

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І
ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ**

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕНЕРГІЇ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для здобувачів

третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти
за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
галузі знань 14 «Електрична інженерія»
Кваліфікація: PhD доктор філософії

Київ-2021

УДК 621.391(075.8)

Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Методика дослідження та організація підготовки дисертаційної роботи» призначені для підготовки здобувачів третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» галузі знань 14 «Електрична інженерія» (Кваліфікація: PhD доктор філософії).

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради ННІ енергетики, автоматики і енергозбереження Національного університету біоресурсів і природокористування України (протокол № 11 від 17 грудня 2021 р.).

Укладачі: д.т.н., проф. М.М. Заблудський

Рецензенти: д.т.н., проф. Н.А. Заєць, д.т.н., проф. А.І. Чміль

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕНЕРГІЇ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для здобувачів

третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти
за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
галузі знань 14 «Електрична інженерія»
Кваліфікація: PhD доктор філософії

Укладачі: Заблудський Микола Миколайович

Зав. Видавничим центром НУБіП А.П. Колесніков

Підписано до друку 17.12.21

Ум. друк. арк. 5,9

Наклад 20 прим.

Формат 60x84/16

Обл. вид. арк. 5,2

Зам. № 2915

Видавничий центр НУБіП

03041, вул. Героїв Оборони, 15

ЛЕКЦІЯ 1

БАЗОВІ ПРИНЦИПИ ФУНКЦІОНУВАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ЕНЕРГІЇ

Вірно визначте слова та встановіть правила, і звільнить, тим самим, світ від половини непорозумінь

Р. Декарт¹

Крім основних законів електромеханіки для розуміння процесів, що відбуваються в електромеханічних перетворювачах енергії, слід враховувати *три* базові принципи (положення), а саме:

1. Електромеханічне перетворення енергії не може здійснюватися без втрат. Коефіцієнт корисної дії (ККД) такого перетворення за будь-яких умов залишається меншим 100 %;
2. Всі електричні машини зворотні, одна й та сама машина може працювати як в режимі двигуна, так і в режимі генератора;
3. Електромеханічне перетворення енергії здійснюється нерухожими один до одного полями.

Перший принцип електромеханіки відображає загальний закон збереження енергії.

Отже, в електромеханічних перетворювачах перетворення електричної енергії $W_{\text{ел}}$ в механічну енергію $W_{\text{мех}}$ (рівно як і механічної енергії на електричну) завжди супроводжується виділенням теплової енергії $W_{\text{теп}}$. З цієї точки зору узагальнену схему перетворення енергії в електромеханічному перетворювачі можна подати як на рис. 1



Рис. 1. Схема перетворення енергії в ЕМП

Електромеханічний перетворювач можна подати як деяку систему, пристрій з шістьма виводами (шестиполіусник), в якому кожна пара виводів імітує відповідні впливи або реакції.

На практиці під час проектування та експлуатації ЕМП зазвичай вважається, що витoki теплової енергії пов'язані з деяким контуром, об'єм якого нескінченний, а температура незмінна.

За таких припущень ЕМП можна розглядати як чотиріполіусник. Як правило така модель ЕМП приймається при розв'язанні задач, коли процеси перетворення енергії всередині ЕМП не мають значення.



Рис. 2. ЕМП як чотиріполіусник

Згідно першому принципу електромеханіки в ЕМП відбувається (за будь-яких умов) перетворення частини електричної або частини механічної енергії на теплову енергію. Це режим холостого ходу ЕМП.

Потік теплової енергії зазвичай не змінює свого напрямку. Отже втрати в ЕМП незворотні. Однак на сьогодні існують перетворювачі, які перетворюють теплову енергію в електричну та механічну.



Другий принцип електромеханіки відображає зворотний характер процесів, що відбуваються в електромеханічному перетворювачі.

Робота будь-якого ЕМП в двох режимах є найважливішою перевагою таких перетворювачів перед перетворювачами енергії інших видів.

За умови, що до ЕМП підводиться електрична енергія з електромережі, він працюватиме в режимі *актюатора* (двигуна), якщо ж до ЕМП підводиться

механічна енергія – встановлюється режим *сенсора* (генератора, генерації електричної енергії).

Третій принцип електромеханіки характеризує просторову взаємодію магнітних полів, якими супроводжується процес перетворення енергії в електромеханічному перетворювачі.

Нерухомі відносно одне одного магнітні поля створюють в структурі електромеханічного перетворювача результуюче поле та електромагнітний момент, а поля, які переміщуються в повітряному зазорі, створюють потік теплової енергії, що приводить до втрат та зменшенню ККД.

Баланс видів енергії

Зосередившись на корисному перетворенні енергії в ЕМП, **нехтуватимемо тепловими втратами**, а активний (резистивний) опір будемо вважати частиною опору зовнішнього електричного кола.

Крім теплових втрат в реальних ЕМП завжди мають місце втрати, що обумовлені

- зміненням енергії електричного поля,
- випромінюванням енергії, яке викликане зміненням у часі електричного та магнітного полів,
- втратами енергії в магнітному полі.

Випромінюванням енергії на промислових частотах можна нехтувати. **Енергія електричного поля в електромагнітних пристроях також мала**, внаслідок малих значень ємностей, які зазвичай існують між окремими елементами електричних кіл та притаманні визначеним конструктивним виконанням окремих елементів (наприклад, ємність між витками котушки).

Втрати на гістерезис та вихрові струми в магнітних колах більшості пристроїв, що розглядатимуться, також невеликі. Цими втратами на даному етапі аналізу базових принципів моделювання ЕМП також нехтуватимемо.

З урахуванням прийнятих припущень рівняння балансу відобразатиме змінення основних видів енергії в електромеханічній системі і може бути подане як

$$\Delta W_{\text{ел}} \approx \Delta W_{\text{маг}} + \Delta W_{\text{мех}}, \quad (2.1)$$

де

$\Delta W_{\text{ел}}$ - змінення електричної енергії, що подається до ЕМП;

$\Delta W_{\text{маг}}$ - змінення енергії магнітного поля, яке саме й спричиняє відповідні перетворення електричної енергії у механічну;

$\Delta W_{\text{мех}}$ - змінення механічної енергії, яке спрямовується на виконання визначеної роботи відповідними конструктивними елементами ЕМП.

Знак приблизної рівності у (2.1) відображає наявність прийнятих припущень.

З (2.1) видно, що за умови, коли електрична енергія $\Delta W_{\text{ел}}$, яка підводиться до ЕМП, більша за енергію $\Delta W_{\text{маг}}$ магнітного поля, її частина переходить у механічну енергію $\Delta W_{\text{мех}}$. Тобто магнітна енергія (енергія магнітного поля) є, так би мовити, проміжним елементом в процесі перетворення електричної енергії в механічну.

Таким чином, механічна енергія (точніше величина змінення механічної енергії) визначається як функція струму i , що протікає у відповідних елементах ЕМП, та координати x його рухомої частини. Замість струму можна використати й категорію потокозчеплення Ψ , яке однозначно пов'язане зі струмом у відповідному елементі ЕМП.

Таким чином рівняння балансу енергії можна подати в термінах струмів у вигляді

$$\Delta W_{\text{мех}}(i, x) = \Delta W_{\text{ел}}(i, x) - \Delta W_{\text{маг}}(i, x), \quad (2.2)$$

або в термінах потокозчеплення як

$$\Delta W_{\text{мех}}(\Psi, x) = \Delta W_{\text{ел}}(\Psi, x) - \Delta W_{\text{маг}}(\Psi, x). \quad (2.3)$$

Середня сила, яка реалізується в процесі перетворення (2.2) або (2.3), визначається із співвідношення

$$\Delta W_{\text{мех}} = f_{\text{сер}} \Delta x, \quad (2.4)$$

де

Δx - змінення координати x відповідного конструктивного елемента ЕМП в процесі його функціонування.

З урахуванням (2.2) зі співвідношення (2.4) отримуємо величину середньої сили, яка розвивається в ЕМП. Величину цієї сили можна подати в термінах струму, що протікає відповідними елементами ЕМП, як

$$f_{\text{сер}}(i, x) = \frac{\Delta W_{\text{ел}}(i, x)}{\Delta x} - \frac{\Delta W_{\text{маг}}(i, x)}{\Delta x}. \quad (2.5)$$

Величину тої самої середньої сили можна подати і в термінах потокозчеплення, використовуючи при цьому співвідношення (2.3) та (2.4), а саме

$$f_{\text{сер}}(\Psi, x) = \frac{\Delta W_{\text{ел}}(\Psi, x)}{\Delta x} - \frac{\Delta W_{\text{маг}}(\Psi, x)}{\Delta x}. \quad (2.6)$$

Таким чином, маючи співвідношення для визначення електричної та магнітної енергії, що притаманні даній електромеханічній системі, можна отримати співвідношення для визначення відповідної сили (а отже й відповідного моменту), а також співвідношення, які описують поведінку даної системи в динаміці.

Енергія системи нерухомих провідників зі струмом

Визначимо енергію, яка надходить до систем, що складається з n нерухомих провідників (контурів). Кожним з цих провідників в процесі їх встановлення у нерухомий стан протікає визначений струм i_k , яким визначається відповідне потокозчеплення Ψ_k . При цьому розглядатимемо інтегроване значення енергії, яка надається відповідним конструктивним складовим ЕМП всіма струмами i_k в процесі зростання цих струмів від нуля до деяких кінцевих значень. Це рівнозначно відповідному зміненню потокозчеплення, яке викликається вказаним зміненням цих струмів.

Припустимо, що до виводів k -го контуру, резистивний опір якого становить r_k , приєднане зовнішнє електричне коло, яке забезпечує на виводах цього контуру напругу u_k . Змінення струму в контурі викликає змінні потокозчеплення та появу на виводах цього контуру ЕРС e_k .

Електричний баланс в такому контурі визначатиметься рівнянням, яке можна подати в термінах струмів

$$u_k + e_k = r_k i_k \quad (2.7)$$

або в термінах потокозчеплення

$$u_k = r_k i_k + \frac{d\Psi_k}{dt}. \quad (2.8)$$

Помноживши ліву та праву частини рівняння (2.8) на i_k , визначаємо потужність, що витрачається джерелом живлення, а саме

$$u_k i_k = r_k i_k^2 + i_k \frac{d\Psi_k}{dt}. \quad (2.9)$$

За проміжок часу dt джерелом живлення в k -му контурі ЕМП виконуватиметься робота, котра визначається як добуток потужності на відповідний інтервал часу (протягом якого ця потужність витрачається). Отже маємо

$$u_k i_k dt = dW_{\text{елк}} = r_k i_k^2 dt + i_k d\Psi_k \quad (2.10)$$

Частина вказаної роботи, яка пов'язана з енергією, що витрачається у вигляді тепла дорівнює $r_k i_k^2 dt$).

Частина роботи, що визначається складовою $i_k d\Psi_k$, пов'язана з енергією, яка запасається в магнітному полі k -го контуру. Ця енергія може бути подана як

$$dW_{\text{магк}} = i_k d\Psi_k.$$

Таким чином, магнітна енергія n контурів пов'язана зі збільшенням їх потокозчеплення

$$W_{\text{маг}} = \sum_{k=1}^n \int_0^{\Psi_k} i_k d\Psi_k \quad (2.11)$$

Для лінійної системи рівняння (2.11) зручно подати в термінах власних та взаємних індуктивностей відповідних контурів:

L_{ks} - взаємна індуктивність k -го та s -го контурів;

$L_{kk} = L_k$ - власна індуктивність k -го контуру.

$$\Psi_k = L_k i_k + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n L_{ks} i_s. \quad (2.13)$$

Співвідношення (2.13) використаємо для визначення величини змінення потокозчеплення k -го контуру при відповідному змінненні величини струму, тобто для запису (2.13) в термінах кінцевих прирощень.

Маємо

$$\Delta\Psi_k = L_k \cdot \Delta i_k + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n L_{ks} \cdot \Delta i_s. \quad (2.14)$$

Отже підінтегральна частина рівняння (2.11), записана в термінах кінцевих прирощень, виглядатиме як

$$\Delta W_{\text{магк}} = i_k \cdot \Delta\Psi_k = i_k \left(L_k \cdot \Delta i_k + \sum_{s=1}^n L_{ks} \cdot \Delta i_s \right). \quad (2.15)$$

Співвідношення (2.15) з урахуванням підсумовування по всіх n контурах, але без інтегрування по потокозчепленням цих контурів, зводиться до співвідношення

$$\Delta W_{\text{маг}} = \sum_{k=1}^n i_k \left(L_k \cdot \Delta i_k + \sum_{s=1}^n L_{ks} \cdot \Delta i_s \right). \quad (2.16)$$

Перш ніж перейти до подальшого перетворення співвідношення (2.16) розглянемо окремий випадок електромеханічної системи, що утворена двома контурами ($n = 2$).

За умови, що система складається з двох контурів, співвідношення (2.16) приймає вигляд

$$\Delta W_{\text{маг}} = L_1 \cdot i_1 \cdot \Delta i_1 + L_{12} \cdot i_1 \cdot \Delta i_2 + L_2 \cdot i_2 \cdot \Delta i_2 + L_{21} \cdot i_2 \cdot \Delta i_1$$

Приймаючи до уваги, що $L_{12} = L_{21}$ (тобто взаємна індуктивність першого контуру по відношенню до другого контуру дорівнює взаємній індуктивності другого контуру по відношенню до першого контуру), отримуємо

$$\frac{\Delta W_{\text{маг}}}{\Delta t} = \frac{\Delta \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right)}{\Delta t} + \frac{\Delta \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right)}{\Delta t} + \frac{\Delta (L_{12} i_1 i_2)}{\Delta t}.$$

Переходячи від кінцевих прирощень до нескінченно малих прирощень (тобто до диференціалів), матимемо

$$dW_{\text{маг}} = d \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + d \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + d (L_{12} i_1 i_2).$$

Отже повна магнітна енергія, яка запасатиметься в системі двох контурів, визначається як

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + L_{12} i_1 i_2. \quad (2.17)$$

Аналогічно, розглядаючи систему з n контурів, можна записати

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n L_k i_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n L_{ks} i_k i_s. \quad (2.18)$$

Множник $\left(\frac{1}{2}\right)$ перед другою складовою правої частини (2.18) враховує, що $L_{ks} = L_{sk}$, а отже ця величина при подвійному підсумовуванні зустрічатиметься двічі.

Провівши нескладні перетворення, з (2.18) отримуємо

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k \left(L_k i_k + \sum_{s=1}^n L_{ks} i_s \right) \quad (2.19)$$

або

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(L_k i_k^2 + \sum_{s=1}^n L_{ks} i_s i_k \right). \quad (2.20)$$

З урахуванням (2.13) матимемо

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k \Psi_k. \quad (2.21)$$

Отже повна енергія, яка надходить в систему контурів ЕМП протягом усього процесу встановлення струмів, визначатиметься як

$$W_{\text{маг}} = \sum_{k=1}^n \int_0^{\Psi_k} i_k d\Psi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k \Psi_k. \quad (2.22)$$

Співвідношенням (2.22) визначається загальна кількість енергії, яка запасасться в магнітному полі струмів утвореної k контурами електромеханічної системи.

Вплив нелінійності

Як правило, котушки ЕМП містять осердя з якогось магнітного матеріалу (по-більшості з електротехнічної сталі). **Індукція насичення осердя – величина хоча й велика, але кінцева. Отже в процесі зміння струму в таких котушках проявлятимуться нелінійні ефекти, пов'язані з нелінійністю характеристик намагнічування матеріалу осердя. В цілому, наведений вище аналіз процесів в системі контурів залишається справедливим. Однак кінцевий результат розв'язання інтегрального рівняння (2.11), яким визначається енергія, що запасасться, звичайно буде іншим.**

За умови, що початкове потокозчеплення котушки дорівнює нулю ($\Psi = 0$), тобто крива намагнічування проходить через початок відповідних координат, рівняння (2.11) справедливе й енергія, що запасасться нелінійною

системою, визначатиметься так само як і для лінійної системи. В той же час функціональна залежність поточкозчеплення від струму, що протікає контурами електромеханічної системи, суттєво ускладнюється, а це в загальному випадку не дозволяє отримати відповідні аналітичні вирази для визначення величини енергії.

Як правило, вказані нелінійні фактори обмежують можливість збільшення енергії, що в ЕМП спрямовується на виконання корисної роботи. Відповідні математичні моделі стають надто складними й мають обмежене використання в процесі практичного проектування та експлуатації ЕМП.

В той же час, звичайно, вивчення таких ефектів та прогнозування роботи ЕМП у відповідних режимах безумовно підвищує рівень знань, дозволяє глибше пізнати суть відповідних процесів та явищ, сформулювати практично корисні поради щодо розроблення оптимальних конструкцій ЕМП та технології їх виготовлення, а також визначати оптимальні умови та параметри експлуатації електромеханічних систем.

Сили та моменти, що виникають в електромеханічних системах

Розглянуті вище енергетичні співвідношення можна використати для встановлення формул, які надають можливість обчислити сили (моменти), що виникають в електромеханічній системі.

Для спрощення розглядатимемо систему з однією обмоткою збудження. Нехтуючи резистивним опором обмотки збудження, запишемо умову її електричної рівноваги у вигляді

$$u \approx e = L \frac{di}{dt} = \frac{d\Psi}{dt}. \quad (2.23)$$

Запишемо рівняння енергетичного балансу (аналогічно (2.1)) в диференціальній формі. Маємо

$$dW_{\text{ел}} = dW_{\text{маг}} + dW_{\text{мех}}.$$

При цьому

$$dW_{\text{мех}} = F \cdot dx.$$

Переходячи до категорії потужності, яка, як відомо, характеризує швидкість змінення енергії у часі, отримуємо

$$F \frac{dx}{dt} + \frac{dW_{\text{маг}}}{dt} = \frac{dW_{\text{ел}}}{dt} = Ui = ei = i \frac{d\Psi}{dt}. \quad (2.24)$$

Зважаючи на те, що

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} \Psi i,$$

похідна магнітної енергії за часом в загальному випадку визначатиметься як

$$\frac{dW_{\text{маг}}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\Psi \frac{di}{dt} + i \frac{d\Psi}{dt} \right). \quad (2.25)$$

Таким чином, на підставі співвідношень (2.23), (2.24) та (2.25) отримуємо

$$F \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} i \frac{d\Psi}{dt} = i \frac{d\Psi}{dt}. \quad (2.26)$$

Тобто

$$2F \frac{dx}{dt} = i \frac{d\Psi}{dt}. \quad (2.27)$$

З (2.27) безпосередньо видно, що за умови підтримання в контурі електромеханічної системи незмінного струму, джерело електричної енергії має забезпечувати потужність, яка достатня для виконання *подвійної* роботи. Фізично це означає, що здійснення ЕМП визначеної роботи потребує від джерела живлення енергії, яка достатня не лише для безпосереднього виконання цієї роботи, але й для забезпечення поповнення запасу енергії контурів цього ЕМП. Це положення зазвичай називають *правилом «50-50»*.

З рівняння (2.25) неважко отримати співвідношення для розрахунку сили, що розвивається в даному ЕМП відповідним потокозчепленням, а саме

$$F = \frac{1}{2} i \frac{d\Psi}{dx} \Big|_{i=\text{const}} = \frac{dW_{\text{маг}}}{dx} \Big|_{i=\text{const}}. \quad (2.28)$$

За умови незмінності потокозчеплення рівняння (2.25) зводиться до вигляду

$$F \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} \Psi \frac{di}{dt} = 0. \quad (2.29)$$

З (2.29) неважко отримати

$$F = -\frac{1}{2} \Psi \frac{di}{dx} \Big|_{\Psi=\text{const}} = -\frac{dW_{\text{маг}}}{dx} \Big|_{\Psi=\text{const}}. \quad (2.30)$$

З порівняння (2.28) та (2.29) видно, що розрахована за цими формулами сила, як і очікувалося, має однакову величину, але протилежні напрямлення.

Сили та моменти, що діють між контурами ЕМП в термінах взаємної індуктивності

Застосуємо отримані результати до практично важливого випадку, коли ЕМП має два контури з власними індуктивностями L_1, L_2 та взаємною індуктивністю $L_{12} = L_{21} = L_{вз}$.

Можливі варіанти конструктивного виконання такого ЕМП схематично подано на рис. 2.9. При цьому рухомий елемент ЕМП, наведеного на рис. 2.9а, здійснює поступальний рух, а рухомий елемент ЕМП, наведеного на рис. 2.9б обертається навколо деякої осі.

Вважатимемо, що в контурах протікають струми i_1, i_2 . При цьому в магнітному полі всього ЕМП запасатиметься енергія

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + L_{вз} i_1 i_2.$$

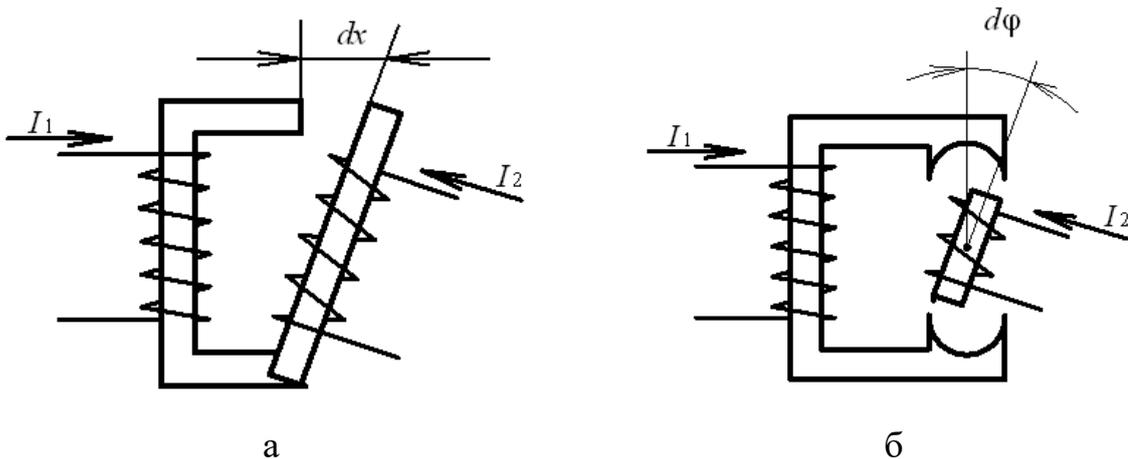


Рис. 2.9. Варіанти конструктивного виконання ЕМП з контурами,
що зв'язані магнітним зв'язком

Припустимо, що контуру 1 (див. рис. 2.9а) надане мале переміщення dx вздовж деякої координатної осі X . Це переміщення в даному ЕМП обумовлюється силою, що діє вздовж координати X та відповідно до (2.28) за умови конкретного та постійного значення струмів i_1, i_2 визначатиметься як

$$F_{1X} = \frac{dW_{\text{маг}}}{dx} = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1}{dx} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2}{dx} + i_1 i_2 \frac{dL_{вз}}{dx}. \quad (2.31)$$

Аналогічно для варіанту ЕМП поданому на рис. 2.9б можна знайти рівняння, яким визначатиметься момент контуру 1 по відношенню до контуру 2. При цьому елементарне лінійне переміщення dx слід визначити через

елементарне кутове переміщення $d\varphi$ (адже контур 2 згідно рис. 2.9б обертається відносно контуру 1). Маємо

$$dx = d\left(\pi D \frac{\varphi}{2\pi}\right) = \frac{D}{2} d\varphi.$$

Отже миттєве значення обертового моменту контуру 1 відносно контуру 2 визначатиметься як

$$m_{1\varphi} = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1}{d\varphi} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2}{d\varphi} + i_1 i_2 \frac{dL_{B3}}{d\varphi}. \quad (2.32)$$

В більшості ЕМП власні індуктивності контурів практично не залежать від переміщення останніх. За припущень незмінності власних індуктивностей з (2.31), (2.32) матимемо

$$F_{1X} = i_1 i_2 \frac{dL_{B3}}{dx} \quad \text{та} \quad m_{1\varphi} = i_1 i_2 \frac{dL_{B3}}{d\varphi} \quad (2.33)$$

Зважаючи на те, що потокозчеплення контурів пов'язане зі струмами, які в цих контурах протікають, співвідношеннями

$$\Psi_1 = L_1 i_1 + L_{B3} i_2 \quad \text{та} \quad \Psi_2 = L_2 i_2 + L_{B3} i_1, \quad (2.34)$$

рівняння (2.33) можна переписати в дещо іншому вигляді, а саме

$$F_{1X} = i_1 \frac{d\Psi_1}{dx} \quad \text{та} \quad m_{1\varphi} = i_1 \frac{d\Psi_1}{d\varphi}. \quad (2.35)$$

Нагадаємо, що при виводі співвідношень (2.35) прийнято незалежність власних індуктивностей контурів від їх взаємного переміщення.

Рівнянням (2.35) може бути надане широке тлумачення. Ці рівняння показують, що сила або момент виникають на контурі з постійною власною індуктивністю незалежно від того, чим саме викликається змінення потокозчеплення – струмами в обох контурах, що розглядаються, або в деяких інших контурах, які зв'язані з даними контурами відповідним магнітним зв'язком.

2.3.4. Електрорушійна сила в електромеханічній системі

Отримані та про аналізовані вище рівняння для визначення сили та моменту надають реальне уявлення про впливи електричного кола на механічну частину електромеханічної системи, тобто описують один з видів зв'язку її електричної та магнітної складових.

В той же час, в електромеханічних системах існує ще один вид зв'язку, так би мовити зв'язок зворотної дії. Цей зв'язок вказує як механічна складова

системи впливає на електричну. Кількісно характер такого впливу визначається на підставі закону Фарадея.

Складені на підставі закону Фарадея рівняння для процесів, що відбуваються в електромеханічній системі, за формою не відрізняються від відповідних рівнянь, складених для звичайних електричних кіл. Однак наявність та змінення відповідних механічних параметрів (змінних) в таких рівняннях приводить до появи в останніх додаткових складових, що відсутні у рівняннях, складених виключно для електричних кіл.

Для аналізу фізичної природи ЕРС, яка виникає (генерується) в електромеханічній системі, запишемо закон Фарадея в загальному вигляді, наприклад для першого контуру деякої двоконтурної електромеханічної системи. Маємо

$$e = \frac{d\Psi(i_1, i_2, x)}{dt} = \frac{d\Psi}{di_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{d\Psi}{di_2} \frac{di_2}{dt} + \frac{d\Psi}{dx} \frac{dx}{dt}. \quad (2.36)$$

Кожна складова правої частини співвідношення (2.36) відображає відповідну складову загальної ЕРС, причому фізична природа цих складових різна, а саме

- перша складова відображає ЕРС самоіндукції, що наводиться в даному контурі за рахунок змінення власного струму (точніше магнітного потоку, що у даному контурі цим струмом обумовлюється);

- друга складова відображає ЕРС взаємної індукції, що наводиться в даному контурі за рахунок змінення струму в другому контурі (точніше магнітного потоку, що у даному контурі обумовлюється струмом, який протікає у другому контурі);

- третя складова характеризує ЕРС, яка обумовлюється взаємним переміщенням складових (контурів) електромеханічної системи.

Часто перші дві складові співвідношення (2.36) розглядають сумісно, називаючи відповідну ЕРС *трансформаторною*. Це обумовлене тим, що такі самі ЕРС діють в системах, що не мають рухомих складових, наприклад у трансформаторах.

Третя складова співвідношення (2.36) характеризує складову загальної ЕРС притаманну виключно електромеханічним системам. ЕРС, що характеризується цією складовою, є безпосереднім *результатом механічного переміщення* й внаслідок залежності її величини від швидкості руху зазвичай зветься *ЕРС руху*.

Само по собі наведене розділення загальної ЕРС на окремі складові не є суттєвим. Важливіше чітко уявляти, що в будь-якій електромеханічній системі існує *взаємний вплив* між її електричною та механічною частинами.

Таким чином, структурно будь-яку електромеханічну систему можна подати як на рис. 2.10.

Як видно з рис. 2.10, будь-яка електромеханічна система (будь-який ЕМП) складається з

- електричної структури (електричне коло, електромагнітний пристрій) – складова, позначена як (1);
- механічної структури – складова, позначена як (2).

