамических нагрузок электропривода / В.И. Ключев. - М.: Энергия, 1971. – 320 с.
11. Ключев В.И. Теория электропривода / В.И. Ключев. - М.: Энергоатомиздат, 2001. – 704 с.

12. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина / К. Флетчер. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
13. Корн Г. Справочник по высшей математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
14. Ловейкин В. С. Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин / Ловейкин В. С. – К.: УМК ВО, 1990. – 168 с.
15. Моделювання динаміки механізмів вантажопідйомних машин / [Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Пастушенко С.І.]. – К.-Миколаїв: РВВ МДАУ, 2004. – 286 с.
16. Черноусько Ф.Л. Вариационные задачи механики и управления / Ф.Л. Черноусько, Б.В. Баничук. - М.: Наука, 1973. – 236 с.
17. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления и регулирования / А.А. Воронов, В.К. Титов, Б.Н. Новоградов. - М.: Высшая школа, 1977. – 519 с.
18. Летов А.М. Математическая теория процессов управления / А.М. Летов. -М.: Наука, 1981. – 255 с.
19. Ловейкін В.С. Критерії оцінки режимів руху механізмів і машин / Ловейкін В.С. // Механізація сільськогосподарського машинобудування. Збірник наукових праць Національного аграрного університету. – 1998. – С. 8-12.

РОЗДІЛ 5
ОПТИМІЗАЦІЯ ПЕРЕХІДНИХ РЕЖИМІВ РУХУ
ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МЕХАНІЗМІВ, ПРЕДСТАВЛЕНИХ
ДВОМАСОВОЮ ДИНАМІЧНОЮ МОДЕЛЛЮ

5.1. Синтез оптимального керування рухом кранового візка

Вантажопідйомні крани значну долю від усього циклу роботи працюють при неусталених режимах роботи (пуск, зупинка, реверс). Усталений режим руху крана взагалі може бути відсутнім. Тому динамічні процеси, які виникають протягом перехідних режимів руху кранових механізмів, визначають умови роботи крана. Крім того, перехідні процеси необхідно враховувати при визначенні енергетичних показників роботи крана. Що стосується надійності роботи крана, його продуктивності та зручності експлуатації то ці важливі показники залежать від коливань вантажу, закріпленого на гнучкому підвісі. Ці коливання виникають протягом перехідних режимів руху крана, продовжуються на усталеному русі і після зупинки вантажного візка.

Основна тенденція розвитку сучасних систем керування рухом крана – перехід на інтелектуальне комп’ютерне керування (мехатронізація крана [1]). Високоінтелектуальні системи керування краном вирішують задачу усунення коливань вантажу, але роблять це не за оптимальними принципами. Дійсно, якщо відома математична модель руху крана [2, 3], то завжди можна обрати закон руху візка (або функцію зміни приводного зусилля), при якому коливання вантажу зникають до кінця зупинки візка [4]. Таких законів керування рухом крана можна знайти безліч. Однак, нас цікавить такий закон, при якому енергетичні та динамічні показники роботи крана будуть якнайкращими. Така постановка задачі властива теорії оптимального керування. Використовуючи методи оптимального керування можна синтезувати функцію зміни приводного зусилля (одну з безлічі можливих

варіантів) при якому досягаються якнайкращі, з деяких позицій, характеристики роботи крана. Ці характеристики визначаються оптимізаційним критерієм, у якості якого обирають інтегральний (рідше термінальний) функціонал, який повинен відображати бажані або небажані характеристики руху крана. У першому випадку критерій необхідно максимізувати, у другому – мінімізувати.

Зазначимо, що оптимізація керування зовсім не означає відмову від сучасних інтелектуальних систем керування краном. У системах керування краном (бортовий мікроконтролер) оптимальні закони його руху повинні бути „зашиті”, а система керування повинна сама вирішувати в яких ситуаціях їх використовувати.

У праці [5] зазначається, що досвідчені кранівники коливання вантажу гасять протягом гальмування візка. Очевидно, при цьому економиться час, оскільки тривалість розгону може бути якнайменшою (розгін візка при максимальному керуючому зусиллі). Надалі візок рухається при швидкості близькій до номінальної (вантаж при цьому коливається і візок розганяється або гальмується від цих коливань). Однак руху візка на цьому етапі може взагалі не бути (після розгону візка одразу йде його гальмування). Отже, фазовий стан системи „візок-вантаж” на початку гальмування візка може бути яким завгодно. Варто також прийняти до уваги те, що на рух візка і вантажу можуть справляти вплив наперед непередбачувані фактори (вітрове навантаження особливо при значній парусності вантажу), а також неточності моделі руху (не прийняте у розрахунок різного роду тертя, неточно визначені параметри моделі візка з вантажем тощо). Тому необхідно синтезувати таке керування, яке б враховувало фактичний стан системи.

Існують три групи способів усунення коливань вантажу [6]: маневрування механізмами при ручному керуванні [7]; застосування спеціальних підвісок або направляючих [8-12]; використання систем керування приводами кранових механізмів [5-10].

Перші два способи при сучасних темпах перевантажувальних робіт не здатні забезпечити достатню якість усунення коливань вантажу: перший спосіб пов'язаний з надмірною психологічною втомою кранівника, другий – з необхідністю зміни конструкції гнучкого підвісу, включенням до цієї конструкції ненадійних та масивних елементів. Тому більш поширеною є третя група способів.

Апаратна реалізація систем керування рухом крана досягається за допомогою сучасних промислових мікропроцесорів та електронного силового обладнання (частотні перетворювачі [11]). Що стосується алгоритмів роботи систем керування, то вони повинні містити оптимальні закони руху крана. Робота алгоритму повинна базуватись на „склеюванні” різних оптимальних законів руху візка у відповідності до вимог того чи іншого етапу руху. Наприклад, розгін повинен проходити якнайшвидше (критерій оптимізації – час), усталений рух повинен проходити при мінімальних енергетичних витратах (критерій оптимальності енергія·час), гальмування повинно проходити з усуненням коливань вантажу і при мінімізації динамічної складової приводного зусилля. Для кожного етапу руху необхідно сформулювати свій критерій оптимальності, що взагалі кажучи, є дуже важливим моментом, але це не є предметом даного дослідження (важливі результати щодо питання розробки оптимізаційних критеріїв для різних режимів роботи вантажопідійомних машин можна знайти у роботі [12]).

На сьогоднішній день математична теорія оптимальних процесів є добре розробленою галуззю науки, яка має надзвичайно важливі прикладні питання (рух літальних апаратів [13], робота верстатів [14] тощо). Виділяються три основні методи, які дають змогу формалізувати та розв'язати оптимізаційну задачу. Це варіаційні методи [15], принцип максимуму Л.С. Понтрягіна [16] та динамічне програмування Р. Беллмана [17]. Зазначимо, що для проблеми усунення коливань вантажу знайшли використання класичні варіаційні методи [12], прямі варіаційні методи [18]

та принцип максимуму [5, 6, 9, 10, 19-22]. Дано короткий аналіз результатів, які отримані при використанні вказаних методів.

Використання варіаційних методів дозволяє отримати плавний характер керуючої дії на візок. При цьому динамічні навантаження у перехідних процесах не є значними. Однак таке керування у деяких випадках (наприклад, при значній довжині гнучкого підвісу) супроводжується відносно значною тривалістю. Що стосується обмежень, які накладені на керування, то вони можуть бути виконані лише при збільшенні тривалості перехідних процесів. Затягування перехідних процесів руху крана є небажаним. Тому для задачі усунення коливань вантажу був використаний принцип максимуму, який дав змогу знайти оптимальне за швидкодією керування. Таке керування має релейний характер зміни, що для приводу крана є небажаним, оскільки воно супроводжується знаними струмовими навантаженнями електрообладнання крана та динамічними навантаженнями механічних частин крана. Релейне керування досить важко реалізувати на практиці, оскільки необхідно підтримувати постійним і максимальним значення моменту на валу двигуна. Крім того, не враховується характер електромагнітних перехідних процесів у електроприводі крана. У праці [19] наведено результати експерименту при якому сігнум-функція керування апроксимована неперервною функцією. Така апроксимація зусилля, що діє на візок, зменшує динамічні навантаження у елементах крана, але приводить до того, що коливання вантажу гасяться не повністю.

Для усунення коливань вантажу були застосовані прямі варіаційні методи, які характеризуються плавністю роботи механізмів крана (причому розглядається двомасова модель „візок-вантаж” та тримасова модель „візок-траверса-вантаж”). Ці дослідження дали змогу синтезувати закони руху кранового візка, які неможливо було отримати з використання класичних варіаційних методів. Однак, деякі з цих результатів є неприйнятними для практики.

Отже проблема оптимальних законів керування для руху кранового візка з вантажем – це забезпечення швидкодії з одночасним зменшенням динамічних навантажень на елементи крана. Крім того, усі проаналізовані вище результати мають спільний недолік – вони ніяк не враховують фактичний стан системи „візок-вантаж”. Будь-який зовнішній стохастичний вплив призведе до „зриву” оптимальної траєкторії руху візка або вантажу і коливання вантажу після зупинки візка будуть залишатись. Якщо ж ввести у систему керування зворотній зв’язок за фактичними її параметрами, то при дії на візок або вантаж зовнішніх непередбачуваних впливах система відреагує: вона буде намагатись повернути рух візка до початкової, наперед заданої траєкторії. Така корекція керування, як зазначається у роботі [17], є вже не оптимальною.

Для проведення досліджень прийнято двомасову модель механізму пересування кранового візка (рис. 5.1), яка досить широко використовується у задачах дослідження динаміки руху візка [2, 3] та оптимізації його руху [5-10, 12, 18-22].

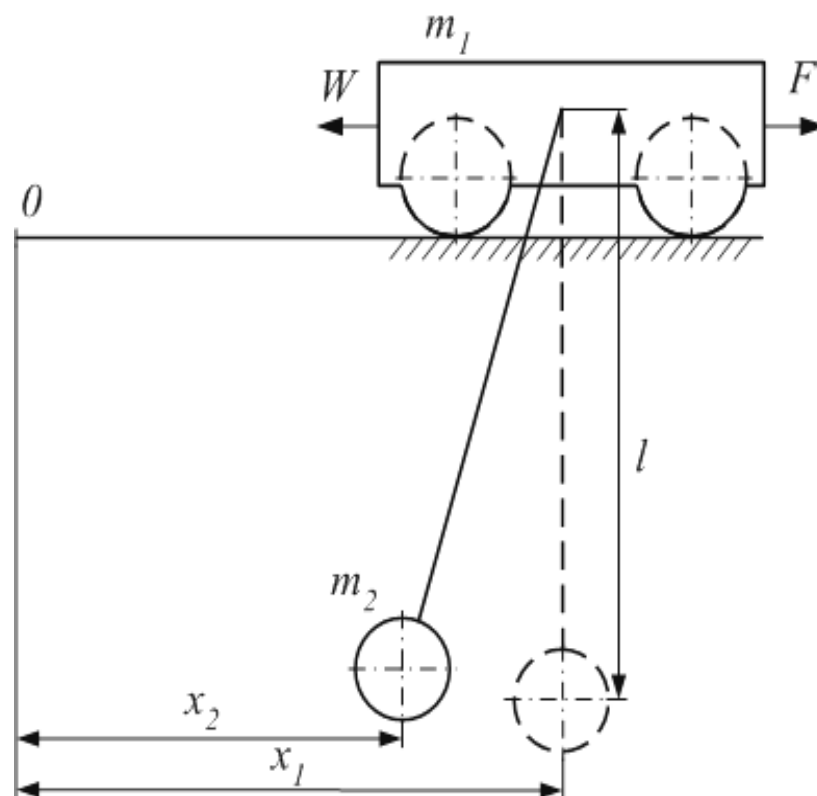


Рис. 5.1. Розрахункова модель системи „візок-вантаж”

Динаміка руху представлених на рис. 5.2 вантажопідійомних кранів може бути змодельована за допомогою динамічної моделі показаної на рис. 5.1.

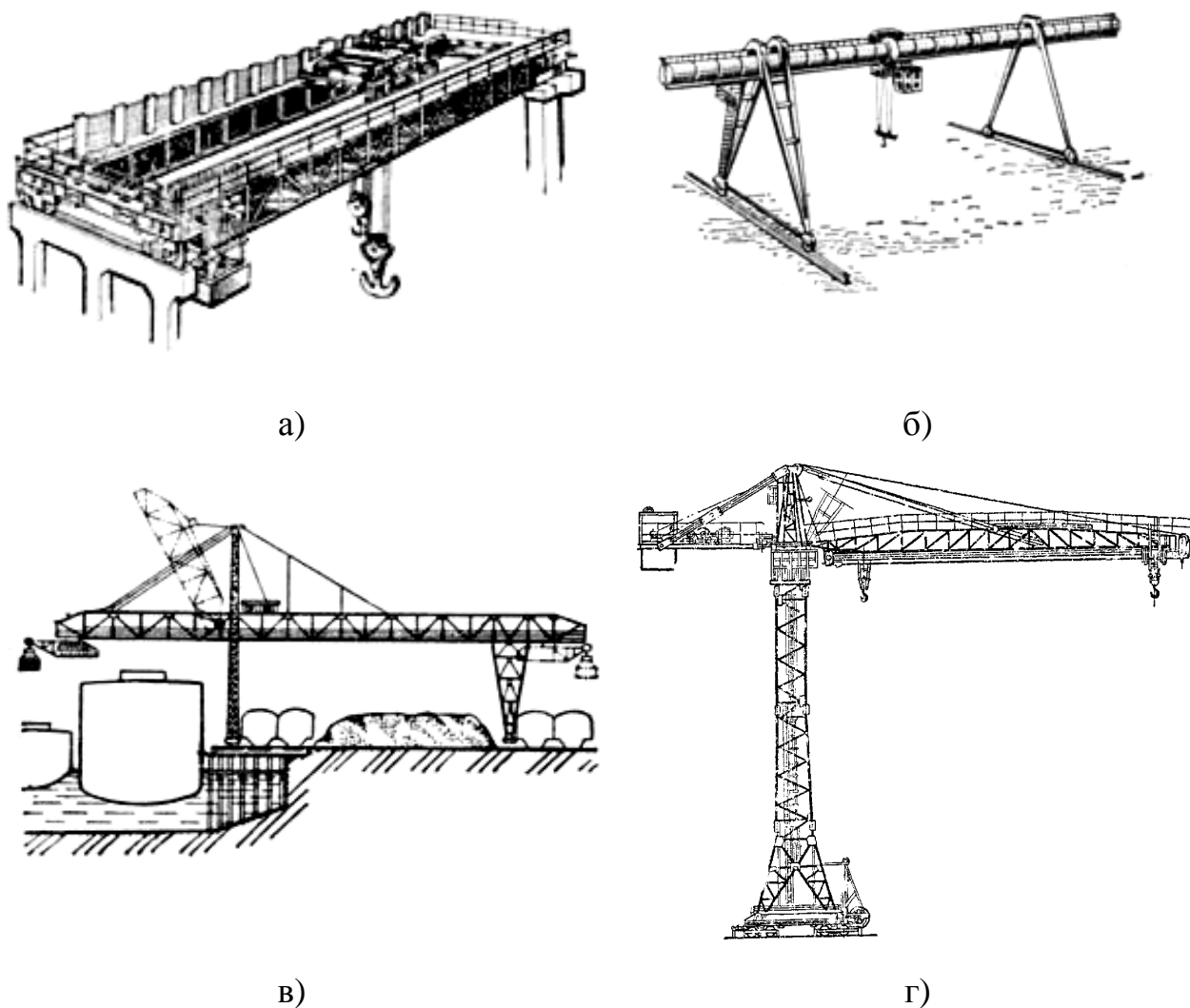


Рис. 5.2. Вантажопідійомні крани: мостовий двоблочний кран (а), козловий кран полегшеного типу (б), козловий кран спеціальної конструкції для розвантажування кораблів і обслуговування складів (в), баштовий кран (г)

Приведена розрахункова схема (рис. 5.1) описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = F - W \operatorname{sign} \dot{x}_1; \\ \ddot{x}_2 + \frac{g}{l} (x_2 - x_1) = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

де m_1 – приведена маса приводного механізму і вантажного візка; m_2 – маса вантажу; x_1, x_2 – координати центрів мас відповідно візка і вантажу; g – прискорення вільного падіння; l – довжина гнучкого підвісу, F – сумарне тягове або гальмівне зусилля, що діє на візок; W – приведена сила опору переміщенню візка.

Будемо вважати, що при переміщенні візка протягом гальмування візок не змінює свою швидкість, тобто $\text{sign}\dot{x}_1 = 1$.

Для усунення коливань вантажу необхідно забезпечити такі умови:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(T) = 0; \\ x_1(T) - x_2(T) = 0; \\ \dot{x}_1(T) - \dot{x}_2(T) = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

де $x_1(T)$ і $x_2(T)$ - координати центрів мас відповідно візка і вантажу момент часу T ; $\dot{x}_1(T)$ і $\dot{x}_2(T)$ - швидкість візка і вантажу відповідно у момент часу T ; T – момент закінчення гальмування (T не є фіксованим).

Перше рівняння системи (5.2) встановлює зупинку візка у момент закінчення гальмування, а інші два – усунення коливань вантажу, оскільки енергія коливань буде рівною нулю (енергія коливань дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергії. Кінетична енергія коливань пропорційна квадрату різниці $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$, а потенціальна – квадрату різниці $x_1 - x_2$). З другого рівняння системи (5.1) знайдемо:

$$\dot{x}_1(T) = \dot{x}_2(T) + \Delta\dot{x}(T), \quad (5.3)$$

де через $\Delta\dot{x}(T)$ позначено $\frac{l}{g}\ddot{x}_2(T)$. Оскільки згідно з (5.2) $\Delta\dot{x}(T) = 0$, то умову

(5.3) можна переписати таким чином:

$$\dot{x}_2(T) = 0. \quad (5.4)$$

Введемо позначення: $y_0 = \frac{l}{g} \dot{x}_2$, $u = \frac{F - W}{m_1}$, тоді систему рівнянь (5.1)

можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1; \\ \dot{y}_1 = y_2; \\ \dot{y}_2 = u - \omega^2 y_1, \end{cases} \quad (5.5)$$

де $\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l}}$ – частота власних маятникових коливань вантажу

відносно рухомої точки підвісу (відносно візка).

На керування накладаються обмеження у вигляді нерівності:

$$|u| \leq u_{\max} = \frac{F_{\max} - W}{m_1}, \quad (5.6)$$

де F_{\max} - максимальне зусилля приводу візка, яке відповідає максимальному моменту на валу двигуна.

Зазначимо, що отримана система рівнянь (5.5) має на одне рівняння менше ніж ті, які використовувались дослідниками такої ж задачі [21]. Таке зменшення кількості фазових координат системи дає змогу отримати аналітичний розв'язок задачі, причому сам процес розв'язування не є досить складним. Для отриманої системи рівнянь запишемо кінцеві умови руху системи „візок-вантаж”:

$$y_0(T) = y_1(T) = y_2(T) = 0. \quad (5.7)$$

Початкові умови визначаються значеннями фазових координат на початку гальмування візка з вантажем:

$$\begin{cases} y_0(0) = \frac{l}{g} \dot{x}_2(0); \\ y_1(0) = \frac{l}{g} \ddot{x}_2(0); \\ y_2(0) = \frac{l}{g} \ddot{\ddot{x}}_2(0). \end{cases} \quad (5.8)$$

У якості критерію, який потребує мінімізації, оберемо інтегральний функціонал:

$$I = \int_0^T [\delta_0 y_0^2 + \delta_1 y_1^2 + \delta_2 y_2^2 + (1 - \delta_0 - \delta_1 - \delta_2) u^2] dt, \quad (5.9)$$

де $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ - деякі коефіцієнти. Пояснимо чому саме такий критерій обрано. Одиничний критерій y_0^2 відображає кінетичну енергію руху вантажу, який коливається. Зазначимо, що природніше було б обрати інший критерій, який би відображав кінетичну енергію руху візка, але при цьому інтегральний критерій став би нелінійним, що значно ускладнює розв'язування задачі. Сума критеріїв y_1^2 та y_2^2 (квадрати відхилення координат центрів мас візка і вантажу, а також квадрат різниці їх швидкостей) з відповідними коефіцієнтами характеризують енергію коливань вантажу. Крім того, у критерії (5.9) також враховані втрати на керування системою. Необхідно також сказати про те, що величини, які входять у критерій (5.9) мають різний фізичний зміст. Тому їх необхідно приводити до одної розмірності або до безрозмірної величини. У подальшому будемо вважати, що цю функцію виконують коефіцієнти δ_i ($i=1, 2, 3$). Це означає, що коефіцієнти δ_i ($i=1, 2, 3$) представляються у вигляді добутку двох величин:

$$\delta_i = k_i \tilde{I}_i, \quad (5.10)$$

де k_i - ваговий коефіцієнт, який відображає важливість i -того одиничного критерію з виразу (5.9); \tilde{l}_i - деякий коефіцієнт, який приводить розмірність одиничного критерію, наприклад, до безрозмірного вигляду (це може бути мінімально можливе значення i -того критерію). Для скорочення записів введемо позначення: $\delta_u = 1 - \delta_0 - \delta_1 - \delta_2$.

Для розв'язування цієї задачі використаємо метод динамічного програмування [17]. Основне функціональне рівняння запишеться таким чином:

$$\min[\delta_0 y_0^2 + \delta_1 y_1^2 + \delta_2 y_2^2 + \delta_u u^2 + \frac{\partial S}{\partial y_0} y_1 + \frac{\partial S}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial S}{\partial y_2} (u - \omega^2 y_1)] = 0 \quad (5.11)$$

де S - функція Беллмана.

Будемо вважати, що на керування u не накладено обмежень (5.6). Це дасть змогу знайти аналітичний розв'язок задачі. Однак у подальшому ми врахуємо нерівність (5.6).

Мінімум лівої частини рівняння (5.11) будемо шукати по параметру керування u для чого продиференціюємо її за u та прирівняємо отримане до нуля:

$$2\delta_u u + \frac{\partial S}{\partial y_2} = 0. \quad (5.12)$$

Знайдемо з рівняння (5.12) керування u :

$$u = -\frac{1}{2\delta_u} \frac{\partial S}{\partial y_2}. \quad (5.13)$$

Підставимо отримане у рівняння (5.11), в результаті чого будемо мати:

$$\delta_0 y_0^2 - \frac{1}{4\delta_u} \left(\frac{\partial S}{\partial y_2}\right)^2 + y_2 \left(\frac{\partial S}{\partial y_1} + y_2 \delta_2\right) + y_1 \left(\frac{\partial S}{\partial y_0} + y_1 \delta_1 - \frac{\partial S}{\partial y_2} \omega^2\right) = 0. \quad (5.14)$$

Рівняння (5.14) є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Будемо шукати його розв'язок у вигляді квадратичної форми, як це прийнято при розв'язуванні подібних задач [23]:

$$S = A_1 y_0^2 + A_2 y_1^2 + A_3 y_2^2 + A_4 y_0 y_1 + A_5 y_0 y_2 + A_6 y_1 y_2, \quad (5.15)$$

де $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ - постійні коефіцієнти, які необхідно визначити.

Візьмемо частинні похідні з виразу (5.15) за параметрами y_0, y_1 та y_2 :

$$\frac{\partial S}{\partial y_0} = 2A_1 y_0 + A_4 y_1 + A_5 y_2; \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = A_4 y_0 + 2A_2 y_1 + A_6 y_2; \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_2} = A_5 y_0 + A_6 y_1 + 2A_3 y_2. \quad (5.18)$$

Підставимо вирази (5.16-5.18) у рівняння (5.14), отримаємо:

$$\begin{aligned} & \delta_0 y_0^2 - \frac{1}{4\delta_u} (A_5 y_0 + A_6 y_1 + 2A_3 y_2)^2 + y_2 (A_4 y_0 + 2A_2 y_1 + A_6 y_2 + y_2 \delta_2) + \\ & + y_1 (2A_1 y_0 + A_4 y_1 + A_5 y_2 + y_1 \delta_1 - A_5 y_0 + A_6 y_1 + 2A_3 y_2 \omega^2) = 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Розкриємо квадрати та винесемо за дужки спільні множники. У результаті перетворень рівняння (5.19) будемо мати:

$$\begin{aligned} & y_0^2 (\delta_0 - \frac{A_5^2}{4\delta_u}) + y_1^2 (A_4 - A_6 \omega^2 - \frac{A_6^2}{4\delta_u} + \delta_1) + y_2^2 (A_6 + \delta_2 - \frac{A_3^2}{\delta_u}) + y_0 y_1 \times \\ & \times (2A_1 - \frac{A_6 A_5}{2\delta_u} - A_5 \omega^2) + y_0 y_2 (A_4 - \frac{A_3 A_5}{2\delta_u}) + y_1 y_2 (2A_2 + A_5 - \frac{A_3 A_6}{2\delta_u} - A_3 \omega^2) = 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Рівняння (5.20) буде справедливим у тому випадку, коли вирази у дужках будуть рівні нулю, оскільки $y_0 \neq 0, y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$ одночасно. Тому рівняння (5.20) можна замінити на систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_0 - \frac{A_5^2}{4\delta_u} = 0; \\ A_4 - A_6\omega^2 - \frac{A_6^2}{4\delta_u} + \delta_1 = 0; \\ A_6 + \delta_2 - \frac{A_3^2}{\delta_u} = 0; \\ 2A_1 - \frac{A_6A_5}{2\delta_u} - A_5\omega^2 = 0; \\ A_4 - \frac{A_3A_5}{2\delta_u} = 0; \\ 2A_2 + A_5 - \frac{A_3A_6}{2\delta_u} - A_3\omega^2 = 0. \end{array} \right. \quad (5.21)$$

Використовуючи рівняння (5.13) та (5.18), запишемо:

$$u = -\frac{A_5y_0 + A_6y_1 + 2A_3y_2}{2\delta_u}. \quad (5.22)$$

Отже нас цікавлять лише три коефіцієнта A_3 , A_5 , A_6 . Для їх знаходження перейдемо до іншої системи з трьох рівнянь, яку можна отримати з системи (5.21), зробивши деякі перетворення:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_0 - \frac{A_5^2}{4\delta_u} = 0; \\ A_6 + \delta_2 - \frac{A_3^2}{\delta_u} = 0; \\ \frac{A_3A_5}{\delta_u} - A_6\omega^2 - \frac{A_6^2}{4\delta_u} + \delta_1 = 0. \end{array} \right. \quad (5.23)$$

Систему рівнянь (5.24) можна звести до одного алгебраїчного рівняння четвертої степені відносно A_3 :

$$B_1A_3^4 + B_2A_3^2 + B_3A_3 + B_4 = 0, \quad (5.24)$$

де $B_1 = -\frac{1}{4\delta_u^3}$, $B_2 = -\frac{\delta_2}{2\delta_u^2} - \frac{\omega^2}{\delta_u}$, $B_3 = \pm \frac{2\delta_0}{\sqrt{\delta_0\delta_u}}$ (знак „+” відноситься до випадку,

коли $A_5 = 2\sqrt{\delta_u\delta_0}$, а знак „-” до випадку, коли $A_5 = -2\sqrt{\delta_u\delta_0}$), $B_4 = \delta_1 + \delta_2\omega^2 - \frac{\delta_2^2}{4\delta_u}$.