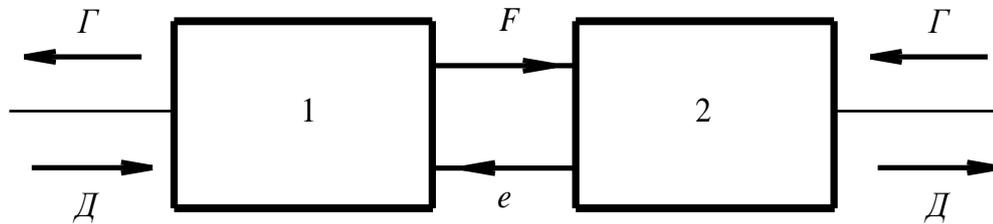


Рис. 2.10 Узагальнена структурна схема електромеханічної системи

Електричне коло, яке входить до складу електромеханічної системи, можна описати рівняннями Кірхгофа, причому, звичайно, слід обов'язково враховувати й ЕРС переміщення (руху).

Механічна структура (складова) електромеханічної системи описується рівняннями динамічної рівноваги (рівняннями Д'Аламбера). При цьому серед сил, що діють в електромеханічній системі слід враховувати й сили електромагнітного походження.

Отже, електромагнітні сили та ЕРС руху являють собою два види зв'язку між електричною та механічною структурами електромеханічної системи. Наявність цих зв'язків визначає, зокрема, принцип оберненості будь-якого ЕМП – можливість його використання як в режимі генератора (Γ), за умови, що вихідною величиною (категорією) цього ЕМП є ЕРС (e), так і в режимі двигуна (D), за умови, що вихідною величиною (категорією) ЕМП є сила (F)

2.4. БАЗОВІ ЗАСАДИ МОДЕЛЮВАННЯ ІДЕАЛІЗОВАНОГО ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОГО ПЕРЕТВОРЮВАЧА

Зазвичай надто важко розібратися в тому, що відбувається насправді, а часто це й не потрібно: необхідно лише знати – працює Ваша ідея або ні

NM

Електромеханічні перетворювачі енергії, які розглядаються в даній роботі, є електричними машинами – двигунами або генераторами. Ці машини можуть мати найрізноманітніше конструкційне виконання. Однак можна виділити загальні характерні риси, що притаманні всім електричним машинам незалежно від їх конструкції та призначення і на підставі такого узагальнення

розробити відповідні моделі конструктивного виконання ЕМП, які в подальшому використовуватимемо для розроблення відповідних математичних моделей цих ЕМП.

2.4.1. Моделі конструкційного виконання електромеханічних перетворювачів

Переважає більшість електричних машин є пристроями «магнітного» типу, тобто в них превалює магнітне поле. У зв'язку з цим основу фізичної структури складають провідники, що розміщені в магнітних матеріалах.

Для реалізації обертового руху електричні машини виконуються у вигляді концентричних магнітних циліндрів з провідниками, розміщеними по сторонах загального повітряного зазору, що утворюється між вказаними циліндрами. Рухома складова такої електричної машини зветься *ротором*, а нерухома – *статором*. Магнітна поверхня з будь-якої сторони вказаного повітряного зазору може мати достатньо довільну форму. Однак по-більшості реальні конструкції можна звести до двох моделей, які наведені на рис. 2.11.

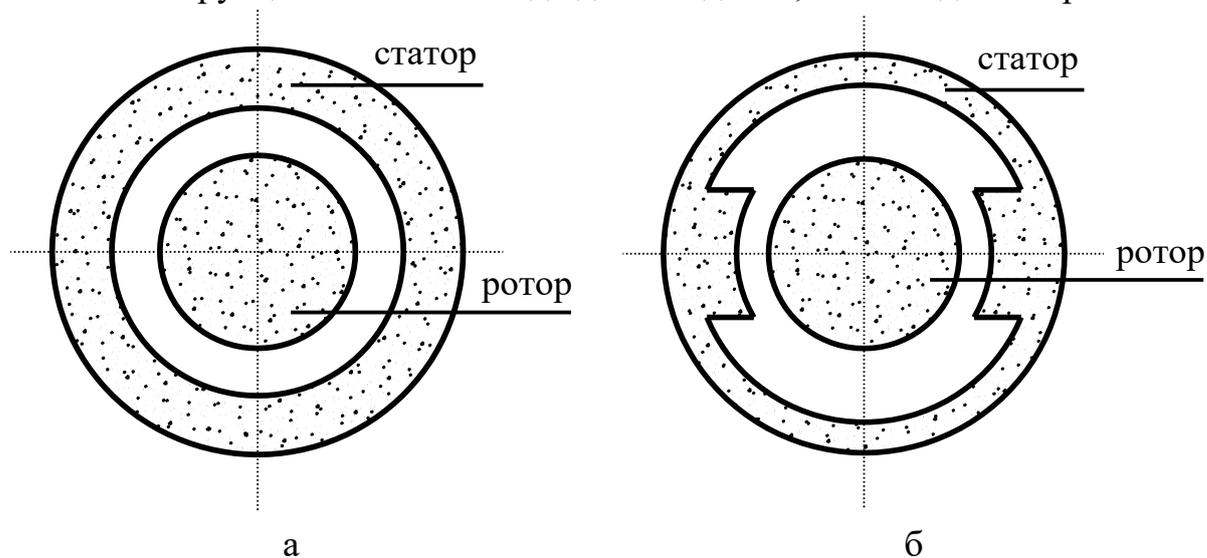


Рис. 2.11. Моделі конструкційного виконання обертових електромеханічних перетворювачів з концентричними магнітними поверхнями з обох (а) та з одної (б) сторони повітряного зазору

Першій моделі (типу) конструкційного виконання (рис. 2.11а) притаманні концентричні магнітні поверхні, які характеризуються симетрією з обох сторін повітряного зазору.

Другій моделі (рис. 2.11б) – притаманні концентричні магнітні поверхні, одна з яких гладка, а на другій відповідним чином сформовані спеціальні виступи.

Для спрощення подальшого аналізу вважатимемо, що
- магнітна проникність матеріалу циліндрів у порівнянні з магнітною проникністю повітря нескінченно велика;

- електромагнітна система містить обмотку, виконану з котушок проводу, які розміщені на поверхні ротора (статора) або з обох сторін повітряного зазору так, що результуючий аксіальний струм на кожній поверхні дорівнює нулю;

- сумарне магнітне поле при наявності декількох обмоток (струмів) може бути отримане методом простого підсумовування окремих складових (утворених кожною з обмоток окремо); тобто вважатимемо, що в структурі діє принцип суперпозиції.

2.4.2. Магнітне поле в повітряному зазорі. Обмоткова функція

Розглянемо варіант (модель) конструкційного виконання електричної машини, наведений на рис. 2.12.

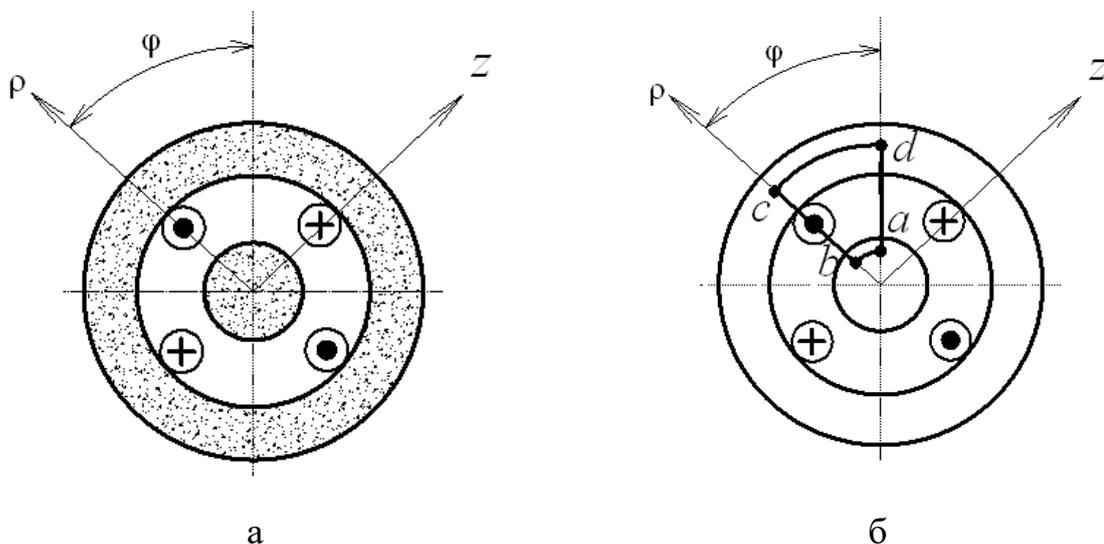


Рис. 2.12. Модель конструкційного виконання електричної машини (до розрахунку магнітного поля в повітряному зазорі)

Для аналізу наведеної моделі конструкційного виконання електричної машини скористаємось циліндричною системою координат з осями ρ , φ , Z . При цьому орієнтуємо ось Z вздовж осі моделі. За таких умов полярні координати ρ , φ характеризуватимуть положення точки на площині, що перпендикулярна до осі Z .

В загальному випадку магнітне поле в повітряному зазорі тривимірне, тобто має складові в напрямку всіх трьох осей.

Зважаючи на те, що для математичного моделювання структури найбільший інтерес становить потокозчеплення обмоток, які знаходяться на поверхні ротора або статора, найсуттєвішою слід вважати компоненту магнітного поля, яка нормальна до поверхні, тобто радіальна (спрямована вздовж осі ρ) компонента. Ця компонента, в свою чергу, є функцією трьох координат: ρ , φ , Z . Однак задачу можна суттєво спростити, якщо припустити,

що обмотка має довжину, яка дорівнює довжині циліндрів прийнятої до розгляду конструкційної моделі. За таких умов магнітне поле стає незалежним від координати Z . Така структура поля зазвичай зветься плоскою.

З другої сторони, якщо радіус ротора r значний, суттєво перевершує величину δ повітряного зазору (а зазвичай ця умова виконується на практиці), радіальна складова магнітного поля (спрямована вздовж координати ρ) в повітряному зазорі буде змінюватися несуттєво і цим змінням можна нехтувати. Отже задача розрахунку магнітного поля в зазорі нами, врешті-решт, зведена до розрахунку змінення магнітного поля виключно вздовж координати φ .

Скориставшись законом повного струму для будь-якого замкненого контуру $abcd$ (див. рис. 2.126), можна записати

$$\int_{abcd} \vec{H} d\vec{l} = \text{струм всередині контуру } abcd. \quad (2.37)$$

Для складових контуру $abcd$, які проходять вздовж осердя (bc , ad), інтеграли дорівнюють нулю, адже за припущеннями магнітна проникність сталі вважається нескінченно великою.

Вважаючи додатною ту складову поля H_δ в зазорі, яка спрямована всередину машини, матимемо

$$\delta [H_\delta(\varphi) - H_\delta(0)] = \sum i. \quad (2.38)$$

Співвідношення (2.38) справедливе для будь-якої точки повітряного зазору з координатою φ . Зважаючи на те, що всі контури, які проходять крізь повітряний зазор, замикаються в точці $\varphi = 0$, величина $H_\delta(0)$ буде присутня в кожному з рівнянь (яким описується відповідний контур), тобто є константою.

Таким чином, за умови, що струм всередині контуру визначений та відома константа $H_\delta(0)$, можна розв'язати рівняння (2.38) відносно $H_\delta(\varphi)$, визначивши, тим самим, магнітне поле в повітряному зазорі електричної машини.

Найпростіша обмотка

Розглянемо модель конструктивного виконання електричної машини, в якій обмотка складається з чотирьох провідників, з'єднаних так, що струми в сусідніх провідниках протікають в протилежних напрямках (див. рис. 2.13а).

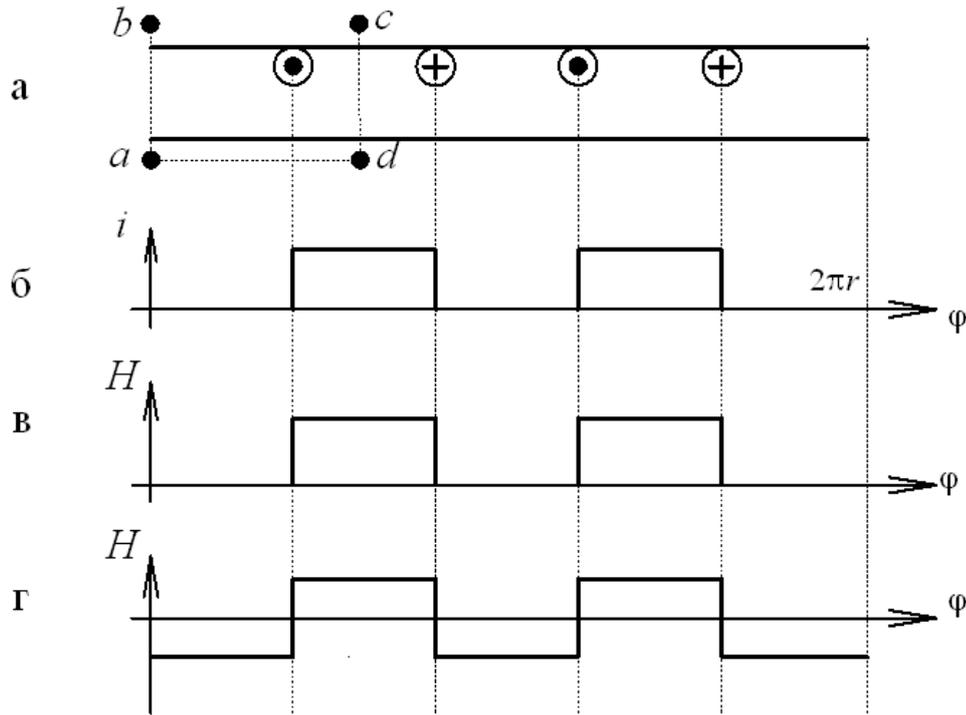


Рис. 2.13. Модель найпростішої обмотки (а) та розподілення струму (б) і магнітного поля (в, г) в повітряному зазорі

Згідно з законом неперервності потоку (законом Гауса) повний магнітний потік Φ , що перетинає замкнену поверхню, має дорівнювати нулю.

Отже

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{H} d\vec{s} = 0. \quad (2.39)$$

Для моделі, яка розглядається, співвідношення (2.39) означатиме, що повний магнітний потік, який перетинає повітряний зазор (утворений між обмотками статора та ротора), дорівнює нулю. Отже, середня величина $H_\delta(\varphi)$ має дорівнювати нулю.

Таким чином, для отримання нульового значення середньої величини $H_\delta(\varphi)$, необхідно досягти симетрії відповідного розподілення магнітного поля по відношенню до координати φ (див. рис. 2.13в). Це означатиме, що постійна складова $H_\delta(0)$ дорівнюватиме

$$H_\delta(0) = -\frac{i}{2\delta}. \quad (2.40)$$

При цьому напруженість магнітного поля в повітряному зазорі електричної машини (точніше, в повітряному зазорі прийнятої конструктивної моделі) матиме вигляд як на рис. 2.13г.

Довільна обмотка

Розглянемо тепер задачу визначення розподілення $H_{\delta}(\varphi)$ для довільної обмотки.

Струм всередині будь-якого замкненого контуру можна знайти, підрахувавши кількість провідників всередині цього контуру з урахуванням напрямку струмів, що протікають цими провідниками. При цьому рівняння (2.38) для загального випадку, який саме й розглядається, можна записати як

$$\delta \cdot [H_{\delta}(\varphi) - H_{\delta}(0)] = [n_{\varphi}(\varphi)] \cdot i, \quad (2.41)$$

де

$n_{\varphi}(\varphi)$ - результуюча кількість провідників з додатним для прийнятого напрямку обходу контуру струмом, які зосереджені між початком відліку та довільною віссю, положення якої визначається кутом φ .

Функція $n_{\varphi}(\varphi)$ характеризує обмотку електричної машини. Цю функцію завжди можна знайти, підрахувавши (як це описано вище) кількість провідників, з яких утворена відповідна обмотка.

Розв'язавши рівняння (2.41) відносно $H_{\delta}(\varphi)$, матимемо

$$H_{\delta}(\varphi) = \frac{i}{\delta} \cdot n_{\varphi}(\varphi) + H_{\delta}(0). \quad (2.42)$$

Скористаємось законом Гауса для поверхні ротора, яка примикає до повітряного зазору.

Площа елементарної частки цієї поверхні визначається як

$$ds = r \cdot d\varphi \cdot dz.$$

Зважаючи на те, що $H_{\delta}(\varphi)$ нормальна до поверхні ротора, скалярний добуток двох векторів можна подати як звичайний добуток двох величин. В результаті отримуємо

$$\mu_0 \int \vec{H} d\vec{s} = \mu_0 r \int_0^l \int_0^{2\pi} H_{\delta}(\varphi) dz d\varphi = \mu_0 r l \int_0^{2\pi} H_{\delta}(\varphi) d\varphi = 0. \quad (2.43)$$

Підставивши у (2.43) величину $H_{\delta}(\varphi)$, визначену як (2.42), отримаємо

$$\mu_0 r l \int_0^{2\pi} \left[\frac{i}{\delta} n_{\varphi}(\varphi) + H_{\delta}(0) \right] d\varphi = 0$$

або

$$\int_0^{2\pi} \frac{i}{\delta} n_{\varphi}(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} H_{\delta}(0) d\varphi = -2\pi H_{\delta}(0).$$

Звідки

$$H_{\delta}(0) = \frac{i}{\delta} n_{\varphi}(\varphi) d\varphi = -\frac{1}{\delta} n_{\varphi\text{сер}}. \quad (2.44)$$

Таким чином, з (2.42) матимемо

$$H_{\delta}(\varphi) = \frac{i}{\delta} \cdot [n_{\varphi}(\varphi) - n_{\varphi\text{сер}}]. \quad (2.45)$$

Введемо позначення

$$N_{\varphi}(\varphi) = n_{\varphi}(\varphi) - n_{\varphi\text{сер}}. \quad (2.46)$$

Таким чином, для визначення напруженості магнітного поля в зазорі електричної машини з урахуванням (2.46) отримуємо рівняння

$$H_{\delta}(\varphi) = \frac{i}{\delta} \cdot N_{\varphi}(\varphi). \quad (2.47)$$

Функціональну залежність $N_{\varphi}(\varphi)$ зазвичай називають *обмотковою функцією*. Цю функцію можна отримати шляхом підрахунку провідників зі струмом з подальшим приведенням результату до нульового середнього значення на інтервалі $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ згідно (2.46).

Таким чином, напруженість магнітного поля в повітряному зазорі можна вважати відомою, як тільки знайдена обмоткова функція, адже залежності напруженості вказаного магнітного поля та обмоткової функції від координати φ ідентичні, а їх величина відрізняється у i/δ разів, причому величина i/δ відома та залишається незмінною за вибраної конструкції ЕМП та режиму роботи цього пристрою.

Синусна обмотка

В електричних машинах використовуються найрізноманітніші обмотки, кожна з яких має відповідну (власну) обмоткову функцію.

Гармонійний аналіз (тобто розкладання функції в ряд Фур'є) дає загальний метод аналізу будь-яких обмоток. За допомогою такого аналізу обмоткову функцію будь-якої обмотки можна подати як *суму нескінченного числа гармонік*, амплітуда та період яких зменшуються з підвищенням номера. Зважаючи на те, що типовими членами ряду Фур'є є синуси (косинуси), можна ввести поняття *синусної обмоткової функції* та *синусної обмотки*. За таких умов, використовуючи принцип суперпозиції, можна *будь-яку реальну*

обмотку подати у вигляді суми відповідних гармонійних обмоток.

Як видно з наведеного вище, обмоткова функція електромеханічної системи періодична. Період цієї функції для двополюсного ЕМП дорівнює 2π рад. В багатополюсних обмотках, коли $2p \geq 4$ (p - число пар полюсів електромеханічної системи), період обмоткової функції дорівнює $2\pi/p$ рад.

Під час розкладення обмоткової функції в ряд Фур'є зручно ввести нову змінну, для якої будь-яка пара полюсів, незалежно від протяжності в просторі, буде займати кут 2π рад.

З цією метою вводиться нова категорія - *електричний кут*, який відповідно до наведеного пов'язаний з геометричним кутом співвідношенням

$$\varphi_e = p\varphi. \quad (2.48)$$

Таким чином, обмоткова функція, аргументом якої є електричний кут, завжди матиме період 2π рад. та записуватиметься у вигляді

$$N_\varphi(\varphi) = \sum_v N_v \sin(v\varphi_e) = \sum_v N_v \sin(vp\varphi). \quad (2.49)$$

Відповідно до наведеного вище щодо можливості подання будь-якої обмотки у вигляді суми відповідних гармонійних обмоток, можна вважати, що кожен член правої частини рівняння (2.49) відповідає обмотці, яка створює в повітряному зазорі електромеханічної системи магнітне поле, розподілене відповідно до синусної функції.

Та з таких часткових (елементарних) уявних обмоток, яка має найбільший просторовий період, зветься *основною*, інші – *гармонійними*.

2.4.3. Потокозчеплення та індуктивність обмотки

Загальний випадок

Відповідно до загального визначення, магнітний потік Φ можна знайти як

$$\Phi = \int_s \vec{B} d\vec{s}, \quad (2.50)$$

де

\vec{ds} - елементарна складова деякої довільної поверхні S , яка, наприклад обмежена провідниками, з котрих саме й складається обмотка.

Зважаючи на те, що рівняння (2.50) передбачає відомим розподілення магнітного поля в повітряному зазорі, величину елементу ds поверхні S вибираємо в повітряному зазорі як

$$ds = r \cdot dz \cdot d\varphi.$$

За таких умов (2.50) можна подати як

$$\Phi = rl \int B_{\delta}(\varphi) d\varphi. \quad (2.51)$$

При цьому потокозчеплення визначатиметься співвідношенням

$$\Psi = rl \int_0^{2\pi} n_{\varphi}(\varphi) B_{\delta}(\varphi) d\varphi. \quad (2.52)$$

Нагадаємо, що функція $n_{\varphi}(\varphi)$ - це результуюча кількість провідників з додатним для прийнятого напрямку обходу контуру струмом, при цьому підрахунку піддаються ті провідники, що зосереджені між початком відліку та довільної віссю, положення якої визначається кутом φ . Зазначимо, що функція $n_{\varphi}(\varphi)$ не тільки надає уявлення про характер розподілення магнітного поля в повітряному зазорі, але й визначає границі інтегрування для розрахунку потокозчеплення.

З урахуванням рівняння (2.46), яким визначається обмоткова функція, отримуємо наступне співвідношення для розрахунку потокозчеплення

$$\Psi = rl \int_0^{2\pi} N_{\varphi}(\varphi) B_{\delta}(\varphi) d\varphi + n_{\varphi_{сер}} rl \int_0^{2\pi} B_{\delta}(\varphi) d\varphi. \quad (2.53)$$

Зважаючи на те, що відповідно до закону Гауса середнє значення індукції $B_{\delta}(\varphi)$ в інтервалі $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ дорівнює нулю, другий інтеграл в (2.53) також дорівнюватиме нулю, а отже

$$\Psi = rl \int_0^{2\pi} N_{\varphi}(\varphi) B_{\delta}(\varphi) d\varphi. \quad (2.54)$$

При визначенні власної індуктивності деякої обмотки a величина індукції $B_{\delta}(\varphi)$ пов'язана з магнітним полем (обумовлюється магнітним полем), яке утворюється саме цією обмоткою. Тому можемо записати цю індукцію як

$$B_{\delta a}(\varphi) = \mu_0 H_{\delta a}(\varphi) = \mu_0 \frac{i_a}{\delta} N_{\varphi a}(\varphi). \quad (2.55)$$

Отже, відповідно до визначення власної індуктивності та рівняннями (2.54) і (2.55) співвідношення для розрахунку власної індуктивності обмотки a можна подати як

$$L_a = \frac{\Psi_a}{i_a} = \mu_0 \frac{rl}{\delta} \int_0^{2\pi} N_{\varphi a}^2(\varphi) d\varphi. \quad (2.56)$$

Для визначення взаємної індуктивності двох обмоток a -ї та b -ї у співвідношення (2.54) слід додати індукцію магнітного поля, що утворюється b -ю обмоткою, а саме

$$B_{\delta b}(\varphi) = \mu_0 \frac{i_b}{\delta} N_{\varphi b}(\varphi).$$

Отже взаємна індуктивність a -ї обмотки по відношенню до b -ї обмотки з урахуванням наведеного визначатиметься як

$$L_{ab} = \frac{\Psi_{ab}}{i_b} = \mu_0 \frac{rl}{\delta} \int_0^{2\pi} N_{\varphi a}(\varphi) N_{\varphi b}(\varphi) d\varphi. \quad (2.57)$$

За аналогією можна записати взаємну індуктивність b -ї обмотки по відношенню до a -ї обмотки, а саме

$$L_{ba} = \frac{\Psi_{ba}}{i_a} = \mu_0 \frac{rl}{\delta} \int_0^{2\pi} N_{\varphi a}(\varphi) N_{\varphi b}(\varphi) d\varphi. \quad (2.58)$$

Із співвідношень (2.57) та (2.58) видно, що

$$L_{ab} = L_{ba}$$

Таким чином, ідеалізовану електромеханічну систему (як, звичайно, і ідеалізовану електричну машину) можна характеризувати, використовуючи лише поняття обмоткової функції.

Універсальність співвідношення (2.58) полягає ще й в тому, що воно показує незалежність характеру взаємного індуктивного зв'язку двох обмоток від того розподілені ці обмотки або зосереджені. Цей висновок важливий, адже дозволяє для цілей математичного моделювання замінити будь-яку розподілену обмотку еквівалентною зосередженою обмоткою, що часто суттєво спрощує задачу.

Синусна обмотка

Для будь-якої обмотки ротора або статора електричної машини v -та гармоніка обмоткової функції може бути подана як

$$N_{\varphi v}(\varphi) = N_v \cos(v\varphi_e + \gamma_v). \quad (2.59)$$

Вибір функції синусу або косинусу, звичайно, може бути довільним, адже

при відповідному виборі просторового кута γ_v обидві форми виявляються ідентичними.

Для подальшого аналізу зручніше буде використовувати саме функцію косинусу, бо при цьому просторовий кут γ_v вказуватиме на розміщення осі гармонійної функції.

Власну індуктивність будь-якої v -ї гармонійної обмотки за умови використання співвідношення (2.59) можна отримати після підстановки цієї гармонійної обмоткової функції у рівняння (2.56) та врахування (2.59). А саме

$$\begin{aligned} L_v &= \mu_0 \frac{rl}{\delta} \int_0^{2\pi} N_v^2 \cos^2(v\varphi_e + \gamma_v) d\varphi = \\ &= \mu_0 \frac{rl}{\delta} N_v^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(vp\varphi + \gamma_v) d\varphi = \mu_0 \frac{\pi rl}{\delta} N_v^2 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Зі співвідношення (2.60) видно, що власна індуктивність не залежить від орієнтації осі обмотки у просторі, яка визначається величиною кута γ_v .

Таким чином, власна індуктивність синусної обмотки постійна - визначається геометричними розмірами обмотки та повітряного зазору, а також кількістю провідників (витків) обмотки.

Припустимо, що крім розглянутої v -ї обмотки є ще одна (k -та) синусна обмотка, яка характеризується обмотковою функцією

$$N_{\varphi k}(\varphi) = N_k \cos(k\varphi_e + \gamma_k). \quad (2.61)$$

В загальному випадку ця обмотка може мати іншу кількість полюсів та інше розподілення у просторі. Обидві обмотки можуть бути гармонійними складовими одної або двох різних обмоток. В будь-якому випадку взаємну індуктивність цих двох обмоток (v -ї та k -ї) можна отримати на підставі рівняння (2.58), а саме

$$\begin{aligned} L_{vk} &= \mu_0 \frac{rl}{\delta} \int_0^{2\pi} N_v \cos(v\varphi_e + \gamma_v) N_k \cos(k\varphi_e + \gamma_k) d\varphi = \\ &= \mu_0 \frac{rl}{\delta} N_v N_k \int_0^{2\pi} \cos(vp\varphi + \gamma_v) \cos(kp\varphi + \gamma_k) d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Нуль у правій частині співвідношення (2.62) має місце при будь-яких параметрах обмоток за умови $v \neq k$. Це впливає з властивості ортогональної системи гармонійних функцій, до яких належать і використані нами функції косинусу.