За допомогою методу Декарта-Ейлера [24] отримали корені рівняння (5.24) – їх чотири. Оскільки вони значні за об’ємом то приведемо лише їх умовні позначення: $A_{3(j)}$ ($j=1, 2, 3, 4$). Тепер можемо записати розв’язки системи рівнянь (5.23), яких буде вісім:

$$1. A_5 = 2\sqrt{\delta_u\delta_0}, A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}, A_{3(1)};$$

$$2. A_5 = 2\sqrt{\delta_u\delta_0}, A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}, A_{3(2)};$$

$$3. A_5 = 2\sqrt{\delta_u\delta_0}, A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}, A_{3(3)};$$

$$4. A_5 = 2\sqrt{\delta_u\delta_0}, A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}, A_{3(4)};$$

$$5. A_5 = -2\sqrt{\delta_u\delta_0}, A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}, A_{3(1)};$$

$$6. A_5 = -2\sqrt{\delta_u\delta_0}, A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}, A_{3(2)};$$

$$7. A_5 = -2\sqrt{\delta_u\delta_0}, A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}, A_{3(3)};$$

$$8. A_5 = -2\sqrt{\delta_u\delta_0}, A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}, A_{3(4)}.$$

Необхідно з цих восьми розв’язків обрати один. Для цього необхідно їх проаналізувати шляхом підстановки „реальних” значень параметрів руху візка з вантажем та значень вагових коефіцієнтів. Такий аналіз дає змогу встановити, що в усіх розв’язках, окрім випадків 2 і 7, присутні комплексні числа, що не дає змоги реалізувати таке керування. Отже необхідно з двох розв’язків обрати один. Для цього необхідно розв’язати систему

диференціальних рівнянь при відомих керуваннях для випадків 2 і 7. Надалі необхідно проаналізувати як змінюються фазові координати у часі.

Систему диференціальних рівнянь (5.1) можна привести до одного диференціального рівняння четвертого порядку відносно невідомої функції переміщення вантажу $x_2(t)$:

$$x_2^{IV} + \omega^2 \ddot{x}_2 = u \omega_0^2, \quad (5.25)$$

де ω_0 - частота коливань вантажу відносно нерухомої точки підвісу, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Неоднорідне диференціальне рівняння (5.25) можна перетворити у однорідне. Справді, керування (5.22) залежить від фазових координат системи, які, як вже зазначалося, пропорційні кінематичним функціям руху вантажу: $y_0 = \frac{l}{g} \dot{x}_2$, $y_1 = \frac{l}{g} \ddot{x}_2$, $y_2 = \frac{l}{g} \ddot{\ddot{x}}_2$ або $y_0 = \dot{x}_2 \omega_0^{-2}$, $y_1 = \ddot{x}_2 \omega_0^{-2}$, $y_2 = \ddot{\ddot{x}}_2 \omega_0^{-2}$. Тоді праву частину рівняння (5.25) можна записати таким чином:

$$u \omega_0^2 = - \frac{A_5 \dot{x}_2 + A_6 \ddot{x}_2 + 2A_3 \ddot{\ddot{x}}_2}{2\delta_u}. \quad (5.26)$$

Зробивши відповідні перетворення можемо записати однорідне диференціальне рівняння, яке еквівалентне рівнянню (5.26):

$$x_2^{IV} + Q_1 \ddot{\ddot{x}}_2 + Q_2 \ddot{x}_2 + Q_3 \dot{x}_2 = 0, \quad (5.27)$$

де Q_1, Q_2, Q_3 - деякі коефіцієнти ($Q_1 = \frac{A_3}{\delta_u}, Q_2 = \omega^2 + \frac{A_6}{2\delta_u}, Q_3 = \frac{A_5}{2\delta_u}$).

Для розв'язування рівняння (5.27) складемо його характеристичне рівняння, яке є алгебраїчним рівнянням четвертої степені:

$$r^4 + Q_1 r^3 + Q_2 r^2 + Q_3 r = 0. \quad (5.28)$$

Не будемо зупинятись на методиці розв'язування цього рівняння, а лише запишемо його корені: один нульовий, один дійсний та два комплексно-спряжених:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = 0; \\ r_2 = \frac{1}{6} \left[-2Q_1 + \frac{2^{\frac{4}{3}}(Q_1^2 - 3Q_2)}{(-2Q_1^3 + 9Q_1Q_2 - 27Q_3 + 3^{\frac{3}{2}}\sqrt{-Q_1^2Q_2^2 + 4Q_2^3 + 4Q_1^3Q_3 - 18Q_1Q_2Q_3 + 27Q_3^2})^{\frac{1}{3}}} \right]; \\ r_{3,4} = \left[-\left(2^{\frac{4}{3}}\right)Q_1^2 + 3 \cdot 2^{\frac{4}{3}}Q_2 - \left(-4Q_1^3 + 18Q_1Q_2 - 54Q_3 + 6\sqrt{-3(Q_1^2 - 4Q_2)Q_2^2 + 6Q_1Q_3(2Q_1 - 9Q_2) + 81Q_3^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \right. \\ \left. -4Q_1 \left(-2Q_1^3 + 9Q_1Q_2 + 3\left(-9Q_3 + \sqrt{-3(Q_1^2 - 4Q_2)Q_2^2 + 6Q_1(2Q_1^2 - 9Q_2)Q_3 + 81Q_3^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \right] \times \\ \times \left[12\left(-2Q_1^3 + 9Q_1Q_2 + 3\left(-9Q_3 + \sqrt{-3(Q_1^2 - 4Q_2)Q_2^2 + 6Q_1(2Q_1^2 - 9Q_2)Q_3 + 81Q_3^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \right]^{-1} \pm \\ \pm \left[i \left[-2Q_1^2 + 6Q_2 + 2^{\frac{1}{3}} \left(-2Q_1^3 + 9Q_1Q_2 - 27Q_3 + 3\sqrt{-3(Q_1^2 - 4Q_2)Q_2^2 + 6Q_1(2Q_1^2 - 9Q_2)Q_3 + 81Q_3^2}\right)^{\frac{2}{3}} \right] \right. \\ \left. \pm \frac{5}{2^{\frac{5}{3}}\sqrt{3}} \left[-2Q_1^3 + 9Q_1Q_2 + 3\left(-9Q_3 + \sqrt{-3(Q_1^2 - 4Q_2)Q_2^2 + 6Q_1(2Q_1^2 - 9Q_2)Q_3 + 81Q_3^2}\right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{3}} \right]. \end{array} \right. \quad (5.29)$$

Тепер можемо записати розв'язок диференціального рівняння (5.27):

$$x_2 = C_1 + C_2 e^{p_2 t} + e^{t \operatorname{Re}[p_{3,4}]} [C_3 \sin(\operatorname{Im}(p_{3,4})t) + C_4 \cos(\operatorname{Im}(p_{3,4})t)], \quad (5.30)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 - постійні інтегрування, які визначаються з початкових умов руху системи. Необхідно зазначити, що кількість початкових умов (5.8) не відповідає кількості постійних інтегрування. Не вистачає однієї початкової умови, яку неважко знайти (це третя похідна функції переміщення вантажу за часом). Отже запишемо систему рівнянь, яка дає змогу знайти невідомі постійні інтегрування:

$$\begin{cases} x_2(0) = x_{20}; \\ \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}; \\ \ddot{x}_2(0) = \ddot{x}_{20}; \\ \dddot{x}_2(0) = \dddot{x}_{20}. \end{cases} \quad (5.31)$$

Знайдемо розв'язок системи рівнянь (5.32):

$$\left\{ \begin{aligned}
C_1 &= x_{20} - [\ddot{x}_{20} - \dot{x}_{20}(p_2 + 2\operatorname{Re}(p_{3,4})) + \dot{x}_{20}(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + 2p_2\operatorname{Re}(p_{3,4}) + \\
&+ \operatorname{Re}^2(p_{3,4}))][p_2(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + \operatorname{Re}^2(p_{3,4}))]^{-1}; \\
C_2 &= [\ddot{x}_{20} - 2\dot{x}_{20}\operatorname{Re}(p_{3,4}) + \dot{x}_{20}(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + \operatorname{Re}^2(p_{3,4}))][p_2(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + \\
&+ (p_2 - \operatorname{Re}^2(p_{3,4})))]^{-1}; \\
C_3 &= [\ddot{x}_{20}(p_2 - \operatorname{Re}^2(p_{3,4})) - 2\dot{x}_{20}(p_2 - \operatorname{Im}^2(p_{3,4}) - 3\operatorname{Re}^2(p_{3,4})) + \dot{x}_{20} \times \\
&\times p_2(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + 2p_2\operatorname{Re}^2(p_{3,4}) - 3\operatorname{Re}^2(p_{3,4}))][(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + \operatorname{Re}^2(p_{3,4})) \times \\
&\times (\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + (p_2 - \operatorname{Re}^2(p_{3,4})))]^{-1}; \\
C_4 &= [-\ddot{x}_{20}(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + \operatorname{Re}(p_{3,4})(p_2 - \operatorname{Re}(p_{3,4}))) + \ddot{x}_{20}\operatorname{Re}(p_{3,4})(p_2^2 + \\
&+ 3\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) - \operatorname{Re}^2(p_{3,4})) + \dot{x}_{20}p_2(-3\operatorname{Im}^2(p_{3,4})\operatorname{Re}(p_{3,4}) + \operatorname{Re}^3(p_{3,4}) + \\
&+ p_2(\operatorname{Im}(p_{3,4}) - \operatorname{Re}(p_{3,4}))(\operatorname{Im}(p_{3,4}) + \operatorname{Re}(p_{3,4})))][\operatorname{Im}(p_{3,4})(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + \\
&+ (p_2 - \operatorname{Re}(p_{3,4}))^2)(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + \operatorname{Re}^2(p_{3,4}))].
\end{aligned} \right. \quad (5.32)$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти у рівняння (5.32), отримаємо шукану функцію переміщення вантажу у часі.

Однак відкритим залишається питання, який з варіантів розв'язку системи рівняння (5.23) (2-й чи 7-й) використати. Для вирішення цього питання необхідно проаналізувати графіки функцій (5.30) для обох випадків. Побудуємо фазові портрети системи „візок-вантаж” для таких фазових координат: Δx , $\Delta \dot{x}$ та \dot{x}_1 (рис. 5.3). Фазові портрети побудовані при таких параметрах системи: $T = 5\text{ с}$, $m_1 = 1000\text{ кг}$, $m_2 = 1000\text{ кг}$, $l = 10\text{ м}$, $\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = 0,33$, $x_{20} = -0,5\text{ м}$, $\dot{x}_{20} = 1,5\text{ м/с}$, $\ddot{x}_{20} = -0,5\text{ м/с}^2$, $\dddot{x}_{20} = -0,5\text{ м/с}^3$.

На рис. 5.3 точкою відмічено початок координат (точка у якій візок має нульову швидкість, а коливання вантажу затухають). З рис. 5.3 видно, що траєкторія руху фазової точки для коефіцієнтів у функції керування (5.22) для випадку 2 з плином часу наближається до початку координат. Інша ситуація з коефіцієнтами керування для випадку 7 – з плином часу фазова точка віддаляється від початку координат, що свідчить про нестійкість системи. Тому випадок 7 відкидаємо і надалі працюємо лише з випадком 2.

Загалом, з рис. 5.3 (а) видно, що отримано оптимальне керування, яке переводить фазову точку у початок координат (точніше у його достатньо

малий окіл), при цьому коливання вантажу практично зникають і візок зупиняється.

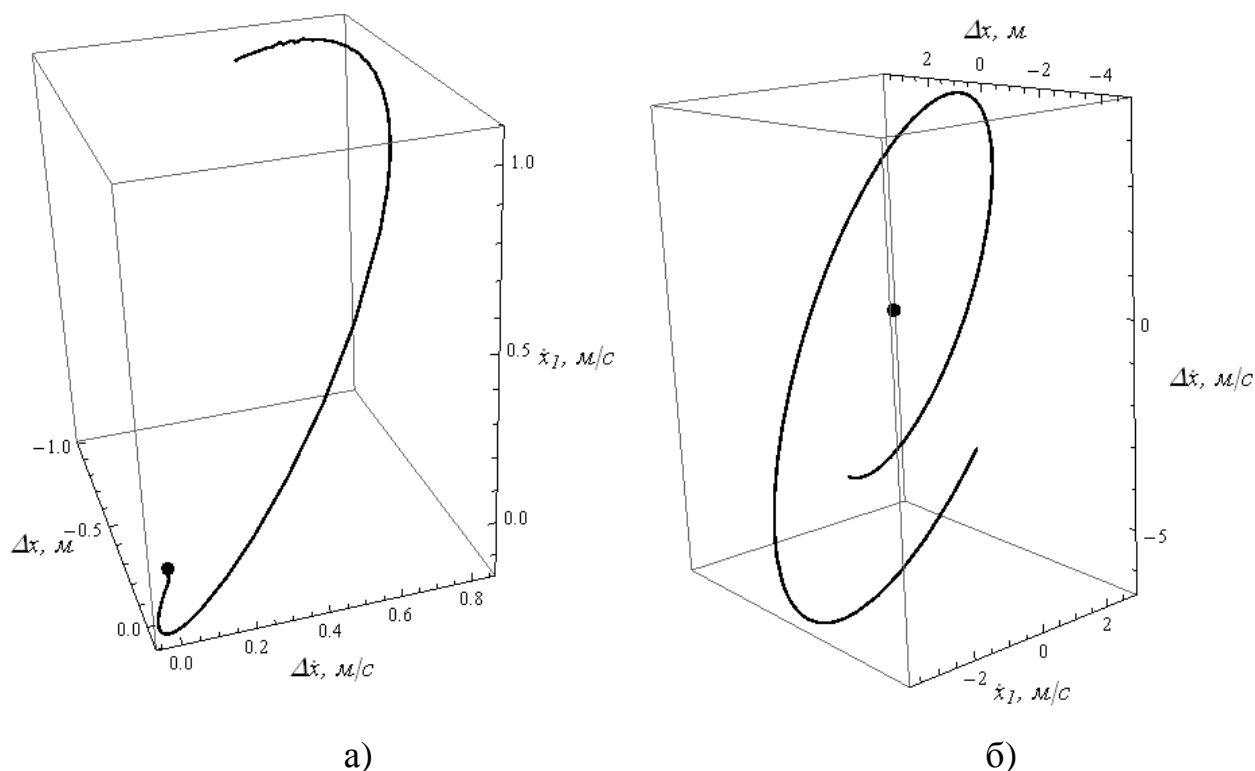


Рис. 5.3. Фазові портрети системи „візок-вантаж” для різних варіантів коефіцієнтів керування (5.22): а) фазовий портрет руху системи для випадку 2; б) фазовий портрет руху системи для випадку 7

На початку дослідження ми використали припущення, що нерівність (5.6) не враховується. Якщо привод візка обладнаний потужним двигуном, то таке припущення реально відображає можливості керування системою. Однак, як правило, це припущення невірне і тому необхідно його враховувати обмеженням на керування. Спосіб, який дозволяє врахувати ці та інші обмеження присвячена наступний пункт.

5.2. Дискретний спосіб врахування обмежень на величину керування механізмом переміщення крана

У попередньому пункті було синтезовано оптимальне керування рухом кранового візка з вантажем при усуненні коливань останнього у момент

зупинки візка. Однак процес синтезу керування проходив з припущенням, що обмеження на керування відсутні, що, у загальному випадку, не відображає реальні можливості приводу візка. Отже, необхідно певним чином обмежити керуюче зусилля і при цьому зберегти його основні властивості – властивість керування по фактичним фазовим координатам системи „візок-вантаж” та властивість усунення коливань вантажу до кінця зупинки візка.

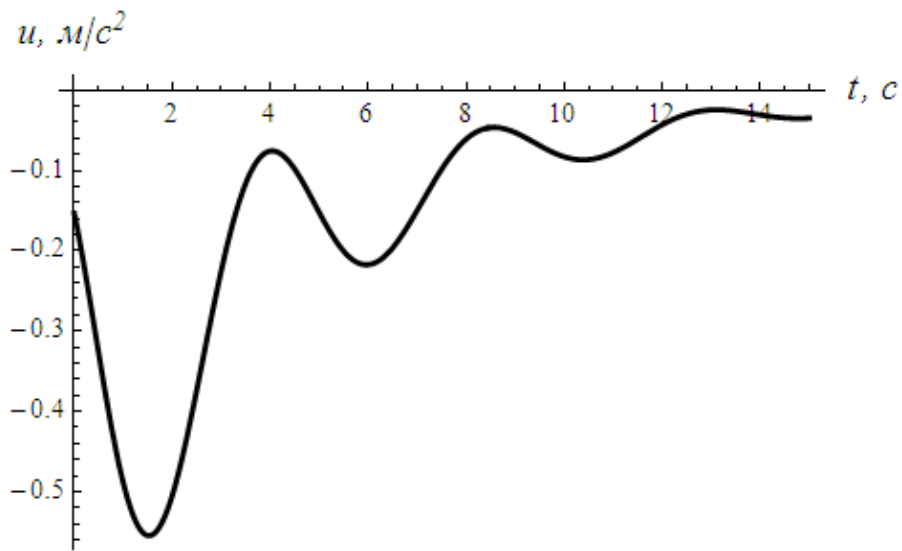
Необхідно вказати, що класичне варіаційне числення не дає змоги отримати оптимальне керування при обмеженнях на керування. Виключення можуть становити деякі задачі, при розв’язуванні яких використовується метод штрафів [25].

Для отримання оптимального керування при обмеженні його величини придатні методи динамічного програмування та метод принципу максимуму. Принцип максимуму дає змогу отримати необхідні та достатні (для лінійних систем) умови екстремуму функціоналу. Цей метод є більш загальним аніж варіаційне числення: з нього можна отримати умови екстремуму функціоналу – рівняння Ейлера-Пуассона [26]. Принцип максимуму встановлює якісну картину структури оптимального керування, однак він не дає відповіді про кількісні характеристики руху системи. Це означає, що принцип максимуму дозволяє знайти характер функції керування (наприклад, з класу кусочно-постійних функцій і визначити кількість перемикачів керування), але за допомогою інших методів необхідно знаходити координати точок сполучення кусків функції оптимального керування. При розв’язуванні задачі усунення коливань вантажу за найкоротший час такими „допоміжними” методами є метод фазової площини [21] та метод розв’язування трансцендентних рівнянь [19]. Однак, як було вказано у попередньому пункті синтезоване за допомогою принципу максимуму оптимальне керування не враховує фактичний стан координат системи.

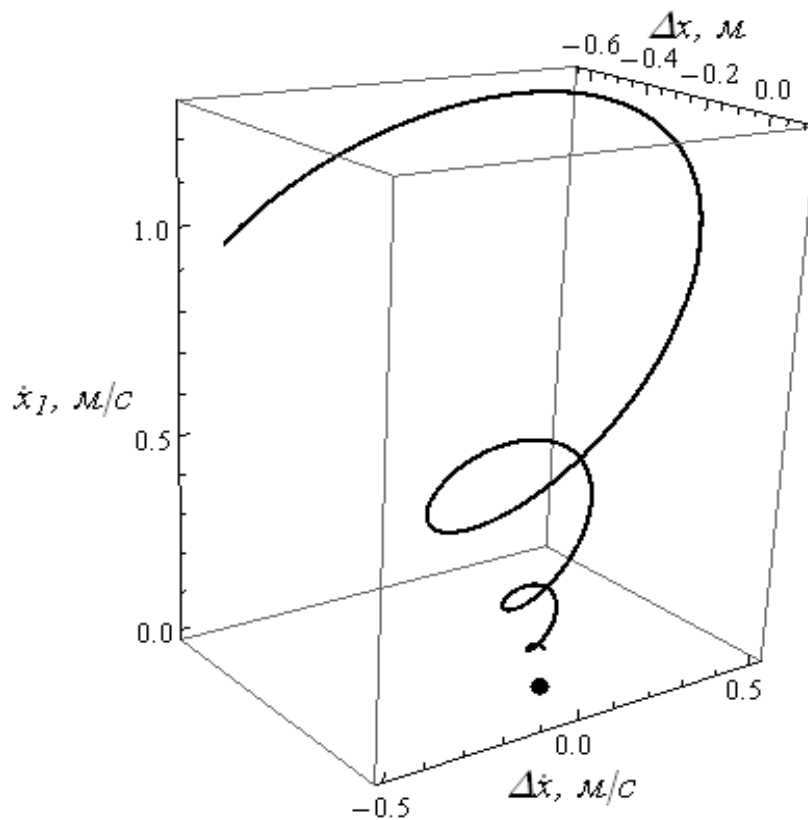
Інша справа при використанні методу динамічного програмування. Основне функціональне рівняння цього методу, за умови відсутності обмежень, дає змогу синтезувати оптимальне керування у формі зворотного

зв'язку. Однак накладання на керування обмежень сильно ускладнюють вихідну задачу. Що стосується дискретної форми динамічного програмування (так званий багатокроковий процес прийняття рішень щодо керування), то Р. Беллман вказує [17], що сама природа обмежень на керування „допомагає” розв'язувати задачу. Дійсно, не потрібно перебирати увесь спектр можливих керувань на кожному кроці, оскільки ширина зони перебору керувань апіорі обмежена. Нажаль, таке твердження не поширюється на неперервний аналог динамічного програмування.

Вираз оптимального керування, отриманого у попередньому пункті, має такий вигляд $u = u(\dot{x}_2, \ddot{x}_2, \delta_0, \delta_1, \delta_2, \omega)$. Оскільки фазові координати при керуванні системою постійно змінюються, то у деякий момент часу може бути, що $u > u_{\max}$. При цьому вважається, що коефіцієнти при одиничних критеріях у виразі (5.9) є постійними величинами. Вибір цих коефіцієнтів проводиться різними способами: експертним [27]; шляхом забезпечення додаткових крайових умов руху системи [28] або більш загально – шляхом мінімізації термінального функціоналу; шляхом мінімізації додаткових критеріїв руху системи [12]; шляхом забезпечення допустимих значень кінематичних або динамічних характеристик руху системи [18]. Саме останній спосіб дозволяє забезпечити обмеження накладені на керування. Покажемо це на прикладі: обмеження накладені на керування $|u| \leq 0,6$, що відповідає максимальному значенню динамічної складової приводного зусилля $F_{\text{дин}} = F - W = 600 \text{ Н}$. Побудуємо графіки керування та фазовий портрет системи (рис. 5.4). Точкою на рис. 5.4 (б) позначено початок координат (ця точка відповідає умові коли візок зупиняється і коливання вантажу затухають). Графіки побудовані при $\delta_u = 0,7$.



а)



б)

Рис. 5.4. Керування системою при обмеженні $|u| \leq 0,6$ та відповідний йому фазовий портрет руху системи: а) графік функції керування системою; б) фазовий портрет руху системи

Зазначимо, що графіки на рис. 5.4 побудовані при тривалості гальмування 15 с, що практично „не вигідно”, оскільки при цьому

затягується перехідний процес. Таке затягування перехідного процесу необхідне для досягнення фазовою точкою околу початку координат. Аналізуючи графік приведений на рис. 5.4, а можна сказати, що керування досягає свого максимального значення лише у один момент часу (приблизно 1,7 с від початку гальмування). На всьому часовому проміжку, за виключенням вказаної точки, виконується строга нерівність $|u| < 0,6$. Саме це і є причиною затягування перехідного процесу: невелике значення керування призводить до невеликих змін фазового стану системи у часі. Система повільно рухається до вказаної точки початку координат. Звідси випливає очевидний висновок: необхідно таким чином обирати керування, щоб якомога інтенсивніше змінювати фазовий стан системи у бік досягнення початку координат. Цього можна досягти варіацією коефіцієнту, тобто $\delta_u = \delta_u(u_{\max}, u)$, на всьому проміжку гальмування візка. Пояснимо більш детально: зменшуючи δ_u ми встановлюємо малу питому вагу керування у критерії (5.9). Тому керування може бути досить великим, оскільки воно мало впливає на величину критерію (дійсно ваговий коефіцієнт δ_u є множителем при керуванні; навіть дуже велике значення керування не значно вплине на величину критерію). Навпаки: збільшення δ_u призведе до зменшення керування, оскільки зростає його питома вага у критерії. Таким чином, змінюючи δ_u можна змінювати величину керування для задоволення обмежень накладених на нього.

Необхідно зазначити, що більш інтенсивніший рух системи відбувається при максимальному керуванні. Функція керування, у загальному випадку, буде мати відрізки постійних керувань (як додатних так і від'ємних) і відрізки, які сполучають відрізки постійних керувань. Отже функція керування, у загальному випадку, є кусковою. Очевидно, що кусковою буде і функція δ_u , адже вона також обмежена $0 \leq \delta_u \leq 1$. Крайні величини нерівності відповідають частинним оптимізаційним задачам: при

$\delta_u = 0$ мінімізується лише сума квадратів фазових координат, при $\delta_u = 1$ мінімізується лише керування.

Аналітичне дослідження функції δ_u є складною задачею. Однак ця задача суттєво спрощується, якщо від неперервної задачі перейти до її дискретного варіанту. Отже, будемо розглядати лише дискретні значення фазових координат $\dot{x}_2(j\Delta t)$, $\ddot{x}_2(j\Delta t)$, $\ddot{\ddot{x}}_2(j\Delta t)$ та керування $u(j\Delta t)$ у визначені моменти часу $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t = T$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n$). Крім того, будемо вважати, що система керування обладнана датчиком, який вимірює фактичні кінематичні функції вантажу (наприклад, цифровий енкодер). Зазначимо, якщо у системі керування відсутній зворотній зв'язок по фазовим координатам динамічної системи „візок-вантаж”, то керування в цьому випадку може бути реалізоване: у попередньому пункті отримана функція $x_2(t)$. Знаходячи її вищі похідні та підставляючи їх у вираз $u = u(\dot{x}_2, \ddot{x}_2, \ddot{\ddot{x}}_2, \delta_0, \delta_1, \delta_2, \omega)$, можна отримати керування $u = u(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \omega)$. Однак таке керування втрачає властивість оптимальності при зовнішніх стохастичних впливах на систему, оскільки воно отримано з умови абсолютної визначеності, передбачуваності руху системи.