З рівняння (2.62) безпосередньо впливає

- між синусними обмотками, що мають різну кількість полюсів немає магнітного зв'язку;

- взаємна індуктивність відсутня між будь-якими гармонійними обмотками, які є складовими однієї реальної обмотки;

- власна індуктивність будь-якої обмотки дорівнює сумі власних індуктивностей синусних обмоток, які є її складовими.

Визначимо взаємну індуктивність двох синусних обмоток, які мають однакову кількість полюсів ($\nu = k$). Зважаючи на те, що взаємна індуктивність характеризує різні обмотки, введемо для таких обмоток позначення a та b . При цьому обмоткові функції таких обмоток запишуться як

$$N_{\varphi av}(\varphi) = N_{av} \cos(\nu\varphi_e + \gamma_{av}). \quad (2.63)$$

$$N_{\varphi bv}(\varphi) = N_{bv} \cos(\nu\varphi_e + \gamma_{bv}).$$

В загальному випадку ці функції можуть мати різні амплітуди та розподілення у просторі.

Після підстановки (2.63) в (2.57) та відповідних перетворень отримуємо

$$L_{abv} = \mu_0 \frac{\pi r l}{\delta} N_{bv} N_{av} \cos(\gamma_{av} - \gamma_{bv}). \quad (2.64)$$

Зі співвідношення (2.64), зокрема, видно, що взаємна індуктивність двох синусних обмоток з однаковим числом полюсів визначається функцією косинусу збільшеного у ν разів просторового кута між осями основних складових, які відповідають реальним обмоткам.

Дійсно, величину $(\gamma_{av} - \gamma_{bv})$ можна подати як

$$\nu = \left(\frac{\gamma_{av}}{\nu} - \frac{\gamma_{bv}}{\nu} \right) = \nu\gamma, \quad (2.65)$$

де

γ - електричний кут між осями основних синусних обмоток (тобто між максимумами обмоткових функцій).

Таким чином,

$$L_{abv} = \mu_0 \frac{\pi r l}{\delta} N_{bv} N_{av} \cos(\nu\gamma). \quad (2.66)$$

або

$$L_{abv} = L_{abv m} \cos(\nu\gamma). \quad (2.67)$$

де індексом (m) позначене максимальне значення взаємної індуктивності.

Співвідношення (2.67) має очевидний фізичний зміст: *взаємна індуктивність обмоток (магнітний зв'язок обмоток) матиме максимальну величину, за умови, що осі цих обмоток співпадають, і мінімальну, коли ці осі взаємноперпендикулярні.*

Принципи електромеханічного перетворення енергії



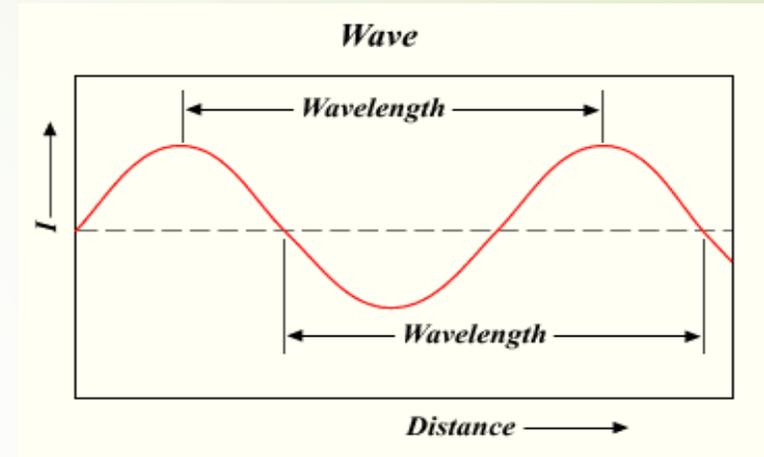
ЛЕКЦІЯ 2

Зосереджені параметри проти розподілених параметрів

Якщо фізичний розмір пристрою малий порівняно з довжиною хвилі, пов'язаною поширенням сигналу, пристрій можна вважати зосередженим і використовувати зосереджену (мережеву) модель.

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

$\lambda =$ довжина хвилі (відстань/цикл)
 $v =$ швидкість поширення хвилі
(відстань/секунда)
 $f =$ частота сигналу (Гц)



В дисперсивному середовищі, фазова швидкість залежить від частоти хвилі, що робить зв'язок між довжиною хвилі і частотою нелінійним.

У випадку з **Електромагнітним випромінюванням** — таким як світло — у **вільному просторі**, фазова швидкість дорівнює **швидкості світла**, що є близькою 3×10^8 м/сек. Таким чином довжина хвилі 100 МГц електромагнітної (радіо) хвилі становить близько: 3×10^8 м/сек розділене на 10^8 Гц = 3 метри. Довжина хвиль видимого світла варіюється від темно **червоного**, що має довжину хвилі приблизно в 700 нм, до **фіолетового**, приблизно 400 нм (інші приклади див. **електромагнітний спектр**).

Консервативне силове поле

Силове поле, що діє на об'єкт, називається консервативним, якщо робота, що виконується при переміщенні об'єкта з однієї точки в іншу, не залежить від шляху, що з'єднує дві точки.

$$\vec{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

не залежить від шляху тоді і тільки тоді, коли $\nabla \times \vec{F} = 0$ або

$$\vec{F} = \nabla\phi$$

\vec{F} Векторне поле, як кажуть, **консервативне**, якщо існує функція ϕ така, що $\vec{F} = \nabla\phi$. Тоді ϕ називається *потенціалом* для \vec{F} . Зверніть увагу, що якщо ϕ є потенціалом для \vec{F} і якщо C є константою, то $\phi + C$ є також потенціал для \vec{F} .

$$\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

є точним диференціалом

$$F_1dx + F_2dy + F_3dz = d\phi$$

де

$$\phi(x, y, z)$$

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} d\phi = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$$

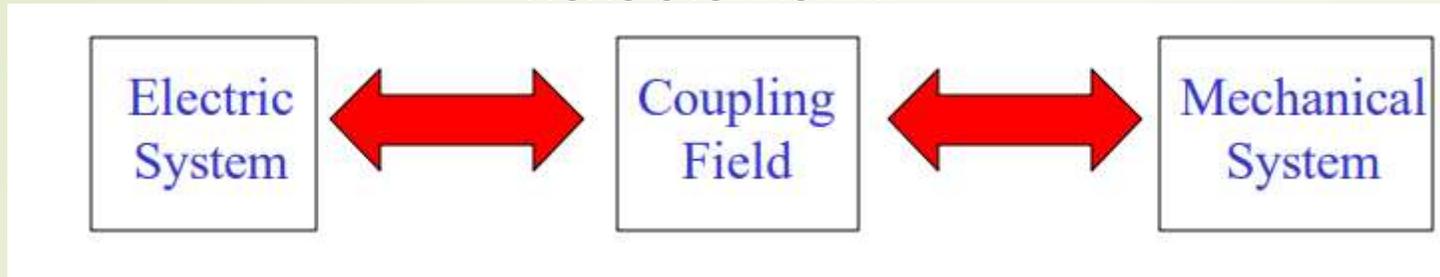
Взаємозв'язок енергетичного балансу

Електромеханічна система

- – Включає
 - Електрична система
 - Механічна система
 - Засоби, за допомогою яких електричні та механічні системи можуть взаємодіяти
- – Взаємодії можуть відбуватися через будь-які електромагнітні та електростатичні поля, які є спільними для обох систем, і енергія передається в результаті цієї взаємодії.
- – І електростатичні, і електромагнітні поля зв'язку можуть існувати одночасно, і система може мати будь-яку кількість електричних і механічних підсистем.

► • Електро механічна система в спрощеному вигляді:

Поле зчеплення



► – Нехтуйте електромагнітним випромінюванням

► – Припустимо, що електрична система працює на досить низькій частоті, щоб електричну систему можна було вважати системою зосереджених параметрів

► • Розподіл енергії

$$W_E = W_e + W_{eL} + W_{eS}$$

$$W_M = W_m + W_{mL} + W_{mS}$$

► – $W_E =$

загальна енергія, що постачається джерелом електроенергії (+)

► – $W_M =$

загальна енергія, що постачається механічним джерелом (+)

$$- W_{eS} =$$

енергія, накопичена в електричних або магнітних полях, **які не пов'язані з механічною системою**

$$- W_{eL} =$$

втрати тепла, пов'язані з електричною системою, за винятком втрат поля зв'язку, які виникають через:

- опір провідників зі струмом
- енергія, що розсіюється у вигляді тепла внаслідок гістерезису, вихрових струмів і діелектричних втрат поза полем зв'язку

$$- W_e =$$

енергія, що передається в поле зв'язку електричною системою

$$- W_{mS} =$$

енергія, що зберігається в рухомому елементі, і податливість механічної системи

$$- W_{mL} =$$

втрати енергії механічної системи у вигляді тепла внаслідок тертя

$$- W_m =$$

енергія, що передається в поле зв'язку механічною системою

• $W_F = W_f + W_{fL} =$ повна енергія, передана полю зв'язку

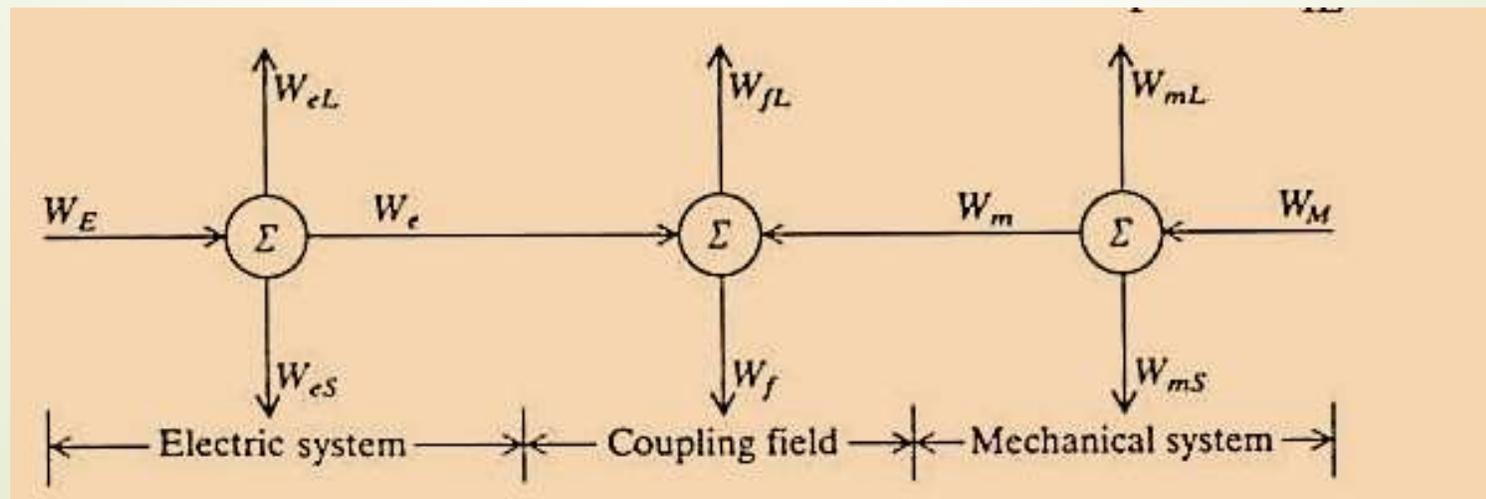
– $W_f =$ енергія, що зберігається в полі зв'язку

– $W_{fL} =$ енергія, що розсіюється у вигляді тепла через втрати в полі зв'язку (вихровий струм, гістерезис або діелектричні втрати)

➤ Збереження енергії

$$W_f + W_{fL} = (W_E - W_{eL} - W_{eS}) + (W_M - W_{mL} - W_{mS})$$

$$W_f + W_{fL} = W_e + W_m$$



- Фактичний процес перетворення електричної енергії в механічну (або навпаки) не залежить від:

- Втрата енергії в електричних або механічних системах (W_eL і W_mL)
- Енергія, що зберігається в електричних або магнітних полях, які не є спільними для обох систем (W_eS)
- Енергія, що зберігається в механічній системі (W_mS)
- Якщо знехтувати втратами поля зв'язку, то поле є консервативним і $W_f = W_e + W_m$.
- Розглянемо два приклади елементарних електромеханічних систем– Поле магнітного зв'язку– Електричне поле як засіб перенесення енергії

$v =$ напруга електричного джерела

$f =$ зовнішньої механічної сили

$f_e =$ електромагнітна або

електростатична сила

$r =$ опір провідника зі струмом

$\ell =$ індуктивність лінійної (консервативної)

електромагнітної системи, яка не поєднує механічну систему

Електромеханічна система з магнітним полем

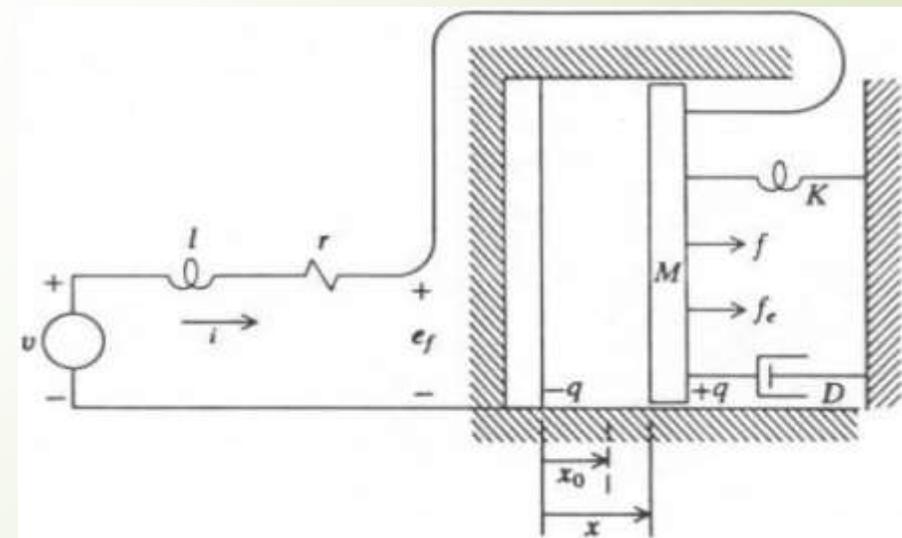
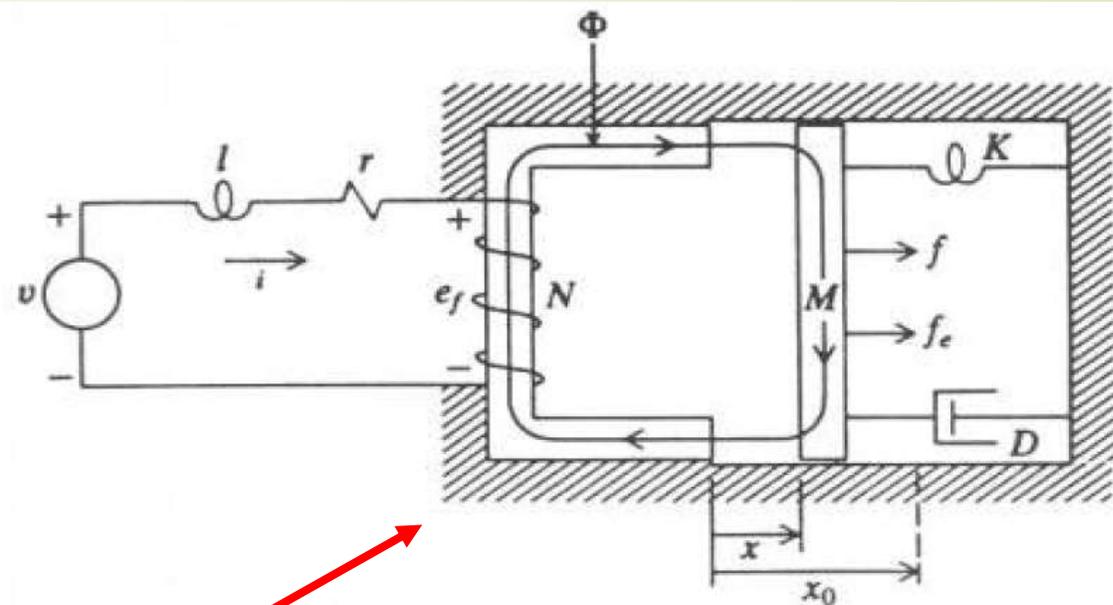
$M =$ маса рухомого елемента

$K =$ пружинна константа

$D =$ коефіцієнт демпфування

нульова сила або положення

$x_0 =$ рівноваги механічної системи



Електромеханічна система з електричним полем

$$v = ri + \ell \frac{di}{dt} + e_f$$

рівняння напруги, що описує електричні системи;
 e_f падіння напруги через поле зв'язку

$$f = M \frac{d^2x}{dt^2} + D \frac{dx}{dt} + K(x - x_0) - f_e$$

Закон руху Ньютона

Оскільки потужність — це швидкість передачі енергії в часі, це загальна енергія, що надходить від електричних і механічних джерел

$$W_E = \int (vi) dt$$

$$W_M = \int (f)dx = \int \left(f \frac{dx}{dt} \right) dt$$

$$v = ri + \ell \frac{di}{dt} + e_f$$

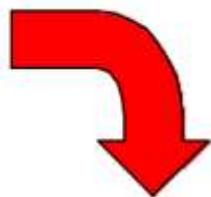
$$W_E = \int (vi) dt$$

$$W_E = r \int (i^2) dt + \ell \int \left(i \frac{di}{dt} \right) dt + \int (e_f i) dt$$

$$= W_{eL} + W_{eS} + W_e$$

$$f = M \frac{d^2 x}{dt^2} + D \frac{dx}{dt} + K(x - x_0) - f_e$$

$$W_M = \int (f) dx = \int \left(f \frac{dx}{dt} \right) dt$$



$$W_M = M \int \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) dx + D \int \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt + K \int (x - x_0) dx - \int (f_e) dx$$

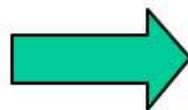
Σ

W_{mS}

W_{mL}

W_m

$$W_f = W_e + W_m = \int (e_f i) dt - \int (f_e) dx$$

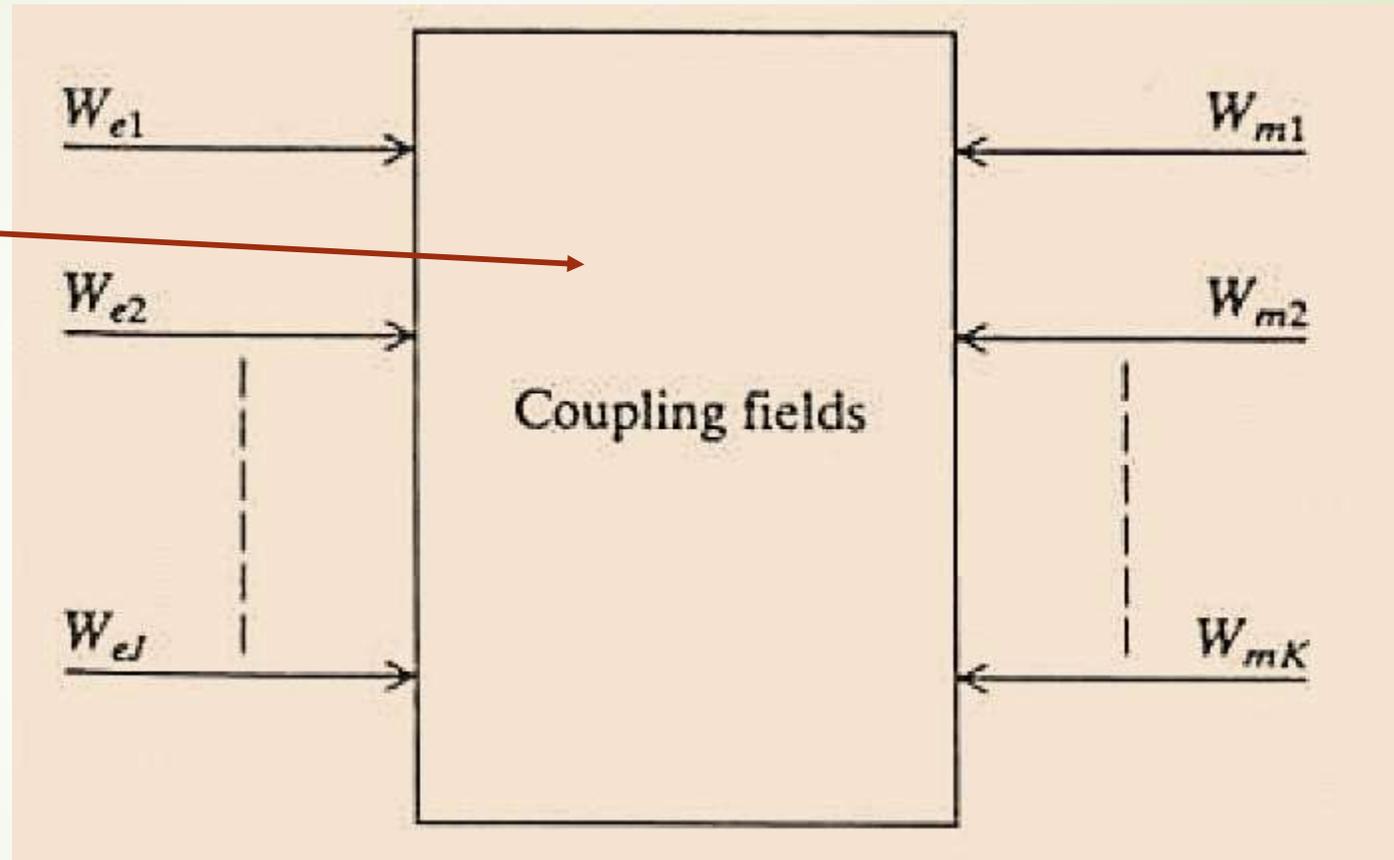


повна енергія, передана

ПОЛЮ ЗВ'ЯЗКУ

- Ці рівняння можна легко розширити, щоб включити електромеханічну систему з будь-якою кількістю електричних і механічних входів і будь-якою кількістю полів зв'язку.

► Поле зчеплення



- Ми розглянемо пристрої лише з одним механічним входом, але, можливо, з кількома електричними входами. Однак у всіх випадках кілька електричних входів мають спільне поле зв'язку.

$$W_f = \sum_{j=1}^J W_{ej} + \sum_{k=1}^K W_{mk}$$

Загальна енергія, що надходить до поля зв'язку

$$\sum_{j=1}^J W_{ej} = \int \sum_{j=1}^J e_{fj} i_j dt$$

Загальна енергія, що надходить до поля зв'язку від електричних входів

$$\sum_{k=1}^K W_{mk} = - \int \sum_{k=1}^K f_{ek} dx_k$$

Загальна енергія, що надходить до поля зв'язку від механічних входів

$$W_f = \int \sum_{j=1}^J e_{fj} i_j dt - \int f_e dx$$

$$dW_f = \sum_{j=1}^J e_{fj} i_j dt - f_e dx$$

З одним механічним входом і декількома електричними входами енергія, що подається в поле зв'язку, як в інтегральній, так і в диференціальній формі

Енергія в полі зв'язку

- Нам потрібно вивести вираз для енергії, що зберігається в полі зв'язку, перш ніж ми зможемо визначити електромагнітну силу f_e .
- Ми будемо нехтувати всіма втратами, пов'язаними з електричним або магнітним полем зв'язку, після чого поле вважається консервативним, а збережена в ньому енергія є функцією стану електричних і механічних змінних, а не способу, яким змінні досягли цього стану.
- Це припущення не є таким обмеженим, як може здатися на перший погляд.
- Феромагнітний матеріал вибрано та розміщено в шарах таким чином, щоб мінімізувати гістерезис і втрати на вихрові струми.
- Майже вся енергія, що зберігається в полі сполучення, зберігається в повітряному зазорі електромеханічного пристрою. Повітря є консервативним середовищем, і всю накопичену в ньому енергію можна повернути в електричні або механічні системи.
- Ми скористаємося припущенням консервативного поля при розробці математичного виразу для енергії поля. Ми зафіксуємо математично положення механічної системи, пов'язаної з полем зв'язку, а потім збудимо електричну систему, утримуючи фіксований зсув механічної системи.

ЛЕКЦІЯ 3

Основні положення теорії моделювання

1.1. Функції моделі на різних етапах життєвого циклу матеріальних об'єктів

Під математичною моделлю прийнято розуміти сукупність співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних умов, операторів і т.п.), які визначають характеристики стану об'єкту моделювання, а через них і вихідні значення - реакції, в залежності від параметрів об'єкта-оригінала, вхідних впливів, початкових та граничних умов, часу тощо.

Один і той же матеріальний об'єкт (МО) може бути описаний різними моделями, в залежності від цілей побудови моделі та методів, спрямованих на досягнення цих цілей. В визначеному сенсі можна казати, що моделі – це посередники, які відображають деякі аспекти реальних явищ.

Цілі, що мають бути досягнуті за результатами моделювання МО, суттєво різняться в залежності від стадії життєвого циклу, на якому таку модель передбачається використовувати.

На стадії проектування - це одержання інформації, яка необхідна для прийняття (та підтвердження ефективності) схемотехнічних, конструкторських та технологічних рішень, завдяки яким досягаються відповідні споживчі характеристики МО, забезпечується можливість використання ефективних методів контролю його параметрів в процесі виробництва та технічного обслуговування під час експлуатації, використання безпечних методів та засобів утилізації тощо.

На цій стадії життєвого циклу математичні моделі забезпечують

- синтез всіх схем (структурної, функціональної, принципової, монтажної, кінематичної та ін.);
- аналіз схем, з метою перевірки забезпечення вихідних характеристик у визначених умовах використання;
- вибір комплектуючих;
- компоновання об'єкту;
- розроблення складових частин;
- розроблення алгоритмів діагностування тощо.

Моделювання властивостей сапфірового диску
при зчитуванні інформації на швидкості 10400 об/хв.



На стадії виробництва - це контроль технологічного процесу та управління ним. На стадії виробництва модель МО використовується для отримання інформації щодо впливу параметрів технологічних процесів на вихідні характеристики МО, з метою прийняття рішень щодо корекції режимів вказаних процесів. Відмітимо, що цей тип моделей, зазвичай, заснований на глибокому аналізі фізичних та хімічних явищ, що відбуваються у складових частинах МО під час технологічного процесу.

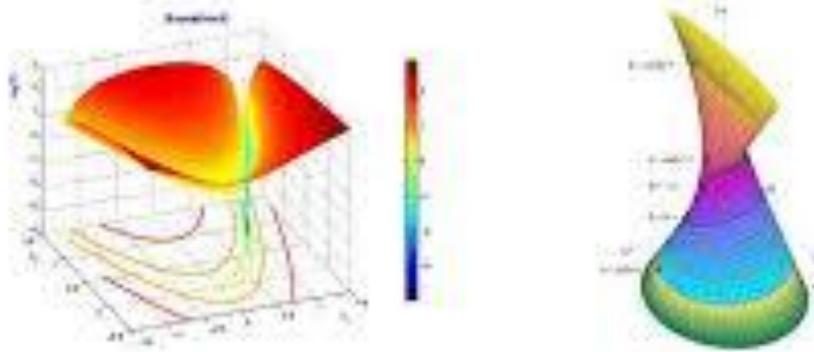
На стадії експлуатації - це підтримання та прогнозування працездатності МО, визначення складових частин, що призвели до втрати МО своїх споживчих властивостей, отримання, накопичення та систематизація інформації, яка має стати основою прийняття рішень щодо модернізації даного виду МО або розроблення більш ефективних об'єктів наступного покоління тощо.