Відмітимо ще один момент при побудові дискретного оптимального керування. З рис. 5.4 видно, якщо фазова точка знаходиться поблизу початку координат, то керування є невелике за модулем. Назвемо таке керування слабким. Слабке керування, впливаючи на рух динамічної системи, повільно змінює її стан – фазова точка повільно рухається до початку координат, що означає затягування перехідного процесу. Тому тут потрібно приймати певний компроміс – необхідно визначити тривалість перехідного процесу, при якому він би був достатньо швидкоплинний і при цьому швидкість руху візка і коливання вантажу були б достатньо малими (практично нульовими). Математично це означає, що необхідно визначити таку тривалість руху системи T , при якій би відстань від фазової точки до початку координат не перевищувала наперед встановленої величини:

$$E_{окіл}(T) \leq E_{\max}, \quad (5.33)$$

де E_{\max} - максимально-допустима величина радіусу околу початку координат;
 $E_{окіл}(T)$ - відстань від фазової точки до початку координат у момент часу T , у даному випадку:

$$E_{окіл}(T) = \frac{\sqrt{\dot{x}_2^2(T) + \dot{x}_2^2(T) + \ddot{x}_2^2(T)}}{\omega^2}. \quad (5.34)$$

У якості $E_{окіл}(T)$ можна обрати також іншу величину:

$$E_{окіл}(T) = \dot{x}_1^2(T) + \Delta x^2(T)\omega^2 + \Delta \dot{x}^2(T) = \left(\dot{x}_2(T) + \frac{\ddot{x}_2(T)}{\omega^2} \right)^2 + \frac{\ddot{x}_2^2(T)}{\omega^2} + \frac{\ddot{x}_2^2(T)}{\omega^4}. \quad (5.35)$$

Вираз (5.35) відповідає сумі питомої енергії коливань вантажу (доданок $\Delta x^2(T)\omega^2 + \Delta \dot{x}^2(T)$) та питомої кінетичної енергії руху візка (доданок $\dot{x}_1^2(T)$). Вираз (5.35), на наш погляд, краще відображає енергетичні показники процесу гальмування. Дійсно, „ідеальний” процес гальмування закінчується у момент часу, коли сума кінетичної енергії руху візка та енергії коливання вантажу стає рівною нулю. Постає питання, як обрати E_{\max} ? Відповідь на нього можна знайти, проаналізувавши практичну сторону процесу усунення коливань вантажу на гнучкому підвісі. Існує якась межа коливань, при якій дозволяється виконувати подальші технологічні операції (знімати вантаж з гака, опускати його на платформу тощо). Цією межею є максимальне відхилення вантажу від вертикалі:

$$\Delta x_{\max} = \frac{l}{g} \ddot{x}_{2\max} = \frac{\ddot{x}_{2\max}}{\omega_0^2}, \quad (5.36)$$

де $\ddot{x}_{2\max}$ - максимальне прискорення вантажу, яке відповідає максимально дозволеному, за технологічними вимогами, відхиленню вантажу від

вертикалі Δx_{\max} . Отже можемо записати, чому дорівнює радіус околу початку координат:

$$E_{\max} = \frac{\sqrt{\ddot{x}_{2\max}^2}}{\omega^2} = \Delta x_{\max}. \quad (5.37)$$

Вираз (5.34) необхідно порівнювати з виразом (5.37) для знаходження тривалості гальмування T . Якщо ж використовується вираз (5.35), то таке порівняння необхідно виконувати з квадратом виразу (5.37). У цьому випадку порівнюються повна енергія руху візка і вантажу (5.35) та енергія допустимої величини коливань. Приведемо алгоритм роботи системи керування, яка б враховувала обмеження накладені на керування (рис. 5.5).

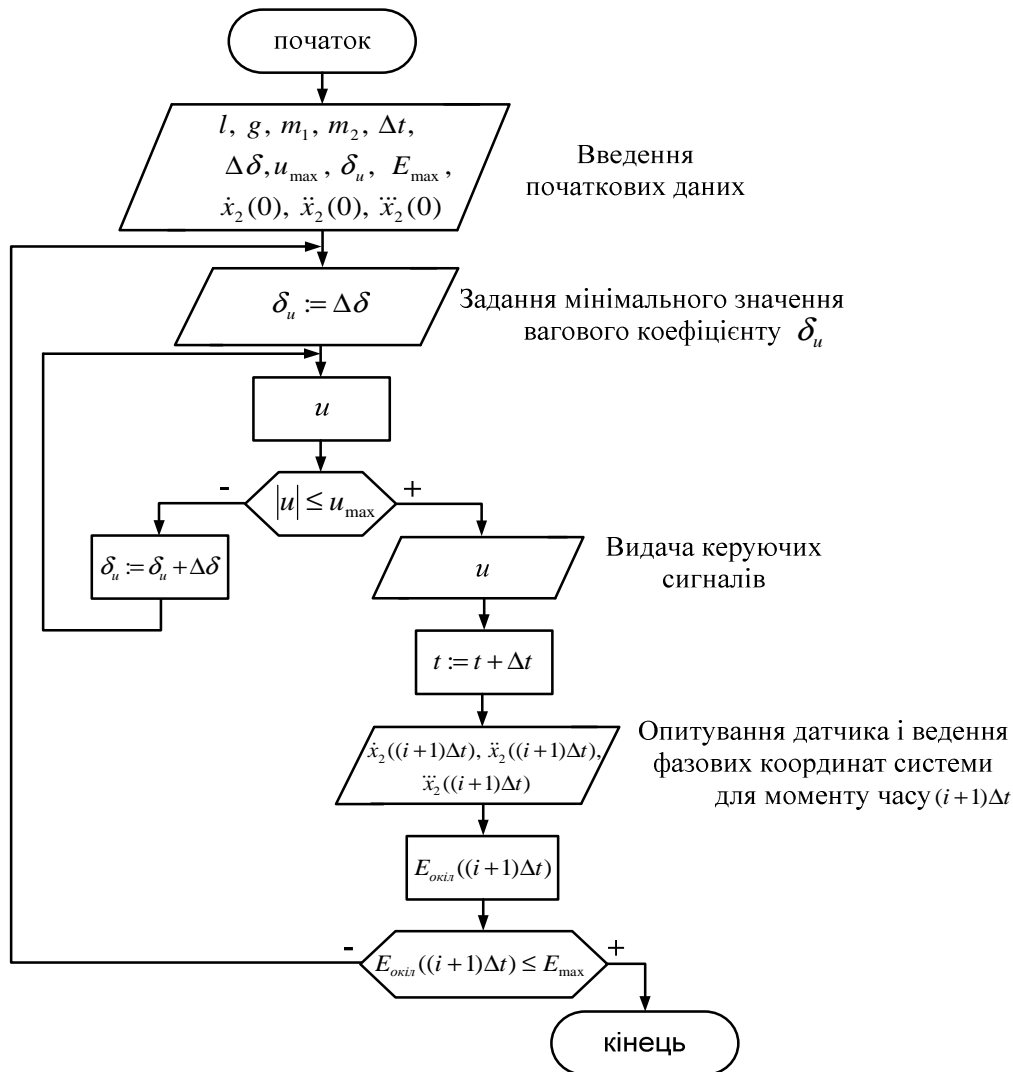


Рис. 5.5. Алгоритм роботи цифрової системи керування роботою кранового візка з вантажем при обмеженні на керування

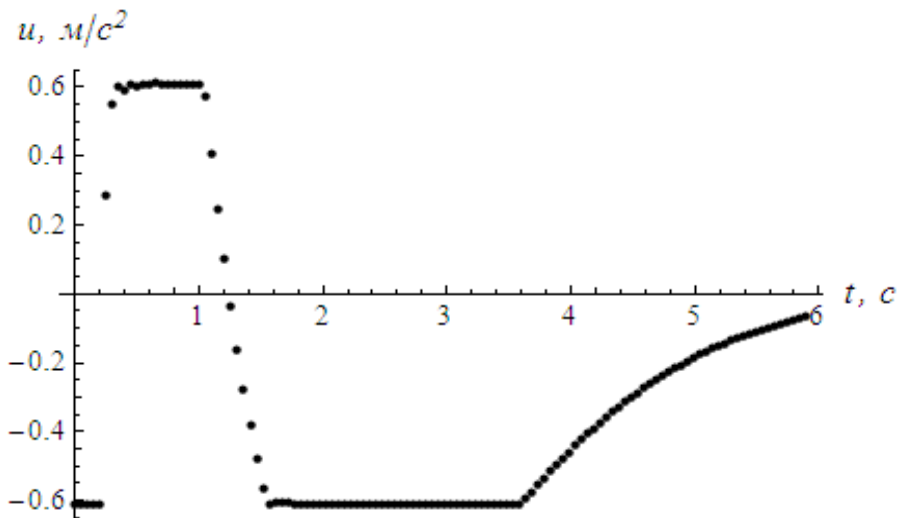
Докладно опишемо процес формування керуючого сигналу на одному кроці (при переході від $t = i\Delta t$ до $t = (i+1)\Delta t$) при цьому будемо вважати, що початкові фазові координати, а також параметри системи задані:

- 1) задають значення δ_u якнайменше;
- 2) розраховують значення керування для фазових координат $\dot{x}_2(i\Delta t)$, $\ddot{x}_2(i\Delta t)$, $\ddot{x}_2(i\Delta t)$ та найменшого значення коефіцієнту δ_u ;
- 3) порівнюють отримане значення керування з максимальним u_{\max} . Якщо виконується умова $|u| \leq u_{\max}$, то отриманий сигнал керування видається на виконавчий пристрій. Якщо умова $|u| \leq u_{\max}$ не виконується, то збільшують значення коефіцієнту δ_u та повертаються до другого кроку. Така зміна коефіцієнту δ_u через деяку кількість циклів приведе до виконання умови $|u| \leq u_{\max}$. Після цього відбувається видача керуючого сигналу;
- 4) дискретний час системи збільшується $t := t + \Delta t$. Фактично це означає, що цифрова система керування „спить” протягом часу Δt ;
- 5) відбувається опитування датчика фазових координат системи, для того, щоб визначити у який новий фазовий стан $\dot{x}_2((i+1)\Delta t)$, $\ddot{x}_2((i+1)\Delta t)$, $\ddot{x}_2((i+1)\Delta t)$ перейшла система від дії керування;
- 6) визначається величина околу для нового фазового стану $E_{\text{окіл}}((i+1)\Delta t)$;
- 7) відбувається порівняння визначеного значення $E_{\text{окіл}}((i+1)\Delta t)$ з допустимим за технологічними вимогами E_{\max} , тобто перевіряється умова $E_{\text{окіл}}((i+1)\Delta t) \leq E_{\max}$. Якщо умова виконується, то це означає, що необхідно закінчувати процес керування. Якщо умова не виконалась, то необхідно надалі продовжувати керування, для чого необхідно повернутись на перший крок.

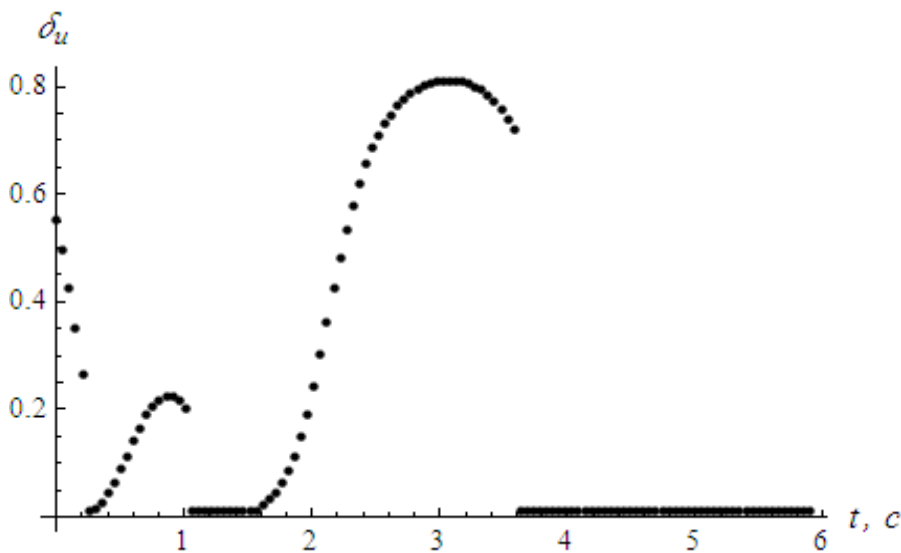
У результаті роботи такого алгоритму отримуємо переміщення фазових змінних динамічної системи „візок-вантаж” у достатньо малий окіл початку

координат при обмеженні на керування. Фактично це означає зупинку візка з практично відсутніми коливаннями вантажу.

Приведемо графік, отриманого при роботі цього алгоритму, керування та графік функції δ_u (рис. 5.6). Графіки побудовані при таких параметрах: $m_1 = 1000 \text{ кг}$, $m_2 = 1000 \text{ кг}$, $l = 10 \text{ м}$, $x_{20} = -0,5 \text{ м}$, $\dot{x}_{20} = 1,5 \text{ м/с}$, $\ddot{x}_{20} = -0,5 \text{ м/с}^2$, $\ddot{\ddot{x}}_{20} = -0,5 \text{ м/с}^3$, $\Delta x_{\max} = 0,05 \text{ м}$ (амплітуда залишкових коливань вантажу становить всього 5 см при довжині канату 10 м).



а)



б)

Рис. 5.6. Керування системою при обмеженні $|u| \leq 0,6$ та коефіцієнт δ_u варіація якого забезпечує це обмеження: а) графік функції керування системою; б) графік функції зміни коефіцієнту δ_u

З рис. 5.6, а добре видно, що керування не перевищує встановлених обмежень. Графік функції керування представляє собою ділянки постійності керування та ділянки, які поєднують між собою постійні значення керування. Аналізуючи графік, представлений на рис. 5.6,б впевнюємось у вірності припущень щодо кусковості функції δ_u . У деяких випадках окрім обмежень на керуюче зусилля вводяться інші обмеження, наприклад, на швидкість зміни керування (на його першу похідну за часом), тобто:

$$|\dot{u}| \leq \dot{u}_{\max}, \quad (5.38)$$

де \dot{u}_{\max} - максимально допустима швидкість зміни керуючого зусилля. Таке обмеження може виникнути у зв'язку з обмеженими можливостями зміни моменту двигуна, який керується від частотного перетворювача. Врахування цього обмеження виконується аналогічно, алгоритм (рис. 5.7) змінюється лише у одній частині – додається блок перевірки обмеження (5.38). Приведемо лише ту частину алгоритму, яка відноситься до виконання обмежень (рис. 5.6).

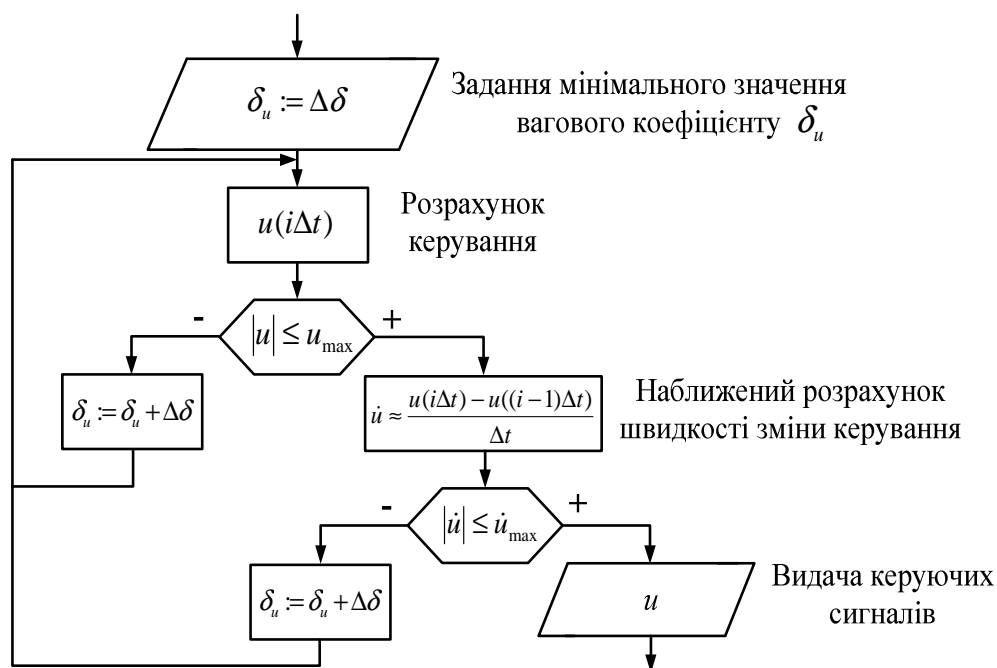


Рис. 5.7. Частина алгоритму цифрової системи керування роботою кранового візка з вантажем при обмеженні на керування та швидкість його зміни

Варіація коефіцієнту δ_u на кожному кроці розрахунку керування дозволяє виконувати різноманітні обмеження, наприклад, кінематичні. У першій частині цього розділу було використано припущення $sign\dot{x}_1=1$ для $t \in [0, T]$, це означає, що швидкість візка не змінюється за знаком. Звичайно, можна забезпечити це обмеження додаванням або відніманням від приводного зусилля величини статичного опору переміщенню візка W . Тобто, у випадку коли $sign\dot{x}_1=1$ для $t \in [0, T]$ до приводного зусилля F необхідно додавати величину W . У випадку коли $sign\dot{x}_1=-1$ від величини F необхідно віднімати W . Однак у момент зміни знаку функції $sign\dot{x}_1$ приводне зусилля буде мати розрив першого роду, що є небажаним. Однак можливість варіації коефіцієнту δ_u дає змогу будувати такий алгоритм синтезу керування, при якій би функція $sign\dot{x}_1$ не змінювала свій знак, отже функція F не буде мати розривів. Це досягається деяким ускладненням алгоритму: необхідно контролювати величину швидкості візка \dot{x}_1 і якщо \dot{x}_1 є близькою до нуля, а коливання вантажу іще мають досить велику енергію, то необхідно навмисно збільшувати швидкість візка, збільшенням величини керування за допомогою варіації δ_u . На деякому проміжку руху можуть виникнути випадки, коли це зробити неможливо, тоді необхідно збільшувати швидкість візка відхиляючись від оптимального керування, тобто коригувати керування у „неоптимальну” область. Після короткочасної дії „неоптимального” керування необхідно знову починати оптимальне керування, при цьому передісторія руху динамічної системи „візок-вантаж” нас не цікавить, а цікавлять лише поточні значення фазових координат.

5.3. Синтез квазіоптимального керування рухом вантажопідйомного крана у вигляді зворотного зв'язку

Велике поширення для перевантаження різного роду вантажів отримали крани мостового типу. Вони використовуються у морських та

річкових портах, на заводах хімічної та металургійної промисловості, у машинобудуванні тощо. Підйомні крани мостового типу часто працюють при неусталених режимах роботи (пуск, зупинка, реверс). Усталений режим руху крана взагалі може бути відсутнім. Динамічні процеси, які виникають протягом перехідних режимів руху кранових механізмів, визначають ефективність роботи крана. На продуктивність, надійність та енергоефективність роботи мостового крана впливають коливання вантажу, який закріплений на гнучкому підвісі. Особливо актуальна задача усунення коливань вантажу для портових перевантажувачів та металургійних кранів. У першому випадку усунення коливань вантажу підвищує продуктивність роботи крана та зменшує простій корабля в порту, а в другому – збільшує безпеку праці.

Колівання вантажу на тросі виникають протягом перехідних режимів руху крана, продовжуються на усталеному русі і після його зупинки. Бажано якнайшвидше погасити коливання [6]. Однак оптимальне за швидкодією керування із усуненням коливань вантажу значно збільшує динамічні навантаження у елементах крана і він може швидко вийти з ладу. Використовуються також інші методи вирішення цієї проблеми, наприклад, застосування fuzzy-контролерів [29-32]. Недоліком таких способів є те, що вони не враховують обмеження накладені на приводний механізм крана, а також те, що коливання вантажу можуть мати значну амплітуду протягом перехідного процесу.

Існує цілий ряд способів, які запатентовані і використовуються різними фірмами [33-35]. Головний недолік цих способів – вони не передбачають оптимального керування, тому задача знаходження оптимального керування краном при усунення коливань вантажу є актуальною.

Будемо вважати, що при переміщенні крана протягом гальмування він не змінює свою швидкість, тобто $\text{sign } \dot{x}_1 = 1$. Систему рівнянь (5.1) подамо у канонічному вигляді, додаючи ще одне рівняння для функції зміни керування:

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1; \\ \dot{y}_1 = y_2; \\ \dot{y}_2 = y_3; \\ \dot{y}_3 = u - \Omega^2 y_2; \\ \dot{u} = \varphi, \end{cases} \quad (5.39)$$

де y_0 - функція пропорційна координаті вантажу ($y_0 = \frac{x_2}{\Omega_0^2}$); Ω - власна частота коливань вантажу відносно рухомого крана ($\Omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l}}$); Ω_0 - власна частота коливань вантажу відносно нерухомого крана ($\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$); u - функція керування динамічною системою „кран-вантаж” ($u = \frac{F - W}{m_1}$). φ - функція швидкості зміни керування u . На керування u накладаються обмеження у вигляді нерівності (5.6).

Рух крана із вантажем характеризується початковими умовами, які для нових фазових координат y_0, y_1, y_2, y_3 записуються таким чином:

$$\begin{cases} y_0(0) = \frac{x_2(0)}{\Omega_0^2} = \frac{x_1(0) - \Delta x(0)}{\Omega_0^2} \approx \frac{x_1(0) - l\alpha(0)}{\Omega_0^2}; \\ y_1(0) = \frac{\dot{x}_2(0)}{\Omega_0^2} = \frac{\dot{x}_1(0) - \Delta \dot{x}(0)}{\Omega_0^2} \approx \frac{\dot{x}_1(0) - l\dot{\alpha}(0)}{\Omega_0^2}; \\ y_2(0) = \frac{\ddot{x}_2(0)}{\Omega_0^2} = \frac{\ddot{x}_1(0) - \Delta \ddot{x}(0)}{\Omega_0^2} \approx \frac{\ddot{x}_1(0) - l\ddot{\alpha}(0)}{\Omega_0^2}; \\ y_3(0) = \frac{\ddot{x}_2(0)}{\Omega_0^2} = \frac{\ddot{x}_1(0) - \Delta \ddot{x}(0)}{\Omega_0^2} \approx \frac{\ddot{x}_1(0) - l\ddot{\alpha}(0)}{\Omega_0^2}, \end{cases} \quad (5.40)$$

де Δx - різниця координат крана і вантажу ($\Delta x = x_1 - x_2$); α - кут відхилення канату із вантажем від вертикалі. У системі (5.40) використано наближену оцінку $\Delta x \approx l\alpha$, яка впливає із того, що $\sin \alpha \approx \alpha$, при невеликих значеннях α . Таке наближення не дає значних похибок.

Початкові умови (5.40) дають змогу встановити, які параметри руху крана і вантажу необхідно виміряти. Це потрібно для визначення цих умов і задання їх системі керування краном. Як впливає із системи (5.40)

необхідно виміряти положення крана та його вищі похідні включно до третьої, довжину канату та кут відхилення канату із вантажем від вертикалі та його вищі похідні за часом включно до третьої. Вказані параметри вимірюються за допомогою трьох енкодерів. Один енкодер вимірює довжину канату, він встановлюється на канатному барабані. Другий енкодер вимірює положення крана відносно нульової відмітки. Третій енкодер вимірює кут відхилення канату із вантажем від вертикалі, його вихідний вал за допомогою спеціального кріплення прикріплений до канату.

Для усунення коливань вантажу у момент загальмовування крана необхідно, щоб виконувались такі кінцеві умови:

$$\begin{cases} y_1(T) = 0; \\ y_2(T) = 0; \\ y_3(T) = 0. \end{cases} \quad (5.41)$$

Перша умова (5.41) еквівалентна рівності нулю швидкості вантажу; друга – рівності нулю різниці координат крана і вантажу; третя – рівності нулю різниці швидкостей крана і вантажу. Таким чином, у момент часу $t=T$ сума енергій коливань вантажу та руху крана повинні бути рівні нулю, що означає зупинку крана і відсутність коливань вантажу.

Для синтезу керування необхідно задати критерій оптимальності, який визначить одне оптимальне керування із усієї множини можливих. Критерієм оптимальності руху крана протягом його гальмування приймемо інтегральний функціонал:

$$I = \int_0^T \sum_{i=1}^{n=3} (\delta_i y_i^2 + \delta_4 u^2 + \delta_5 \varphi^2) dt \rightarrow \min, \quad (5.42)$$

де $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$ - деякі коефіцієнти, які можна розрахувати за такою формулою:

$$\delta_j = k_j \tilde{I}_j, \quad j=1, 2, 3, 4, 5, \quad (5.43)$$

де k_j - ваговий коефіцієнт, який враховує важливість відповідного j -го показника у структурі критерію; \tilde{I}_j - деякий коефіцієнт, який приводить розмірність j -го показника у структурі критерію (5.43) до безрозмірного вигляду. Критерій (5.43) є комплексним лінійно-квадратичним інтегральним критерієм і відображає як фазові координати динамічної системи, так і „витрати” на керування нею.

Таким чином, здійснена постановка задачі оптимального керування динамічною системою „кран-вантаж”. Ця задача полягає у тому, що необхідно перевести динамічну систему із початкового положення, яке характеризується початковими умовами (5.40), у кінцеве, яке характеризується кінцевими умовами (5.41). При цьому критерій оптимальності (5.42) повинен бути якнайменшим. Крім того, накладаються обмеження на керування у вигляді нерівності (5.6), а момент закінчення керування T є нефіксованим.

Для розв’язування задачі оптимального керування використаємо метод динамічного програмування [17]. Даний метод синтезу оптимального керування дає змогу знайти керування у вигляді функції фазових координат динамічної системи. Це керування здійснюється у вигляді зворотного зв’язку. Основне функціональне рівняння для даної задачі записується таким чином:

$$\min \left(\sum_{i=1}^{n=3} \delta_i y_i^2 + \delta_4 u^2 + \delta_5 \varphi^2 + \frac{\partial S}{\partial y_0} y_1 + \frac{\partial S}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial S}{\partial y_2} y_3 + \frac{\partial S}{\partial y_3} (u - \Omega^2 y_2) + \frac{\partial S}{\partial u} \varphi \right) = 0, \quad (5.44)$$

де S - функція Беллмана. Задачу будемо розв’язувати для випадку коли на керування не накладено обмежень (5.6). Це дасть змогу знайти аналітичний розв’язок задачі. Однак у подальшому ми врахуємо нерівність (5.6).

Мінімум правої частини рівняння (5.44) будемо шукати по функції φ , для чого продиференціюємо її за φ та прирівняємо отримане до нуля:

$$2\delta_5\varphi + \frac{\partial S}{\partial u} = 0. \quad (5.45)$$

Знайдемо з рівняння (5.45) функцію φ :

$$\varphi = -\frac{1}{2\delta_5} \frac{\partial S}{\partial u}. \quad (5.46)$$

Підставимо отримане у рівняння (5.44), в результаті чого будемо мати:

$$\delta_1 y_1^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_1} + y_2 \delta_2 \right) y_2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_2} + y_3 \delta_3 \right) y_3 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_3} + u \delta_4 \right) u - \frac{1}{4\delta_5} \left(\frac{\partial S}{\partial u} \right)^2 - \frac{\partial S}{\partial y_3} y_2 \Omega^2 = 0. \quad (5.47)$$

Рівняння (5.47) є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Будемо шукати його розв'язок у вигляді квадратичної форми, як це прийнято при розв'язуванні подібних задач [36]:

$$S = A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + A_3 y_3^2 + A_4 u^2 + A_5 y_1 y_2 + A_6 y_1 y_3 + A_7 y_1 u + A_8 y_2 y_3 + A_9 y_2 u + A_{10} y_3 u, \quad (5.47)$$

де $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}$ - постійні коефіцієнти, що необхідно визначити. Візьмемо частинні похідні з виразу (5.47) за y_1, y_2, y_3 та u :

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = 2A_1 y_1 + A_5 y_2 + A_6 y_3 + A_7 u; \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_2} = A_5 y_1 + 2A_2 y_2 + A_8 y_3 + A_9 u; \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_3} = A_6 y_1 + A_8 y_2 + 2A_3 y_3 + A_{10} u; \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial S}{\partial u} = A_7 y_1 + A_9 y_2 + A_{10} y_3 + 2A_4 u. \quad (5.51)$$

Підставимо вирази (5.48-5.51) у рівняння (5.47) і після винесення спільних множників за дужки отримаємо:

$$\begin{aligned}
& y_1^2 \left(\delta_1 - \frac{A_7^2}{4\delta_5} \right) + y_2^2 \left(A_5 + \delta_2 - \frac{A_9^2}{4\delta_5} - A_8 \Omega^2 \right) + y_3^2 \left(A_8 + \delta_3 - \frac{A_{10}^2}{4\delta_5} \right) + \\
& + u^2 \left(A_{10} + \delta_4 - \frac{A_4^2}{\delta_5} \right) + y_1 y_2 \left(2A_1 - \frac{A_7 A_9}{2\delta_5} - A_6 \Omega^2 \right) + y_1 y_3 \left(A_5 - \frac{A_{10} A_7}{2\delta_5} \right) + \\
& + y_1 u \left(A_6 - \frac{A_4 A_9}{\delta_5} \right) + y_2 y_3 \left(A_2 + A_6 - \frac{A_{10} A_9}{2\delta_5} - 2A_3 \Omega^2 \right) + y_2 u \left(A_7 + A_8 - \right. \\
& \left. - \frac{A_4 A_9}{\delta_5} - A_{10} \Omega^2 \right) + y_3 u \left(2A_3 + A_9 - \frac{A_{10} A_4}{\delta_5} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Рівняння (5.52) буде справедливим у тому випадку, коли вирази у дужках будуть рівні нулю, оскільки функції y_1 , y_2 , y_3 , u одночасно не можуть бути рівні нулю. Тому рівняння (5.52) можна замінити на систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\delta_1 - \frac{A_7^2}{4\delta_5} = 0; \\
A_5 + \delta_2 - \frac{A_9^2}{4\delta_5} - A_8 \Omega^2 = 0; \\
A_8 + \delta_3 - \frac{A_{10}^2}{4\delta_5} = 0; \\
A_{10} + \delta_4 - \frac{A_4^2}{\delta_5} = 0; \\
2A_1 - \frac{A_7 A_9}{2\delta_5} - A_6 \Omega^2 = 0; \\
A_5 - \frac{A_{10} A_7}{2\delta_5} = 0; \\
A_6 - \frac{A_4 A_9}{\delta_5} = 0; \\
A_2 + A_6 - \frac{A_{10} A_9}{2\delta_5} - 2A_3 \Omega^2 = 0; \\
A_7 + A_8 - \frac{A_4 A_9}{\delta_5} - A_{10} \Omega^2 = 0; \\
2A_3 + A_9 - \frac{A_{10} A_4}{\delta_5} = 0.
\end{array} \right. \tag{5.53}$$

Систему рівнянь (5.53) розв'язати у аналітичному вигляді досить важко, тому спростимо її. Для цього подамо вираз (5.46), із врахуванням формули (5.51), у такому вигляді:

$$\varphi = -\frac{2A_4u + A_7y_1 + A_9y_2 + A_{10}y_3}{2\delta_5}. \quad (5.54)$$

Таким чином, для знаходження невідомої функції φ , яка є першою похідною функції керування u динамічною системою, необхідно знайти лише чотири коефіцієнти A_4 , A_7 , A_9 , A_{10} . Для знаходження цих коефіцієнтів необхідно сформулювати чотири рівняння. Перше та четверте рівняння системи (5.53) містять лише коефіцієнти A_4 , A_7 , A_{10} , тому використаємо їх. Із системи рівнянь (5.53) можемо отримати третє та четверте рівняння, в які входять невідомі коефіцієнти A_4 , A_7 , A_9 , A_{10} . Третє рівняння отримаємо з другого рівняння системи (5.53) із врахуванням третього та шостого рівнянь цієї системи. Четверте рівняння отримаємо з дев'ятого рівняння системи (5.53) із врахуванням третього рівняння цієї системи. У результаті будемо мати:

$$\begin{cases} \delta_1 - \frac{A_7^2}{4\delta_5} = 0; \\ A_{10} + \delta_4 - \frac{A_4^2}{\delta_5} = 0; \\ \frac{A_{10}A_7}{2\delta_5} + \delta_2 - \frac{A_9^2}{4\delta_5} - \left(\frac{A_{10}^2}{4\delta_5} - \delta_3 \right) \Omega^2 = 0; \\ A_7 + \left(\frac{A_{10}^2}{4\delta_5} - \delta_3 \right) - \frac{A_4A_9}{\delta_5} - A_{10}\Omega^2 = 0. \end{cases} \quad (5.55)$$

Перше рівняння системи (5.55) є незалежним від інших і можемо одразу записати:

$$A_7 = 2\sqrt{\delta_1\delta_5}. \quad (5.56)$$

Від’ємний корінь відкидаємо, оскільки він може призвести до нестійкості динамічної системи. Виразимо невідомі коефіцієнти A_{10} та A_9 через коефіцієнт A_4 :

$$A_{10} = \frac{A_4^2}{\delta_5} - \delta_4, \quad (5.57)$$

$$A_9 = \pm \sqrt{4 \left(\frac{A_4^2}{\delta_5} - \delta_4 \right) \sqrt{\delta_1 \delta_5} - \left(\frac{A_4^2}{\delta_5} - \delta_4 \right)^2 \Omega^2 + 4 \delta_5 (\delta_2 + \delta_3 \Omega^2)}. \quad (5.58)$$

Систему рівнянь (5.55) із врахуванням виразів (5.56)-(5.58) приведемо до одного алгебраїчного рівняння восьмої степені відносно A_4 :

$$A_4^8 + B_1 A_4^6 + B_2 A_4^4 + B_3 A_4^2 + B_4 = 0, \quad (5.59)$$

яке заміною $A_4^2 = \tilde{A}_4$ приводиться до рівняння четвертої степені:

$$\tilde{A}_4^4 + B_1 \tilde{A}_4^3 + B_2 \tilde{A}_4^2 + B_3 \tilde{A}_4 + B_4 = 0. \quad (5.60)$$

Рівняння (5.60) розв’яжемо методом Декарта-Ейлера. Не будемо приводити розв’язки, оскільки вони мають значний об’єм. Зазначимо лише, що рівняння (5.60) має два дійсних та два комплексно-спряжених розв’язки. Переходячи до зворотної заміни $A_4 = \pm \sqrt{\tilde{A}_4}$ можемо знайти вісім коренів рівняння (5.60). Надалі оберемо лише один – дійсний та додатний корінь. Крім того, для однозначного визначення коефіцієнта A_9 знак перед коренем у виразі (5.58) оберемо „+”. Таким чином, всі комплексні та від’ємні значення коефіцієнтів A_4 A_9 , які задовольняють системі рівнянь (5.55) відкидаємо, оскільки вони можуть призвести до нестійкості динамічної системи „кран-вантаж”.

Вираз (5.54) дає змогу знайти функцію φ , яка є першою похідною керування u за часом. Нам необхідно отримати саме функцію керування у такому вигляді $u = u(y_0, y_1, y_2, y_3)$. Для цього проінтегруємо вираз (5.54):

$$\begin{aligned} u &= \int \varphi dt = -\frac{A_4}{\delta_5} \int u dt - \frac{A_{10}}{2\delta_5} \int y_3 dt - \frac{A_9}{2\delta_5} \int y_2 dt - \frac{A_7}{2\delta_5} \int y_1 dt = \\ &= -\frac{A_4}{\delta_5} y_3 - \frac{A_{10}}{2\delta_5} y_2 - \frac{A_9}{2\delta_5} y_1 - \frac{A_7}{2\delta_5} y_0 + C, \end{aligned} \quad (5.61)$$

де C - постійна інтегрування. Для знаходження постійної інтегрування необхідно розв'язати наступне рівняння $u(0) = u_0$, яке у розгорнутому вигляді прийме такий вид:

$$-\frac{A_4}{\delta_5} y_3(0) - \frac{A_{10}}{2\delta_5} y_2(0) - \frac{A_9}{2\delta_5} y_1(0) - \frac{A_7}{2\delta_5} y_0(0) + C = u_0. \quad (5.62)$$

Знайшовши розв'язок рівняння (5.62) та підставивши його у вираз (5.61), остаточно матимемо функцію керування u :

$$u = u_0 + \frac{A_4}{\delta_5} (y_3(0) - y_3) + \frac{A_{10}}{2\delta_5} (y_2(0) - y_2) + \frac{A_9}{2\delta_5} (y_1(0) - y_1) + \frac{A_7}{2\delta_5} (y_0(0) - y_0). \quad (5.62)$$

Таким чином, отримано функцію керування, яка крім фазових координат залежить також від початкового керування, яке можна задавати довільно. У частинному випадку $u_0 = 0$. Практично це означає відсутність динамічного зусилля приводу крана на початку його гальмування, що усуває небезпеку виникнення значних струмових навантажень у електроприводі та динамічних навантажень у механічній частині приводу і металоконструкції крана.

Для отриманого закону керування побудуємо графік (рис. 5.8). Крім того, приведемо тривимірний фазовий портрет динамічної системи у координатах $\Delta x - \Delta \dot{x} - \dot{x}_1$ (рис. 5.9). Точкою сірого кольору на рис. 5.9

позначено початок координат. На початку координат динамічна система має нульову енергію руху, тобто кран зупинився і коливання вантажу на канаті відсутні. Таким чином, задачу оптимального керування можна вважати розв'язаною. Однак, при її розв'язуванні не враховано обмеження (5.6), які накладені на керування. Фізично це означає, що електричний привод буде час від часу перевантажуватись або взагалі не в змозі буде реалізувати оптимальне керування. Тому необхідно врахувати обмеження (5.6).

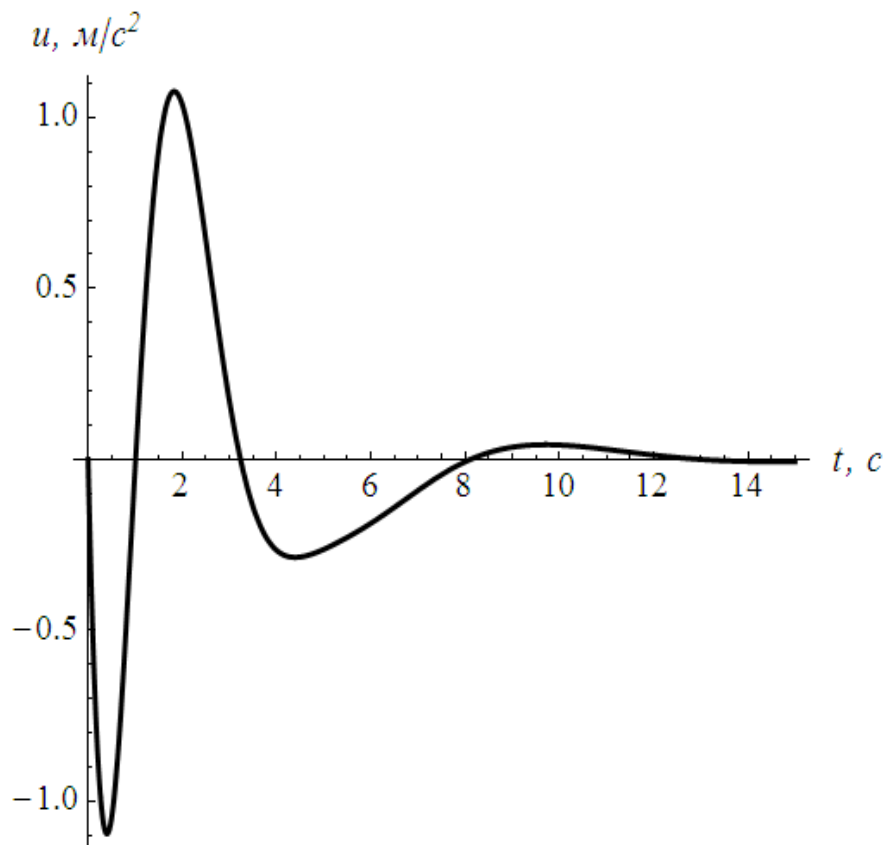


Рис. 5.8. Графік функції оптимального керування динамічною системою „кран-вантаж”

Врахувати обмеження типу (5.6) можна, якщо пропустити сигнал оптимального керування через нелінійний елемент типу „насичення”. Таке керування будемо називати квазіоптимальним, оскільки керування буде складатись із кусків оптимального керування та кусків максимального та мінімального значень керування.

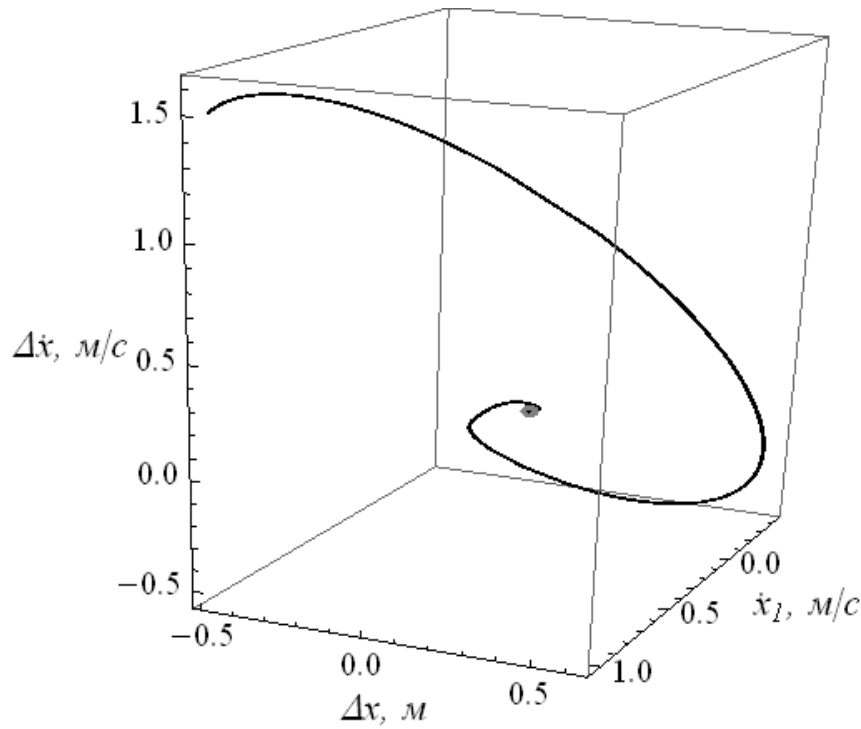


Рис. 5.9. Тривимірний фазовий портрет руху динамічної системи „кран-вантаж”

Аналітично квазіоптимальне керування виражається у такому виді:

$$u^* = \begin{cases} u, & \text{якщо } u_{\min} \leq u \leq u_{\max}; \\ u_{\min}, & \text{якщо } u < u_{\min}; \\ u_{\max}, & \text{якщо } u > u_{\max}, \end{cases} \quad (5.63)$$

де u^* - квазіоптимальне керування, яке задовольняє обмеження (5.6); u_{\min} , u_{\max} - відповідно мінімальне та максимальне значення керування. Приведемо графіки аналогічні приведеним вище на рис. 5.8 та рис. 5.9 для випадку $u_{\min} = -0,4 \text{ м/с}^2$ і $u_{\max} = 0,4 \text{ м/с}^2$. Із приведених графіків видно, що керування не виходить на верхню межу. Звузимо межі допустимих значень керування удвічі: $u_{\min} = -0,2 \text{ м/с}^2$ і $u_{\max} = 0,2 \text{ м/с}^2$. Фізично це означає, що потужність приводного двигуна зменшується удвічі. Отже, з'являється можливість для приводу крана проектувати електродвигун меншої потужності. Однак, як видно із рис. 5.9. та рис. 5.10, при цьому збільшується тривалість перехідного процесу. Таким чином, ціною збільшення тривалості перехідного процесу можна зменшити потужність приводу крана.

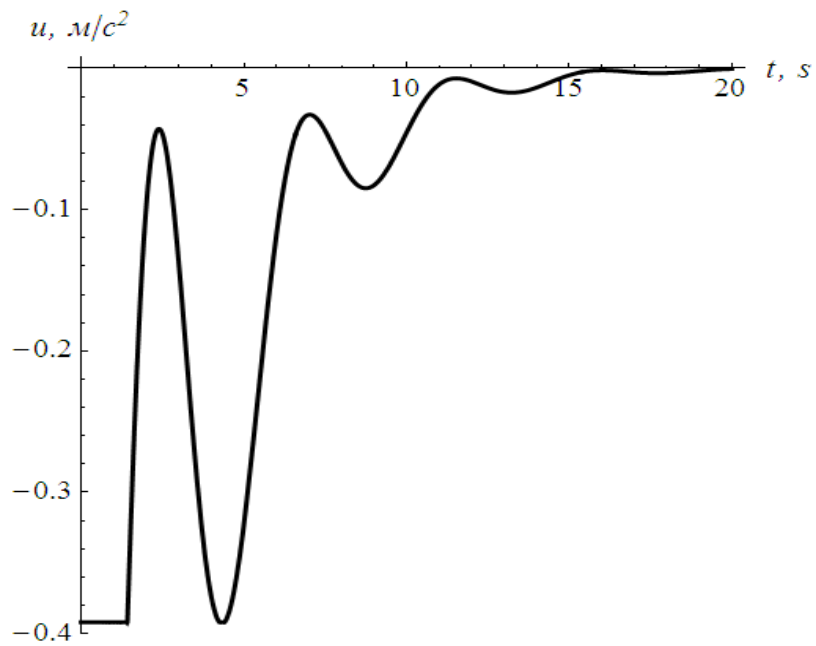


Рис. 5.10. Графік функції квазіоптимального керування динамічною системою „кран-вантаж” при врахуванні обмеження (5.6) $u_{\min} = -0,4 \text{ м/с}^2$ і

$$u_{\max} = 0,4 \text{ м/с}^2$$

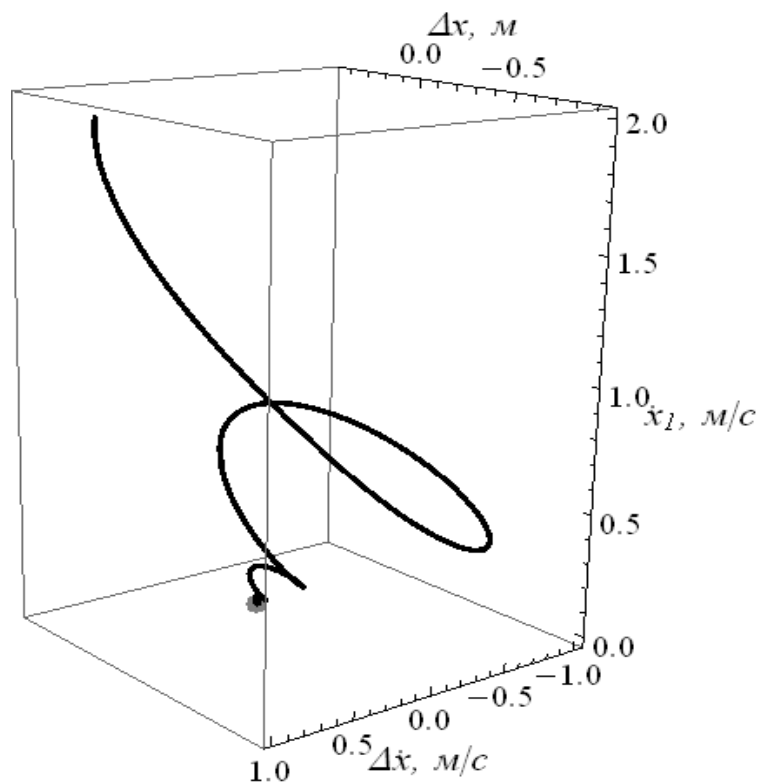


Рис. 5.11. Тривимірний фазовий портрет руху динамічної системи „кран-вантаж” при керуванні (5.63) ($u_{\min} = -0,4 \text{ м/с}^2$ і $u_{\max} = 0,4 \text{ м/с}^2$)

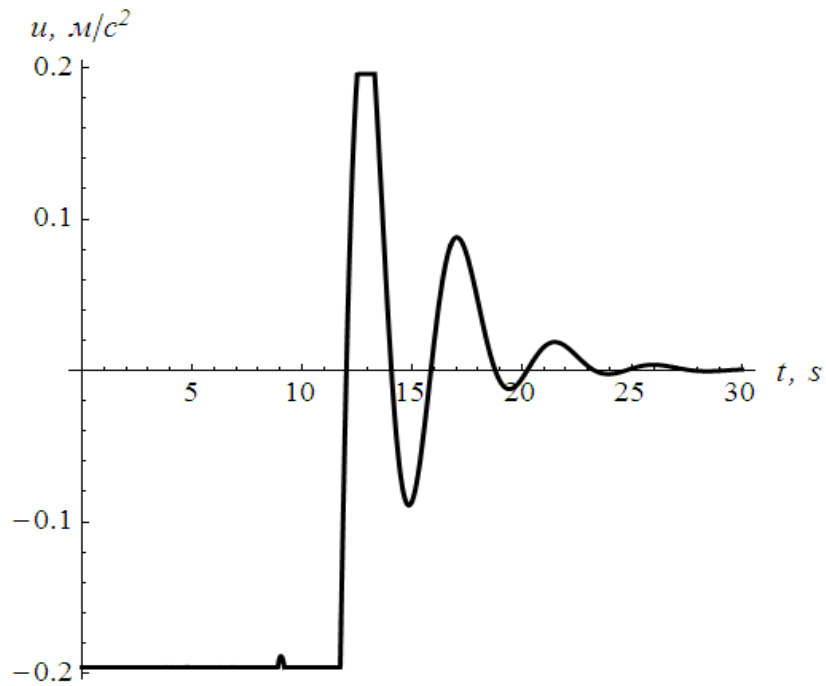


Рис. 5.12. Графік функції квазіоптимального керування динамічною системою „кран-вантаж” при врахуванні обмеження (5.6) ($u_{\min} = -0,2 \text{ м/с}^2$ і $u_{\max} = 0,2 \text{ м/с}^2$)

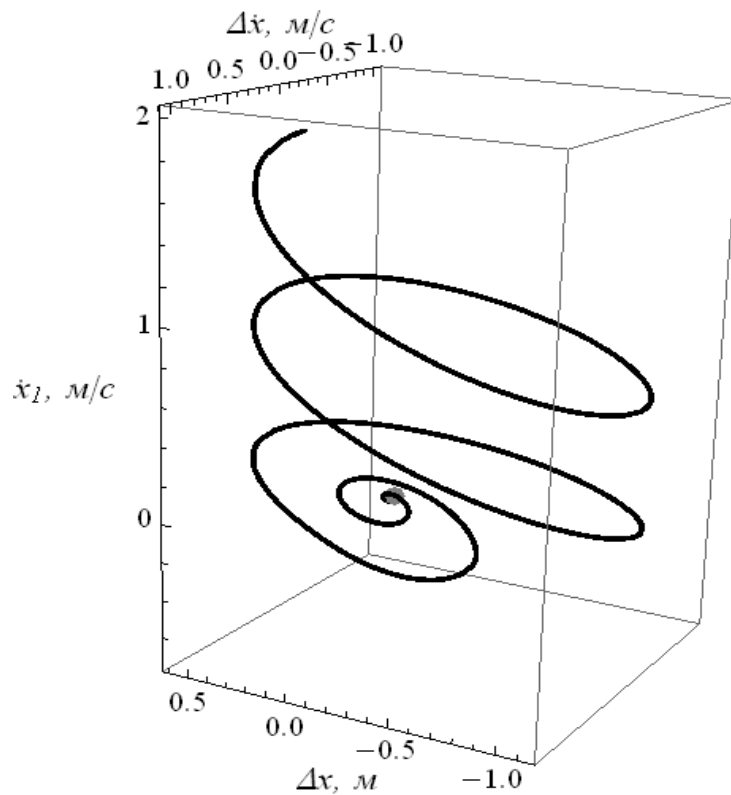


Рис. 5.13. Тривимірний фазовий портрет руху динамічної системи „кран-вантаж” при керуванні (5.63) ($u_{\min} = -0,2 \text{ м/с}^2$ і $u_{\max} = 0,2 \text{ м/с}^2$)

Із рис. 5.13 видно недолік звуження допустимого діапазону значень керування: зміна знаку швидкості крана. Крім того, можна вказати ще один недолік керування як оптимального так і квазіоптимального: невелике значення керування призводить до того, що фазові координати динамічної системи „кран-вантаж” є незначними. Тобто у кінці перехідного процесу керування є „слабким”. Можливим способом вирішення цієї проблеми є варіація вагових коефіцієнтів k_j , які входять у структуру критерію оптимізації перехідного процесу.