створення моделей.

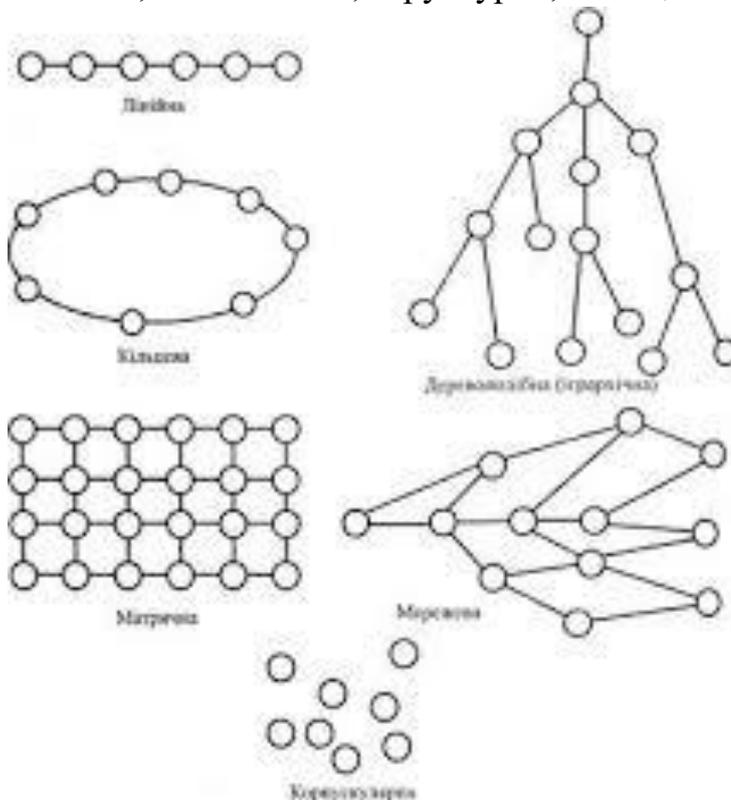
Висновок

У процесі математичного моделювання, зокрема при розв'язанні прикладних задач, виокремлюють такі основні етапи:

- 1). Попередній аналіз об'єкта моделювання
- 2). Побудова математичної моделі
- 3). Реалізація математичної моделі (дослідження функції)
- 4). Аналіз одержаних даних і перенесення їх на об'єкт моделювання



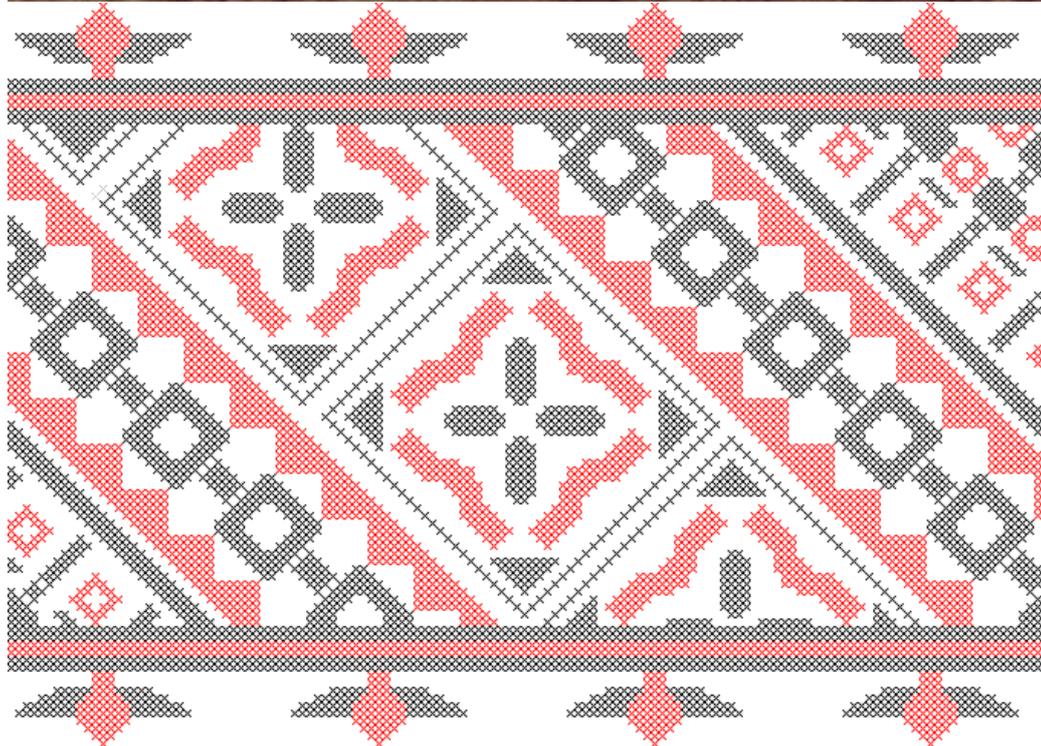
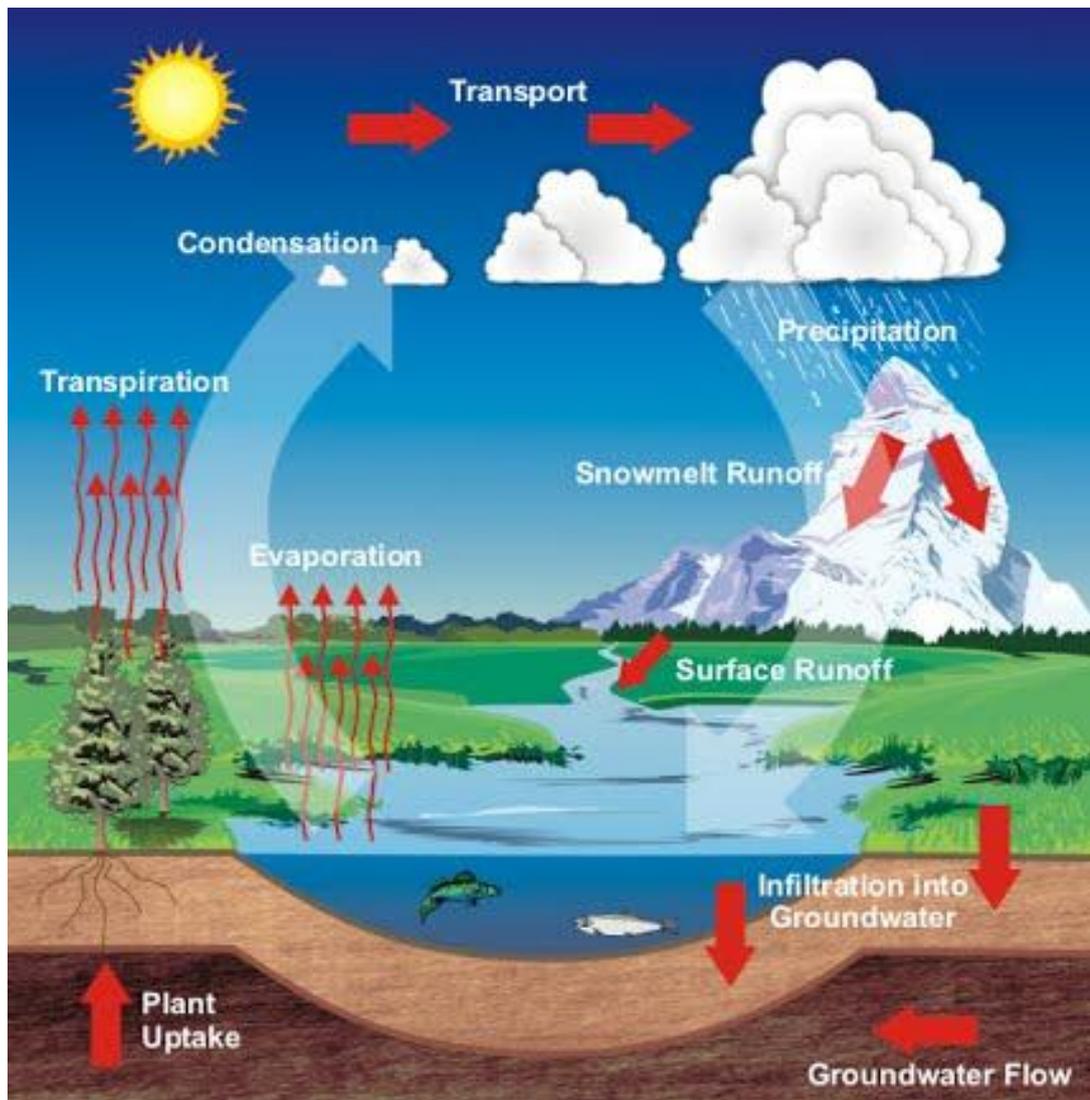
На сьогодні не існує єдиної класифікації видів моделювання, що пояснюється багатозначністю самого поняття «модель». Класифікувати види моделювання можна за характером моделей, за характером МО, що моделюються, за областю використання моделі (в техніці, в фізичних науках, в соціології тощо). Наприклад, можна виділити інформаційне, комп'ютерне, математичне, статистичне, структурне, імітаційне та ін. моделювання.



За способом подання МО розрізняють моделі *структурні* та *функціональні*. При цьому *структурні моделі* подають МО як систему з відповідною структурою, характер та обсяг якої відображає суттєві для цілей дослідження властивості та взаємні зв'язки окремих складових частин цього МО. В той же час, *функціональні моделі* відображають лише характер реакції МО на зовнішні впливи, подають цей МО як «чорний ящик».

За будь-яких умов *математична модель МО* має відповідати конкретним потребам та умовам, тобто має бути пристосована для розв'язання конкретних задач.

Наприклад, для розрахунку показників безвідмовності за відсутністю резервування математичну модель МО можна подати у вигляді послідовного з'єднання складових частин, для яких відомі інтенсивності відмов, тоді як при наявності резервування математична модель цього ж МО подається у вигляді послідовно-паралельного з'єднання відповідних складових частин; для аналізу та/або синтезу МО необхідна модель, що відображає (звичайно, з певною мірою припущень) фізичні процеси, які відбуваються у складових частинах під час роботи цього МО у визначених умовах експлуатації; для пошуку несправної складової в МО при побудові моделі можна обмежитись бінарним відображенням вихідних характеристик його складових і т.п.



Низкою вчених були розроблені методи опису складних симетричних зображень-орнаментів української вишивки, які базуються на

алгоритмам формалізації груп перетворень зображень на основі осьових симетрій.

1.2. Загальні принципи моделювання матеріальних об'єктів

Процес моделювання будь-якого матеріального об'єкту, в узагальненому вигляді, можна подати як сукупність визначених етапів.



Перший етап побудови моделі передбачає наявність визначених знань щодо МО (об'єкту-оригіналу). Пізнавальні можливості моделі визначаються тим, що модель відображає (імітує) якісь суттєві риси об'єкту-оригіналу. Питання щодо необхідної та достатньої міри збіжності оригіналу з моделлю потребує конкретного аналізу.

Модель заміщує оригінал лише в строго обмеженому сенсі. З цього випливає, що для одного МО може бути побудовано декілька «спеціалізованих» моделей, кожна з яких «концентрує увагу» на визначених сторонах (властивостях) цього МО, або характеризує його з різним ступенем деталізації.

На другому етапі модель виступає як самостійний об'єкт (артефакт) дослідження. Однією з форм такого дослідження є проведення «модельних» експериментів, під час яких змінюють умови функціонування моделі та систематизують дані щодо її «поведінки». За результатами таких дій отримується інформація щодо властивостей моделі у тих чи інших умовах.

На третьому етапі здійснюється перенесення інформації, отриманої за допомогою моделі на оригінал. Тобто формується сукупність інформаційних даних щодо МО. Дані, отримані на другому етапі, при необхідності мають бути кореговані з урахуванням тих властивостей об'єкту-оригіналу, що не знайшли відображення, або були свідомо спотворені (спрошені) під час побудови моделі.

Четвертий етап полягає в практичній перевірці отриманої за допомогою моделі інформації та її використання для побудови узагальненої теорії МО, для його модифікації в потрібному напрямку, для пошуку

несправностей (у разі втрати МО працездатності), для цілей керування цим МО тощо.

Моделювання - циклічний процес. Це означає, що за першим чотирьохетапним циклом може слідувати другий, третій і т.д. При цьому інформація щодо МО уточнюється та розширюється, а сама модель удосконалюється. Недоліки, що виявлені після «проходження» першого циклу моделювання та обумовлені малим обсягом інформації щодо МО та/або помилками в побудові моделі, виправляються на наступних циклах.

Для визначення математичної (віртуальної) моделі МО використовують ідеалізацію «вхід - стан – вихід». При цьому математичну модель МО визначають як абстрактне уявлення, згідно якого за допомогою визначеного набору змінних, характеризуються «входи», «виходи» та «стани» об'єкту, а для опису їх взаємодії використовують відповідний математичний апарат.

В загальному випадку процес математичного моделювання МО пов'язаний з необхідністю виконання ряду процедур, які передують безпосередньому застосуванню відповідних математичних процедур моделювання, а саме:

- визначення сукупності параметрів, які виступатимуть аргументами математичної моделі (тобто формування області визначення майбутнього математичного артефакту);

- встановлення оптимальної інформативної сукупності параметрів, які мають визначатися на підставі моделювання (тобто формування області можливих значень майбутнього математичного артефакту);

- визначення критеріїв, вибір методів і засобів порівняння параметрів, що належать до вказаної інформативної сукупності.

Після реалізації вказаних процедур процес математичного моделювання зводиться до встановлення функціонального зв'язку між вибраними параметрами-аргументами та параметрами, які мають визначатися за результатами моделювання. Зазначимо, що параметри, які визначаються за результатами моделювання, як правило, формують інформацію щодо технічного стану МО.

1.3. Види подання інформації щодо характеристик матеріального об'єкту та його моделі

Моделювання матеріального об'єкту, незалежно від стадії його життєвого циклу, **передбачає отримання інформації**, що необхідна для прийняття відповідних рішень.

Інформаційна база даних для визначення відповідності характеристик МО отримується за результатами реалізації відповідних **операцій спостереження**. Характер та методи реалізації цих операцій визначаються етапом життєвого циклу МО та поставленими цілями. Операції спостереження

реалізуються, переважно, у вигляді операцій *контролю, вимірювання та експертного оцінювання* визначених параметрів МО.

Звичайно, з повним правом до операцій спостереження можна віднести й розрахункові операції щодо визначення вихідних параметрів МО та/або його складових частин на стадії проектування з використанням відповідних математичних (віртуальних) моделей.

Контроль — це операція спостереження, спрямована на перевіряння відповідності продукції, процесів її створення, використання, транспортування, зберігання, технічного обслуговування і ремонту, а також відповідної технічної документації встановленим вимогам. Процес контролю технічного стану МО безпосередньо пов'язаний з процесом визначення тих чи інших параметрів цього МО. Частина цих параметрів є фізичними величинами, що визначаються кількісними характеристиками, тоді як інші — характеристики якісні, такі, що характеризують ті чи інші властивості МО у термінах не кількісних, а якісних, наприклад, «гарний», «кращий», «більш кращий», «найкращий», «гірший» та ін.

Вимірювання — це операція спостереження, спрямована на приймання та перетворення інформації щодо деякої фізичної величини (параметра *об'єкта вимірювання*), з метою отримання кількісного (об'єктивного) результату (кількісного значення параметра об'єкта вимірювання), порівняння цього результату з прийнятою *шкалою* або *одиноцею вимірювання* та подання її у вигляді, найбільш придатному для подальшого використання.

Кількісний результат вимірювання зазвичай подається в чисельній формі або у вигляді функціональних залежностей [7, 8]. Тобто в процесі вимірювання значення параметра порівнюється з *одиноцею визначеної фізичної величини* з метою отримання кількісної інформації. **В цьому полягає фундаментальна відмінність операцій вимірювання від операцій контролю, в процесі якого значення параметра порівнюється з його нормою, а метою є визначення відповідного відхилення (найчастіше при цьому обмежуються лише самим фактом відхилення).**

Спостереження за станом МО, яке пов'язане з його якісними характеристиками, здійснюється шляхом *експертного оцінювання*. Отримані на підставі *опитування* групи експертів якісні (суб'єктивні) оцінки, за допомогою спеціальних математичних методів перетворюють на числа, що дозволяє ввести відповідні контрольні операції і за цими характеристиками.

Відмітимо, що для комплексного контролю МО, доцільно на підставі кількісних та якісних оцінок вводити, як це буде показано нижче, інтегральну оцінку, яка враховуватиме результати як фізичних вимірювань, так і експертного опитування.

З визначеними вище поняттями контролю та вимірювання тісно пов'язані поняття *технічної діагностики* (надалі слово «технічна» часто будемо опускати) та *діагностування (технічного діагностування)*. Термін «діагностика» походить від грецького слова «діагноз», що означає визначення,

розпізнавання.

Технічна діагностика — є теоретичний фундамент для створення оптимальних (в тому числі автоматизованих та автоматичних) систем контролю за технічним станом апаратури та процесів. **Метафорично** можна сказати, що діагностика визначає такі правила («правила гри»), додержання яких призводить **до мінімізації витрат на проведення робіт з контролю працездатності** стану, ремонту та технічного обслуговування МО. Відповідним чином організований процес діагностування дозволяє подовжити період активної експлуатації МО за рахунок своєчасного виявлення складових частин, де процеси старіння проявляються передчасно або протікають з підвищеною швидкістю.

1.4. Форми подання результатів операцій спостереження

Параметри (споживчі властивості) МО, що підлягають визначенню за відповідними операціями спостереження, зазвичай, мають різну природу, можуть подаватися (інтерпретуватися) як у кількісному, так і в якісному вигляді.

Над параметрами, що подаються **у кількісному вигляді, можуть виконуватися математичні операції**. Наприклад, масу двох об'єктів можна скласти, з метою отримання маси комплексу, що утворений з цих об'єктів.

Над параметрами, що задані в якісному вигляді математичні операції здійснювати неможливо. Наприклад, питома вага двох об'єктів, що виготовлені з одного матеріалу, не змінюватиметься, коли ці об'єкту будуть поєднані між собою. Результати визначення естетичних, ергономічних властивостей МО, зазвичай, подаються в балах, тобто за допомогою прийнятих чисельних індексів, тоді як результати вимірювання напруги, сили струму та інших фізичних величин є розмірними величинами.

Для того, щоб охопити все різноманіття властивостей МО та явищ відповідно до потреб практичної діяльності, результати операцій спостереження подають у чисельному вигляді, використовуючи при цьому відповідні шкали.

Шкала – це засіб фіксації результатів визначення властивостей об'єктів шляхом упорядкування їх у визначену чисельну систему (послідовний набір чисельних значень), в якій співвідношення між окремими результатами подається відповідними числами.

На сьогодні теорія спостереження за природними явищами та станом матеріальних об'єктів використовує чотири типи шкал відповідно до чотирьох базових методів отримання інформації (див. рис. 1.4 та табл. 1.1).

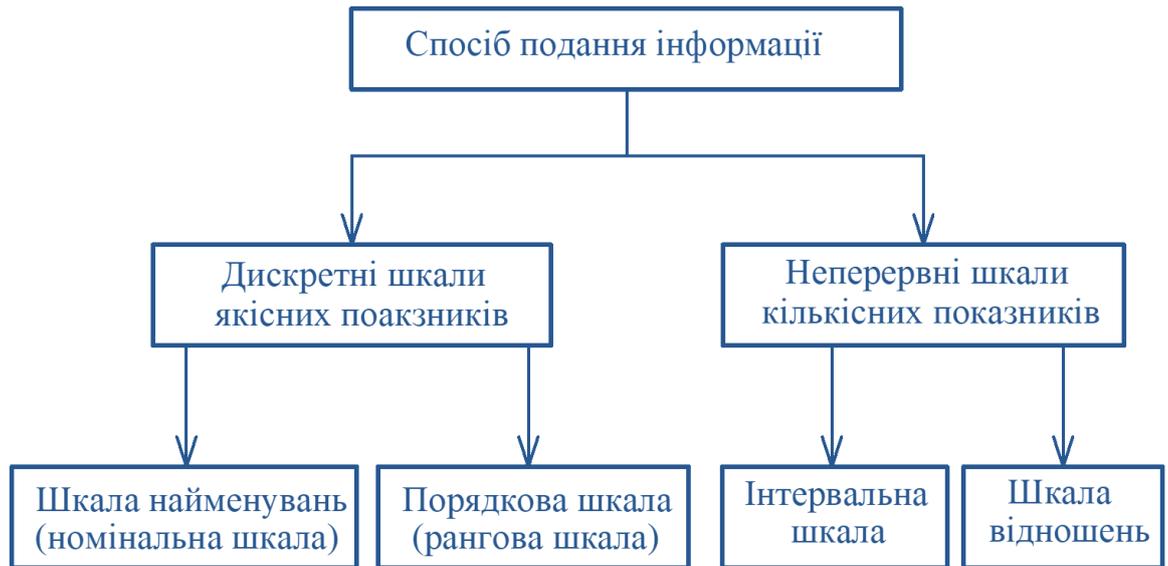


Рис. 1.4. Класифікація шкал

Шкала найменувань (номінальна шкала), яку часто вважають відображенням операції класифікації (що точніше відповідає сенсу цієї шкали), розподіляє всі об'єкти на групи відповідно до визначених ознак, критеріїв. Цим ознакам присвоюються відповідні числа (коди), що надає визначені зручності під час подальшої роботи з такою інформацією. **Ніякого кількісного співвідношення між об'єктами в даній шкалі не існує.**

Таблиця 1.1			
Тип шкали	Дії над об'єктом (результатами) вимірювання	Математичні та статистичні величини, розрахунок яких допускається даною шкалою	Приклад
Найменувань	Встановлення однаковості (рівності) або еквівалентності номерів	Допускаються математичні співвідношення тотожності та розрізнення відносно номерів. Розрахунки моди, процентних частот, частин, кореляції	Присвоєння номерів для розпізнавання моделей МО, класифікація, таксономія та ін.
Порядкова	Побудова впорядкованого класу або встановлення співвідношень між числами	Допускаються математичні співвідношення (відносно чисел) тотожності, розрізнення, порівняння (більше, менше). Розрахунки моди, медіани, квантилей, коефіцієнту кореляції, категорій дисперсійного аналізу	Визначення якості МО, встановлення співвідношень переваги між різними моделями МО та ін.

Інтервальна	Встановлення рівності (тотожності) інтервалів	Допускаються всі арифметичні операції за винятком операції ділення, математичні співвідношення тотожності та розрізнення (відносно об'єктів та інтервалів). Розрахунки моди, медіани, квантилей, коефіцієнту кореляції, рангових критеріїв, середнього, дисперсії, стандартного відхилення.	Напруга, потенціал, сила струму, температурні шкали Цельсія та Фаренгейта, потужність електричного струму та ін.
Відношень	Встановлення рівності (тотожності) співвідношень	Допускаються всі арифметичні операції. Розрахунки всіх категорій математичної статистики	Числа, вага, температурна шкала Кельвіна, та ін.

Прикладом використання такої шкали може слугувати перелік складових частин МО, складений, наприклад, за абеткою або відповідно до класифікаційних номерів. Звичайно, ніякі арифметичні операції в цій шкалі неможливі та недоречні.

Порядкова (рангова, ординальна) шкала призначена для позначення ступеня відмінності об'єктів за визначеної ознакою (властивістю). Введення цієї шкали зручно розглядати як розвинення шкали найменувань. Адже під час класифікації об'єктів класам можна надати порядкові номери, які відобразатимуть не тільки найменування, але й визначені властивості, притаманні цьому класу. За таких умов з'являється можливість розрізнити об'єкти не лише за найменуванням, а й за визначеними властивостями. Така шкала надає можливість порівнювати об'єкти та встановлювати між ними співвідношення за типом «більше», «менше». Звичайно, ніякі арифметичні операції ця шкала не передбачає. Для використання порядкової шкали не потрібно ідентичності, або регулярності розміру об'єктів (класів, окремих властивостей тощо) та існування абсолютної точки відліку (абсолютного нуля), достатньо застосувати до цих об'єктів відповідні процедури, а саме:

- ранжирування (розміщення у ряду відповідно визначених властивостей, ознак тощо);
- групування (ранжирування за визначеними групами);
- попарне порівняння;
- розміщення відповідно до встановленого за визначеними правилами рейтингу;
- розміщення відповідно до методу полярних профілів.

Розміщення об'єктів, показників якості тощо відповідно до **методу полярних профілів** передбачає використання для оцінювання умовної шкали, крайовими точками (полюсами) якої є протилежні значення відповідної ознаки (наприклад, якісний – неякісний, теплий – холодний тощо). Проміжок між полюсами може ділитися на довільну кількість частин, що надає можливість

порівнювати об'єкти, показники якості тощо не лише за бінарною ознакою, а й за визначеною кількістю рівнів.

Інтервальна шкала передбачає присвоєння чисел об'єктам (результатам спостереження) за умови, що визначена відстань між цими об'єктами та введена загальна для всіх об'єктів стала одиниця виміру. Інакше кажучи, в інтервальній шкалі вводяться такі категорії як «одиниця» та «масштаб вимірювання».

Нульова точка інтервальної шкали вводиться (вибирається) довільно.

Інтервальна шкала – кількісна. За цією шкалою можна виконувати арифметичні дії над числами, крім операції ділення (тобто результат реалізації відповідних арифметичних дій можна відобразити на інтервальній шкалі, за умови, що відповідні числа відображені за цією шкалою).

Неможливість виконання операції ділення свідчить про те, що в рамках інтервальної шкали не можна визначити у скільки разів один об'єкт (показник, результат спостереження тощо) більше або менше другого.

Шкала відношень відрізняється від інтервальної шкали лише тим, що її нульова точка не довільна, а визначає повну відсутність показника, що вимірюється. Сюди відносяться і всі кількісні дані, які можна отримати за результатами перерахунку результатів відповідних спостережень (об'єктів, показників тощо).

Характеристики кожної з чотирьох шкал наведені вище в табл. 1.1, де вказані математичні та статистичні величини, які можна визначити за умови використання відповідної шкали. Крім того видно, що **перехід від одної шкали до другої (відповідно до встановленого у табл. 1.1 порядку розміщення шкал) супроводжується розширенням класу математичних та статистичних операцій, які можна виконувати над об'єктами, поданому у відповідній шкалі. З цієї точки зору найбільше можливостей надає шкала відношень, котру на сьогодні вдалося реалізувати лише в рамках вимірювання фізичних величин.**

ЛЕКЦІЯ 4

УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МАШИНИ

Момент ідеалізованої електричної машини

Неявнополюсна конструкція. Раніше нами було отримане співвідношення для визначення електромагнітного моменту, що існує при взаємодії двох обмоток, а саме

$$M = i_a i_x \frac{dL}{d\varphi}. \quad (2.68)$$

Із співвідношення видно, що момент M існуватиме (не дорівнюватиме нулю) лише за умови залежності індуктивності обмоток від кутової координати φ . Ця умова виконуватиметься коли одна з обмоток розміщена на статорі машини, а друга – на роторі.

Введене поняття синусної обмотки дозволяє провести необхідний аналіз в самому загальному вигляді. Оскільки між синусними обмотками, що мають різну кількість полюсів, не може бути індуктивного зв'язку, розглянемо випадок, коли на статорі і на роторі розміщені синусні обмотки v -ї гармоніки.

На рис. 2.14 зображені основні гармонічні складові обмоток статора (a) та ротора (x).

Припустимо, що кут φ_r характеризує положення ротора. Якщо кут (в електричних градусах) між осями гармонічних обмоток, що розглядаються, дорівнює γ , а $\varphi_{re} = p\varphi_r = 0$ в момент часу $t = 0$ (див. рис. 2.14а), то при переміщенні ротора (в момент часу $t = t_1$) цей кут дорівнюватиме $(\gamma + \varphi_{re})$, як показано на рис. 2.14б.