5.4. Оптимізація режимів руху кранових механізмів із приводом постійного струму методом динамічного програмування

Велика кількість вантажопідійомних машин обладнана електричним приводом постійного струму. Це пояснюється насамперед простотою регулювання та високими динамічними показниками двигуна постійного струму. До недоліків такого приводу, як правило, відносять: низький ККД, погані масогабаритні показники, необхідність потужного джерела постійного струму [19, 37,38]. Саме ці недоліки двигуна постійного струму дозволили приводу змінного струму зайняти основне місце у крановому електроприводі. Однак, двигуни постійного струму все ще використовуються у багатьох кранах, особливо металургійних.

При проведенні оптимізації режимів руху вантажопідійомних машин із двигунами постійного струму необхідно, окрім механічної частини, розглядати також електричні процеси, які відбуваються у двигуні. Таким чином, потрібно проводити оптимізацію режимів руху вантажопідійомного крана як єдиної електромеханічної системи [19]. Врахування особливостей системи керування краном (дискретність роботи системи, різноманітні перешкоди у передачі сигналів, проблеми використання датчиків та силових перетворювачів, різноманітні нюанси щодо програмної реалізації алгоритмів керування тощо) приводить до задачі оптимізації мехатронної кранової

системи, яка є значно ширшою. Складну задачу оптимізації керування краном як мехатронною системою розбивають на декілька підзадач, одну з яких розв'язано у даному дослідженні. Однак вже на етапі розбиття складної задачі оптимізації керування мехатронною крановою системою необхідно враховувати особливості використання результатів розв'язку простішої підзадачі оптимізації електромеханічної частини крану. Однією із особливостей є те, що при роботі системи необхідно використовувати датчики, які формують сигнали зворотного зв'язку. Отже, оптимальне керування, яке є розв'язком підзадачі оптимізації електромеханічної частини крана, повинно бути у вигляді зворотного зв'язку. Знайти таке керування можна при використанні методу динамічного програмування [17].

Для багатьох кранових механізмів їх рух може бути описаний диференціальним рівнянням другого порядку. Тому для цих механізмів можна використати відомі результати оптимізації режимів руху електроприводів постійного струму [39-44]. Серед цих робіт можна знайти ті [44], у яких виконано синтез оптимального керування у вигляді зворотного зв'язку. Однак, постановка задач, які розв'язані у вказаних роботах є частинною. Тобто вона не відбиває всіх основних показників руху електромеханічної системи крана. Необхідно отримати більш загальні результати, для того, щоб мати способи покращення роботи кранових механізмів (збільшення кількості показників у критерії дає змогу більш точно встановити ефективні комплексні критерії для різних кранових механізмів, які працюють у різних умовах оточуючого середовища та у різних режимах).

Приводом багатьох механізмів вантажопідійомних машин є електричний постійного струму на базі двигуна із незалежним збудженням. Такий двигун описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} U = \dot{\phi}c\Phi + I_{\text{я}}R_{\text{я}} + LI_{\text{я}}; \\ I_{\text{я}}c\Phi = J\ddot{\phi} + M_{\text{он}}, \end{cases} \quad (5.64)$$

де U - напруга на якірній обмотці двигуна; φ - кут повороту вала двигуна; c - коефіцієнт, який визначається конструкцією двигуна ($c = \frac{pN}{2\pi a}$); p - число пар полюсів двигуна; N - число активних провідників обмотки якоря; a - число паралельних віток обмотки якоря; Φ - магнітний потік двигуна (у даній задачі приймаємо, що магнітний потік є постійною величиною); $I_{\text{я}}$ - струм якірного кола двигуна; $R_{\text{я}}$ - опір якірного кола двигуна; L - індуктивність обмотки якоря; J - приведений до вала двигуна момент інерції рухомих частин механізму; $M_{\text{он}}$ - момент статичного опору приведений до вала двигуна і пропорційний величині W .

Згідно першого закону комутації електричних кіл струм не може стрибком зміни своє значення. Аналізуючи систему рівнянь (5.64) можна прийти до висновку, що момент двигуна також не може стрибкоподібно змінитись. Якщо розглядається режим пуску механізму із приводом постійного струму, то необхідно, щоб виконувались умови:

$$\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = I_{\text{я}}(0) = 0. \quad (5.65)$$

Доцільно етап розгону двигуна розглядати як двоетапний. На першому етапі відбувається збільшення струму і, відповідно, моменту на валу двигуна до величини моменту статичного опору. При цьому двигун знаходиться в стані спокою. На другому етапі вал двигуна починає обертатись. Для розгону двигуна математична модель має таку форму:

- для першого етапу розгону:

$$\begin{cases} U = I_{\text{я}}R_{\text{я}} + LI_{\text{я}}\dot{}; \\ I_{\text{я}}c\Phi \leq M_{\text{он}}; \end{cases} \quad (5.66)$$

- для другого етапу розгону – система рівнянь (5.1).

Для гальмування двигуна справедлива система рівнянь (5.1).

Зазначимо, що формули (5.64)-(5.66) включають різні величини (механічні та електричні). Необхідно привести всі величини, наприклад, до механічних. У цьому випадку для двомасової моделі механізму із приводом постійного струму маємо таку математичну модель:

$$\begin{cases} U = \dot{x}A_1 + FA_2 + \dot{F}A_3; \\ m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = F - W; \\ x_1 = x_2 + \ddot{x}_2\Omega_0^{-2}. \end{cases} \quad (5.67)$$

При врахуванні таких позначень: $x_2 = z_1$, $\frac{(U - A_2W)\Omega_0^2}{m_1} = u_2$ (керування для математичної моделі (5.67)), $B_1 = \frac{A_1\Omega_0^2}{A_3m_1}$, $B_2 = \frac{A_2\Omega^2}{A_3}$ (Ω - частота власних коливань рухомого математичного маятника $\Omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1l}}$), $B_3 = \frac{A_1}{m_1A_3} + \Omega^2$, $B_4 = \frac{A_2}{A_3}$, систему рівнянь (5.67) представимо у формі рівнянь Коші:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2; \\ \dot{z}_2 = z_3; \\ \dot{z}_3 = z_4; \\ \dot{z}_4 = z_5; \\ \dot{z}_5 = u_2 - B_1z_2 - B_2z_3 - B_3z_4 - B_4z_5. \end{cases} \quad (5.68)$$

Представлення математичної моделі механізмів вантажопідійомних машин у вигляді систем рівнянь Коші необхідно для подальшого визначення оптимальних законів руху цих механізмів.

Для двомасової моделі будемо використовувати наступний критерій оптимізації:

$$I = \int_0^T \left(\sum_{i=1}^3 z_i^2 \delta_i + \left(z_3(m_1 + m_2) + z_5 \frac{m_1}{\Omega_0^2} \right)^2 \delta_4 + u_2^2 \delta_{u_2} \right) dt \rightarrow \min, \quad (5.69)$$

де δ_4 - ваговий коефіцієнт, який визначає важливість динамічної складової приводного зусилля у комплексному критерії I_2 ; δ_{u_2} - ваговий коефіцієнт,

який визначає важливість величини складової керування динамічною системою (5.68).

З'ясуємо сутність критерію (5.69). Перші два доданки у виразі (5.69), визначають величину „відстані” до мети керування, яка полягає у переведенні динамічної системи із одного заданого стану у інший. Крім того, два перших доданки можна трактувати як величину питомої енергії коливань вантажу відносно точки його підвісу (відносно рухомого крана). Третій доданок у формулі (5.69) обмежує величину амплітуди коливань вантажу відносно точки підвісу. Таке обмеження відіграє важливу роль у деяких технологічних процесах, наприклад, при переміщенні розплавленого металу або хімічно активних речовин. Четвертий доданок у виразі (5.69) визначає величину динамічної складової приводного зусилля. Мінімізація цієї складової дає змогу обмежити динамічні зусилля у приводі та зменшити змінні електричні втрати у колі якоря двигуна. Останній доданок у виразі (5.69) зменшує „витрати” на керування динамічною системою.

Метою керування у теорії оптимального керування є переведення динамічної системи із одного стану (множину станів) у інший (іншу множину станів) [17, 39]. Для того, щоб остаточно формалізувати приведену вище задачу необхідно задати для них мету керування. Така мета полягає у переведенні динамічної системи, що описуються системою рівнянь (5.68), із початкового стану у кінцевий стан. Початковий та кінцевий стани характеризуються векторами початкових та кінцевих умов, які представляються у такому вигляді:

$$\begin{cases} z_1(0) = z_{10}; z_2(0) = z_{20}; z_3(0) = z_{30}; z_4(0) = z_{40}; z_5(0) = z_{50}; \\ z_1(T) = z_2(T) = z_3(T) = z_4(T) = z_5(T) = 0. \end{cases} \quad (5.70)$$

Таким чином, здійснена постановка оптимізаційної задачі.

Для розв'язування другої оптимізаційної задачі використаємо апарат динамічного програмування. Функціональне рівняння Беллмана для даної задачі буде мати такий вигляд:

$$\min \left[\sum_{i=1}^3 z_i^2 \delta_i + \left(z_3(m_1 + m_2) + z_5 \frac{m_1}{\Omega_0^2} \right)^2 \delta_4 + u_2^2 \delta_{u_2} + \sum_{q=1}^4 \frac{\partial S}{\partial z_q} z_{q+1} + \frac{\partial S}{\partial z_5} \left(u_2 - \sum_{j=1}^4 B_j z_{j+1} \right) \right] = 0. \quad (5.71)$$

Мінімум лівої частини рівняння (5.71) будемо шукати по керуванню u_2 , для чого продиференціюємо її за u_2 та прирівняємо отримане до нуля:

$$2\delta_{u_2} u_2 + \frac{\partial S}{\partial z_5} = 0. \quad (5.72)$$

Знайдемо з рівняння (5.72) керування u_2 :

$$u_2 = -\frac{1}{2\delta_{u_2}} \frac{\partial S}{\partial z_5} \quad (5.73)$$

та підставимо отримане у рівняння (5.71), в результаті чого будемо мати:

$$\sum_{i=1}^3 z_i^2 \delta_i + \left(z_3(m_1 + m_2) + z_5 \frac{m_1}{\Omega_0^2} \right)^2 \delta_4 - \frac{1}{4\delta_{u_2}} \left(\frac{\partial S}{\partial z_5} \right)^2 + \sum_{q=1}^4 \frac{\partial S}{\partial z_q} z_{q+1} + \frac{\partial S}{\partial z_5} \sum_{j=1}^4 B_j z_{j+1} = 0. \quad (5.74)$$

Рівняння (5.74) є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Будемо шукати його розв'язок у вигляді квадратичної форми:

$$S = D_1 z_1^2 + D_2 z_2^2 + D_3 z_3^2 + D_4 z_4^2 + D_5 z_5^2 + D_6 z_1 z_2 + D_7 z_1 z_3 + D_8 z_1 z_4 + D_9 z_1 z_5 + D_{10} z_2 z_3 + D_{11} z_2 z_4 + D_{12} z_2 z_5 + D_{13} z_3 z_4 + D_{14} z_3 z_5 + D_{15} z_4 z_5. \quad (5.75)$$

де D_1, D_2, \dots, D_{15} - постійні коефіцієнти, які необхідно визначити. Візьмемо частинні похідні з виразу (5.74) за параметрами z_1, z_2, z_3, z_4 та z_5 :

$$\frac{\partial S}{\partial z_1} = 2D_1 z_1 + D_6 z_2 + D_7 z_3 + D_8 z_4 + D_9 z_5, \quad (5.76)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z_2} = D_6 z_1 + 2D_2 z_2 + D_{10} z_3 + D_{11} z_4 + D_{12} z_5, \quad (5.77)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z_3} = D_7 z_1 + D_{10} z_2 + 2D_3 z_3 + D_{13} z_4 + D_{14} z_5, \quad (5.78)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z_4} = D_8 z_1 + D_{11} z_2 + D_{13} z_3 + 2D_4 z_4 + D_{15} z_5, \quad (5.79)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z_5} = D_9 z_1 + D_{12} z_2 + D_{14} z_3 + D_{15} z_4 + 2D_5 z_5, \quad (5.80)$$

Підставимо вирази (5.76)-(5.80) у рівняння (5.74) і після винесення спільних множників за дужки та прирівнювання їх до нуля отримаємо систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} -B_2 D_{12} - B_1 D_{14} + 2D_2 + D_7 - \frac{D_{12} D_{14}}{2\delta_{u_2}} = 0; \\ D_{10} - B_3 D_{12} - B_1 D_{15} + \frac{D_{12} D_{15}}{2\delta_{u_2}} = 0; \\ D_{11} - B_4 D_{12} - 2B_1 D_5 + D_9 - \frac{D_{12} D_5}{\delta_{u_2}} = 0; \\ 2D_1 - B_1 D_9 - \frac{D_{12} D_9}{2\delta_{u_2}} = 0; \\ D_6 - B_2 D_9 - \frac{D_{14} D_9}{2\delta_{u_2}} = 0; \\ D_7 - B_3 D_9 - \frac{D_{15} D_9}{2\delta_{u_2}} = 0; \\ D_8 - B_4 D_9 - \frac{D_5 D_9}{\delta_{u_2}} = 0; \\ -B_1 D_{12} + D_6 + \delta_2 - \frac{D_{12}^2}{4\delta_{u_2}} = 0; \\ D_{10} - B_2 D_{14} + \delta_3 + (m_1 + m_2)^2 \delta_4 - \frac{D_{14}^2}{4\delta_{u_2}} = 0; \\ D_{13} + B_3 D_{15} - \frac{D_{15}^2}{4\delta_{u_2}} = 0; \\ D_{14} - B_4 D_{15} + 2D_4 - 2B_3 D_5 - \frac{D_{15} D_5}{\delta_{u_2}} = 0; \\ \delta_1 - \frac{D_9^2}{4\delta_{u_2}} = 0; \\ D_{11} - B_3 D_{14} + B_2 D_{15} + 2D_3 - \frac{D_{14} D_{15}}{2\delta_{u_2}} = 0; \\ D_{12} + D_{13} - B_4 D_{14} - 2B_2 D_5 - \frac{D_{14} D_{15}}{\delta_{u_2}} + \frac{2m_1(m_1 + m_2)\delta_4}{\Omega_0^2} = 0; \\ D_{15} - 2B_4 D_5 - \frac{D_5^2}{\delta_{u_2}} + \frac{m_1^2 \delta_4}{\Omega_0^2} = 0. \end{array} \right. \quad (5.81)$$

Систему рівнянь (5.81) розв'язати у аналітичному вигляді неможливо, тому спростимо її. Для цього подамо вираз (5.73), із врахуванням формули (5.80), у такому вигляді:

$$u_2 = -\frac{D_9 z_1 + D_{12} z_2 + D_{14} z_3 + D_{15} z_4 + 2D_5 z_5}{2\delta_{u_2}}. \quad (5.82)$$

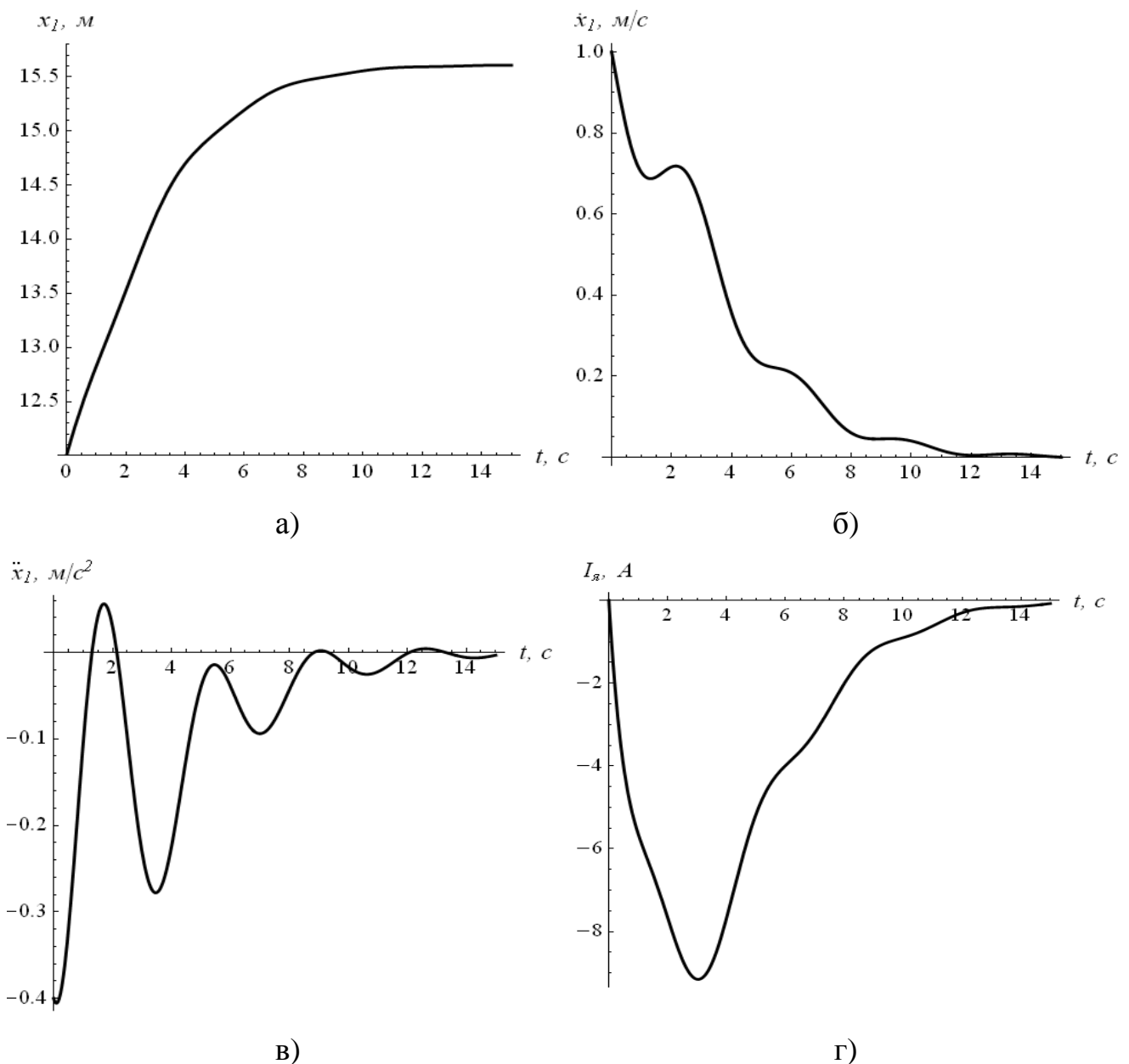
Таким чином, для знаходження невідомої функції керування u_2 необхідно знайти лише п'ять коефіцієнтів D_5 , D_9 , D_{12} , D_{14} , D_{15} . Для знаходження цих коефіцієнтів необхідно сформулювати п'ять рівнянь. Дванадцять рівнянь системи (5.81) містить лише один невідомий коефіцієнт D_9 і тому це рівняння є незалежним від інших. Можемо записати чому рівний коефіцієнт D_9 , відкидаючи від'ємний корінь рівняння:

$$D_9 = 2\sqrt{\delta_1 \delta_{u_2}}. \quad (5.83)$$

Вибір саме додатного кореня пов'язаний із вимогою забезпечення стійкості динамічної системи. Таким чином, потрібно сформулювати систему із чотирьох рівнянь та розв'язати її. Останнє рівняння системи (5.81) містить невідомі шукані коефіцієнти D_5 та D_{15} . Три потрібні рівняння, які б містили лише невідомі коефіцієнти D_5 , D_{12} , D_{14} , D_{15} можна сформулювати із системи (5.81). Не будемо детально описувати процес формування цих рівнянь, а запишемо остаточно систему рівнянь:

$$\begin{cases} D_{15} - 2B_4 D_5 - \frac{D_5^2}{\delta_{u_2}} + \frac{m_1^2 \delta_4}{\Omega_0^2} = 0; \\ B_3 D_{12} + B_1 D_{15} - B_4 D_9 - \frac{D_5 D_9}{\delta_{u_2}} + \frac{D_{12} D_{15}}{2\delta_{u_2}} - B_2 D_{14} + \delta_3 - (m_1 + m_2)^2 \delta_4 - \frac{D_{14}^2}{4\delta_{u_2}} = 0; \\ B_1 D_{12} - \delta_2 + \frac{D_{12}^2}{4\delta_{u_2}} - B_2 D_9 - \frac{D_{14} D_9}{2\delta_{u_2}} = 0; \\ D_{12} + B_3 D_{15} + \frac{D_{15}^2}{4\delta_{u_2}} - B_4 D_{14} - 2B_2 D_5 - \frac{D_{14} D_5}{\delta_{u_2}} + \frac{2m_1(m_1 + m_2)\delta_4}{\Omega_0^2} = 0. \end{cases} \quad (5.84)$$

Систему рівнянь (5.84) не вдається розв'язати у аналітичному вигляді. Тому знаходимо корені системи рівнянь (5.84) чисельним методом. Обираємо із усієї сукупності коренів лише додатні, оскільки при цьому динамічна система буде стійкою. Знайшовши корені підставимо їх у вираз (5.82), а вираз (5.82) у систему (5.68). Чисельно проінтегруємо систему диференціальних рівнянь (5.68) та побудуємо графіки кінематичних та електричних функцій (рис. 5.14). Графіки побудовані при таких параметрах динамічної системи: $m_1 = 1000 \text{ кг}$, $m_2 = 2000 \text{ кг}$, $\eta = 0,8$, $r = 0,3 \text{ м}$, $i = 9,7$, $R_{\text{я}} = 0,54 \text{ Ом}$, $\Phi = 9,2 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}$, $p = 2$, $a = 1$, $N = 810 \text{ витка}$, $L = 10 \text{ м}$.



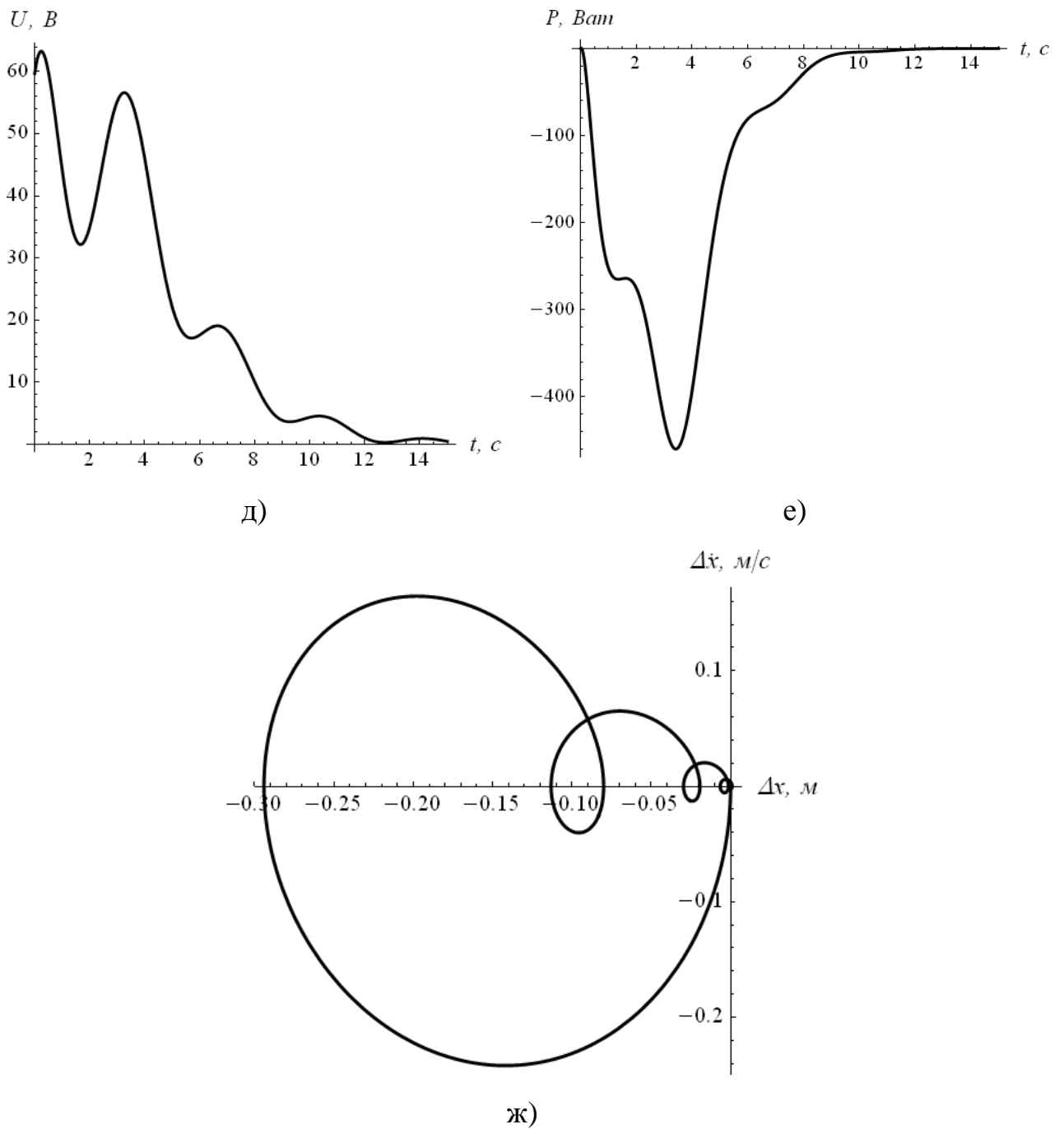


Рис. 5.14. Графіки функцій переміщення маси m_1 (а), швидкості маси m_1 (б), прискорення маси m_1 (в), струму (г), напруги (д) двигуна та споживаної ним потужності (е), фазовий портрет коливань маси m_2 відносно маси m_1 (ж) при гальмуванні динамічної кранової системи

Для другої оптимізаційної задачі двигун працює у режимі рекуперативного гальмування, що накладає певні вимоги на тривалість перехідного процесу та потужність джерела живлення приводу постійного

струму. Із графіків на рис. 5.14 видно, що у кінці гальмування маса m_1 має нульову швидкість і коливання маси m_2 відносно маси m_1 згасають. Таким чином загальна енергія руху системи рівна нулю і механізм зупиняється із затуханням небажаних коливань.

Всі кінематичні та електричні функції динамічної системи мають плавний характер зміни, що зменшує динамічну навантаженість кранового механізму та подовжує його строк служби.

Варто зазначити, що цю ж задачу можна представити у іншій постановці. Наприклад, у якості керування вибрати ЕРС самоіндукції двигуна. Можна показати, що при такій постановці задачі коефіцієнти D_5 , D_9 , D_{12} , D_{14} , D_{15} можна знайти у аналітичному вигляді. Знаходження коефіцієнтів зводиться до розв'язання алгебраїчного рівняння четвертого степеня відносно одного із коефіцієнтів D_5 , D_{12} , D_{14} , D_{15} (коефіцієнт D_9 визначається із незалежного квадратного рівняння). Звідси можна зробити висновок: постановка задачі визначає складність її розв'язку, однак апріорі невідомо, яка із постановок оптимізаційної задачі буде краща у плані проведення розрахунків.

Висновки до п'ятого розділу

1. Використання динамічного програмування дозволяє знайти оптимальне керування рухом візка у формі зворотного зв'язку. Крім того, встановлено, що для усунення коливань вантажу можна використовувати три фазові координати, які у кінці руху візка рівні нулю. Це дало змогу полегшити розв'язування поставленої задачі. Використання синтезованого у дослідженні оптимального керування дає змогу оптимізувати увесь процес руху крана.
2. Синтезовано оптимальне керування рухом кранового візка з вантажем при обмеженні на величину керування. Метод, який використовується для синтезу – аналітичний (динамічне програмування), однак вирахування обмеження на керування проходить дискретно. Методика дискретного обмеження керування може бути поширена також на інші динамічні та кінематичні показники руху динамічної системи. Отримане керування може бути використане для підвищення продуктивності роботи прольотних кранів, особливо, якщо вони працюють у стохастичних зовнішніх середовищах (наприклад, портові перевантажувачі).
3. Використання методу динамічного програмування дає змогу синтезувати оптимальне керування у вигляді зворотного зв'язку без врахування обмежень на величину керування. Використання нелінійних елементів типу „насичення” дозволяє отримати квазіоптимальне керування, що у кожний момент часу задовольняє обмеження накладені на керування. Таке квазіоптимальне керування у вигляді зворотного зв'язку складається із кусків оптимального керування та границь обмеження допустимої області. Варіація вагових коефіцієнтів у структурі оптимізаційного критерію є можливим способом вирішення проблеми синтезу оптимального керування, яке б завжди знаходилось у допустимих межах, навіть у випадку, коли ці

межі є функцією часу та фазових координат динамічної системи „кран-вантаж”.

4. Керування у вигляді зворотного зв'язку вигідно застосовувати там, де зовнішні впливи на той чи інший механізм вантажопідйомної машини наперед непередбачувані. При цьому реалізація такого керування покладається на мехатронну систему, яка обладнана відповідними датчиками для організації зворотних зв'язків. Для двомасової динамічної моделі необхідні датчики фазових координат мас m_1 та m_2 (положення або швидкість) і споживаного двигуном струму (струм якірного кола). Отримані оптимальні закони керування можуть бути реалізовані на механізмах, які представляються двомасовими динамічними моделями із електричним приводом постійного струму. У результаті реалізації отриманих у даній роботі керувань гарантується зменшення небажаних характеристик руху системи, наприклад, втрат у колі якоря двигуна. Всі кінематичні, динамічні та електричні функції руху динамічних систем мають плавний характер зміни, що дозволяє експлуатувати механізм у „м'якому” режимі. Розв'язання оптимізаційних задач можна виконувати також і в іншій постановці. Для цього необхідно використати у якості керування ЕРС самоіндукції двигуна. У такій постановці задачу оптимізації керування двомасовою динамічною моделлю можна розв'язати у аналітичному вигляді.

Література до п'ятого розділу

1. Crane Control and Automation Global Solutions. [Electronic Resource]. – Mode of access : URL:http://www.tmeic-ge.com/upload/library_docs/english/TMG-1424_Crane_Control_Industry-LowRes_1249656112.pdf – Title from the screen.
2. Комаров М.С. Динамика грузоподъемных машин / М.С. Комаров – М.: Машиностроение, 1969. – 206 с.
3. Казак С.А. Динамика мостовых кранов / С.А. Казак – М.: Машиностроение, 1968. – 331 с.
4. Мисюра В.П. Уменьшение колебаний груза при автоматизированном режиме работы кранов-перегрузателей / В.П. Мисюра, И.Н. Васильченко // Механизация и автоматизация производства. – 1985. – №11. – С. 22-24.
5. Свиргун В.П. Разработка оптимальных законов управления мостовым грейферным краном и применение микропроцессорной системы для их реализации: автореф дисс. на соиск. степ. канд техн. наук: спец. 05.05.05 „Подъемно-транспортные машины” / В.П. Свиргун. – Х., 1989. – 15 с.
6. Смехов А.А. Оптимальное управление подъемно-транспортными машинами / А.А. Смехов, Н.И. Єрофєєв. – М.: Машиностроение, 1975. – 239 с.
7. Сохадзе А.Г. Мехатронная система грузоподъемного крана для автоматической стабилизации положения груза и управления его движением: дисс. на соиск. степ. канд. тех. наук: 05.02.05 / Сохадзе Александр Георгиевич. – Новочеркасск, 2006. – 218 с.
8. Терехов В.М. Системы управления электроприводов: учебник / Терехов В.М., Осипов О.И.; под ред. Терехова В.М. – Саратов: Изд. центр „Академия”, 2005. – 300 с.
9. Бушер В.В. Асинхронный электропривод подъемно-транспортных механизмов с микропроцессорным управлением: автореф. дисс. на

- соиск. степ. канд. техн. наук: спец. 05.09.03 „Электрические комплексы и системы, включая их управление и регулирование” / В.В. Бушер. – Одесса, 1993. – 16 с.
10. Мельникова Л.В. Автоматизация технологического процесса перемещения механизма с подвешенным грузом средствами микропроцессорного управления: дисс. на соиск. степ. канд техн. наук: 05.09.03 / Мельникова Любовь Васильевна. - Одесса, 2000. – 116 с.
 11. Преобразователь частоты Altivar 71 от Schneider Electric – оптимальное решение для применения в системах управления подъемно-транспортным оборудованием. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: http://www.schneider-electric.ua/ukraine/ua/products-services/offer-updates/news-viewer.page?c_filepath=/templatedata/Content/News/data/ua/local/automation_control/general_information/2009/07/20090722_altivar_71_schneider_electric_.xml. – Назва з екрана.
 12. Ловейкин В. С. Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин / Ловейкин В. С. – К.: УМК ВО, 1990. – 168 с.
 13. Тараненко В.Т., Момоджи В.Г. Прямой вариационный метод в краевых задачах динамики полета. – М.: Машиностроение, 1986. – 127 с.
 14. Хитрик В.Э. Методы динамической оптимизации механизмов машин-автоматов / В.Э. Хитрик. – Л.: из-во Ленинградского ун-та, 1974. – 116 с.
 15. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц– М.: Наука, 1969. – 424 с.
 16. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтнянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.
 17. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования / [перевод с англ. Митрофановой Н.М.,

- Первозванского А.А., Хусу А.П., Шалаевского О.В.] – М.: Наука, 1965. – 460 с.
18. Ловейкін В.С. Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич – К.; Ніжин: Видавець ПП Лисенко М.М., 2010. - 184 с.
 19. Герасимьяк Р.П. Анализ и синтез крановых электромеханических систем / Р.П. Герасимьяк, В.А. Лещёв. – Одесса.: СМІЛ, 2008. – 192 с.
 20. Базил Ш. Управление электроприводом циклически работающих механизмов горизонтального перемещения: дисс. на соиск. степ. канд. техн. наук: 05.09.03 / Базил Шафик. - Одесса, - 1993. – 186 с.
 21. Григоров О.В. Вантажопідйомні машини: навчальний посібник / О.В. Григоров, Н.О. Петренко. – Х.: НТУ „ХПІ”, 2006. – 304 с.
 22. Черноусько Ф.Л. Управление колебаниями / Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. - М.: Наука, 1980. - 384 с.
 23. Летов А.М. Динамика полета и управление / А.М. Летов.– М.: Наука, 1969. – 360 с.
 24. Корн Г. Справочник по высшей математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
 25. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю.П. Петров. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.
 26. Перестюк М.О. Варіаційне числення та методи оптимізації: навчальний посібник / М.О. Перестюк, О.М. Станжицький, О.В. Капустян, Ю.В. Ловейкін. – К.: Видавничо-поліграфічний центр „Київський університет”, 2010. – 144 с.
 27. Моделювання динаміки механізмів вантажопідйомних машин / [Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Пастушенко С.І.]. – К.-Миколаїв: РВВ МДАУ, 2004. – 286 с.
 28. Ромасевич Ю.О. Оптимізація перехідних режимів руху вантажного візка прольотних кранів: автореф. дис. здобуття степ. канд. техн. наук:

- спец. 05.05.05 „Піднімально-транспортні машини” / Ю.О. Ромасевич. – К., 2010. – 22 с.
29. Hanafy M. Omar, Control of Gantry and Tower Cranes. - Ph.D. Dissertation, Blacksburg, Virginia, Virginia Polytechnic Institute, 2003.
 30. Mahdieh A., Zarabadipour H., Mahdi A. S. “Anti-swing control of a double-pendulum-type overhead crane using parallel distributed fuzzy LQR controller“, International Journal of the Physical Sciences, vol. 6(35), 2011, pp. 7850 – 7856.
 31. Chengyuan C., Shihwei H., Kuohung C. “A practical fuzzy controllers scheme of overhead crane“, Journal of Control Theory and Applications, vol 3, 2005, pp. 266 – 270.
 32. Mohammad R., Akbarzadeh T., Amir H. “Fuzzy Modeling of Human Control Strategy for Head Crane“. In: IEEE International Fuzzy Systems Conference, 2001, pp. 1076-1079.
 33. Kogure H., Tojo M. “Recent developments in crain control“, Hitachi Rev., vol 6, 1978, pp. 315-320.
 34. SmartCrane™ Anti-Sway Crane Control Products, Product Descriptions, © 2009, 2010 SmartCrane, LLC.
 35. Siemens SIMOCRANE Crane Management System, System Manual, Valid for version 4.1, 2009.
 36. Kwakernaak H., Sivan R. Linear Optimal Control Systems, John Wiley & Sons Inc., United Stated of America, New York, 1972.
 37. Вешеневский С.Н. Характеристики двигателей в электроприводе / С.Н. Вешеневский. – 6-е изд., испр. – М.: Энергия”, 1977. – 432 с.
 38. Фираго Б.И. Теория электропривода / Б.И. Фираго. – Минск.: ЗАО „Техноперспектива”, 2004. – 527 с.
 39. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю.П. Петров. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.

40. Чистов В.П. Оптимальное управление электрическими приводами постоянного тока / В.П. Чистов, В.И. Бондаренко, В.А. Святославский. - М.: Энергия, 1968. – 232 с.
41. Герасимьяк Р.П. Оптимальные системы автоматического управления электроприводов / Р.П. Герасимьяк. – О.: ОГПУ, 1998. – 72 с.
42. Бор-Раменский А.Е. Быстродействующий электропривод / А.Е. Бор-Раменский, Б.Б. Воронецкий, В.А. Святославский. - М.: Энергия, 1969. – 168 с.
43. Ключев В.И. Ограничение динамических нагрузок электропривода / В.И. Ключев. – М.: Энергия, 1971. – 320 с.
44. Олейников В.А. Основы оптимального и экстремального управления / В.А. Олейников, Н.С. Зотов, А.М. Пришвин. – М.: Высшая школа, 1969. – 296 с.

РОЗДІЛ 6

АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ БАГАТОМАСОВИХ КРАНОВИХ МЕХАНІЗМІВ

6.1. Встановлення та аналіз умов усунення коливань елементів динамічної системи „мостовий кран-вантаж”

Мостові крани є одними із найпоширеніших вантажопідйомних машин. Вони часто використовуються на металургійних підприємствах, у хімічній та машинобудівній промисловості, ремонтних майстернях, на гідроелектростанціях тощо.

До роботи мостових кранів пред'являються високі вимоги щодо продуктивності, надійності роботи, енергоефективності, зручності експлуатації тощо. Забезпечити ці вимоги можна за рахунок оптимізації керування руху крана. Необхідно зазначити, що значний вплив на надійність роботи крана справляють динамічні навантаження, діючі у його елементах. Динамічні навантаження мають періодичний коливний характер, їх виникнення та еволюція пов'язані, в основному, із взаємоперетворенням кінетичної та потенціальної енергій у елементах крана. Бажано зменшити динамічні навантаження у крані. Цього можна досягнути за рахунок збільшення тривалості перехідних процесів, однак при цьому зменшується продуктивність роботи крана. Тому підвищити надійність мостового крана можна за рахунок зменшення тривалості коливань у елементах крана за рахунок їх усунення протягом перехідних режимів. Таким чином, динамічні навантаження будуть мінімізовані або повністю виключені протягом усталеного руху та після зупинки крана. Для цього, перш за все, потрібно виконати моделювання (динамічне та математичне) руху крана, а потім виконати аналіз умов, за яких коливання елементів крана усуваються до кінця перехідного процесу.

Динаміка мостових кранів досліджувалась багатьма авторами. У роботах [1-5] мостовий кран моделюється за допомогою найпростішої

двомасової моделі (модель „кран-вантаж”). У деяких із цих робіт вказані умови, які дозволяють усувати коливання вантажу протягом розгону та гальмування крана. Однак обмеженість динамічної моделі не дозволяє провести наліз високочастотних коливань металоконструкції та приводного механізму крана.

У роботі [6] виконано аналіз динамічних навантажень у елементах конструкції крана на основі чотири- та тримасових динамічних моделей. Моделювання впливу приводного механізму виконується із використанням статичної та динамічної механічних характеристик асинхронного приводу. Робиться висновок про прийнятність використання статичної механічної характеристики приводу для дослідження динамічних навантажень у елементах крана.

Для проведення дослідження використаємо приведену на рис. 6.1. розрахункову схему мостового крана із вантажем на гнучкому підвісі.

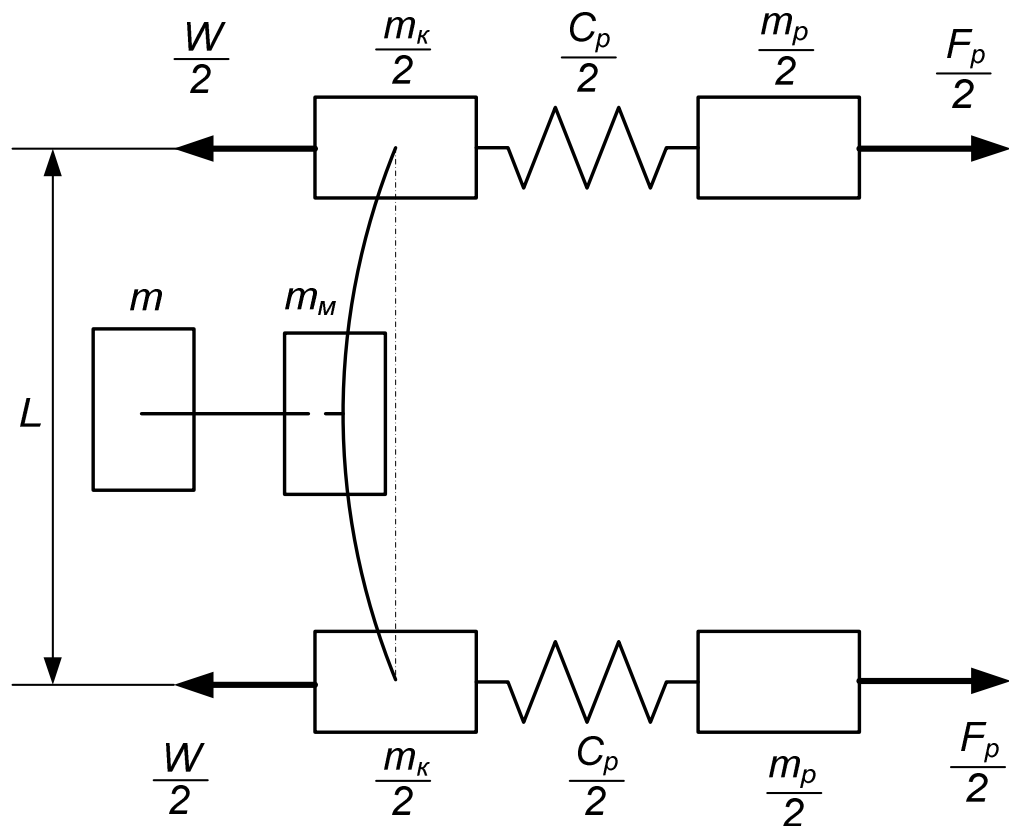


Рис. 6.1. Розрахункова схема мостового крана із вантажем на гнучкому підвісі

При побудові схеми приведеної на рис. 6.1 використані такі припущення:

- не враховані зазори в приводі. Нехтування ударами між ланками приводу внаслідок зазорів у кінематичних парах приводить до зменшення максимальних динамічних навантажень на 2...5 %;
- сила опору переміщенню крана прийнята постійною ($W=\text{const}$);
- пробуксовування приводних коліс відсутнє;
- вважаємо, що візок знаходиться всередині прольоту моста;
- форма деформації при неусталеному режимі переміщення мостового крана приймається подібною статичній деформації моста при навантаженні його силою в середині прольоту.

Розрахункова схема приведена на рис. 6.1 не зручна для проведення динамічного аналізу. Тому перейдемо від неї до іншої схеми, яку будемо використовувати для виведення математичної моделі руху мостового крана із вантажем на гнучкому підвісі. Для цього маси двох приводних механізмів замінюємо однією масою: $\frac{m_p}{2} + \frac{m_p}{2} = m_p$; маси двох кінцевих балок заміняємо однією масою: $\frac{m_k}{2} + \frac{m_k}{2} = m_k$; масу моста m'_m разом з масою візка m_g заміняємо однією масою: $m'_m + m_g = m_m$; жорсткості приводних механізмів заміняємо однією жорсткістю $\frac{c_p}{2} + \frac{c_p}{2} = c_p$; жорсткість моста c_m характеризується пружною піддатливістю моста в горизонтальній площині; рушійні сили двох приводних механізмів $\frac{F_p}{2}$ заміняємо однією силою: $\frac{F_p}{2} + \frac{F_p}{2} = F_p$; маси приводних механізмів заміняємо на одну масу:

$$\frac{m_p}{2} + \frac{m_p}{2} = m_p = 1,15 \cdot 2 \cdot J_p \frac{u^2}{R^2}, \quad (6.1)$$

де J_p - момент інерції ротора і гальмівного шківa з муфтою одного приводного механізму, u - передаточне число приводу; R - радіус приводного колеса; 1,15 – коефіцієнт, що враховує інерційність редуктора.

В результаті перетворень схеми отримаємо чотиримасову динамічну модель руху мостового крана із вантажем на гнучкому підвісі (рис. 6.2).

Приведена на рис. 6.2. модель описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_p \ddot{x}_p = F_p - c_p (x_p - x_k); \\ m_k \ddot{x}_k = c_p (x_p - x_k) - c_m (x_k - x_m) - W \text{sign}(\dot{x}_k); \\ m_m \ddot{x}_m = c_m (x_k - x_m) - \frac{mg}{l} (x_m - x); \\ \ddot{x} = \frac{g}{l} (x_m - x), \end{cases} \quad (6.2)$$

де W - опір переміщенню мостового крана прикладений до коліс кінцевих балок; l - довжина гнучкого підвісу вантажу; g - прискорення вільного падіння.

Будемо у подальшому розглядати режим розгону крана із вантажем на гнучкому підвісі зі стану спокою. Коливання вантажу вважаємо відсутніми.

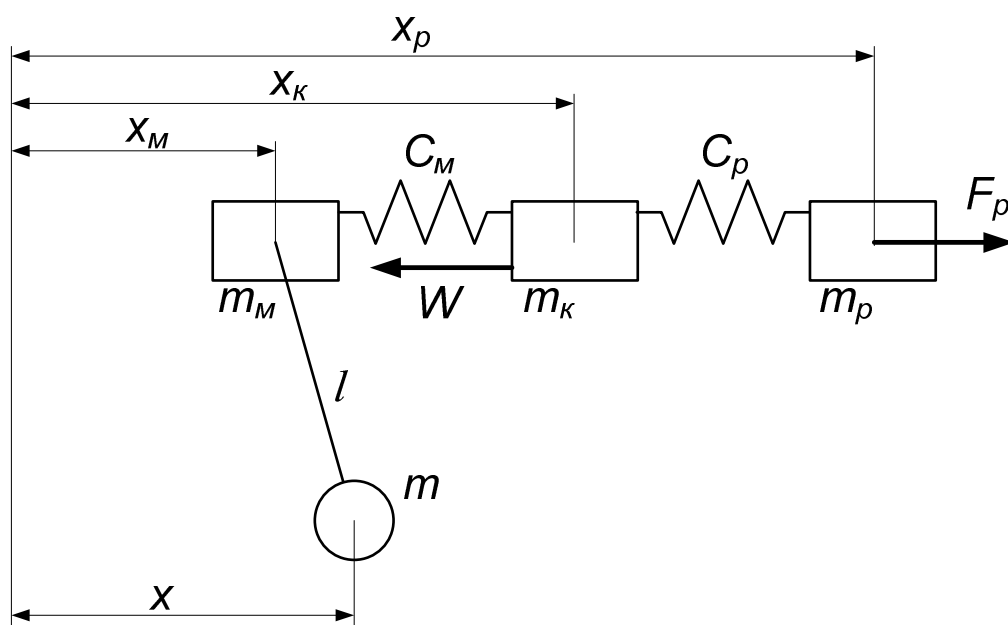


Рис. 6.2. Динамічна чотиримасова модель руху мостового крана із вантажем на гнучкому підвісі

Для того, щоб забезпечити відсутність коливань елементів крана і вантажу на гнучкому підвісі у момент виходу крана на усталену швидкість необхідно забезпечити такі умови:

$$\begin{cases} x_m(T) - x(T) = 0; \\ \dot{x}_m(T) - \dot{x}(T) = 0; \\ x_k(T) - x_m(T) = 0; \\ \dot{x}_k(T) - \dot{x}_m(T) = 0; \\ x_p(T) - x_k(T) = \frac{W}{c_p}; \\ \dot{x}_p(T) - \dot{x}_k(T) = 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

де T - тривалість перехідного процесу.

Парні умови системи (6.3) можна трактувати як рівність кінетичних енергій мас m , m_m , m_k та m_p . Непарні умови системи (6.3), за виключенням п'ятої умови, відповідають умові рівності нулю потенціальних енергій накопичених у пружних елементах та c_m та в „умовній” жорсткості $\frac{mg}{l}$, якою поєднані маси вантажу m та моста m_m . П'ята умова із системи рівнянь (6.3) означає, що жорсткість c_p навантажена силою статичного опору переміщенню мостового крана W .

Першу умову системи (6.3) можна переписати, використовуючи останнє рівняння (6.2), таким чином:

$$x_m(T) - x(T) = \frac{l}{g} \ddot{x}(T). \quad (6.4)$$

Диференціюючи останній вираз системи (6.2), можемо записати таку рівність:

$$\dot{x}_m(T) - \dot{x}(T) = \frac{l}{g} \ddot{x}(T). \quad (6.5)$$

Аналогічно, використовуючи третій та четвертий вирази системи (6.2), можемо записати третю та четверту умови системи (6.3):

$$\begin{cases} x_{\kappa}(T) - x_{\mathcal{M}}(T) = \frac{m_{\mathcal{M}} + m}{c_{\mathcal{M}}} \ddot{x}(T) + \frac{m_{\mathcal{M}}}{c_{\mathcal{M}}} \frac{l^{IV}}{g} x(T); \\ \dot{x}_{\kappa}(T) - \dot{x}_{\mathcal{M}}(T) = \frac{m_{\mathcal{M}} + m}{c_{\mathcal{M}}} \ddot{x}(T) + \frac{m_{\mathcal{M}}}{c_{\mathcal{M}}} \frac{l^V}{g} x(T). \end{cases} \quad (6.6)$$

Далі, приймаючи до уваги друге, третє та четверне рівняння математичної моделі (6.2), перепишемо п'яту та шосту мову системи (6.3) таким чином:

$$\begin{cases} x_p(T) - x_{\kappa}(T) = \frac{m_{\mathcal{M}} + m + m_{\kappa}}{c_{\mathcal{M}}} \ddot{x}(T) + \left[\frac{m_{\kappa}(m_{\mathcal{M}} + m)}{c_{\mathcal{M}} c_p} + \frac{m_{\mathcal{M}} + m_{\kappa}}{c_p} \frac{l}{g} \right]^{IV} x(T) + \\ + \frac{m_{\mathcal{M}} m_{\kappa}}{c_{\mathcal{M}} c_p} \frac{l^{VI}}{g} x(T) + \frac{W \operatorname{sign} \left(\dot{x}(T) + \left(\frac{m_{\mathcal{M}} + m}{c_{\mathcal{M}}} + \frac{l}{g} \right) \ddot{x}(T) + \frac{m_{\mathcal{M}}}{c_{\mathcal{M}}} \frac{l^V}{g} x(T) \right)}{c_p}; \\ \dot{x}_p(T) - \dot{x}_{\kappa}(T) = \frac{m_{\mathcal{M}} + m + m_{\kappa}}{c_{\mathcal{M}}} \ddot{x}(T) + \left[\frac{m_{\kappa}(m_{\mathcal{M}} + m)}{c_{\mathcal{M}} c_p} + \frac{m_{\mathcal{M}} + m_{\kappa}}{c_p} \frac{l}{g} \right]^V x(T) + \frac{m_{\mathcal{M}} m_{\kappa}}{c_{\mathcal{M}} c_p} \frac{l^{VII}}{g} x(T). \end{cases} \quad (6.7)$$

Аналіз виразів (6.4)-(6.7) дає змогу встановити кінцеві умови, які забезпечують усунення коливань елементів мостового крана та коливань вантажу на гнучкому підвісі у момент досягнення краном усталеної швидкості та за умови проходження ним шляху s :

$$\begin{cases} x(T) = s; \\ \dot{x}(T) = v; \\ \ddot{x}(T) = 0; \\ \ddot{\ddot{x}}(T) = 0; \\ x^{IV}(T) = 0; \\ x^V(T) = 0; \\ x^{VI}(T) = -\frac{W c_{\mathcal{M}} g}{m_{\mathcal{M}} m_{\kappa} l}; \\ x^{VII}(T) = 0. \end{cases} \quad (6.8)$$

Кількість умов (6.8) – вісім. Кількість початкових умов руху динамічної системи „мостовий кран-вантаж” також вісім: по дві умови (узагальнена координата та узагальнена швидкість) на кожен масу. Можна

показати, що початкові умови для мас m_m , m_k та m_p виражаються через вищі похідні за часом координати x :

$$\begin{cases} x_m(0) = f(x(0), \ddot{x}(0)); \\ \dot{x}_m(0) = f(\dot{x}(0), \ddot{x}(0)); \\ x_k(0) = f\left(x(0), \ddot{x}(0), x^{IV}(0)\right); \\ \dot{x}_k(0) = f\left(\dot{x}(0), \ddot{x}(0), \dot{x}^V(0)\right); \\ x_p(0) = f\left(x(0), \ddot{x}(0), x^{IV}(0), x^{VI}(0)\right); \\ \dot{x}_p(0) = f\left(\dot{x}(0), \ddot{x}(0), \dot{x}^V(0), \dot{x}^{VII}(0)\right). \end{cases} \quad (6.9)$$

Зазначимо, що передостанній вираз системи (6.9) справедливий за умови $Wsign(0) = 0$. Якщо розглядати процес розгону крана із вантажем, то всі початкові умови є нульовими, їх кількість рівна восьми. Таким чином, для синтезу закону руху крана із вантажем на гнучкому підвісі за умов усунення коливань елементів крана та вантажу до кінця перехідного процесу необхідно задати вісім початкових та вісім кінцевих умов. Кількість кінцевих умов можна зменшити на одиницю – не враховувати першу умову із системи (6.8). Виходячи з приведеного вище аналізу початкових на кінцевих умов, закон руху вантажу, який дозволяє усунути коливання елементів крана та вантажу до кінця перехідного процесу, повинен бути розв'язком диференціального рівняння щонайменше чотирнадцятого порядку. Таке диференціальне рівняння необхідно підібрати таким чином, щоб синтезований закон був, крім того, деякою екстремаллю. Отже диференціальне рівняння чотирнадцятого порядку повинно бути рівнянням Ейлера-Пуассона:

$$\sum_{i=0}^{n=7} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (6.10)$$

де P - підінтегральний вираз критерію оптимальності (критерій оптимальності є інтегральним функціоналом). Необхідно зазначити, що підінтегральний вираз повинен бути представлений у квадратичній формі,

наприклад, критерій середньоквадратичного зусилля приводного механізму крана ($P = F_p^2$):

$$I_{F_p^2} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T F_p^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T \{W + A_1 \ddot{x} + A_2 \overset{IV}{x} + A_3 \overset{VI}{x} + A_4 \overset{VIII}{x}\}^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \min, \quad (6.11)$$

де A_1, A_2, A_3, A_4 - постійні коефіцієнти, які визначаються із наступних виразів:

$$A_1 = m_m + m + m_k + m_p;$$

$$A_2 = \frac{(m_m + m)(m_p + m_k)}{c_m} + \frac{m_p(m_m + m + m_k)}{c_p} + (m + m_k + m_p) \frac{l}{g};$$

$$A_3 = \frac{(m_m + m)m_p m_k}{c_p c_m} + \left(\frac{m_p(m_m + m_k)}{c_p} + \frac{m_m(m_p + m_k)}{c_m} \right) \frac{l}{g}; \quad A_4 = \frac{m_m m_p m_k}{c_p c_m} \frac{l}{g}.$$

Виконуючи дослідження функціоналу (6.10) на тип екстремуму за умовою Лежандра, можна впевнитись у тому, що критерій (6.11) може набувати мінімуму. Дісно, завжди виконується посилена умова Лежандра:

$$\frac{\partial^2 F_p^2}{\partial x^2} = A_4^2 \geq 0. \quad (6.12)$$

Приведемо динамічні показники руху мостового крана, за якими можливо виконати синтез оптимального керування при усуненні коливань елементів крана і вантажу на гнучкому підвісі із використанням рівняння Ейлера-Пуассона (6.10):

- 1) приводне зусилля двигуна механізму переміщення крана F_p та його вищі похідні за часом;
- 2) третя та вищі похідні за часом виразу зусилля у металоконструкції крана ($c_m(x_k - x_m)$);
- 3) перша та вищі похідні за часом виразу зусилля у приводному механізмі пересування крана ($c_p(x_p - x_k)$).