Запишемо взаємну індуктивність a -ї та x -ї обмоток, скориставшись для цього співвідношенням (2.67)

$$L_{axv} = L_{axv m} \cos[\nu(\varphi_{re} + \gamma)], \quad (2.69)$$

де

$$L_{axv m} = \mu_0 \frac{\pi r l}{\delta} N_{av} N_{xv}.$$

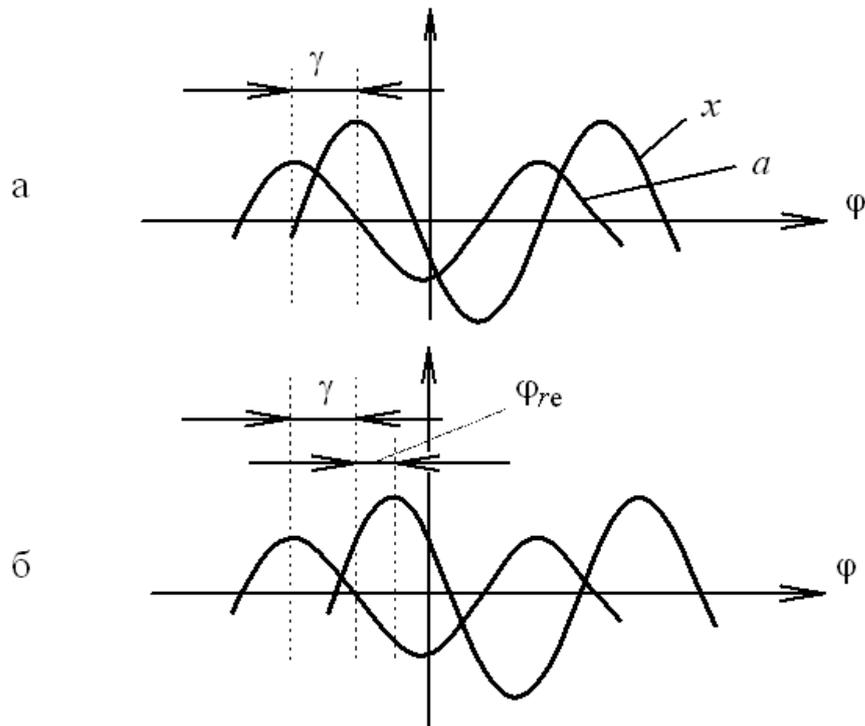


Рис. 2.14. Основні гармонічні складові обмотки статора (а) та ротора (б)

За таких умов відповідно до (2.68) момент дорівнюватиме

$$\begin{aligned}
 M_v &= i_a i_x \frac{dL_{axv}}{d\varphi_r} = i_a i_x L_{axv m} \frac{d \cos [v(\varphi_{re} + \gamma)]}{d\varphi_r} = \\
 &= -vp i_a i_x L_{axv m} \sin [v(p\varphi_r + \gamma)].
 \end{aligned}
 \tag{2.70}$$

Ввівши позначення

$$\theta = \varphi_{re} + \gamma,$$

отримуємо

$$\tag{2.71}$$

Зазначимо, що кут θ є поточним (миттєвим) електричним кутом між осями двох гармонійних обмоток. Він різний для кожної гармоніки, бо неоднакові просторові кути γ_{av} та γ_{xv} відповідних членів рядів Фур'є для обмоток. Цей кут зазвичай називають *кутом моменту*.

Результуючий магнітний момент, який діє між обмотками електричної машини, може бути знайдений шляхом простого підсумовування гармонійних моментів, визначених відповідно до (2.71).

Співвідношення (2.71) показує, що при взаємодії синусних обмоток утворюється магнітний момент, який залежить від

- числа пар полюсів електромеханічної системи (що визначається

множником (νp),

- струмів в обмотках,
- максимальної величини взаємної індуктивності обмоток,
- синуса кута між осями обмоток.

Знак ($-$) у співвідношенні (2.71) показує, що утворений момент спрямовується на зменшення кута θ , тобто намагається привести обмотки, які взаємодіють, у положення, де їх осі співпадають.

Можливі й інші форми запису співвідношення (2.71).

Наприклад, якщо підставити (2.69) в (2.71), то після нескладних перетворень отримуємо

$$\begin{aligned} M_{\nu} &= -\nu p \pi r l \delta \frac{N_{av} i_a}{\delta} \frac{\mu_0 N_{xv} i_x}{\delta} \sin(\nu \theta) = \\ &= -\nu p \pi r l \delta H_{av m} B_{xv m} \sin(\nu \theta), \end{aligned} \quad (2.72)$$

де

$H_{av m}$, $B_{xv m}$ - характеристики (напруженість та індукція відповідно) магнітних полів, які утворені обмотками статора та ротора, а саме: максимальні значення ν -х гармонік напруженості магнітного поля та магнітної індукції відповідно.

Порівняння двох наведених форм запису моменту взаємодії двох обмоток дозволяє зробити деякі висновки, а саме

- перша форма запису (співвідношення (2.71)) визначає момент як функцію параметрів та змінних електричного кола (момент визначається в термінах струмів та індуктивностей);

- друга форма запису (співвідношення (2.72)) визначає магнітний момент через параметри, які характеризують магнітне поле в зазорі машини (момент визначається в термінах напруженості магнітного поля та магнітної індукції).

Таким чином, замість моменту, який спрямований на приведення синусних обмоток в положення, за якого вісі цих обмоток співпадають, можна характеризувати момент як категорію, дія якої спрямована на приведення у відповідне положення осей двох магнітних полів. Отже, співвідношення (2.72) є кількісним описом сил взаємодії між магнітними полюсами на поверхні статора й ротора. Момент, який утворюється цими силами, пропорційний напруженості обох магнітних полів (точніше, магнітних полів обох обмоток, що взаємодіють) та збільшеного у ν разів синусу просторового кута між осями цих полів.

Доки два магнітних поля синусоїдально розподілені у повітряному зазорі між статором та ротором, співвідношення (2.72) надаватиме дійсну величину моменту незалежно від того, як ці поля утворюються. Але при цьому слід правильно вибрати кут моменту. Щоб підкреслити цю відносну незалежність

моменту від походження вказаних величин, що характеризують магнітне поле, перепишемо співвідношення (2.72) в дещо іншому вигляді, а саме

$$M_v = -vp\pi rl\delta H_{vm} B_{vm} \sin(v\theta). \quad (2.73)$$

Зазначимо, що за будь-яких умов (при всіх перетвореннях співвідношення для визначення моменту) величина θ характеризує просторовий кут між осями двох магнітних полів.

Співвідношення (2.73) найбільш придатне для якісного аналізу, тоді як запис моменту в термінах теорії кіл, тобто співвідношення (2.72), найзручніший при дослідженні характеристик електромеханічної системи.

Третю форму запису співвідношення, яким визначається момент, можна отримати якщо у (2.73) ввести пов'язаний з полюсом загальний магнітний потік на полюс машини (магнітний потік, що припадає на один полюс електричної машини).

Величина магнітного потоку на полюс для v -ї гармоніки магнітного поля ротора або статора залежить від розподілення провідників у відповідній обмотці й визначається як

$$\begin{aligned} \Phi_v &= \int_s B_v ds = \iint_Z B_v \cdot r \cdot dz \cdot d\varphi = rl \int_0^{\pi/pv} B_\delta N_v \sin(v\varphi_e) d\varphi = \\ &= rl \int_0^{\pi/pv} B_{vm} \sin(vp\varphi) d\varphi = \frac{2}{vp} rl B_{vm}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Враховавши (2.74), співвідношення (2.73) для магнітного моменту можна подати як

$$M_v = -\frac{\pi}{2}(vp)^2 \Phi_v F_{vm} \sin(v\theta), \quad (2.75)$$

де

$$F_{vm} = \delta H_{vm} = \delta \left(\frac{iN_v}{\delta} \right) - \text{максимальна магніторушійна сила, що діє в}$$

повітряному зазорі.

Співвідношення (2.75) особливо зручно використовувати за умови, що Φ_v є загальним утвореним всіма обмотками магнітним потоком полюса електромеханічної системи.

Явнополюсна конструкція

Модель конструктивного виконання електричної машини з виступаючими полюсами, але «оберненої» конструкції – з полюсами на роторі

(що є типовим для синхронних електричних машин), представлена на рис. 2.15.

Як було показано вище, загальне співвідношення для визначення магнітного моменту має вигляд

$$M = \frac{dW_{\text{маг}}}{d\varphi},$$

де магнітна енергія двоконтурної електромеханічної системи, модель якої розглядається, визначається як

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} L_a i_a^2 + \frac{1}{2} L_x i_x^2 + L i_a i_x$$

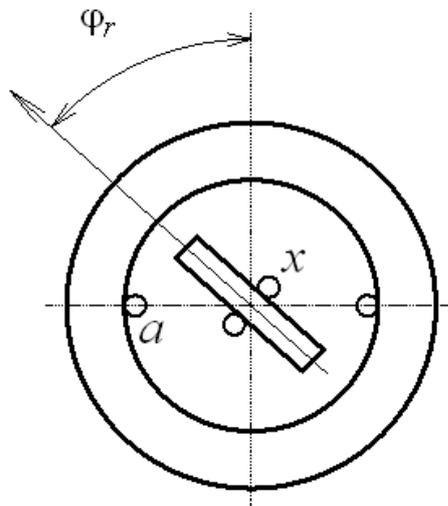


Рис. 2.15. Модель конструктивного виконання електричної машини з полюсами на роторі

Для даної моделі лише потокозчеплення ротора, обумовлене його власним магнітним полем, не залежить від положення ротора в просторі. За таких умов момент дорівнюватиме

$$M = \frac{dW_{\text{маг}}}{d\varphi} = \frac{1}{2} i_a^2 \cdot \frac{dL_a}{d\varphi} + i_a i_x \frac{dL}{d\varphi} = M'' + M'. \quad (2.76)$$

У співвідношенні (2.76) власна індуктивність обмотки a є функцією кута повороту ротора, адже її власне потокозчеплення залежить від величини повітряного зазору. Цей повітряний зазор, як видно з рис. 2.15, мінімальний, коли вісь ротора співпадає з віссю магнітного поля, яке утворюється обмоткою a , і максимальний при горизонтальному положенні ротора, коли вісь магнітного поля, утвореного обмоткою a , ортогональна осі ротора.

З метою спрощення задачі та надання результату більшої наочності весь подальший аналіз виконуватимемо, враховуючи лише основні гармонічні

обмоткові функції.

Відповідно до рис. 2.15 просторовий кут φ_r , яким визначається положення ротора, в загальному випадку може бути представлений (в електричних градусах) у вигляді суми $(\varphi_{re} + \gamma)$, де γ - початковий кут (при $t = 0$) між осями основних гармонійних обмоткових функцій, а φ_{re} - прирощення цього кута у часі.

На підставі (2.66) та 2.67) взаємна індуктивність обмоток, що розглядаються, визначається як

$$L_{ax} = L_{axm} \cos(p\varphi_r + \gamma), \quad (2.77)$$

де

$$L_{axm} = \mu_0 \frac{\pi r l}{\delta} N_a N_x. \quad (2.77a)$$

При повороті ротора величина повітряного зазору в явнополісній моделі електричної машини змінюється, а отже змінюється і величина опору (магнітного опору) на шляху магнітного потоку обумовленого струмом статора (тобто обмоткою a).

Характер змінення магнітного опору має вигляд як на рис. 2.16.

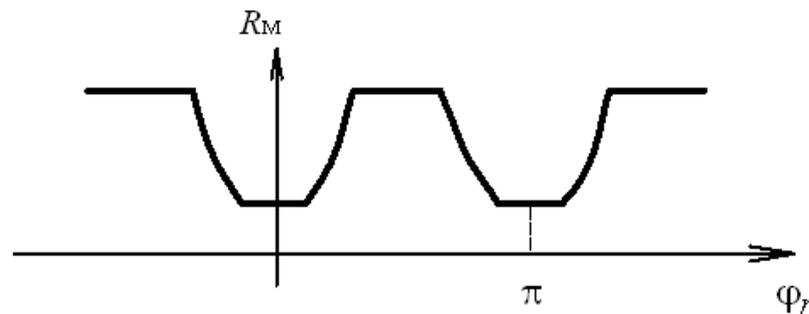


Рис. 2.16. Характер змінення магнітного опору повітряного зазору явнополісної моделі

Величина магнітного опору за аналогією з резистивним опором електричного кола визначається співвідношенням

$$R_M(\varphi_r) = \frac{\delta(\varphi_r)}{\mu_0 S}. \quad (2.78)$$

На підставі (2.78) провідність повітряного зазору визначатиметься як

$$\Lambda_M(\varphi_r) = \frac{1}{R_M(\varphi_r)} = \mu_0 \frac{S}{\delta(\varphi_r)}. \quad (2.79)$$

Стосовно електричних машин, де магнітний потік зосереджений в

магнітопроводі, можна говорити про магнітну провідність для магнітного потоку на полюсному діленні, площа якого S дорівнює

$$S = \frac{\pi r l}{p}.$$

Отже співвідношення (2.79) можна подати як

$$\Lambda_M(\varphi_r) = \mu_0 \frac{rl}{\delta(\varphi_r)} \frac{\pi}{p}. \quad (2.80)$$

Розклавши функцію $\Lambda_M(\varphi_r)$ в ряд Фур'є та обмежившись лише двома першими членами цього ряду (що зазвичай забезпечує достатню для практичних цілей точність), можна записати

$$\Lambda_M(\varphi_r) \approx \Lambda_0 + \Lambda \cos(2p\varphi_r), \quad (2.81)$$

де

$$\Lambda_0 = \frac{\Lambda_{\max} + \Lambda_{\min}}{2}; \quad \Lambda = \frac{\Lambda_{\max} - \Lambda_{\min}}{2}.$$

Графічна інтерпретація співвідношення (2.82) наведена на рис. 2.17.

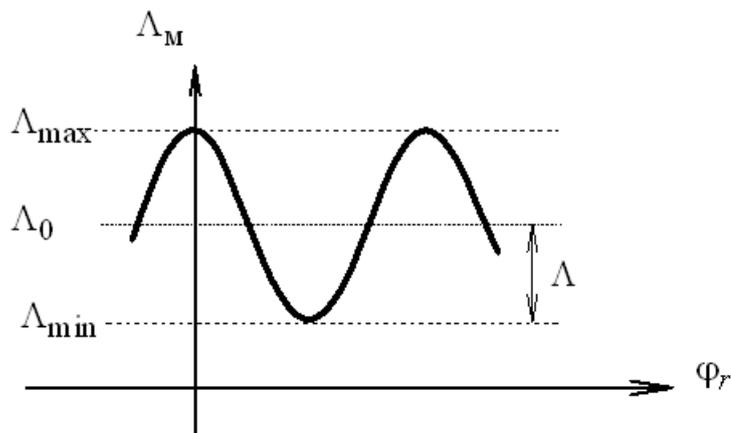


Рис. 2.17. Залежність від кутової координати магнітної провідності повітряного зазору явнополюсної моделі

Власна індуктивність обмотки a відповідно до (2.56) з урахуванням (2.81) може бути подана як

$$L_a = \mu_0 r l \int_0^{2\pi} \frac{[N_a \cos(p\varphi_r + \gamma)]^2}{\delta(\varphi_r)} d\varphi_r =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \frac{p}{\pi} \Lambda_M(\varphi) [N_a \cos(p\varphi_r + \gamma)]^2 d\varphi_r = \\
&= p\Lambda_0 N_a^2 + p \frac{\Lambda}{2} N_a^2 \cos 2\gamma = pN_a^2 \left(\Lambda_0 + \frac{\Lambda}{2} \cos 2\gamma \right).
\end{aligned}$$

На підставі останнього співвідношення з урахуванням (2.80), (2.81) для моменту часу $t = 0$, коли осі основних гармонік синусних обмоток зміщені на кут γ , отримуємо співвідношення для визначення моменту, що розвивається в електромеханічній системі, а саме

$$\begin{aligned}
M &= i_a i_x \frac{dL}{d\gamma} + \frac{1}{2} i_a^2 \cdot \frac{dL_a}{d\gamma} = \\
&= - \left[p\mu_0 \frac{\pi r l}{\delta} i_a i_x N_a N_x \sin \gamma + p i_a^2 \frac{N_a}{4} (\Lambda_{\max} - \Lambda_{\min}) \sin 2\gamma \right] \quad (2.82)
\end{aligned}$$

Таким чином, момент має дві складові, при цьому

- одна складова залежить від струмів обох контурів та за структурою не відрізняється від моменту неявно полюсної моделі (див. (2.71));

- друга складова присутня навіть за умови відсутності збудження з боку ротора, тобто залежить лише від одного струму, а саме від струму статора, а також пропорційна різниці провідностей для магнітного потоку по двом взаємно перпендикулярним осям явнополюсного ротора і, відповідно, тим більше, чим більша ця різниця.

2.4.5. Магнітні поля обмоток електромеханічної системи

Однофазна обмотка

Миттєве значення індукції магнітного поля, яке утворюється основною синусною обмоткою, можна представити як

$$b(\varphi) = \mu_0 \frac{i}{\delta} N \cos(\varphi + \gamma)$$

За умови, що обмоткою тече струм $i = I_m \cos \omega t$, наведене співвідношення набирає вигляду

$$b(\varphi) = \mu_0 \frac{I_m}{\delta} N \cos \omega t \cdot \cos(\varphi + \gamma) = B_m \cos \omega t \cdot \cos(\varphi + \gamma), \quad (2.83)$$

де

I_m - амплітуда струму, що тече обмоткою;

B_m - амплітуда індукції магнітного поля, яке утворюється основною

синусною обмоткою.

Таким чином, магнітне поле є функцією, як часу, так і просторової координати. Індукція цього магнітного поля, як гармонічна функція просторового кута, може бути представлена у вигляді деякого просторового вектору. Таке представлення цілком аналогічне використанню часових векторів при аналізі електричних кіл синусоїдального струму.

Магнітне поле, що описується співвідношенням (2.83), нерухоме у просторі, але змінюється (пульсує) у часі, внаслідок чого зазвичай зветься *стаціонарним пульсуючим* магнітним полем.

Магнітному полю, що збуджується однією синусною обмоткою при протіканні нею змінного струму, можна надати цікаву та практично важливу інтерпретацію, якщо скористатися відомим тригонометричним співвідношенням

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)].$$

З урахуванням цього співвідношення (2.83) можна подати як

$$b(\varphi, t) = \frac{B_m}{2} \left\{ \cos [\omega t - (\varphi + \gamma)] + \cos [\omega t + (\varphi + \gamma)] \right\}. \quad (2.84)$$

З (2.84) видно, що загальне магнітне поле в зазорі можна подати як суму двох складових, які обертаються в різні сторони. Назвавши одну з цих складових «прямою», а другу - «зворотною» введемо відповідні позначення, а саме

$$\begin{aligned} b_{\text{пр}}(\varphi, t) &= \frac{B_m}{2} \cos [\omega t - (\varphi + \gamma)], \\ b_{\text{зв}}(\varphi, t) &= \frac{B_m}{2} \cos [\omega t + (\varphi + \gamma)]. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Уявимо, що ми спостерігаємо за якимись точками цих двох хвиль, в яких значення магнітної індукції однакові. За таких умов мають виконуватися співвідношення

$$\cos [\omega t - (\varphi + \gamma)] = \text{const}, \quad \cos [\omega t + (\varphi + \gamma)] = \text{const}.$$

З цих співвідношень випливає

$$\omega t - (\varphi + \gamma) = \text{const}, \quad \omega t + (\varphi + \gamma) = \text{const}. \quad (2.86)$$

Диференціювання співвідношень (2.86) по t , відповідно, приводить до рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega; \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\omega \quad (2.87)$$

Нагадаємо, що похідні від кута за часом є кутовими швидкостями обертання хвилі у повітряному зазорі.

Відповідно до (2.87) перший член правої частини співвідношень (2.84) дійсно характеризує пряму хвилю $\left(\frac{d\varphi}{dt} > 0\right)$, тоді як другий – зворотну хвилю $\left(\frac{d\varphi}{dt} < 0\right)$.

Залежність (2.86) показує, що за один період змінення струму (тобто за час, коли ωt змінюється на кут 2π), магнітне поле в зазорі повертається на той самий кут, тобто на кут 2π електричних радіан. Відповідно до цього кутова швидкість Ω магнітного поля дорівнюватиме циклічній частоті ω мережі живлення, тобто

$$\Omega = \omega = 2\pi f, \quad (2.88)$$

де

f - коливальна частота струму в електромережі живлення.

З іншої сторони, кутова швидкість обертання поля в механічних одиницях кута дорівнює

$$\Omega_{\text{мех}} = \frac{\omega}{p} = \frac{2\pi f}{p}. \quad (2.89)$$

Зважаючи на те, що $\Omega_{\text{мех}} = 2\pi n$ (n - кількість обертів ротора за одиницю часу) то

$$n = \frac{f}{p}. \quad (2.90)$$

Для реалізації розрахунків інтерес становить також v -та гармонічна складова магнітного поля, яка визначається як

$$b_v(\varphi, t) = B_{vm} \cos(\omega t) \cdot \cos[v(\varphi + \gamma)] \quad (2.91)$$

або після нескладних перетворень як

$$b_v(\varphi, t) = \frac{B_{vm}}{2} \left\{ \cos[\omega t - v(\varphi + \gamma)] + \cos[\omega t + v(\varphi + \gamma)] \right\}. \quad (2.92)$$

Отже, v -та гармонічна складова пульсуючого магнітного поля також може бути представлена у вигляді двох компонент, що обертаються. Однак за час одного періоду збуджуючого струму v -та гармонічна складова

переміщується лише на $2\pi/\nu$ електричних радіан.

Іншими словами, швидкість обертання цієї складової в ν разів менша частоти обертання основної складової, тобто

$$\Omega_{\nu} = \frac{\omega}{\nu}; \quad \Omega_{\text{мех}\nu} = \frac{\omega}{\nu p}. \quad (2.93)$$

Багатофазна обмотка

Задача створення одного обертового магнітного поля постійної величини може бути розв'язана шляхом відповідного розміщення в просторі двох або більше однофазних обмоток так, щоб магнітне поле, яке обертається в протилежному напрямку, компенсувалося.

Найпростішим засобом досягнення шуканого результату є симетрична двофазна обмотка. Така обмотка складається з двох обмоток, магнітні осі яких орієнтовані під прямим кутом одна до другої, а струми зсунуті за фазою на кут $\pi/2$. Таким чином, додаткова обмотка створює магнітне поле, яке можна описати співвідношенням

$$\begin{aligned} b'(\varphi, t) &= B'_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\varphi + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= B'_m \sin(\omega t) \sin(\varphi + \gamma). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Тригонометрична тотожність

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

дозволяє привести (2.94) до вигляду

$$b'(\varphi, t) = \frac{B'_m}{2} \{ \cos[\omega t - (\varphi + \gamma)] - \cos[\omega t + (\varphi + \gamma)] \}. \quad (2.95)$$

Індукція результуючого магнітного поля двох таких однофазних обмоток визначається як

$$b_{\text{рез}}(\varphi, t) = b(\varphi, t) + b'(\varphi, t).$$

На підставі співвідношень (2.84) та (2.95) неважко встановити, що при $N' = N$ магнітні поля обмоток, які обертаються у зворотному напрямку, дорівнюють одне одному за амплітудою, відрізняючись за фазою. Тому індукція результуючого магнітного поля приводиться до вигляду

$$b_{\text{рез}}(\varphi, t) = B_m \cos[\omega t - (\varphi - \gamma)].$$

Окремий інтерес становить використання трьох фазних обмоток.

Фази симетричної трифазної обмотки утворюють магнітне поле, складові індукції якого визначаються як (для спрощення вважатимемо $\gamma = 0$)

$$\begin{aligned} b_A(\varphi, t) &= B_m \cos(\omega t) \cos \varphi = \\ &= \frac{B_m}{2} [\cos(\omega t - \varphi) + \cos(\omega t + \varphi)] \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} b_B(\varphi, t) &= B_m \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{B_m}{2} \left[\cos(\omega t - \varphi) + \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} b_C(\varphi, t) &= B_m \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{B_m}{2} \left[\cos(\omega t - \varphi) + \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{4\pi}{3}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.98)$$

З урахуванням (2.96) - (2.98) індукцію результуючого магнітного поля трифазної обмотки можна подати як

$$b(\varphi, t) = b_A(\varphi, t) + b_B(\varphi, t) + b_C(\varphi, t) = \frac{3B_m}{2} \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.99)$$

За умови використання симетричної m -фазної обмотки матимемо

$$b(\varphi, t) = \frac{mB_m}{2} \cos(\omega t - \varphi). \quad (2.100)$$

Таким чином, орієнтовані синусні обмотки утворюють обертове магнітне поле постійної величини. Однак реальні обмотки можуть лише наближатися до синусних обмоток, бо завжди одночасно утворюють магнітні поля гармонічних складових.

Як вже було зазначено, вищі гармонічні складові магнітного поля обертаються повільніше основного коливання. Лише один цей факт робить наявність гармонічних складових індукції магнітного поля небажаними. Однак крім цього, виявляється, що поля деяких вищих гармонік обертаються в сторону, яка протилежна обертанню основного поля, що неприпустиме.

Наприклад, при наявності третьої гармоніки в магнітному полі, яке утворюється двофазною симетричною обмоткою, матимемо

$$b_A(\varphi, t) = B_m \cos(\omega t) [N_1 \cos \varphi + N_3 \cos(3\varphi)] \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned}
b_B(\varphi, t) &= \\
&= B_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \left[N_1 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + N_3 \cos\left(3\varphi - \frac{3\pi}{2}\right) \right] = \quad (2.102) \\
&= B_m \sin(\omega t) [N_1 \sin \varphi - N_3 \sin \varphi].
\end{aligned}$$

Індукція результуючого магнітного поля такої обмотки становитиме

$$b(\varphi, t) = B_m [N_1 \cos(\omega t - \varphi) + N_3 \cos(\omega t + 3\varphi)]. \quad (2.103)$$

Із (2.103) наочно видно, що поле третьої гармоніки обертається в протилежний бік зі швидкістю у три рази меншою за швидкість обертання основної складової.

2.4.6. Електрорушійна сила обмотки

Рівняння електричної рівноваги для будь-якої обмотки визначаються відповідно до другого закону Кірхгофа. Наприклад, для деякої обмотки a ці рівняння матимуть вигляд

$$u_a + e_a = r_a i_a,$$

де e_a згідно закону Фарадея визначається повним потокозчепленням обмотки, яке в загальному випадку можна подати як

$$\begin{aligned}
\Psi_a &= L_a i_a + L_{ab} i_b + L_{ac} i_c + \dots + \\
&+ L_{ax}(\varphi_r) i_x + L_{ay}(\varphi_r) i_y + \dots \quad (2.104)
\end{aligned}$$

До співвідношення (2.104) входять, зокрема, деякі взаємні індуктивності, які залежать від положення ротора, що відмічено залежністю відповідних величин від кута φ_r повороту ротора. Це відноситься до взаємних індуктивностей обмоток, які розміщені по різні сторони повітряного зазору.

Для тих складових потокозчеплення, які не залежать від φ_r , складові результуючої ЕРС будуть аналогічні відомим з теорії кіл ЕРС само- та взаємоіндукції, тобто визначатимуться як

$$L_a \frac{di_a}{dt} + L_{ab} \frac{di_b}{dt} + \dots \quad (2.105)$$

Раніше було зазначено, що ці складові не вносять вкладу в процес перетворення енергії – енергія, пов'язана з ними, іде виключно на збільшення або зменшення енергії, що запасена в магнітному полі повітряного зазору.

Визначаючи ЕРС, які пов'язані з залежними від кута φ_r індуктивностями, необхідно мати на увазі, що цей кут сам може бути

функцією часу. Така ситуація може спричинитися, наприклад, переміщенням ротора. Складові ЕРС такого типу визначаються як

$$L_{ax}(\varphi_r) \frac{di_x}{dt} + i_x \frac{dL_{ax}(\varphi_r)}{d\varphi_r} \frac{d\varphi_r}{dt} + \dots \quad (2.106)$$

У співвідношенні (2.106) перша складова являє собою звичайну ЕРС взаємоіндукції, яка може бути об'єднана з ЕРС, що розглядалися вище.

Друга складова співвідношення (2.106) характерна лише для електромеханічних перетворювачів енергії та являє собою ЕРС, що створена виключно завдяки руху ротора, а отже безпосередньо пов'язана з процесом перетворення енергії.

Для дослідження ЕРС, визначеної другою складовою співвідношення (2.106), скористаємося поняттям синусної обмотки. З метою спрощення обмежимося розгляданням взаємодії однієї пари гармонічних обмоток.

Для ν -х гармонічних синусних обмоток, які належать реальним обмоткам a та x , ЕРС обертання дорівнюватиме

$$\begin{aligned} e_a &= i_x \frac{dL_{ax\nu}(\varphi_r)}{dt} = i_x \frac{d}{dt} \left[L_{ax\nu m} \cdot \cos(\nu(p\varphi_r + \gamma)) \right] = \\ &= -i_x \nu p L_{ax\nu m} \sin(\nu(\varphi_{re} + \gamma)) \cdot \frac{d\varphi_r}{dt}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

За умови постійної швидкості обертання ротора матимемо

$$\varphi_{re} = p\varphi_r = \omega_r t.$$

При цьому співвідношення (2.107) прийме вигляд

$$e_a = -i_x \nu \omega_r L_{ax\nu m} \sin(\nu(\omega_r t + \gamma)). \quad (2.108)$$

Якщо струм i_x постійний, тобто

$$i_x = I_x,$$

то ЕРС є синусною функцією часу і її діюче значення дорівнюватиме

$$E_a = \frac{1}{\sqrt{2}} I_x \nu \omega_r L_{ax\nu m} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f_\nu I_x L_{ax\nu m}, \quad (2.109)$$

де

$$f_\nu = \nu f.$$

ЕРС можна подати і в іншій формі, підставивши в (2.109) значення $L_{ax\nu m}$ зі співвідношення (2.77а).

В результаті отримуємо

$$E_a = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \nu p f_\nu N_{av m} \Phi_{\nu m}, \quad (2.110)$$

де

$\Phi_{\nu m}$ - амплітуда магнітного потоку ν -ї гармоніки на один полюс.

Магнітне поле, викликане постійним струмом в обмотці x , має незмінну величину та нерухоме по відношенню до ротора. Внаслідок обертання ротора, це поле переміщується відносно обмотки статора, примушуючи змінюватися його потокозчеплення.

Як правило, послідовність аналізу більшості типів реальних електричних машин відрізняється від наведеної тим, що на першому етапі визначається ЕРС, яка наводиться в обмотці рухомим синусоїдально розподіленим у просторі магнітним полем.

Якщо, наприклад, зосереджена обмотка має w витків та p пар полюсів, то її обмоткова функція являє собою прямокутну хвилю з амплітудою $w/(2p)$.

Гармонічний аналіз дає наступне співвідношення для визначення амплітуди ν -ї гармоніки прямокутної хвилі

$$N_{av} = \frac{4}{\pi} \frac{w}{2p} \frac{1}{\nu}. \quad (2.111)$$

При цьому співвідношення (2.110) приймає вигляд

$$E_{av} = \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \nu p f_\nu \frac{4w}{2\pi\nu p} \Phi_{\nu m} = \sqrt{2} \pi f_\nu w \Phi_{\nu m}. \quad (2.112)$$

2.4.7. Зв'язок магнітного поля в повітряному зазорі з напругою на обмотці

Розглядаючи вище обертове магнітне поле, ми заради зручності вважали струми в обмотках заданими функціями часу. При такому припущенні було визначене поле в повітряному зазорі та встановлено характер його просторового розподілення.

Однак у більшості електричних машин, крім статорної обмотки, є ще й обмотки на роторі, якими також протікають струми. Це робить задачу визначення магнітного поля в термінах струмів значно складнішою.

Саме тому, як правило, заданими функціями вважають не струми обмоток, а прикладені до них напруги. Встановивши зв'язок магнітного поля в повітряному зазорі з напругами на обмотках можна показати, що вони однозначно визначають величину магнітного поля.

Спершу розглянемо простий пристрій у вигляді тороїдального осердя з

двома обмотками (див. рис. 2.18). В такому пристрої існуватиме пульсуюче магнітне поле.

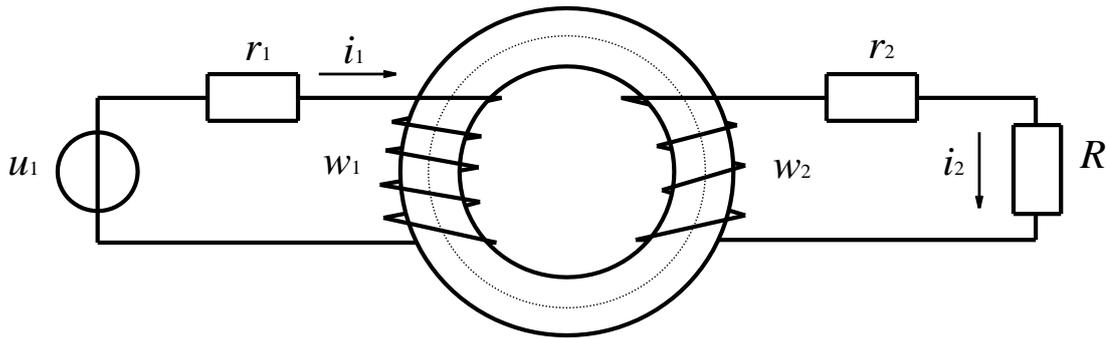


Рис. 2.18. Електромагнітний пристрій з тороїдальним осердям

Нехтуючи потоками розсіювання, співвідношення рівноваги (рівняння стану) для первинного та вторинного кіл можна записати, скориставшись другим законом Кірхгофа. Маємо

$$u_1 = r_1 i_1 + w_1 \frac{d\Phi}{dt}; \quad u_2 = (r_2 + R) i_2 + w_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

Якщо задана напруга u_1 на виводах первинної обмотки, то магнітний потік можна знайти наближено, припустивши, що

$$r_1 i_1 \ll w_1 \frac{d\Phi}{dt}.$$

За таких умов для первинного електричного кола матимемо

$$u_1 \approx w_1 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.113)$$

Отже, якщо нехтувати активним опором та магнітним потоком розсіювання, прикладена напруга повністю визначає магнітний потік в осерді. Фізично це означає, що в осерді має встановитися такий потік, який наводить ЕРС, здатну врівноважити прикладену напругу. Цей потік не залежить від вторинного струму.

За умови, що прикладена до первинної обмотки напруга визначається як

$$u = \sqrt{2}U \cos(\omega t),$$

розв'язок рівняння (2.113) відносно магнітного потоку матиме вигляд

$$\Phi \approx \frac{\sqrt{2}U}{\omega w} \sin(\omega t) = \Phi_m \sin(\omega t). \quad (2.114)$$

Таким чином, між діючим значенням синусоїдної прикладеної напруги та амплітудою магнітного потоку в осерді існуватиме наступне співвідношення

$$U \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \Phi_m = \sqrt{2} \pi f \omega \Phi_m = 4,44 f \omega \Phi_m. \quad (2.115)$$

Встановимо тепер зв'язок між магнітним полем, що обертається в повітряному зазорі електромеханічної системи, та напругою, яка прикладена до виводів обмотки цієї системи.

Якщо можна нехтувати активним (резистивним) опором обмоток та потоками розсіювання, то для кожної з двох обмоток (a та b) можна записати

$$u_a \approx \frac{d\psi_a}{dt}; \quad u_b \approx \frac{d\psi_b}{dt}. \quad (2.116)$$

Припустимо, що в обмотках двофазної симетричної машини протікають струми

$$i_a = I_m \cos(\omega t); \quad i_b = I_m \sin(\omega t).$$

Відповідно до отриманих вище співвідношень, результуюча індукція основної гармонічної складової магнітного поля, яке утворюється в повітряному зазорі обома обмотками, дорівнюватиме

$$b(\varphi, t) = \mu_0 \frac{I_m}{\delta} N \cos[\omega t - (\varphi + \gamma)] = B_m \cos[\omega t - (\varphi + \gamma)]. \quad (2.117)$$

Потокозчеплення з будь-якою обмоткою, обумовлене цим полем, визначатиметься згідно співвідношення (2.149) як

$$\Psi = rl \int_0^{2\pi} N_\varphi(\varphi) b(\varphi) d\varphi.$$

Наприклад, для обмотки a матимемо

$$\begin{aligned} \Psi_a &= rl \int_0^{2\pi} N_a \cos(\varphi + \gamma) B_m \cos[\omega t - (\varphi + \gamma)] \cdot d\varphi = \\ &= \pi rl N_a B_m \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (2.118)$$

ЕРС, що наводиться в такій обмотці визначатиметься як

$$e_a = -\frac{d\psi_a}{dt} = -\pi rl N_a B_m \omega \sin(\omega t). \quad (2.119)$$

Цілком аналогічно для обмотки b маємо

$$e_b = -\frac{d\psi_b}{dt} = -\pi rl N_b B_m \omega \sin(\omega t). \quad (2.120)$$

Якщо до обмоток прикладені напруги

$$u_a = -\sqrt{2}U \sin(\omega t), \quad u_b = -\sqrt{2}U \sin(\omega t), \quad (2.121)$$

то згідно зі співвідношеннями (2.116), (2.120) та (2.121) між діючим значенням напруги та амплітудою магнітної індукції магнітного поля, яке обертається, існує залежність

$$U \approx \frac{\pi r l N \omega}{\sqrt{2}} B_m. \quad (2.122)$$

Потік на один полюс, який утворюється основною синусною обмоткою, дорівнює

$$\begin{aligned} \Phi &= r l \int B_m \cos(\omega t - \varphi_e) d\varphi = \\ &= r l \int_0^{\pi/p} B_m \cos(\omega t - p\varphi) d\varphi = \frac{2}{p} r l B_m \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Враховуючи це співвідношення, (2.115) можна переписати як

$$U \approx \frac{\pi}{2\sqrt{2}} p \omega N \Phi_m = \sqrt{2} \pi f \left(\frac{\pi}{2} p N \right) \Phi_m. \quad (2.123)$$

Як видно, співвідношення (2.123) відрізняється від (2.115) лише постійним множником, який залежить від розподілення обмотки.

2.5. УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРИЧНОЇ МАШИНИ

Незважаючи на різноманіття типів електричних машин, всі вони засновані на загальних фізичних явищах, що виникають під час руху провідників в магнітному полі. Це дозволяє побудувати узагальнену модель конструктивного виконання електричної машини, на підставі якої розробити відповідну узагальнену математичну модель. Така математична модель, звичайно, включатиме опис всіх характерних для електричних машин процесів, і може бути використана для дослідження різних типів їх реалізації.

2.5.1. Фізичні засади побудови узагальненої моделі

В основі теорії узагальненої електричної машини лежить можливість заміни реальної, в загальному випадку m -фазної та багатополюсної машини, двофазною машиною з взаємно ортогональними обмотками на статорі й аналогічними обмотками на роторі.

Можливість такої заміни заснована на деяких базових принципах, якими враховуються фізичні засади реалізації будь-якої електричної машини, а саме:

- за допомогою двох ортогональних обмоток можна створити всі види магнітного поля, яке реалізується в електромеханічних перетворювачах енергії. При живленні двох ортогональних обмоток постійним струмом отримуємо результуюче стаціонарне магнітне поле. При живленні цих обмоток змінним струмом з однаковими фазами отримуємо результуюче пульсуюче магнітне поле. При живленні цих обмоток змінними струмами з фазовим зсувом у чверть періоду отримуємо бігуче або обертове магнітне поле;

- завжди можна вибрати ортогональні обмотки так, щоб вони утворювали той самий магнітний момент, що й реальні обмотки складної конфігурації.

В багатьох електричних машинах доводиться розглядати момент, що діє на рамочну (прямокутну) котушку зі струмом. Така котушка схематично показана на рис. 2.19 в прямокутних координатах (d, q) .

Припустимо, що магнітне поле котушки спрямоване вздовж осі q , а сама котушка утворена з w витків, якими протікає струм i . Вісь котушки утворює з віссю d кут γ . З котушкою зчеплений магнітний потік Φ , який залежить від орієнтації цієї котушки у просторі.

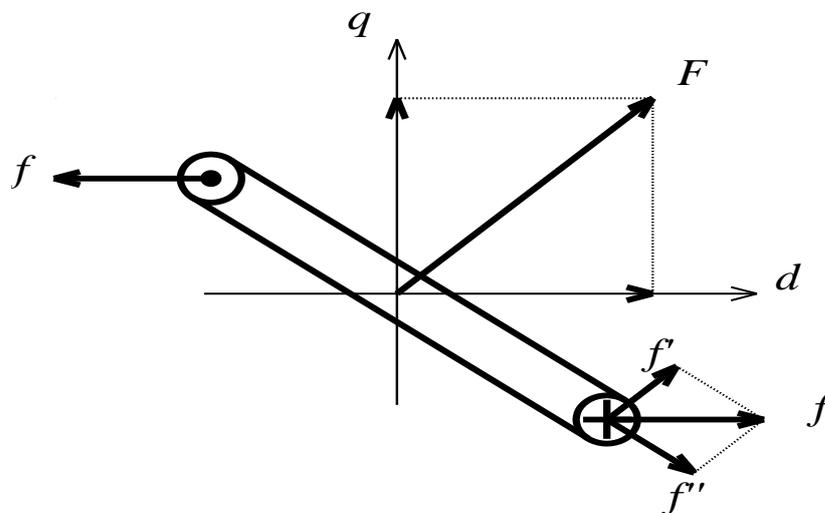


Рис. 2.19. Модель котушки зі струмом в прямокутній системі координат

У створеному зовнішньому магнітному полі на котушку діятиме магніторушійна сила

$$F = iw.$$

Вважатимемо, що на кожну сторону (довжиною l) котушки діє сила

$$f = B_q liw,$$

завдяки якій в ЕМП утворюється електромагнітний момент

$$M_{\text{маг}} = 2rB_q il = \Phi_q F_d, \quad (2.124)$$

де

Φ_q - максимальний магнітний момент вздовж осі q ;

F_d - складова магніторухійної сили вздовж осі d .

Можна показати, що при довільному напрямку магнітного поля утвореного складовими магнітної індукції B_q, B_d , отримуємо

$$M_{\text{маг}} = \Phi_q F_d - \Phi_d F_q. \quad (2.125)$$

Співвідношення (2.125) можна записати в дещо іншому вигляді, а саме як

$$M_{\text{маг}} = \Psi_q i_d - \Psi_d i_q, \quad (2.126)$$

де

$$i_d = i \cos \gamma; i_q = i \sin \gamma; \Psi_d = w\Phi_d; \Psi_q = w\Phi_q.$$

Співвідношення (2.126) можна безпосередньо застосовувати для електромеханічної системи, яка складається з двох однакових ортогональних та механічно жорстко з'єднаних котушок.

Таким чином, модель електричної машини з двома ортогональними обмотками на статорі та двома аналогічними обмотками на роторі дозволяє імітувати *будь-яку реальну* електричну машину як за значеннями електромагнітного моменту, який ця машина здатна розвивати, так і за структурою магнітного поля в повітряному зазорі між статором і ротором.

2.5.2. Алгоритм математичного моделювання узагальненої електричної машини

Як було показано вище, конструктивну модель, яка адекватно представляє клас обертових електричних машин, можна подати як двофазну двополосну машину, принципова схема якої наведена на рис. 2.20.

Нагадаємо припущення, які слід прийняти з метою побудови узагальненої математичної моделі на підставі прийнятої узагальненої конструктивної моделі електричної машини:

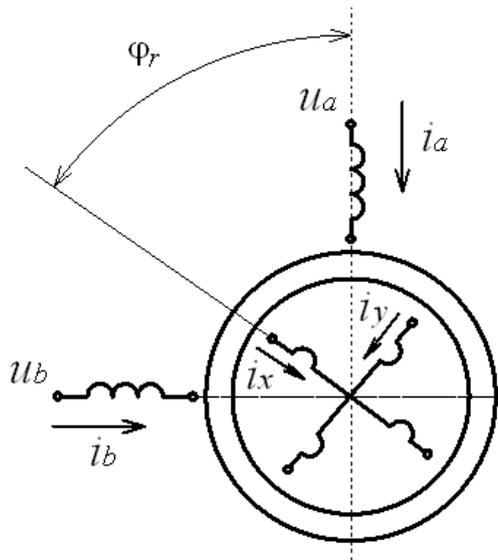


Рис. 2.20. Принципова схема двофазної двополюсної електричної машини

- повітряний зазор рівномірний;
- втрати на гістерезис та вихрові струми відсутні;
- магнітна проникність сталі суттєво більша за магнітну проникність повітря;
- двофазні обмотки статора та ротора симетричні та синусоїдально розподілені у просторі.

В загальному випадку модель електричної машини з урахуванням прийнятих припущень можна характеризувати за допомогою десяти змінних, а саме:

- чотири змінних, що відображають напруги на затискачах обмоток,
- чотири змінних, що відображають струми в обмотках,
- одна змінна, що відображає кут, яким визначається положення ротора,
- одна змінна, що відображає момент навантаження на валу.

При постановці задачі математичного моделювання ЕМП п'ять з наведених десяти параметрів, а саме: напруги та момент, зазвичай вважаються заданими. Інші п'ять параметрів мають бути знайдені за результатами моделювання.

Отже математичну модель узагальненої електричної машини можна подати як систему з п'яти рівнянь, які містять п'ять невідомих параметрів. Чотири з цих рівнянь описуватимуть чотири кола обмоток, а п'яте – умову механічної рівноваги ротора.

На підставі другого закону Кірхгофа можна записати

$$\begin{aligned}
 u_a &= r_1 i_a + \frac{d\Psi_a}{dt}; & u_b &= r_1 i_b + \frac{d\Psi_b}{dt}; \\
 u_x &= r_2 i_x + \frac{d\Psi_x}{dt}; & u_y &= r_2 i_y + \frac{d\Psi_y}{dt},
 \end{aligned}
 \tag{2.127}$$

де індекси 1 та 2 відносяться до кіл статора та ротора відповідно.

Рівняння механічної рівноваги ротора отримуємо, підсумовуючи всі моменти, які на цей ротор діють.

Маємо

$$J \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial t^2} + M_2 \left(\varphi_r, \frac{d\varphi_r}{dt} \right) = M_{\text{маг}}, \quad (2.128)$$

де

J - результуючий момент інерції обертових частин;

$M_2 \left(\varphi_r, \frac{d\varphi_r}{dt} \right)$ - зовнішній момент (момент навантаження електричної машини);

$M_{\text{маг}}$ - електромагнітний момент, що розвивається електричною машиною.

Загальне визначення індуктивностей, наведене раніше, дозволяє виразити потокозчеплення через струми в обмотках та індуктивності цих обмоток як

$$\begin{aligned} \Psi_a &= L_a i_a + L_{ab} i_b + L_{ax} i_x + L_{ay} i_y \\ \Psi_b &= L_{ba} i_a + L_b i_b + L_{bx} i_x + L_{by} i_y \\ \Psi_x &= L_{xa} i_a + L_{xb} i_b + L_x i_x + L_{xy} i_y \\ \Psi_y &= L_{ya} i_a + L_{yb} i_b + L_{yx} i_x + L_y i_y \end{aligned} \quad (2.129)$$

При відомих обмоткових функціях індуктивності обмоток можуть бути знайдені за отриманими вище співвідношеннями. Наприклад, власну індуктивність обмотки a можна визначити як

$$L_a = \mu_0 \frac{\pi r l}{\delta} N_1^2.$$

Взаємна індуктивність тої самої обмотки, наприклад з обмоткою x , визначається як

$$L_{\text{вз}} = \mu_0 \frac{\pi r l}{\delta} N_1 N_2 \cos \varphi_r.$$

Таким чином, можна записати

$$\begin{aligned} L_a &= L_b = L_1 = \text{const}; \quad L_x = L_y = L_2 = \text{const}; \\ L_{ax} &= L_{xa} = L_{by} = L_{yb} = L_{\text{вз}} \cos \varphi_r; \\ L_{ay} &= L_{ya} = -L_{\text{вз}} \sin \varphi_r; \quad L_{bx} = L_{xb} = L_{\text{вз}} \sin \varphi_r; \\ L_{ab} &= L_{ba} = L_{xy} = L_{yx} = 0. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Після підстановки (2.130) у (2.129), а отриманий результат у співвідношення (2.127) отримуємо рівняння рівноваги електричних кіл математичної моделі узагальненої електричної машини у вигляді

$$\begin{aligned}
 u_a &= r_1 i_a + L_1 \frac{di_a}{dt} + L_{B3} \frac{d}{dt}(i_x \cos \varphi_r) - L_{B3} \frac{d}{dt}(i_y \sin \varphi_r) \\
 u_b &= r_1 i_b + L_1 \frac{di_b}{dt} + L_{B3} \frac{d}{dt}(i_x \sin \varphi_r) + L_{B3} \frac{d}{dt}(i_y \cos \varphi_r) \\
 u_x &= L_{B3} \frac{d}{dt}(i_a \cos \varphi_r) + L_{B3} \frac{d}{dt}(i_b \sin \varphi_r) + L_2 \frac{di_x}{dt} + r_2 i_x \\
 u_y &= -L_{B3} \frac{d}{dt}(i_a \sin \varphi_r) + L_{B3} \frac{d}{dt}(i_b \cos \varphi_r) + L_2 \frac{di_y}{dt} + r_2 i_y
 \end{aligned} \tag{2.131}$$

Зважаючи на те, що деякі взаємні індуктивності (див. співвідношення (2.130)) залежать від кута φ_r , співвідношення для визначення моменту матимуть вигляд

$$\begin{aligned}
 M_{\text{маг}} &= \frac{dW_{\text{маг}}}{d\varphi_r} = \\
 &= i_a i_x \frac{dL_{ax}}{d\varphi_r} + i_a i_y \frac{dL_{ay}}{d\varphi_r} + i_b i_x \frac{dL_{bx}}{d\varphi_r} + i_b i_y \frac{dL_{by}}{d\varphi_r},
 \end{aligned} \tag{2.132}$$

Відповідно до визначення зв'язок геометричних та електричних кутів визначається як

$$\varphi_e = p\varphi_r.$$

Якщо у співвідношення (2.132) підставити значення взаємних індуктивностей з (2.130) та виконати операції диференціювання, отримуємо

$$M_{\text{маг}} = pL_{B3} \left[(i_b i_x - i_a i_y) \cos \varphi_{re} - (i_a i_x - i_b i_y) \sin \varphi_{re} \right]. \tag{2.133}$$

З урахуванням наведеного рівняння механічної рівноваги матиме вигляд

$$\begin{aligned}
 \frac{J}{p} \frac{\partial^2 \varphi_{re}}{\partial t^2} + M_2 &= \\
 &= L_{B3} \left[(i_b i_x - i_a i_y) \cos \varphi_{re} - (i_a i_x - i_b i_y) \sin \varphi_{re} \right] = \frac{M_{\text{маг}}}{p}
 \end{aligned} \tag{2.134}$$

Рівняння (2.131) та (2.134) повністю та цілком строго описують математичну модель електричної машини, що розглядається. Вони характеризують поведінку цієї моделі в будь-якому режимі роботи машини,

включаючи її динамічні властивості.

На жаль, рівняння (2.131) та (2.134) нелінійні, адже містять добуток змінних. Це унеможливило їх безпосереднє розв'язання в загальному (аналітичному) вигляді.

2.5.3. Особливості математичних моделей електричних машин різних типів

Під час обертання ротора кут φ_{re} , який входить до рівняння (2.133) для визначення моменту за аналогією з рівнянням (2.69) може бути поданий як

$$\varphi_{re} = \omega_r t + \gamma \quad (2.135)$$

де

γ - кут між осями відповідних обмоток (в даному випадку між обмотками a та x) в момент часу $t = 0$.

Для реалізації процесу перетворення енергії усереднений за часом момент має відрізнятися від нуля, тобто

$$M_{\text{сер}} = \int_t M_{\text{маг}} dt \neq 0 \quad (2.136)$$

Як випливає з рівняння (2.133), співвідношення (2.136) означає, що інтеграли від складових

$$i_1 i_2 \cos(\omega_r t + \gamma) \text{ та } i_1 i_2 \sin(\omega_r t + \gamma),$$

де індекси відносяться до статорної та роторної обмотки відповідно, не мають давати нулеві значення.

Припустимо, що струм статора має циклічну частоту ω_1 , тобто

$$i_1 = I_{1m} \cos(\omega_1 t), \quad (2.137)$$

а струм ротора – частоту ω_2 , тобто

$$i_2 = I_{2m} \cos(\omega_2 t). \quad (2.138)$$

За таких умов з урахуванням відомої тригонометричної тотожності

$$\cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) \cos(\omega_r t) = \cos(\omega_1 \mp \omega_2 \mp \omega_r) t \quad (2.139)$$

можна зробити висновок, що значення інтегралу від косинуса з таким аргументом буде відрізнятися від нуля за умови, що

$$\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_r = 0. \quad (2.140)$$

Отже,

співвідношення частот (2.140) є необхідною умовою для здійснення перетворення в узагальненій електричній машині електричної енергії в

механічну.

Із вказаної умови випливають наступні *три* можливості.

1. Якщо

$$i_1 = I_{1m} \cos(\omega_r t), \text{ то } M_{\text{сер}} \neq 0 \text{ за умови } i_2 = \text{const},$$

тобто за умови, що

$$\omega_1 = \omega, \omega_2 = 0.$$

Таким умовам відповідає *синхронна* електрична машина, у якій частота струму в обмотці статора (ω_1) жорстко зв'язана з кутовою частотою обертання ротора (ω_r). При цьому в обмотці ротора тече постійний струм.

2. Якщо

$$i_1 = \text{const},$$

то для забезпечення умови $M_{\text{сер}} \neq 0$ необхідно, щоб

$$i_2 = I_{2m} \cos(\omega_2 t).$$

Звідси отримуємо умови

$$\omega_1 = 0, \omega_2 = \omega.$$

Така математична модель описуватиме

- *синхронну машину*, але «обернену» у порівнянні з визначеною у п. 1; це означає, що індуктор (система збудження) такої машини має розміщуватися на статорі;

- *машину постійного струму*.

3. $M_{\text{сер}} \neq 0$ також за умови, що

$$\omega_2 = \omega_1 - \omega_r,$$

тобто

$$i_2 = I_{2m} \cos[(\omega_1 - \omega_r)t], \quad i_1 = I_{1m} \cos(\omega_1 t).$$

Така математична модель описуватиме *асинхронну електричну машину*.

ЛЕКЦІЯ 5

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ «ЧОРНОГО ЯЩИКА». ТЕОРІЯ ЧОТИРИПОЛЮСНИКІВ.

Відкрити «чорний ящик» може бути не лише складно, але й небезпечно... А чи варто взагалі намагатися його відкрити?

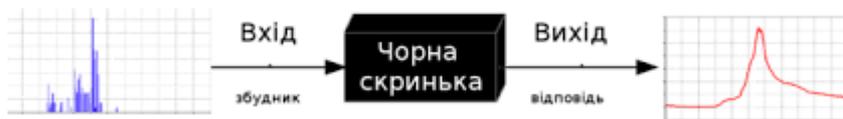
NM

Поняття чотириполюсника виникло як зручне узагальнення характерних властивостей електричних кіл.

Чотириполюсником зветься частина електричного кола, яка містить два вхідних виводи (полюси) для підключення джерела енергії (сигналу) та два вихідних виводи для підключення навантаження.