Вказані динамічні показники, як вже зазначалося, повинні входити у підінтегральний враз у вигляді квадратичних функцій.

Постає питання, як виконати синтез оптимальних законів руху мостового крана, якщо підінтегральний вираз оптимізаційного критерію має порядок нижче сьомого. У цьому випадку рівняння Ейлера-Пуассона буде мати порядок нижче чотирнадцятого і його розв'язок не зможе забезпечити всі початкові та кінцеві умови, потрібні для усунення коливань. Для ефективного синтезу таких оптимальних законів керування необхідно використати прямі варіаційні методи [7-9].

6.2. Оптимізація руху вантажопідйомного крана із траверсною підвіскою вантажу методом динамічного програмування

У багатьох вантажопідйомних кранах до гнучкої підвіски закріплена траверса, а безпосередньо до траверси – вантажозахватний орган з вантажем. Оскільки маса траверси може бути у деяких випадках порівняна з масою вантажу, то вона впливає на динаміку руху крана. Оптимізація режимів руху вантажопідйомного крана без врахування маси траверси може мати негативний результат у плані досягнення мети керування, наприклад, усунення коливань вантажу, переміщення крана із вантажем на задану відстань тощо.

Важливою задачею для вантажопідйомних кранів є встановлення керування, при якому будуть усуваються зовнішні впливи, викликані, наприклад, вітровими поривами. Таке керування прийнято називати керуванням у вигляді зворотного зв'язку. Використовуючи оптимальне керування краном у вигляді зворотного зв'язку, на практиці ефективність експлуатації крана може значно покращитись. Це викликано рядом причин: зменшенням втомлюваності оператора крана (в ідеалі кранівник лише задає мету керування та слідкує за виконанням процесу), збільшенням точності позиціонування вантажу, зменшенням енергетичних витрат на виконання переміщення тощо.

Більшість дослідників динаміки руху вантажопідійомних кранів користуються двомасовою динамічною моделлю [1-6, 10, 11]. Така модель є нескладною і дозволяє достатньо точно оцінити рух реальної конструкції крана із вантажем на гнучкому підвісі. Однак, якщо конструкція крана обладнана траверсною підвіскою вантажу, то неврахування маси траверси може викликати розбіжність теоретичних та практичних результатів. Тому для проведення досліджень крана із траверсною підвіскою вантажу необхідно прийняти тримасову динамічну модель [9]. Така модель дає змогу адекватно відтворити динаміку руху крана із вантажем. У роботі [9], також проведена оптимізація перехідних режимів руху крана із траверсною підвіскою за допомогою прямого варіаційного методу. Даний метод дозволяє встановити оптимальне програмне керування рухом крана.

Для опису руху крана з траверсною підвіскою вантажу використаємо тримасову динамічну розрахункову модель (рис. 6.3) [9], у якій приймаються зосередженими маси візка m_1 , траверси m_2 та вантажу m_3 .

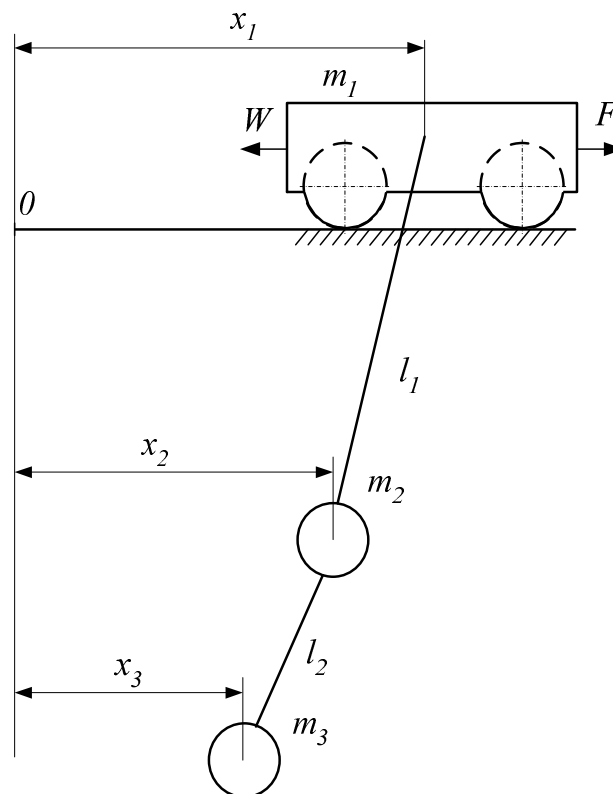


Рис. 6.3. Розрахункова динамічна модель руху крана із траверсною підвіскою вантажу

Опис руху представленої схеми за допомогою методу Даламбера [7] записується диференціальними рівняннями руху мас:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \frac{g}{l_1} (x_1 - x_2) = F - W \text{sign}(\dot{x}_1); \\ m_2 \ddot{x}_2 - m_2 \frac{g}{l_1} (x_1 - x_2) + m_3 \frac{g}{l_2} (x_2 - x_3) = 0; \\ \ddot{x}_3 - \frac{g}{l_2} (x_2 - x_3) = 0, \end{cases} \quad (6.13)$$

де m_1 – маса вантажного візка; m_2 – маса траверси; m_3 – маса вантажу; x_1, x_2, x_3 – координати центрів мас відповідно візка траверси і вантажу під час руху; g – прискорення вільного падіння; l_1 – довжина гнучкого підвісу, яка з'єднує візок та траверсу; l_2 – довжина гнучкого підвісу, яка з'єднує траверсу та вантаж; F – приводне (тягове або гальмівне) зусилля, що діє на візок; W – сила опору переміщенню, що діє на візок. Загалом схема, зображена на рис.6.3, представляє собою рухомий подвійний математичний маятник.

Будемо вважати, що при переміщенні крана протягом гальмування він не змінює свою швидкість, тобто $\text{sign} \dot{x}_1 = 1$. Систему рівнянь (6.13) подамо у вигляді одного диференціального рівняння шостого порядку:

$${}^{VI}x_3 + A {}^{IV}x_3 + B \ddot{x}_3 = \frac{F - W}{m_1} \Omega_{01}^2 \Omega_{02}^2, \quad (6.14)$$

де A і B - коефіцієнти, які визначаються наступними виразами:

$$A = \Omega_{01}^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) + \Omega_{02}^2 \left(1 + \frac{m_3}{m_2}\right), \quad B = \Omega_{01}^2 \Omega_{02}^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} + \frac{m_3}{m_2}\right); \quad \Omega_{01} \text{ і } \Omega_{02} - \text{власні частоти}$$

коливань математичних маятників із вантажами m_2 і m_3 відповідно, закріпленими на гнучкому підвісі довжиною l_1 та l_2 , відносно нерухомої

точки підвісу ($\Omega_{01} = \sqrt{\frac{g}{l_1}}$, $\Omega_{02} = \sqrt{\frac{g}{l_2}}$). Ввівши позначення $u = \frac{F - W}{m_1} \Omega_{01}^2 \Omega_{02}^2$ та

$y_0 = x_3$ запишемо диференціальне рівняння (6.14) у канонічному вигляді:

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1; \\ \dot{y}_1 = y_2; \\ \dot{y}_2 = y_3; \\ \dot{y}_3 = y_4; \\ \dot{y}_4 = y_5; \\ \dot{y}_5 = u - Ay_4 - By_2. \end{cases} \quad (6.15)$$

Рух крана із траверсною підвіскою вантажу характеризується початковими умовами, які можна записати у вигляді вектора початкових умов $\mathbf{y}(\mathbf{0}) = \{y_0(0), y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0), y_5(0)\}$.

Для усунення коливань вантажу у момент загальмовування крана необхідно, щоб виконувались такі кінцеві умови $\mathbf{y}(\mathbf{T}) = \{y_0(T), y_1(T), y_2(T), y_3(T), y_4(T), y_5(T)\} = 0$.

Для синтезу керування необхідно задати критерій оптимальності, який визначить одне оптимальне керування із усієї множини можливих. Критерієм оптимальності руху крана протягом його гальмування прийmemo інтегральний функціонал:

$$I = \int_0^T \left(\sum_{i=0}^{n=5} \delta_i y_i^2 + \delta_6 u^2 \right) dt \rightarrow \min, \quad (6.16)$$

де $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$ - деякі коефіцієнти. Ці коефіцієнти можна розрахувати за наступною формулою:

$$\delta_j = k_j \tilde{I}_j, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \quad (6.17)$$

де k_j - ваговий коефіцієнт, який враховує важливість відповідного j -го показника у структурі критерію; \tilde{I}_j - деякий коефіцієнт, який приводить розмірність j -го показника у структурі критерію (6.16) до безрозмірного вигляду. Критерій (6.16) є комплексним лінійно-квадратичним інтегральним критерієм і відображає як фазові координати динамічної системи, так і „витрати” на керування нею.

Керування, яке необхідно знайти, не може бути яким завгодно за величиною. Тому необхідно встановити межі допустимої області, в якій шукається оптимальне керування. Границі такої області визначаються величиною максимальної величини керування, яка у свою чергу визначається перевантажувальною здатністю приводу крана. Перевантажувальну здатність приводу крана необхідно розуміти у „широкому” сенсі – це обмеження по величині електромагнітного моменту двигуна, по величині струму та тривалості його протікання в обмотках двигуна. Крім того, оптимальне керування реалізується за допомогою керованого приводу, тому необхідно також враховувати обмеження накладені на перетворювальні пристрої (частотний перетворювач, пристрій плавного пуску тощо), які живлять двигун. У загальному вигляді обмеження на керування можуть бути записані таким чином:

$$u \in U = \bigcap_k P_q(t, y_i, a_e), \quad q=1, \dots, Q; \quad i=0, \dots, I; \quad e=1, \dots, E, \quad (6.18)$$

де P_q - деяка q -та множина, яка є складною функцією своїх аргументів; Q - кількість множин, які формують множину U , до якої належить керування u ; I - кількість фазових координат динамічної системи; E - кількість параметрів динамічної системи, які є аргументами q -тої множини P_q . Для даної задачі оптимального керування краном вираз (6.18) можна подати у такому вигляді:

$$u \in U = u_{M_{\max}} \cap u_{I_{\max} \cdot t_{\max}}, \quad (6.19)$$

де $u_{M_{\max}}$ - максимально допустиме керування, яке виплаває із умови неперевищення максимального моменту двигуна асинхронного електродвигуна приводу крана M_{\max} ; $u_{I_{\max} \cdot t_{\max}}$ - максимально допустиме керування, яке виплаває із умови неперевищення максимально допустимого

струму, який протікає в обмотках двигуна і по джерелу живлення двигуна I_{\max} та максимально допустимій тривалості t_{\max} протікання струму $I_{\max} \cdot u_{M_{\max}}$ та $u_{I_{\max} \cdot t_{\max}}$ є складними функціями:

$$u_{M_{\max}} = f(y_5, \omega_0, U_{\text{живл}}, R_1, R_2', X_1, X_2', r_{\text{кол}}, m_1, u_{\text{пер}}), \quad (6.20)$$

$$u_{I_{\max} \cdot t_{\max}} = f(y_5, \omega_0, U_{\text{живл}}, R_1, R_2', X_1, X_2', r_{\text{кол}}, m_1, u_{\text{пер}}), \quad (6.21)$$

де ω_0 - швидкість ідеального холостого ходу двигуна приводу крана; $U_{\text{живл}}$ - напруга живлення двигуна; R_1, R_2' - активний опір статора та приведений активний опір ротора відповідно; X_1, X_2' - реактивний опір статора та приведений реактивний опір ротора відповідно; $r_{\text{кол}}$ - радіус колеса крана; $u_{\text{пер}}$ - передаточне число приводу крана. Зазначимо, що обмеження (6.19) є складними для аналітичного розв'язання задачі, тому спростимо їх. Будемо вважати, що обмеження (6.19) не залежать від фазових координат динамічної системи, напруга і частота напруги живлення двигуна, а також параметри самого двигуна R_1, R_2' і X_1, X_2' незмінні в часі. Тоді вираз (6.19) можна замінити таким:

$$|u| \leq u_{\max}. \quad (6.22)$$

Таким чином, здійснена постановка задачі оптимального керування динамічною системою „кран із траверсною підвіскою - вантаж”. Ця задача полягає у тому, щоб перевести динамічну систему із початкового положення, яке характеризується початковими умовами у кінцеве, яке характеризується кінцевими умовами. При цьому критерій оптимальності (6.16) повинен бути якнайменшим. Крім того, накладаються обмеження на керування у вигляді нерівності (6.22), а момент закінчення керування T є нефіксованим.

Для розв'язування задачі оптимального керування використаємо метод динамічного програмування [12]. Даний метод синтезу оптимального керування дає змогу знайти керування у вигляді функції фазових координат динамічної системи. Це керування у вигляді зворотного зв'язку. Основне функціональне рівняння для даної задачі записується таким чином:

$$\min \left(\sum_{i=0}^{n-5} \delta_i y_i^2 + \delta_6 u^2 + \frac{\partial S}{\partial y_0} y_1 + \frac{\partial S}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial S}{\partial y_2} y_3 + \frac{\partial S}{\partial y_3} y_4 + \frac{\partial S}{\partial y_4} y_5 + \frac{\partial S}{\partial y_5} (u - Ay_4 - By_2) \right) = 0, \quad (6.23)$$

де S - функція Беллмана. Задачу будемо розв'язувати для випадку, коли на керування u не накладено обмежень (6.22). Це дасть змогу знайти аналітичний розв'язок задачі. Однак у подальшому необхідно врахувати нерівність (6.22). Мінімум лівої частини рівняння (6.23) будемо шукати по функції u , для чого продиференціюємо її за u та прирівняємо отримане до нуля:

$$2\delta_6 u + \frac{\partial S}{\partial y_5} = 0. \quad (6.24)$$

Знайдемо з рівняння (6.24) функцію u :

$$u = -\frac{1}{2\delta_6} \frac{\partial S}{\partial y_5}. \quad (6.25)$$

Пересвідчимося у тому, що функція (6.25) доставляє виразу (6.23) мінімум, для чого продиференціюємо вираз (6.24) ще раз за u :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(2\delta_6 u + \frac{\partial S}{\partial y_5} \right) = 2\delta_6 > 0. \quad (6.26)$$

Таким чином, вираз (6.25) буде доставляти лівій частині виразу (6.23) мінімум. У виразі (6.26) використано строгу нерівність, оскільки при $\delta_6 = 0$ рівняння (6.24) перетворюється у тривіальне і оптимальне керування

неможливо знайти. Підставимо вираз (6.25) у рівняння (6.23), в результаті чого будемо мати:

$$\begin{aligned}
 & y_2 \left(\frac{\partial S}{\partial y_1} y_2 - B \frac{\partial S}{\partial y_5} \right) + y_0^2 \delta_0 + y_1 \left(\frac{\partial S}{\partial y_0} + y_1 \delta_1 \right) + y_2^2 \delta_2 + y_3 \left(\frac{\partial S}{\partial y_2} + y_3 \delta_3 \right) + \\
 & + y_4 \left(\frac{\partial S}{\partial y_3} - A \frac{\partial S}{\partial y_5} + y_4 \delta_4 \right) + y_5 \left(\frac{\partial S}{\partial y_4} + y_5 \delta_5 \right) - \left(\frac{\partial S}{\partial y_5} \right)^2 \frac{1}{4\delta_6} = 0. \quad (6.27)
 \end{aligned}$$

Рівняння (6.27) є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Будемо шукати його розв'язок у вигляді квадратичної форми, як це прийнято при розв'язуванні подібних задач [13]:

$$\begin{aligned}
 S = & A_0 y_0^2 + A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + A_3 y_3^2 + A_4 y_4^2 + A_5 y_5^2 + A_6 y_0 y_1 + A_7 y_0 y_2 + \\
 & + A_8 y_0 y_3 + A_9 y_0 y_4 + A_{10} y_0 y_5 + A_{11} y_1 y_2 + A_{12} y_1 y_3 + A_{13} y_1 y_4 + A_{14} y_1 y_5 + \\
 & + A_{15} y_2 y_3 + A_{16} y_2 y_4 + A_{17} y_2 y_5 + A_{18} y_3 y_4 + A_{19} y_3 y_5 + A_{20} y_4 y_5, \quad (6.28)
 \end{aligned}$$

де $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{20}$ - постійні коефіцієнти, які необхідно визначити. Візьмемо частинні похідні з виразу (6.28) за фазовими координатами динамічної системи:

$$\frac{\partial S}{\partial y_0} = 2A_0 y_0 + A_6 y_1 + A_7 y_2 + A_8 y_3 + A_9 y_4 + A_{10} y_5, \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = A_6 y_0 + 2A_1 y_1 + A_{11} y_2 + A_{12} y_3 + A_{13} y_4 + A_{14} y_5, \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_2} = A_7 y_0 + A_{11} y_1 + 2A_2 y_2 + A_{15} y_3 + A_{16} y_4 + A_{17} y_5, \quad (6.31)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_3} = A_8 y_0 + A_{12} y_1 + A_{15} y_2 + 2A_3 y_3 + A_{18} y_4 + A_{19} y_5, \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_4} = A_9 y_0 + A_{13} y_1 + A_{16} y_2 + A_{18} y_3 + 2A_4 y_4 + A_{20} y_5, \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_5} = A_{10} y_0 + A_{14} y_1 + A_{17} y_2 + A_{19} y_3 + A_{20} y_4 + 2A_5 y_5. \quad (6.34)$$

Підставимо вирази (6.29-6.34) у рівняння (6.27) і після винесення спільних множників за дужки отримаємо:

$$\begin{aligned}
& y_0^2 \left(\delta_0 - \frac{A_{10}^2}{4\delta_6} \right) + y_1^2 \left(A_6 + \delta_1 - \frac{A_{14}^2}{4\delta_6} \right) + y_2^2 \left(A_{11} - BA_{17} + \delta_2 - \frac{A_{17}^2}{4\delta_6} \right) + y_3^2 \left(A_{15} + \delta_3 - \frac{A_{19}^2}{4\delta_6} \right) + y_4^2 \left(A_{18} - AA_{20} + \right. \\
& \left. + \delta_4 - \frac{A_{20}^2}{4\delta_6} \right) + y_5^2 \left(A_{20} + \delta_5 - \frac{A_5}{\delta_6} \right) + y_0 y_1 \left(A_0 - \frac{A_{10} A_{14}}{2\delta_6} \right) + y_0 y_2 \left(A_6 - BA_{10} - \frac{A_{10} A_{17}}{2\delta_6} \right) + y_0 y_3 \left(A_7 - \frac{A_{10} A_{19}}{2\delta_6} \right) + \\
& + y_0 y_4 \left(AA_{10} + A_8 - \frac{A_{10} A_{20}}{2\delta_6} \right) + y_0 y_5 \left(A_9 - \frac{A_{10} A_5}{\delta_6} \right) + y_1 y_2 \left(2A_1 - BA_{14} + A_7 - \frac{A_{14} A_{17}}{2\delta_6} \right) + y_1 y_3 \left(A_{11} - A_8 - \right. \\
& \left. - \frac{A_{14} A_{19}}{2\delta_6} \right) + y_1 y_4 \left(A_{12} - BA_{19} + 2A_2 - \frac{A_{17} A_{19}}{2\delta_6} \right) + y_1 y_5 \left(A_{12} - BA_9 + 2A_2 - \frac{A_{17} A_{19}}{2\delta_6} \right) + y_2 y_3 \left(A_{14} - A_{16} - 2 \times \right. \\
& \left. \times BA_5 - \frac{A_{17} A_5}{\delta_6} \right) + y_2 y_4 \left(A_{12} - AA_{14} + A_9 - \frac{A_{14} A_{20}}{2\delta_6} \right) + y_2 y_5 \left(A_{10} - A_{13} - \frac{A_{14} A_5}{\delta_6} \right) + y_3 y_4 \times \\
& \times \left(A_{13} + A_{15} - AA_{17} - BA_{20} - \frac{A_{17} A_{20}}{2\delta_6} \right) + y_3 y_5 \left(A_{16} + AA_{19} + 2A_3 - \frac{A_{19} A_{20}}{2\delta_6} \right) + y_4 y_5 \times \\
& \times \left(A_{17} + A_{18} - \frac{A_{19} A_5}{\delta_6} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Рівняння (6.35) буде справедливим у тому випадку, коли вирази у дужках будуть рівні нулю, оскільки фазові координати динамічної системи одночасно не можуть бути рівні нулю. Тому рівняння (6.35) можна замінити на систему нелінійних алгебраїчних рівнянь, яка отримана шляхом прирівнювання до нуля виразів у дужках із рівняння (6.35). Не будемо записувати цю систему оскільки вона є досить громіздкою. Отриману систему рівнянь розв'язати у аналітичному вигляді досить важко тому спростимо її. Для цього подамо вираз (6.25), із врахуванням формули (6.34), у такому вигляді:

$$u = - \frac{A_{10} y_0 + A_{14} y_1 + A_{17} y_2 + A_{19} y_3 + A_{20} y_4 + 2A_5 y_5}{2\delta_6}. \tag{6.36}$$

Таким чином, для знаходження невідомої функції u необхідно знайти лише шість коефіцієнтів $A_5, A_{10}, A_{14}, A_{17}, A_{19}, A_{20}$. Для визначення цих коефіцієнтів необхідно сформулювати шість рівнянь, які можна отримати із

відомої системи рівнянь отриманої із виразу (6.35). Запишемо систему із шести нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_0 - \frac{A_{10}^2}{4\delta_6} = 0; \\ -BA_{10} + \frac{A_{14}^2}{4\delta_6} - \delta_1 - \frac{A_{10}A_{17}}{2\delta_6} = 0; \\ \frac{A_{14}A_5}{\delta_6} - A_{10} - \delta_3 - \frac{A_{19}^2}{4\delta_6} - AA_{17} - BA_{20} - \frac{A_{17}A_{20}}{2\delta_6} = 0; \\ A_{20} + \delta_5 - \frac{A_5^2}{\delta_6} = 0; \\ A_{17} + AA_{20} - \delta_4 + \frac{A_{20}^2}{4\delta_6} - \frac{A_{19}A_5}{\delta_6} = 0; \\ \frac{A_{14}A_{19}}{2\delta_6} - \frac{A_{10}A_{20}}{2\delta_6}A - BA_{17} + \delta_2 - \frac{A_{17}^2}{4\delta_6} = 0. \end{array} \right. \quad (6.37)$$

Перше рівняння системи (6.36) є незалежним від інших і можемо одразу записати:

$$A_{10} = \pm 2\sqrt{\delta_6\delta_0}. \quad (6.37)$$

Від'ємний корінь відкидаємо, оскільки він може призвести до нестійкості динамічної системи.

Систему рівнянь (6.37) будемо розв'язувати чисельним методом. Для цього задамо параметри динамічної системи: маса крана $m_1 = 1000$ кг, маса траверси $m_2 = 300$ кг, маса вантажу $m_3 = 1000$ кг, довжина гнучкого підвісу $l_1 = 6$ м, довжина гнучкого підвісу $l_2 = 2$ м. Крім того, задамо величини вагових коефіцієнтів: $\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = 0,1$, $\delta_6 = 0,4$. В результаті розрахунку отримали декілька дійсних та декілька комплексних коренів системи (6.37). Всі комплексні корені відкидаємо. Крім того, відкидаємо додатні корені, оскільки вони можуть привести до нестійкості динамічної системи. Із врахуванням зроблених зауважень для вказаних вище параметрів

системи маємо: $A_{14} = 4,98$, $A_{17} = 1,14$, $A_{19} = 7,11$, $A_{20} = 0,23$, $A_5 = 0,36$.