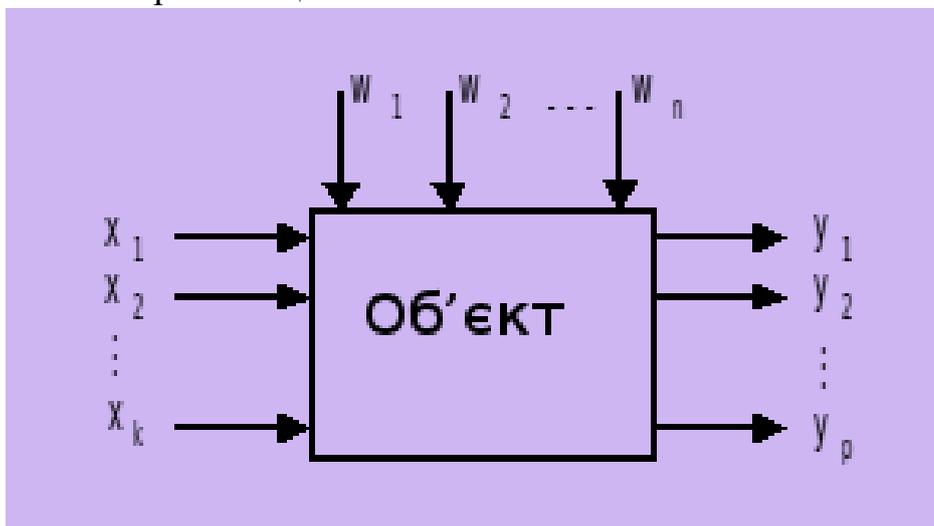
В науково-технічній літературі чотириполюсник іноді зветься 2x2-полюсником, що підкреслює наявність двох виводів на вході та двох – на виході. В іноземній літературі чотириполюсник зветься 2-*port* пристроєм (пристроєм з двома портами, тобто з двома входами, плечима), зважаючи на те, що кожен «*port*» відображає наявність двох виводів (саме з цим пов'язане те, що при перекладі на українську мову чотириполюсник іноді зветься 2-полюсником - двополюсником).

За умови відповідного вибору контрольних перерізів у вхідній та вихідній лініях, які приєднані, відповідно, до входу та виходу чотириполюсника, рівняння, які зв'язуватимуть однакові за змістом величини у вказаних перерізах (тобто струми, напруги, електричні чи магнітні поля), за формою виявляються тотожними рівнянням чотириполюсника.



Причина вказаної тотожності полягає в тому, що рівняння чотириполюсника описують загальні фізичні закономірності, пов'язані з процесами проходження, відбиття, поглинання енергії в лінійних системах, крізь які саме енергія джерела живлення (вхідна енергія) передається до споживача або приймача (вихідна енергія). Такі закономірності виявляються незмінними у всьому освоєному на сьогодні діапазоні частот електричних коливань, а отже їх можна використовувати в тому діапазоні частот і в тих

термінах (категоріях), які в даному діапазоні частот є загальноприйнятими та найзручнішими. Саме завдяки наведеним властивостям чотиріполюсники (як і їх узагальнення – багатополюсники) вважають універсальними (у визначеному вище змісті) математичними моделями – математичними моделями «чорного ящика».



Базові поняття та визначення чотиріполюсника

Чотиріполюсники на сьогодні настільки широко використовуються в процесі розв'язання найрізноманітніших задач, що можна впевнено говорити про формування самостійного розділу аналізу (моделювання) пристроїв з чотирма виводами – теорію чотиріполюсників, сутність якої можна подати у вигляді сукупності відповідних базових принципів.

1. Користуючись деякими узагальненими параметрами чотиріполюсника, можна визначити напруги та струми на його вході та виході, не розглядаючи процеси та явища, що відбуваються всередині чотиріполюсника (тобто чотиріполюсник являє собою «чорний ящик» - об'єкт, використання якого не передбачає знання його внутрішньої структури).

2. Складне електричне коло, як правило, можна подати у вигляді сукупності об'єднаних визначеним чином відносно простих за структурою складових – чотиріполюсників. Теорія чотиріполюсників дозволяє розрахувати параметри такого складного електричного кола на підставі інформації щодо параметрів чотиріполюсників, які входять до його структури.

3. Отримані на підставі теорії чотиріполюсників значення електричних величин на вході й виході електричного кола дозволяють оцінити режим роботи каналу передачі енергії (сигналів) в цілому. При цьому узагальнений характер параметрів чотиріполюсника дозволяє співставляти та адекватно оцінювати передавальні властивості електричних кіл, що різняться за структурою та процесами.

4. На підставі теорії чотириполіосників в окремих випадках вдається на підставі заданих вхідних/вихідних параметрів знайти структуру й значення елементів чотириполіосника (розкрити структуру «чорного ящика»), тобто розв'язати задачу синтезу електричних кіл.

Класифікація чотириполіосників

Чотириполіосники класифікують за різними ознаками. Зазвичай виокремлюють чотириполіосники *активні* та *пасивні*, *симетричні* та *несиметричні*, *лінійні* та *нелінійні*, *зворотні* та *незворотні*, *еквівалентні* та *нееквівалентні*.

Активні чотириполіосники — це чотириполіосники, які містять вітки з некомпенсованими джерелами електричної енергії. За таких умов на розімкнених виводах чотириполіосника напруга не дорівнюватиме нулю. Тобто активний чотириполіосник можна уявляти як деяке джерело електричної напруги (струму).

Пасивні чотириполіосники або не містять джерел електричної енергії, або сумарна дія наявних в структурі чотириполіосника таких джерел взаємно компенсується всередині чотириполіосника таким чином, що напруга на його вхідних і вихідних виводах дорівнює нулю.

В подальшому розглядатимемо виключно теорію пасивних чотириполіосників. Зазначимо, що будь-який активний чотириполіосник можна замінити еквівалентним йому пасивним чотириполіосником та винесеним за межі цього чотириполіосника еквівалентними джерелами ЕРС.

Симетричний чотириполіосник характеризується тим, що взаємна заміна місць підключення його вхідних і вихідних виводів не змінює розподілення струмів та напруг у зовнішньому (по відношенню до цього чотириполіосника) електричному колі.

В лінійних чотириполіосниках зв'язок між струмами та напругами має лінійну залежність. До складу таких чотириполіосників не входять нелінійні елементи, тобто елементи вольт-амперні характеристики яких мають нелінійний характер.

Зворотні чотириполіосники — це чотириполіосники, для яких має силу принцип взаємності, який полягає в тому, що відношення напруги на вході чотириполіосника до струму на його виході не залежить від того, яка пара виводів цього чотириполіосника вибрана як вхідна.

Еквівалентні чотириполіосники — це такі чотириполіосники, при взаємній заміні яких струми та напруги на відповідних вхідних та вихідних полюсах не змінюються. При цьому, звичайно, не змінюватимуться напруги та струми й у всіх елементах електричного кола, за умови, що такі чотириполіосники є його складовою частиною.

Чотириполіосники також можна підрозділяти за схемами з'єднання елементів, що входять до їх складу. **При цьому виділяють T-, П- та Г-образні чотириполіосники, мостові чотириполіосники та ін.**

Основні рівняння чотириполюсника

Для виводу основних рівнянь, що пов'язують електричні величини (категорії) на вході та виході чотириполюсника, а також встановлення адекватних співвідношень між цими рівняннями слід уважно відноситися до вибраних напрямків вказаних електричних категорій (напруги та струмів).

На рис. 1.6 представлений чотириполюсник з прийнятими в даному навчальному посібнику напрямками струмів і напруги на виводах чотириполюсника за умови прямого (рис. 1.6а) та зворотного (рис. 1.6б) передавання енергії.

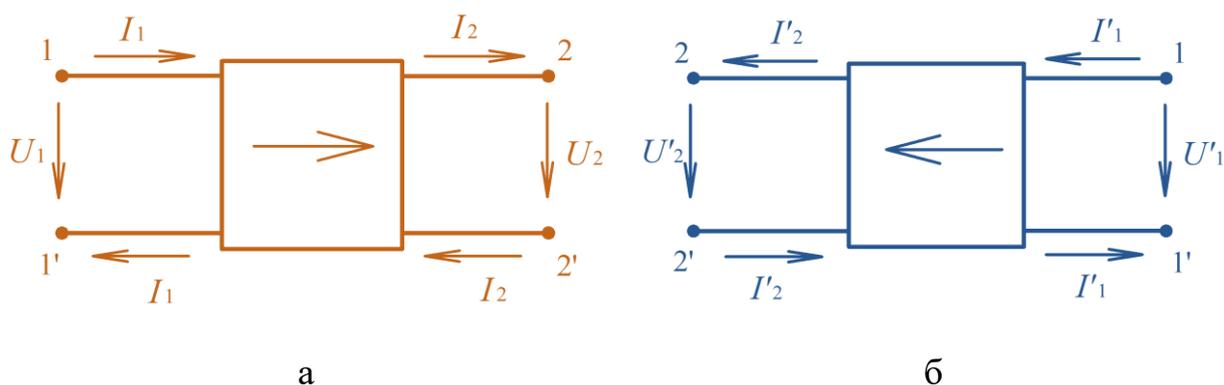


Рис. 1.6. Напрямки струмів та напруги на виводах чотириполюсника за умови передачі енергії в прямому (а) та зворотному (б) напрямках

На сьогодні найбільше поширення отримали три види запису рівнянь, що пов'язують напругу U_1 та струм I_1 на вході чотириполюсника з напругою U_2 та струмом I_2 на його виході.

Зазначимо, що коефіцієнти при величинах U_1, U_2, I_1, I_2 у вказаних рівняннях зазвичай зветься параметрами чотириполюсника. За умови лінійності чотириполюсника ці параметри не залежатимуть від величини напруги та струму на його полюсах.

Перша система рівнянь встановлює зв'язок напруги та струму на вході чотириполюсника з напругою та струмом на його виході, а саме

$$\begin{cases} U_1 = a_{11}U_2 + a_{12}I_2 \\ I_1 = a_{21}U_2 + a_{22}I_2 \end{cases} \quad (1.9)$$

Легко бачити, що у співвідношеннях (1.9)

- величини a_{11}, a_{22} - безрозмірні,
- величина a_{12} має розмірність опору,
- величина a_{21} має розмірність провідності.

Про чотириполюсник, властивості якого описуються

співвідношеннями (1.9) зазвичай говорять, як про чотириполіусник заданий a -параметрами.

Слід зазначити, що нерідко (особливо у зарубіжній науково-технічній літературі) співвідношення (1.9) подають у вигляді

$$\begin{cases} U_1 = AU_2 + BI_2 \\ I_1 = CU_2 + DI_2 \end{cases} \quad (1.10)$$

За таких умов говорять, що чотириполіусник заданий $ABCD$ -параметрами.

Зв'язок напруги на вході та виході чотириполіусника зі струмами на його вході та виході подається системою рівнянь

$$\begin{cases} U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{cases} \quad (1.11)$$

Як видно, у співвідношеннях (1.11) коефіцієнти $z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}$ при струмах I_1, I_2 мають розмірність опору. Про чотириполіусник, властивості якого описуються співвідношеннями (1.11) зазвичай говорять, як про чотириполіусник заданий z -параметрами (заданий у термінах опору).

Зв'язок струмів на вході та виході чотириполіусника з напругами на його вході та виході подається системою рівнянь

$$\begin{cases} I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2 \\ I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2 \end{cases} \quad (1.12)$$

Як видно, у співвідношеннях (1.12) коефіцієнти $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$ при напругах U_1, U_2 мають розмірність провідності. Про чотириполіусник, властивості якого описуються співвідношеннями (1.12) зазвичай говорять, як про чотириполіусник заданий y -параметрами (заданий у термінах провідності).

Звичайно, що параметри чотириполіусника в загальному випадку є комплексними величинами.

Сучасна теорія багатополіусників і, зокрема, чотириполіусників будується на основі використання математичного апарату теорії матриць. В матричному вигляді співвідношення (1.9), (1.11), (1.12) набувають вигляду

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [a] \times \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z] \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [y] \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Матриці параметрів чотириполосника, що входять до співвідношень (1.13) – (1.15), мають відповідну назву, а саме

$[a]$ - матриця передачі або матриця a , або a -матриця;

$[z]$ - матриця опорів або матриця z , або z -матриця;

$[y]$ - матриця провідностей або матриця y , або y -матриця.

Зв'язок між елементами окремих матриць чотириполосника неважко встановити, розв'язуючи ту чи іншу систему рівнянь відносно відповідних вхідних та вихідних категорій (напруг та струмів). Цей зв'язок встановлюється співвідношеннями

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{21}} \begin{bmatrix} z_{11} & -|z| \\ 1 & -z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{y_{21}} \begin{bmatrix} -y_{22} & 1 \\ -|y| & y_{11} \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{21}} \begin{bmatrix} a_{11} & -|a| \\ 1 & -a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|y|} \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|z|} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -|a| \\ 1 & a_{11} \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

де

$$|y| = \frac{1}{|z|} = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{12}},$$

$$|z| = \frac{1}{|y|} = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} = -\frac{a_{12}}{a_{21}},$$

$$|a| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -\frac{z_{12}}{z_{21}} = -\frac{y_{12}}{y_{21}}.$$

Наведені вище рівняння (1.16) – (1.18) відповідають передачі енергії в прямому напрямку, тобто згідно рис. 1.6а - зліва направо. За умови передачі

енергії у зворотному напрямку (див. рис. 1.6б) вхідні та вихідні виводи чотириполюсника міняються місцями. При цьому слід враховувати змінення напрямку струмів на виводах чотириполюсника.

З'єднання чотириполюсників

Під час математичного моделювання (аналізу) електричних кіл чотириполюсники можна з'єднувати один з одним найрізноманітнішими способами. Найпоширеніші три способи такого з'єднання, які надають можливості подати складне електричне коло як сукупність з'єднаних чотириполюсників. При цьому виникає задача визначення матриці отриманого за результатом з'єднання чотириполюсника на підставі матриць окремих чотириполюсників, з яких саме вказане з'єднання й отримане.

Каскадне (ланцюгове) з'єднання чотириполюсників

Каскадний спосіб з'єднання чотириполюсників показаний на рис. 1.7.

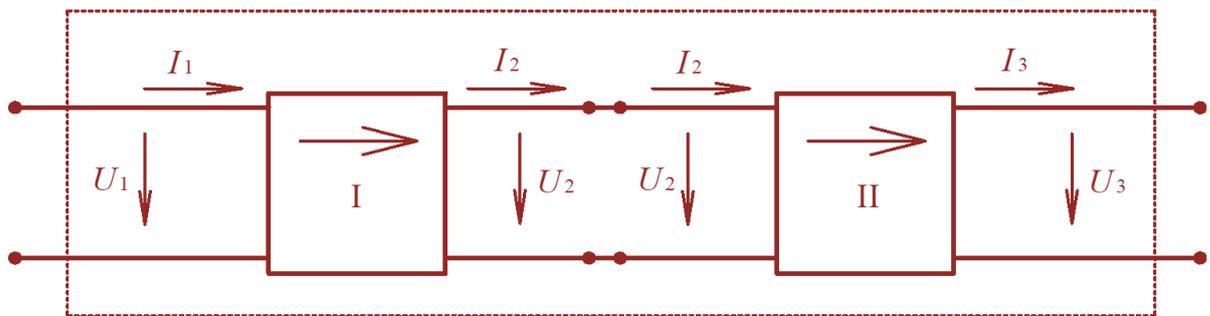


Рис. 1.7. Каскадне з'єднання двох чотириполюсників

За такий спосіб вихід одного чотириполюсника приєднується до входу другого, утворюючи каскад (ланцюг).

Каскадне з'єднання чотириполюсників зазвичай аналізується в термінах *a*-матриці (що приводить до найпростішого алгоритму). Отже задача полягає в тому, щоб на підставі відомих матриць передачі кожного з чотириполюсників, визначити матрицю передачі усього з'єднання.

Враховуючи, що за умови з'єднання чотириполюсників вихідні струми та напруги першого чотириполюсника дорівнюють вихідним струмам та напругам другого чотириполюсника (див. рис. 1.7), відповідні матричні рівняння можна подати як

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [a]_1 \times \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad (1.22)$$

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [a]_2 \times \begin{bmatrix} U_3 \\ I_3 \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Співвідношення для результуючого чотириполюсника встановлюються

простою підстановкою матриці стовпця $\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$ із співвідношення (1.23) до співвідношення (1.22). Як результат отримуємо

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [a]_1 \times [a]_2 \times \begin{bmatrix} U_3 \\ I_3 \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Звичайно, така закономірність утворення матриці каскадного з'єднання зберігатиметься і при збільшенні кількості поєднаних чотириполіусників. Тобто при каскадному з'єднанні чотириполіусників матриця $[a]$ усієї системи дорівнюватиме добутку матриць $[a]$ чотириполіусників, які цю систему утворюють. Отже, при з'єднанні у систему k чотириполіусників маємо

$$[a] = \prod_{i=1}^k [a]_i. \quad (1.25)$$

Зазначимо, що у співвідношенні (1.25) матриці-співмножники мають розміщуватися в тому самому порядку, в якому відповідні чотириполіусники включені до ланцюга в напрямку передачі енергії (адже добуток матриць не підкоряється закону переміщення).

Паралельне з'єднання чотириполіусників

Паралельне з'єднання двох чотириполіусників наведено на рис. 1.8.

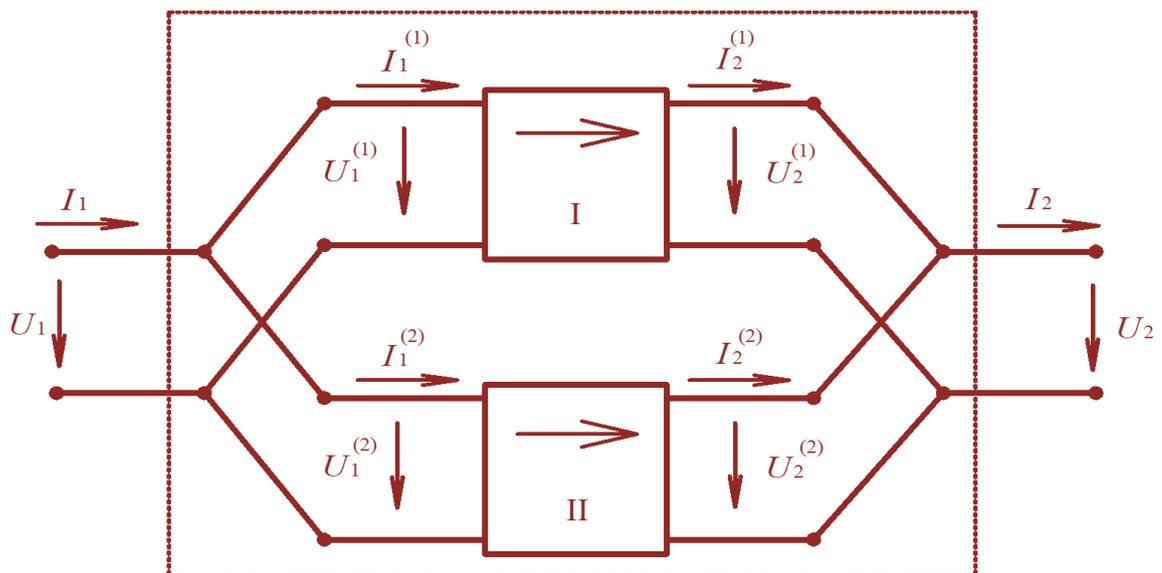


Рис. 1.8. Паралельне з'єднання двох чотириполіусників

При такому способі з'єднання чотириполіусників їх входи та виходи з'єднуються паралельно, причому таке з'єднання має відбуватися саме так, як це показано на рис. 1.8, тобто зі збереженням напрямків напруги та струму на полюсах.

Паралельне з'єднання чотириполіусників зазвичай аналізується в термінах *y*-матриці (саме це приводить до найпростішого алгоритму). Отже задача полягає в тому, щоб на підставі відомих матриць провідності кожного з чотириполіусників, визначити матрицю провідності усього з'єднання.

Припустимо, що матриці провідності кожного з чотириполіусників визначаються як

$$\begin{bmatrix} I_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \end{bmatrix} = [y]_1 \times \begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

$$\begin{bmatrix} I_1^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{bmatrix} = [y]_2 \times \begin{bmatrix} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

За умови паралельного з'єднання чотириполіусників вхідні та вихідні напруги першого, другого та результуючого чотириполіусників дорівнюють одна одній, а струми на вході та виході результуючого чотириполіусника дорівнюють сумі відповідних струмів першого та другого чотириполіусника, тобто

$$\begin{aligned} U_1^{(1)} = U_1^{(2)} = U_1; \quad U_2^{(1)} = U_2^{(2)} = U_2; \\ I_1 = I_1^{(1)} + I_1^{(2)}; \quad I_2 = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Враховуючи (1.26) – (1.28), отримуємо співвідношення, яким визначається матриця провідності з'єднання двох чотириполіусників, а саме

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = ([y]_1 + [y]_2) \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

За умови паралельного з'єднання *k* чотириполіусників усі наведені міркування щодо взаємовідношення струмів та напруг на входах/виходах складових чотириполіусників та результуючої системи чотириполіусників, звичайно зберігатимуться.

Отже для чотириполіусника, отриманого за результатом паралельного з'єднання *k* чотириполіусників, матимемо

$$[y] = \sum_{i=1}^k [y]_i. \quad (1.30)$$

Послідовне з'єднання чотириполіусників

Послідовне з'єднання двох чотириполіусників наведене на рис. 1.9.

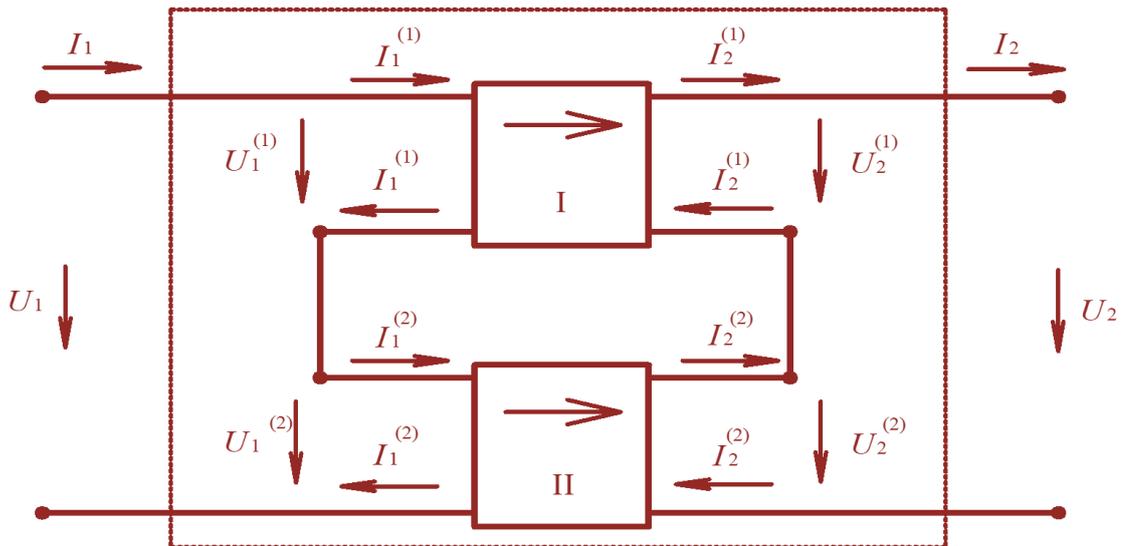


Рис. 1.9. Послідовне з'єднання двох чотириполіусників

При такому способі з'єднання чотириполіусників їх входи та виходи з'єднуються послідовно, а саме так, як це показано на рис. 1.9. тобто з узгодженням напрямків напруги та струму на полюсах.

Послідовне з'єднання чотириполіусників зазвичай аналізується в термінах z -матриці (саме це приводить до найпростішого алгоритму). Отже задача полягає в тому, щоб на підставі відомих матриць опорів кожного з чотириполіусників, визначити матрицю опору усього з'єднання.

Припустимо, що матриці опорів кожного з чотириполіусників визначаються як

$$\begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{bmatrix} = [z]_1 \times \begin{bmatrix} I_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

$$\begin{bmatrix} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \end{bmatrix} = [y]_2 \times \begin{bmatrix} I_1^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

За умови послідовного з'єднання чотириполіусників напруга на вході та виході результуючого чотириполіусника дорівнюватиме сумі напруг, відповідно, на вході та виході першого та другого чотириполіусників, а струми на вході та виході результуючого чотириполіусника дорівнюють відповідним струмам на вході та виході першого та другого чотириполіусника, тобто

$$\begin{aligned} I_1^{(1)} &= I_1^{(2)} = I_1; & I_2^{(1)} &= I_2^{(2)} = I_2; \\ U_1 &= U_1^{(1)} + U_1^{(2)}; & U_2 &= U_2^{(1)} + U_2^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Враховуючи (1.31) – (1.33), отримуємо співвідношення, яким визначається матриця опорів з'єднання двох чотириполіусників, а саме

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = ([z]_1 + [z]_2) \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

За умови послідовного з'єднання k чотириполіусників усі наведені міркування щодо взаємовідношення струмів та напруг на входах/виходах складових чотириполіусників та результуючого чотириполіусника, звичайно зберігатимуться. Отже для чотириполіусника, отриманого за результатом послідовного з'єднання k чотириполіусників, матимемо

$$[z] = \sum_{i=1}^k [z]_i. \quad (1.35)$$

Зазначимо, що співвідношення (1.30), (1.35) залишаються справедливими лише за умови, що відповідне з'єднання чотириполіусників не змінює розподілення струмів і напруги в їх структурах.

Вхідний опір чотириполіусника.

Режими холостого ходу та короткого замикання

Визначення вхідного опору чотириполіусника за умови прямої та зворотної передачі енергії, а також його аналіз в режимах холостого ходу та короткого замикання надає чимало корисної інформації як для використання системи, що моделюється цим чотириполіусником, так і для визначення параметрів самого чотириполіусників (точніше, для визначення елементів відповідних матриць, якими цей чотириполіусник задається).

Вхідний опір $z_{\text{вх}}$ чотириполіусника визначається як відношення напруги до струму на його вхідних полюсах.

За умови, що чотириполіусник включений в режимі прямої передачі енергії (див. рис. 1.6а) відповідно до (1.13) матимемо

$$z_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{a_{11}z_{\text{н}} + a_{12}}{a_{21}z_{\text{н}} + a_{22}}, \quad (1.36)$$

де

$$z_{\text{н}} = \frac{U_2}{I_2} \text{ - опір навантаження.}$$

За умови реалізації режиму холостого ходу ($z_{\text{н}} \rightarrow \infty$) або короткого замикання ($z_{\text{н}} = 0$) із (1.36) безпосередньо впливає

$$z_{xx} = \frac{a_{11}}{a_{21}}; z_{xz} = \frac{a_{12}}{a_{22}}. \quad (1.38)$$

Використання режимів холостого ходу та короткого замикання чотириполюсника надає можливість встановити фізичний зміст елементів матриць $[a]$, $[z]$, $[y]$, які використовуються для опису його характеристик.

Реактивні чотириполюсники

В понятті реактивного чотириполюсника ідеалізовані властивості, які використовуються на практиці під час математичного моделювання пристроїв з малими активними втратами енергії. Така ідеалізація зазвичай суттєво спрощує теоретичні викладки без помітної втрати точності результатів.

В реактивному чотириполюснику поглинання потужності відсутнє і, крім того, таким чотириполюсником не передається потужність в режимах короткого замикання та холостого ходу. Це означає, що всі опори чотириполюсника мають бути чисто реактивними. Інакше кажучи, мають бути реактивними всі елементи матриці $[z]$ такого чотириполюсника, а саме

$$z_{11} = jx_{11}, z_{22} = jx_{22}, z_{12} = jx_{12}, z_{21} = jx_{21}. \quad (1.55)$$

Враховуючи співвідношення (1.55) в формулах (1.16) – (1.18), легко встановити властивості елементів матриці $[a]$ реактивного чотириполюсника, а саме:

a_{11} , a_{22} та $|a|$ - дійсні числа;

a_{12} , a_{21} - уявні числа.

Матриці деяких найпростіших чотириполюсників

В практичній діяльності часто доводиться стикатися з необхідністю визначення матриць, якими описуються властивості найпростіших електричних кіл, що утворюють чотириполюсники та складаються з одного або декількох елементів. Нижче наводяться схеми деяких з таких чотириполюсників та матриці, якими описуються їх властивості.