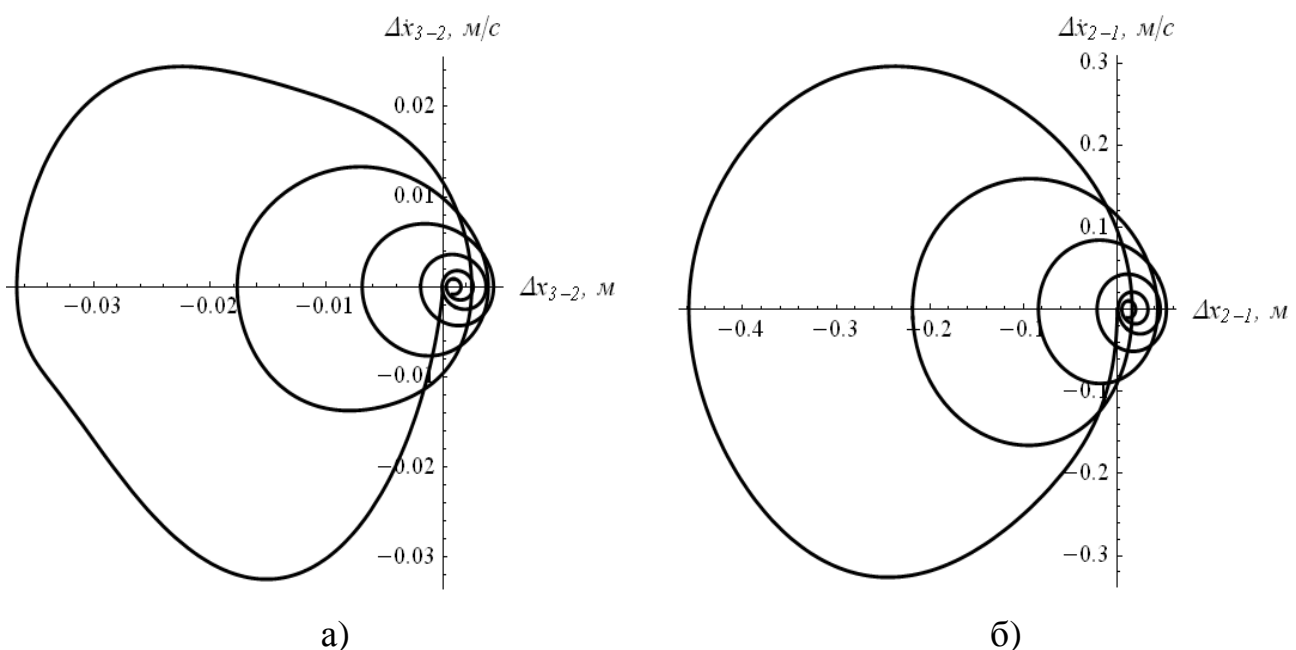
Підставляючи знайдені величини коефіцієнтів у вираз (6.36), а вираз (6.36) у диференціальне рівняння (6.14), отримаємо лінійне диференціальне рівняння

$$x_3^{VI} + \frac{A_5}{\delta_6} x_3^V + \left(A + \frac{A_{20}}{2\delta_6} \right) x_3^{IV} + \frac{A_{19}}{2\delta_6} \ddot{x}_3 + (B + A_{17}) \ddot{x}_3 + \frac{A_{14}}{2\delta_6} \dot{x}_3 + \frac{A_{10}}{2\delta_6} x_3 = 0, \quad (6.38)$$

для розв'язання якого необхідно скласти характеристичне рівняння:

$$p^6 + \frac{A_5}{\delta_6} p^5 + \left(A + \frac{A_{20}}{2\delta_6} \right) p^4 + \frac{A_{19}}{2\delta_6} p^3 + (B + A_{17}) p^2 + \frac{A_{14}}{2\delta_6} p + \frac{A_{10}}{2\delta_6} = 0. \quad (6.39)$$

Алгебраїчне рівняння шостого порядку (6.39) неможливо розв'язати в радикалах. Тому будемо шукати чисельний розв'язок диференціального рівняння (6.38) методом Рунге-Кутта [14]. Початкові умови для чисельного інтегрування рівняння (6.38) такі: $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0,5 \text{ м/с}$. Такі початкові умови означають процес загальмовування крана з початкової швидкості $0,5 \text{ м/с}$, причому коливання мас на гнучких підвісах відсутні. У результаті чисельного інтегрування отримано наближений розв'язок рівняння (6.27) за допомогою якого побудовано графічні залежності динаміки руху системи (рис. 6.4).



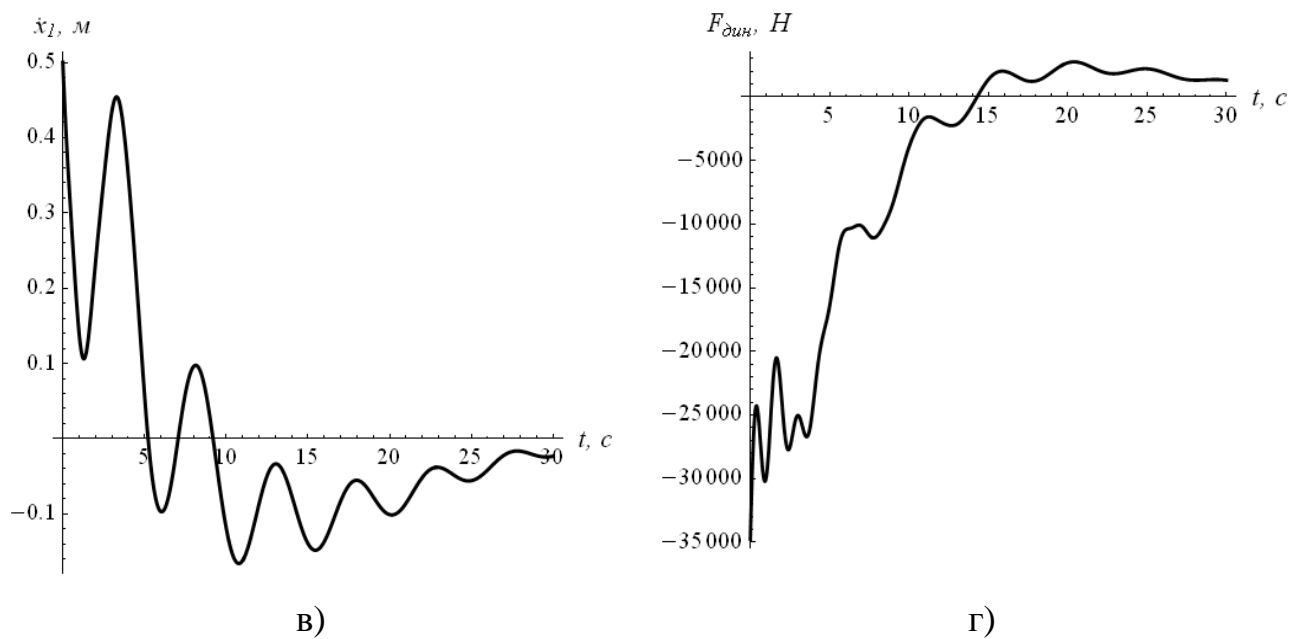


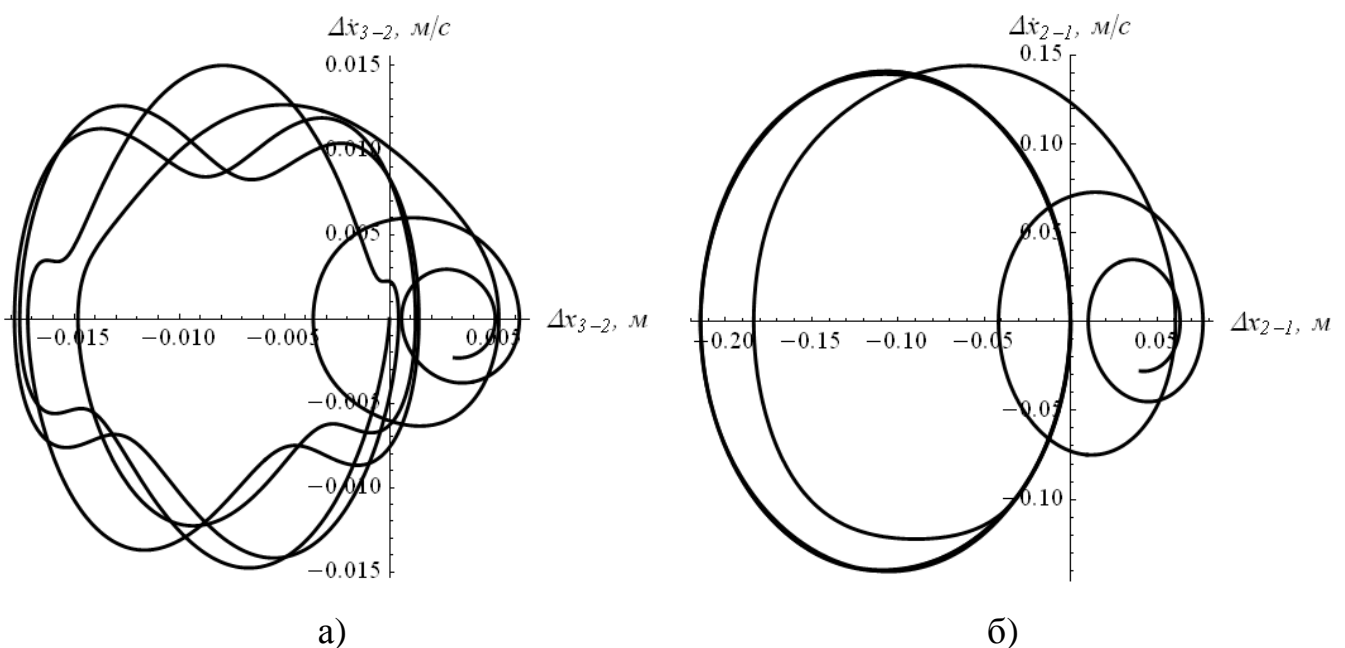
Рис. 6.4. Фазовий портрет коливань маси m_3 (а) відносно маси m_2 ; фазовий портрет коливань маси m_2 відносно маси m_1 , графік швидкості крана \dot{x}_1 (в), графік динамічної складової приводного зусилля $F_{дин}$ (г)

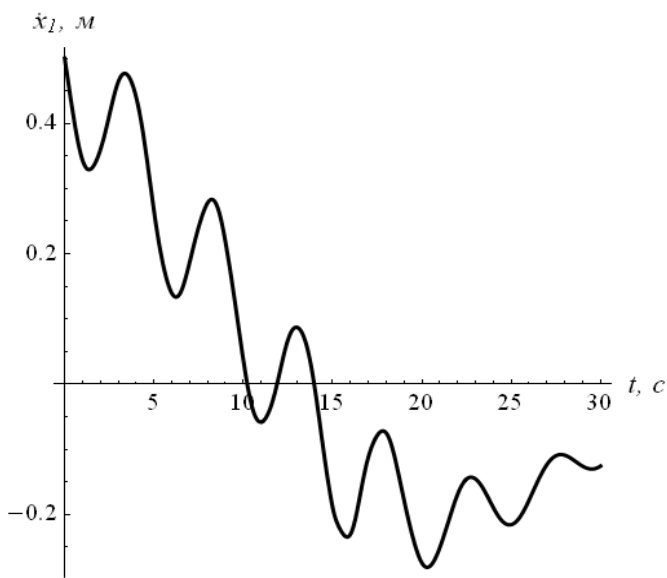
Аналіз графічних залежностей вказує на те, що коливання з плином часу затухають, що було необхідно за умовами задачі. Однак, інтенсивність затухання коливань є незначною. Крім того, існують принципові небажані властивості отриманого оптимального закону керування, а саме: знакозмінний характер швидкості та динамічної складової приводного зусилля, надзвичайно велика початкова величина динамічної складової приводного зусилля. Ці недоліки ставлять під сумнів практичну реалізацію синтезованого оптимального керування. Однак стверджувати те, що синтезований закон руху крана непридатний для практики не можна. Перш за все потрібно проаналізувати отриманий закон руху крана для виявлення позитивних його властивостей. Задача аналізу ускладнюється тим, що немає готових аналітичних залежностей, які б давали змогу оцінити вплив параметрів динамічної системи, величин вагових коефіцієнтів та початкових умов руху крана на його кінематичні та динамічні характеристики при оптимальному керуванні. Розв'язок задачі оптимізації руху крана із траверсною підвіскою виконаний без врахування обмежень (6.22). Для

врахування цих обмежень використаємо простий прийом: сигнал оптимального керування пропустимо через нелінійний елемент типу „насичення”. У результаті отримаємо таке керування:

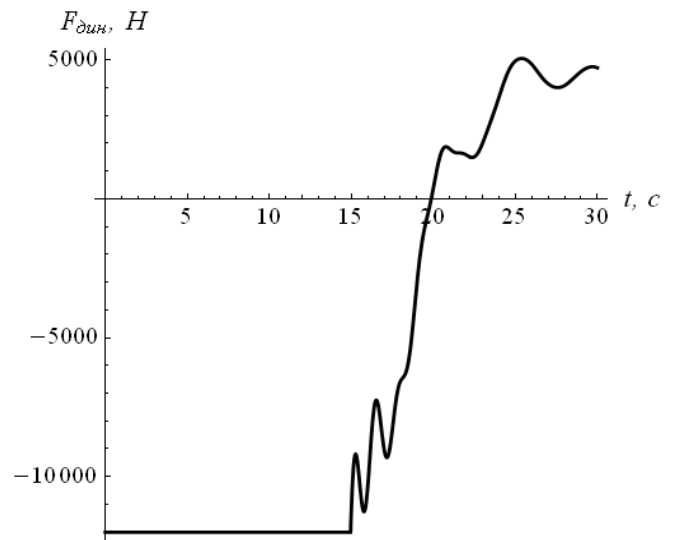
$$\tilde{u} = \begin{cases} u_{\max}, & \text{якщо } |u| \geq u_{\max}; \\ u, & \text{якщо } |u| \leq u_{\max}. \end{cases} \quad (6.40)$$

Покажемо, як таке керування впливає на динаміку руху системи. Для цього чисельно проінтегруємо диференціальне рівняння (6.14), причому права частина цього рівняння є кусочною функцією фазових координат динамічної системи та величини максимально допустимої величини керування. За отриманим результатом побудуємо графічні залежності (рис. 6.5). Для побудованих графіків параметри динамічної системи залишаються незмінними, а максимально допустима величина керування прийнята такою $u_{\max} = 1,5 \text{ м/с}^2$. Аналіз приведених графіків дає змогу встановити, що зменшення величини керування, яке діє на динамічну систему протягом режиму руху „затягує” перехідний процес гальмування. Звідси випливає логічний висновок: оптимальне керування обмежене границею допустимих значень усуває можливість перевантаження приводного двигуна, а також подовжує процес усунення коливань вантажу.





в)



г)

Рис. 6.5 Фазовий портрет коливань маси m_3 (а) відносно маси m_2 ; фазовий портрет коливань маси m_2 відносно маси m_1 , графік швидкості крана \dot{x}_1 (в), графік динамічної складової приводного зусилля $F_{дин}$ (г)

Висновки до шостого розділу

1. У даному розділі дослідженні проаналізовано початкові та кінцеві умови руху мостового крана із вантажем на гнучкому підвісі. Така динамічна система моделюється чотиримасовою розрахунковою схемою, у якій маси поєднані невагомими пружними елементами. Для приведеної моделі встановлені умови руху крана, за якими коливання елементів конструкції крана та вантажу на гнучкому підвісі усуваються до кінця перехідного режиму руху. У подальшому такі умови можна використати для відбору „опорних” функцій для синтезу наближеного розв’язку варіаційних задач оптимального керування мостового крану.
2. Розв’язана задача оптимального керування рухом динамічної системи „кран із траверсною підвіскою - вантаж”. Розв’язок задачі шукався за допомогою методу динамічного програмування. Графічні залежності, побудовані із врахуванням отриманого керування, вказують на певні недоліки у керуванні в плані практичної реалізації. Однак, це не означає що від отриманого результату необхідно відмовлятися – його необхідно проаналізувати для того, щоб встановити раціональні режими, при яких він дає кращі характеристики процесу. Задача аналізу отриманого керування є складною, оскільки немає всіх аналітичних залежностей, які б описували кінематичні та динамічні характеристики процесу та керування. Ситуація ускладнюється тим, що сама границя допустимої області керування є складною функцією багатьох аргументів. Для аналізу отриманого керування необхідно буде використовувати чисельні методи або/і спрощувати задачу.
3. Одним із небажаних факторів у отриманому керуванні є надзвичайно велике значення керування у початковий момент часу. У роботі запропоновано усунути цей недолік шляхом використання нелінійної функції типу „насичення”, аргументом якої є оптимальне керування.

Література до шостого розділу

1. Комаров М.С. Динамика грузоподъемных машин / М.С. Комаров – М.: Машиностроение, 1969. – 206 с.
2. Казак С.А. Динамика мостовых кранов / С.А. Казак – М.: Машиностроение, 1968. – 331 с.
3. Дукельский А.И. Справочник по кранам: [в 2 т.]. / А.И. Дукельский. М. –Л.: Машгиз, 1961. – Т. 1 – 455 с.
4. Ковальский Б.С. Групподъемные машины. Передвижение кранов / Б.С. Ковальский– Х.: ХВКИУ, 1963. – 167 с.
5. Лобов Н.А. Динамика грузоподъемных кранов / Н.А. Лобов – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.
6. Будиков Л.Я. Многопараметрический анализ динамики грузоподъемных кранов мостового типа / Л.Я. Будиков– Луганск: Издательство ВУГУ, 1997. – 210 с.
7. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления (Численные методы). / Н.В. Баничук, Ф.Л. Черноусько – М.: Наука, 1973. – 107 с.
8. Тараненко В.Т., Момоджи В.Г. Прямой вариационный метод в краевых задачах динамики полета / В.Г. Момоджи, В.Т. Тараненко – М.: Машиностроение, 1986. – 127 с.
9. Ловейкін В.С. Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом: монографія / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич – Ніжин: Видавець ПП Лисенко М.М., 2010. – 184 с.
10. Григоров О.В. Совершенствование рабочих характеристик крановых механизмов: дисс. на соиск. степ. доктора техн. наук: 05.05.05 / Григоров Отто Владимирович. – Х., 1995. – 386 с.
11. Моделювання динаміки механізмів вантажопідйомних машин / [Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Пастушенко С.І.]. – К.-Миколаїв: РВВ МДАУ, 2004. – 286 с.

12. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования / [перевод с англ. Митрофановой Н.М., Первозванского А.А., Хусу А.П., Шалаевского О.В.] – М.: Наука, 1965. – 460 с.
13. Летов А.М. Динамика полета и управление / А.М. Летов. – М.: Наука, 1969. – 360 с.
14. Дьяконов В. П. Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах / Дьяконов В. П. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 696 с.

ВИСНОВКИ

У монографії проведені дослідження, які дають змогу збільшити ефективність експлуатації механізмів вантажопідйомних машин. Аналіз перехідних режимів руху вантажопідйомної техніки дозволяє уточнити інженерні методики розрахунку їх електричного приводу. Зокрема, отримано аналітичні вирази тривалості розгону електричного приводу із приведеним до вала двигуна моментом інерції робочої машини. Запропонована методика розрахунку механічних перехідних процесів кранових двигунів, на жаль, не може бути поширена на багатомасові моделі. Однак, для конкретних механізмів вантажопідйомних машин можна провести чисельний розв'язок задачі (чисельно проінтегрувати диференціальні рівняння руху механізму) і знайти параметри та характеристики, які цікавлять інженера-проектанта.

Подальшим напрямком досліджень, які приведені у першому розділі, є встановлення адекватності сплайнової моделі механічної характеристики асинхронного двигуна. Для цього, безперечно, необхідно проводити експериментальні дослідження.

Оптимальні та раціональні режими руху механізмів вантажопідйомних машин, що знайдені у монографії, будуть корисними для розробки алгоритмів роботи тактичного ієрархічного рівня мехатронної системи, якою є вантажопідйомна машина. Це дозволить обґрунтовано підійти до побудови всього циклу переміщення вантажу.

Необхідно виділити певну специфіку оптимальних режимів руху механізмів вантажопідйомних машин: оптимальне керування у вигляді зворотного зв'язку необхідно використовувати для механізмів, які працюють у недетермінованих зовнішніх середовищах, при цьому передбачається організація зворотного зв'язку за допомогою відповідних датчиків, а керуючий мікроконтролер повинен мати значну швидкодію. Програмне оптимальне керування не потребує датчиків і вимоги до керуючого мікроконтролера є невеликими.

Значна частина монографії присвячена способам врахування обмежень накладених на керування вантажопідйомною машиною. Ці способи характеризуються різним підходами. У роботі підкреслюється той факт, що пристрій керування електричним приводом механізму вантажопідйомної машини вносить жорсткі обмеження на керуючу функцію. Подальші дослідження у цьому напрямі будуть сконцентровані навколо питання становлення функції, яка описує межу допустимої області керування для різних типів вантажопідйомних механізмів.

Важливим елементом роботи є дослідження, проведені у першому наближенні, динаміки перехідних процесів при використанні стандартних налаштувань частотного перетворювача, що живить асинхронний приводний двигун. Ці дослідження дають змогу досить просто покращити динаміку руху кранових механізмів, які обладнані частотно-керованими приводами.

Головним напрямом у подальших дослідженнях синтезу оптимальних режимів руху механізмів вантажопідйомних машин є врахування електричних процесів, які відбуваються у приводному двигуні, тобто необхідно розглядати вантажопідйомну машину як єдину електромеханічну систему. Крім того, потрібно також враховувати специфіку системи керування та іншого електронного (інформаційного) обладнання. Більш широка постановка задачі дозволяє розроблювати кращу, за різними показниками, вантажопідйомну техніку.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ПРИВОДНИХ ЗУСИЛЬ АСИНХРОННИХ КРАНОВИХ ДВИГУНІВ.....	6
1.1. Недоліки механічної характеристики асинхронного приводу побудованої на основі рівняння Клосса.....	6
1.2. Синтез моделі механічної характеристики асинхронного двигуна.....	8
1.3. Аналіз режиму пуску кранових механізмів представлених одномасовою моделлю.....	16
1.4. Аналітичний розв'язок рівнянь руху кранових механізмів.....	26
1.5. Моделювання та аналіз приводних зусиль загальнопромислового асинхронного приводу.....	35
1.6. Встановлення меж аналітичності моделі механічної характеристики загальнопромислового асинхронного приводу.....	42
Висновки до першого розділу.....	45
Література до першого розділу.....	47
РОЗДІЛ 2. ЧАСТОТНЕ КЕРУВАННЯ АСИНХРОННИМ КРАНОВИМ ЕЛЕКТРОПРИВОДОМ.....	48
2.1. Обґрунтування введення модифікованого обмеження на функцію оптимального керування крановими механізмами.....	48
2.2. Розв'язання задач оптимальної швидкодії із модифікованими обмеженнями на керування крановими механізмами.....	52

2.3. Обґрунтування раціональних законів керування рухом кранових механізмів.....	60
2.3.1. Двомасова динамічна модель.....	60
2.3.2. Тримасова динамічна модель.....	72
2.4. Раціональне та оптимальне керування краном із частотно-керованим приводом.....	80
Висновки до другого розділу.....	94
Література до другого розділу.....	97

РОЗДІЛ 3. ПРЯМІ ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ

ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ МЕХАНІЗМАМИ

ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МАШИН.....	101
3.1. Класифікація критеріїв оптимізації режимів руху вантажопідйомних машин.....	101
3.2. Аналіз прямих варіаційних методів для розв'язування задач оптимального керування.....	110
3.3. Знаходження оптимального керування без врахування обмежень на керування.....	120
3.4. Знаходження оптимального керування з врахуванням обмежень на керування.....	127
3.5. Оптимізація перехідних режимів руху механізму переміщення крана із електроприводом постійного струму.....	133
Висновки до третього розділу.....	150
Література до третього розділу.....	152

РОЗДІЛ 4. ОПТИМІЗАЦІЯ ПЕРЕХІДНИХ РЕЖИМІВ РУХУ

ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МЕХАНІЗМІВ, ПРЕДСТАВЛЕНИХ

ОДНОМАСОВОЮ ДИНАМІЧНОЮ МОДЕЛЛЮ.....	158
-------------------------------------	-----

4.1. Дослідження та аналіз методів оптимального	
---	--

керування механізмами вантажопідйомних машин.....	158
4.2. Синтез оптимального керування механізмами вантажопідйомних машин із врахуванням першої похідної функції керування.....	167
4.3. Синтез оптимального керування механізмами вантажопідйомних машин із врахуванням першої та другої похідних функції керування.....	178
4.4. Побудова оптимального режиму переміщення одномасової динамічної системи із обмеженням інтегрального типу.....	186
4.5. Оптимізація режиму розгону механізмів вантажопідйомних машин із врахуванням сил опору.....	192
Висновки до четвертого розділу.....	205
Література до четвертого розділу.....	207

РОЗДІЛ 5. ОПТИМІЗАЦІЯ ПЕРЕХІДНИХ РЕЖИМІВ РУХУ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МЕХАНІЗМІВ, ПРЕДСТАВЛЕНИХ ДВОМАСОВОЮ ДИНАМІЧНОЮ МОДЕЛЛЮ.....	209
5.1. Синтез оптимального керування рухом кранового візка.....	209
5.2. Дискретний спосіб врахування обмежень на величину керування механізмом переміщення крана.....	225
5.3. Синтез квазіоптимального керування рухом вантажопідйомного крана у вигляді зворотного зв'язку.....	236
5.4. Оптимізація режимів руху кранових механізмів із приводом постійного струму методом динамічного програмування.....	250
Висновки до п'ятого розділу.....	261
Література до п'ятого розділу.....	263

РОЗДІЛ 6. АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ БАГАТОМАСОВИХ КРАНОВИХ МЕХАНІЗМІВ.....	268
6.1. Встановлення та аналіз умов усунення коливань елементів динамічної системи „мостовий кран-вантаж”	268
6.2. Оптимізація руху вантажопідйомного крана із траверсною підвіскою вантажу методом динамічного програмування.....	276
Висновки до шостого розділу.....	290
Література до шостого розділу.....	291
 ВИСНОВКИ.....	 293
 ЗМІСТ.....	 295

Наукове видання

Ловейкін Вячеслав Сергійович
Ромасевич Юрій Олександрович

МОНОГРАФІЯ

Аналіз та синтез режимів руху механізмів
вантажопідйомних машин