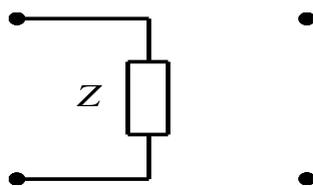


Рис. 1.11. Двополюсник, підключений до лівих полюсів

На рис. 1.11 наведено схему чотириполюсника, який складається з двополюсника, підключеного до лівих полюсів цього чотириполюсника.

Властивості такого чотириполюсника можна описувати виключно матрицею провідностей, а саме:

$$[y] = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ де } y = \frac{1}{z}.$$

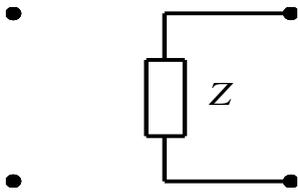


Рис. 1.12. Двополюсник, підключений до правих полюсів

На рис. 1.12 наведено схему чотириполюсника, який складається з двополюсника, підключеного до правих полюсів цього чотириполюсника.

Властивості такого чотириполюсника можна описувати лише матрицею провідностей, а саме

$$[y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -y \end{bmatrix}, \text{ де } y = \frac{1}{z}.$$

На рис. 1.13 наведено схему чотириполюсника, що складається з одного опору, включеного послідовно відносно вхідних та вихідних полюсів.

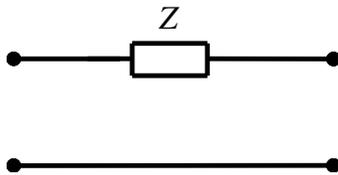


Рис. 1.13. Послідовний опір

Властивості такого чотириполюсника можна описувати матрицями передачі та провідностей, а саме

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [y] = \begin{bmatrix} y & -y \\ y & -y \end{bmatrix}, \text{ де } y = \frac{1}{z}.$$

На рис. 1.14 наведено схему чотириполюсника, що складається з одного опору включеного паралельно відносно вхідних та вихідних полюсів.

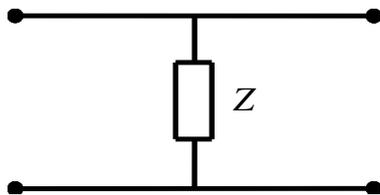


Рис. 1.14. Паралельний опір

Властивості такого чотириполюсника можна описувати матрицями передачі та опорів, а саме

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}, [z] = \begin{bmatrix} z & -z \\ z & -z \end{bmatrix}, \text{ де } y = \frac{1}{z}.$$

На рис. 1.15 наведено схему чотириполюсника, який складається з двох опорів, з'єднаних Г-подібно (Г-подібне з'єднання опорів).

Такий чотириполюсник можна описувати в термінах матриць передачі, опорів та провідностей.

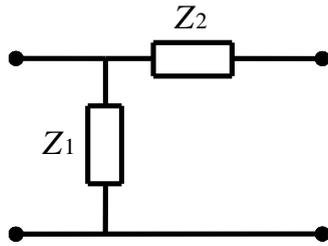


Рис. 1.15. Г-подібна схема з'єднання опорів

Отже, маємо

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & z_2 \\ y_1 & 1 + z_2 y_1 \end{bmatrix},$$

$$[z] = \begin{bmatrix} z_1 & -z_1 \\ z_1 & -(z_1 + z_2) \end{bmatrix},$$

$$[y] = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 & -y_2 \\ y_2 & -y_2 \end{bmatrix},$$

де

$$y_1 = \frac{1}{z_1}, \quad y_2 = \frac{1}{z_2}.$$

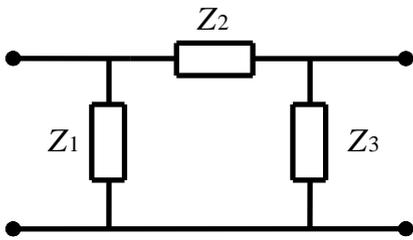


Рис. 1.16. П-подібна схема з'єднання опорів

На рис. 1.16 наведено схему чотириполюсника, який складається з трьох опорів, що з'єднані за П-подібною схемою (П-подібне з'єднання опорів).

Такий чотириполюсник можна описувати в термінах матриць передачі, опорів та провідностей.

Отже, маємо

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & z_2 \\ y_1 + y_3 + y_1 z_2 y_3 & 1 + z_2 y_1 \end{bmatrix},$$

$$[y] = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 & -y_2 \\ y_2 & -(y_1 + y_2) \end{bmatrix},$$

$$[z] = \frac{1}{z_1 + z_2 + z_3} \begin{bmatrix} z_1(z_2 + z_3) & -z_1 z_3 \\ z_1 z_3 & -z_3(z_1 + z_2) \end{bmatrix},$$

де

$$y_1 = \frac{1}{z_1}, \quad y_2 = \frac{1}{z_2}, \quad y_3 = \frac{1}{z_3}.$$

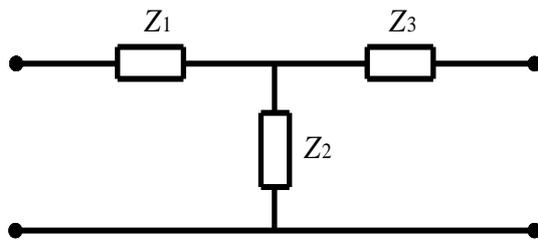


Рис. 1.17. Т-подібна схема з'єднання опорів

На рис. 1.17 наведено схему чотириполосника, який складається з трьох опорів, з'єднаних за Т-подібною схемою (Т-подібне з'єднання опорів).

Такий чотириполосник можна описувати в термінах матриць передачі, опорів та провідностей.

Отже, маємо

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 + z_1 y_2 & z_1 + z_3 + z_1 y_2 z_3 \\ y_2 & 1 + y_2 z_3 \end{bmatrix},$$

$$[z] = \begin{bmatrix} z_1 + z_2 & -z_2 \\ z_2 & -(z_2 + z_3) \end{bmatrix},$$

$$[y] = \frac{1}{y_1 + y_2 + y_3} \begin{bmatrix} y_1(y_2 + y_3) & -y_1 y_3 \\ y_1 y_3 & -y_3(y_1 + y_2) \end{bmatrix},$$

де

$$y_1 = \frac{1}{z_1}, \quad y_2 = \frac{1}{z_2}, \quad y_3 = \frac{1}{z_3}.$$

На рис. 1.18 наведено схему чотириполосника, який складається з ідеального трансформатора.

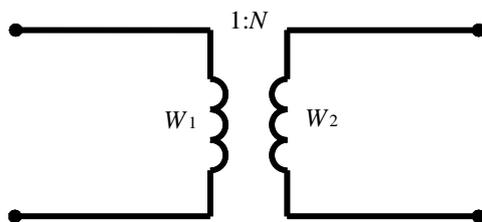


Рис. 1.18. Схема ідеального трансформатора

Такий чотириполосник подається в термінах матриці передачі.

Маємо

$$[a] = \begin{bmatrix} \pm \frac{1}{N} & 0 \\ 0 & \pm N \end{bmatrix},$$

де

$$N = \frac{w_1}{w_2} - \text{коєфіцієнт трансформації}$$

трансформатора,

w_1, w_2 - число витків первинної та вторинної обмоток трансформатора відповідно.

В наведеній матриці передачі ідеального трансформатора знак «плюс» відповідає зустрічному приєднанню обмоток до полюсів чотириполосника, а знак «мінус» – узгодженому.

Робочі параметри чотириполюсника

Робочі (або експлуатаційні) параметри чотириполюсника враховують не лише його внутрішні властивості, але й властивості вхідного та вихідного кола, що підключені до входу та виходу чотириполюсника відповідно.

Внесена постійна передачі

Внесена постійна передачі визначається як половина натурального логарифму (або десятикратне значення десятичного логарифму) відношення потужності, яку віддає генератор в задане навантаження за умови безпосереднього з'єднання цих генератора і навантаження (див. рис. 1.22а), до потужності яка надходить від цього генератора в те саме навантаження крізь даний чотириполюсник (див. рис. 1.22б).

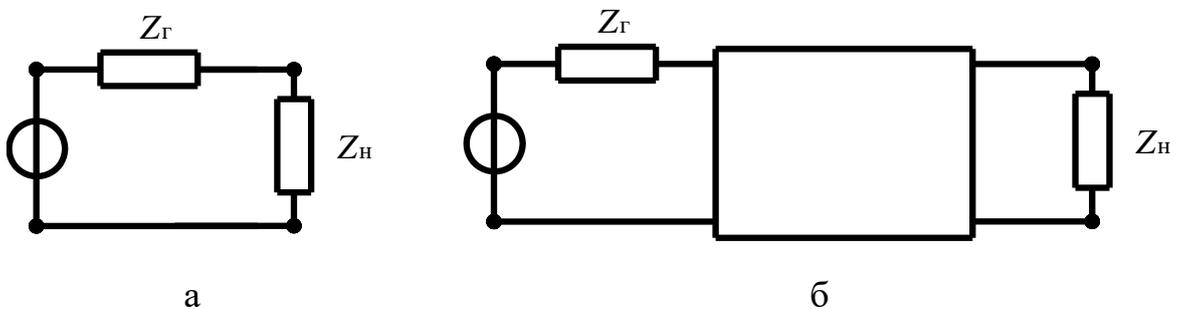


Рис. 1.22. До визначення внесеної постійної передачі

Як і раніше потужність визначатимемо добутком комплексних значень напруги та струму.

За умови прямої передачі відповідно до визначення внесеної постійної передачі матимемо

$$g_{\text{вн1}} = b_{\text{вн1}} + ja_{\text{вн1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{E^2}{U_2 I_2 (z_{\Gamma} + z_{\text{Н}})^2 z_{\text{Н}}},$$

де

$b_{\text{вн1}}$ - внесене згущання;

$a_{\text{вн1}}$ - внесена фаза.

Зазначимо, що за прийнятих умов дослідження процесу передачі крізь чотириполюсник внесене згущання визначає відношення уявних потужностей.

Згідно з визначеннями, робоча та внесена постійні передачі співпадають одна з одною за умови однаковості опорів навантаження та генератора.

Можна показати, що

$$g_{\text{вн1}} = \frac{1}{2} \ln \left\{ a_{11} \frac{z_{\text{н}}}{z_{\text{н}} + z_{\text{г}}} + a_{12} \frac{1}{z_{\text{н}} + z_{\text{г}}} + a_{21} \frac{z_{\text{н}} z_{\text{г}}}{z_{\text{н}} + z_{\text{г}}} + a_{22} \frac{z_{\text{г}}}{z_{\text{н}} + z_{\text{г}}} \right\}^2.$$

За умови змінення напрямку передачі при незмінних опорах на вході та виході чотиріполюсника індекси «н» та «г» міняються містами, а всередині матриці передачі відбуваються відповідні перестановки. Як результат матимемо

$$g_{\text{вн1}} = g_{\text{вн2}} = \ln |a|.$$

Зазначимо, що енергетичні оцінки передачі на підставі розглянутих параметрів (власне затухання, робоче затухання, внесене затухання) є неповноцінними за визначенням, адже ці параметри введені на підставі уявних потужностей, тоді як корисний ефект пов'язаний з активною потужністю.

Діюче затухання

Діюче затухання чотиріполюсника визначається як половина натурального логарифму (або десятикратне значення десяткового логарифму) відношення максимально можливої активної потужності, яку може віддавати генератор, до тої активної потужності, яка надходить від цього генератора крізь чотиріполюсник до заданого навантаження.

Тобто

$$b_{\text{д}} = \frac{1}{2} \ln \frac{E^2 / (4R_{\text{г}})}{\text{Re}(U_2 I_2^*)}.$$

Діюче затухання не є аналітичною функцією комплексної частоти (параметра $j\omega$), що суттєво ускладнює використання цієї характеристики під час синтезу електричного кола на підставі заданої частотної характеристики діючого затухання.

Зазначимо, що за умови

$$z_{\text{г}} = R_{\text{г}}, \quad z_{\text{н}} = R_{\text{н}}$$

діюче затухання співпадає з робочим затуханням.

Опір передачі

Опір передачі або приведений опір чотиріполюсника визначається відношенням ЕРС, що діє на вході чотиріполюсника, до струму в його навантаженні

$$z_{\text{пр}} = \frac{E}{I_2}.$$

Зв'язок цього параметра з параметрами чотириполосника та опорами z_{Γ} , z_{H} визначається співвідношенням

$$z_{\text{пр}} = a_{11}z_{\text{H}} + a_{12} + a_{21}z_{\text{H}}z_{\Gamma} + a_{22}z_{\Gamma}. \quad (1.67)$$

Порівняння співвідношень (1.66) та (1.67) дозволяє встановити зв'язок між опором передачі та функцією робочого затухання для зворотного чотириполосника, а саме

$$L_{\text{р}} = \left| \frac{z_{\text{пр}}}{2\sqrt{z_{\text{H}}z_{\Gamma}}} \right|^2. \quad (1.68)$$

Якщо опір навантаження та внутрішній опір генератора є дійсними числами, то (як вже було вказано) діюче та робоче затухання співпадають, а отже співпадатимуть і умови найбільшої ефективності передачі та найбільшої зручності реалізації процесу синтезу електричного кола. Саме тому при сучасних методах синтезу електричних кіл з заданими частотними властивостями намагаються включати чотириполосник між активними (а якщо це можливе то і однаковими) опорами.

Принципи нормування матриць чотириполосника

Нормування матриць (рівнянь), якими описуються параметри чотириполосника, пов'язане з потребою за визначених обставин відобразити ці параметри, спираючись не на категорії струму та напруги (як це було зроблено вище) а на категорію потужності. Така потреба виникає, зокрема, за умови аналізу електричних кіл у надвисокочастотному діапазоні, де поняття струму та напруги, як правило, взагалі не визначені, тоді як потужність легко вимірюється.

Нормування параметрів чотириполосника полягає в тому, що з основних рівнянь, якими ці параметри описуються, виключаються величини, зміст яких з тих чи інших обставин не є однозначним або складним для вимірювання. При цьому до основних рівнянь чотириполосника вводиться нова змінна – потужність на полюсах цього чотириполосника. Для того, щоб врахувати не лише амплітудні, але й фазові властивості чотириполосника категорію потужності слід розуміти як добуток комплексних значень напруги та струму. Якщо опори зі входу/виходу чотириполосника – дійсні величини, що дорівнюють ρ , то потужність (в указаному вище сенсі) дорівнюватиме U^2/ρ або $I^2\rho$. Саме ці величини й необхідно ввести до рівнянь, якими описуються

параметри чотириполюсника.

ЛЕКЦІЯ 6

ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ І ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ В СЕРЕДОВИЩІ MATLAB I SIMULI

Основні відомості про систему MATLAB

Використання персональних комп'ютерів у навчальному процесі дозволяє полегшити працю викладача і дати практичні навички у вирішенні тих чи інших завдань, що виникають в процесі навчання. Для цих цілей використовується цілий набір інтегрованих програмних систем і пакетів програм, що охоплюють практично весь спектр вирішуваних завдань. Зокрема, засоби для автоматизації математичних розрахунків: Reduce, Derive, TK Solver, Mathcad, Mathematica, Maple V, MATLAB і багато інших.

Система автоматизації математичних розрахунків MATLAB є однією з найстаріших і найпотужніших в цій області. Назва системи походить від скорочення - матричний лабораторії (MATrix LABoratory).

Система MATLAB була розроблена фірмою Math Works, Inc. як мова програмування високого рівня для математичних, інженерних, наукових і технічних обчислень. В процесі розвитку система "обростала" різними доповненнями у вигляді пакетів розширення, зі збільшенням кількості яких росли і можливості системи.

Як і будь-яка комп'ютерна програма, система MATLAB має як достоїнства, так і недоліки. Переваги системи очевидні і частково описані вище, лише необхідно відзначити легкість написання програм в даній системі і відкритість її архітектури, що дозволяє легко змінювати систему "під себе" і створювати нові пакети розширень. До недоліків системи можна віднести: лінійну запис виразів і формул, що в порівнянні, наприклад, з системою Mathcad виглядає дещо нелегким для читання; деяку громіздкість системи, що створює складності в її вивченні на перших етапах.

Ми будемо використовувати версії MATLAB 6.0 Release 12 і версії Simulink 4.0 (далі в тексті - без номера версії).

Передбачається, що MATLAB використовується в операційній системі Windows 95 OSR2, Windows 98 або Windows 98 OSR2. Запуск системи MATLAB 6.0 проводиться з головного меню операційної системи або подвійним клацанням лівої кнопки миші на іконці MATLAB на робочому столі. Після запуску з'являється основне вікно системи MATLAB.

Інтерфейс MATLAB

Інтерфейс MATLAB 6.0 використовує всі можливості операційної системи Windows, отже, всі вікна, що з'являються під час роботи системи, можна переміщати, змінювати їх розміри, відкривати на весь екран, згортати і закривати. Після запуску системи з'являється основне вікно MATLAB (рис.1.1), яке складається з п'яти частин:

- 1 - командне меню;
- 2 - панель інструментів;
- 3 - панель запуску компонентів системи (Launch Pad) і браузер (редактор) робочого простору (Workspace);
- 4 - вікно історії сесії (Command History) і браузер поточної директорії (Current directory);
- 5 - командне вікно (Command Window).

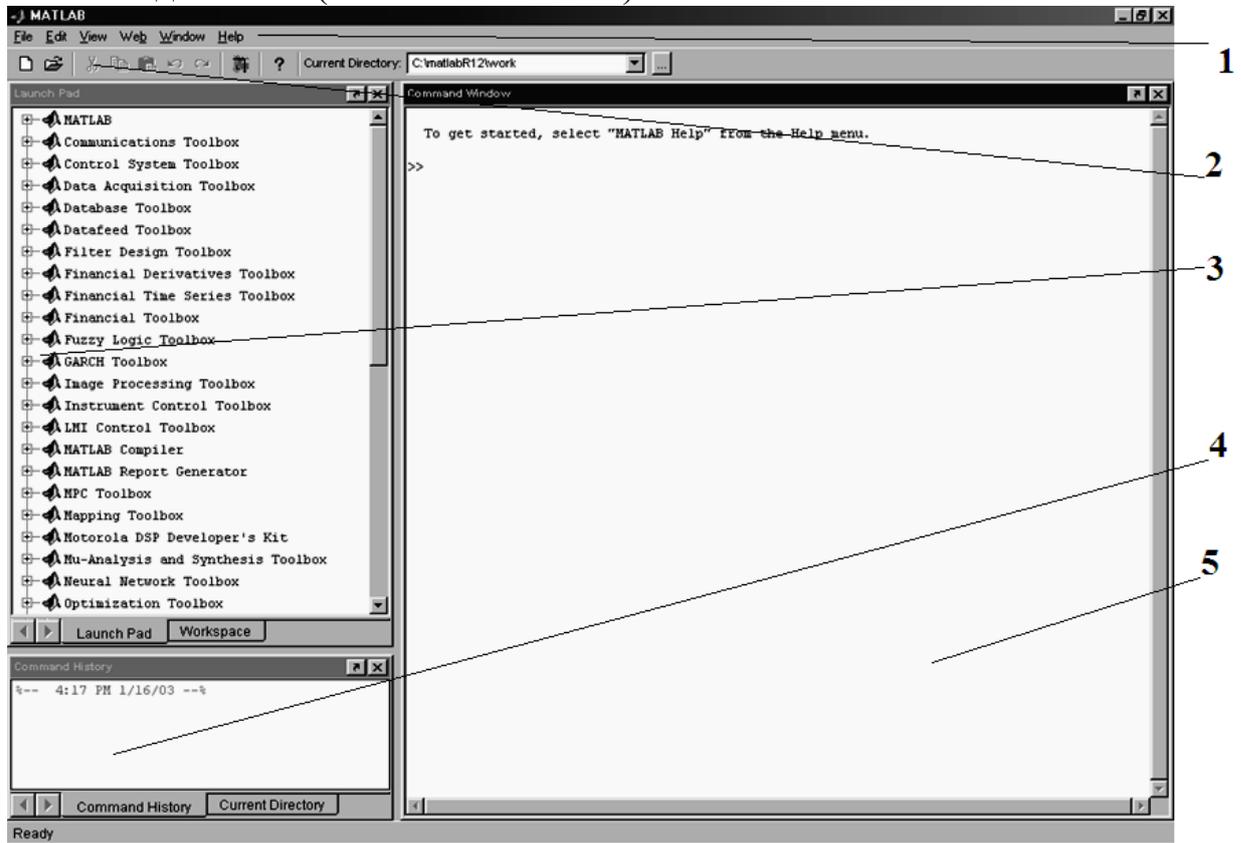


Рис.1.1. Основне вікно системи MATLAB

Командне меню

Командне меню (рис.1.2) призначений для управління і настройки системи і містить наступні пункти:

- File - операції відкриття нового файлу, завантаження, збереження і друку файлів, стандартні для операційної системи Windows;
- Edit - операції редагування сесії і роботи з буфером обміну (команди Cut, Copy і Paste), стандартні для операційної системи Windows;
- View - управління зовнішнім виглядом вікон MATLAB;
- Web - доступ до інтернет-ресурсів;
- Window - перемикання між відкритими вікнами MATLAB;
- Help - доступ до довідкової системи і демонстраційним прикладів MATLAB.



Рис.1.2. Командне меню системи MATLAB

Стандартний спосіб відкриття меню мишею - це вибір пункту меню і клацання по ньому лівою кнопкою миші. Крім того, для відкриття будь-якої позиції головного меню можна скористатися "гарячими клавішами" - утримуючи клавішу Alt натиснути клавішу символу, підкресленого в назві позиції. Наприклад, щоб відкрити позицію Window, треба, утримуючи клавішу Alt, натиснути клавішу W.



Рис.1.3. Підміну командного меню системи MATLAB

Відкрита позиція головного меню виглядає як підміну (рис.1.3), що містить різні операції і команди. Виділена команда або операція виконується при натисканні клавіші Enter. Виконання команди можна також здійснити подвійним клацанням миші.

Панель інструментів

Панель інструментів (рис.1.4) системи MATLAB призначена для швидкого доступу до основних функцій інтерфейсу, що здійснюється за допомогою кнопок, що виконують такі функції:

- 1 - New M-file - виводить порожнє вікно редактора m-файлів;
- 2 - Open file - відкриває вікно для завантаження m-файлу;
- 3 - Cut - вирізає виділений фрагмент і поміщає його в буфер обміну;
- 4 - Copy - копіює виділений фрагмент в буфер;
- 5 - Paste - вставляє фрагмент з буфера в поточний рядок введення;
- 6 - Undo - скасовує попередню операцію;
- 7 - Redo - відновлює останню скасовану операцію;
- 8 - Simulink - відкриває вікно браузера бібліотек Simulink;
- 9 - Help - відкриває вікно довідки;
- 10 - Current Directory - вибір робочого каталогу системи.

Про призначення кнопок говорять і спливаючі підказки, що з'являються, коли стрілка миші встановлюється і якийсь час утримується на відповідній кнопці.



Рис.1.4. Панель інструментів системи MATLAB

Найбільш важливою кнопкою (для цілей даного навчального посібника) є кнопка відкриття вікна браузера бібліотек Simulink (див. Рис.1.4, поз.8).

Панель запуску компонентів системи і браузер робочого простору

Панель запуску (рис.1.5) призначена для швидкого доступу до компонентів системи MATLAB (в тому числі і до Simulink) і до їх описів, а також до посилань Internet.

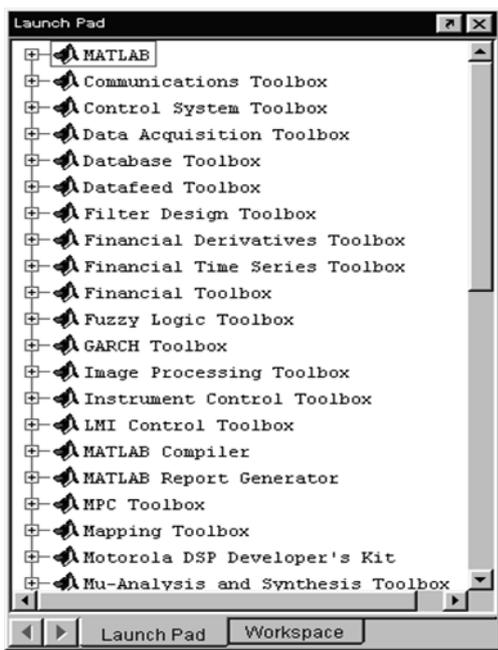


Рис.1.5. Панель запуску компонентів системи MATLAB

Браузер робочого простору (рис.1.6) призначений для зручного перегляду зберігаються в оперативній пам'яті змінних, використовуваних системою при своїй роботі (пакет розширення Simulink також створює змінні в робочій області).

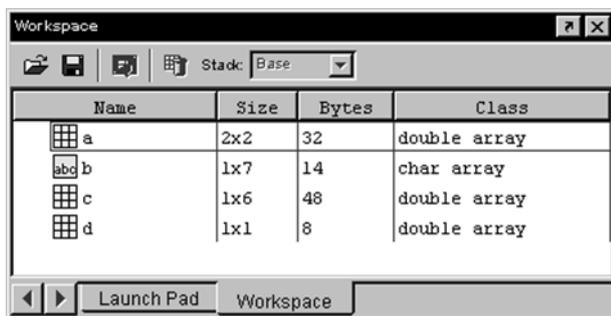


Рис.1.6. Браузер робочого простору системи MATLAB

Вікно історії сесії і браузер поточної директорії

У вікні історії сесії (рис.1.7) відображаються всі команди, виконані при попередніх запусках системи, які зберігаються до перезавантаження комп'ютера. При необхідності сесію можна зберегти.

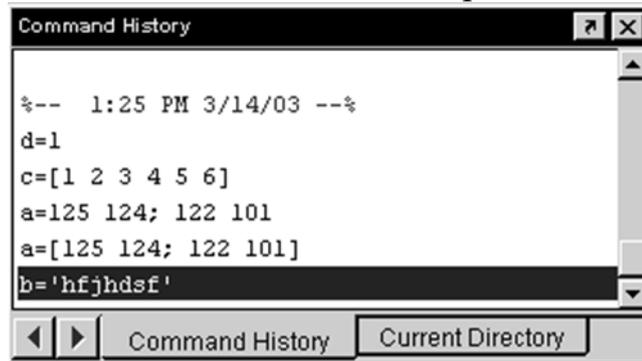


Рис.1.7. Вікно історії сесії системи MATLAB

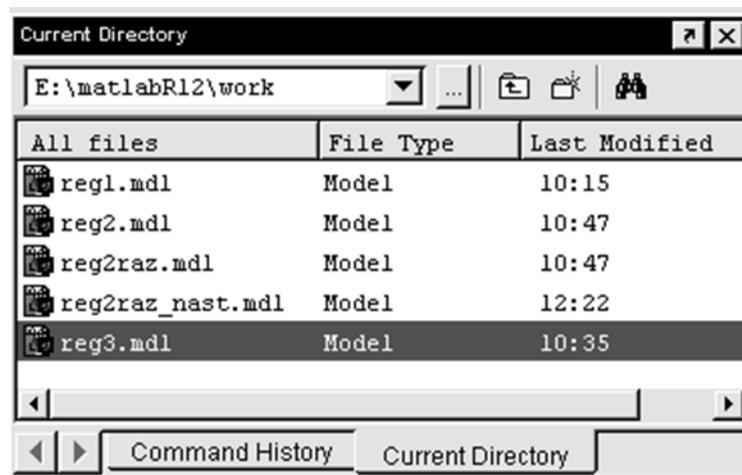


Рис.1.8. Браузер поточної директорії системи MATLAB

Браузер поточної директорії (рис.1.8) відображає вміст поточної директорії (робочого каталогу) системи (див. Рис.1.4, поз.10), а також вказує тип файлу і час його останньої зміни.

2. ПАКЕТ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ SIMULINK

2.1. Призначення і функції пакета Simulink

Версія системи MATLAB 6.0 поставляється разом з пакетом розширення Simulink 4.0, призначеним для моделювання динамічних систем, моделі яких складаються з окремих блоків (компонентів).

У цьому пакеті реалізовані принципи візуально-орієнтованого програмування, що дозволяє легко набирати потрібні блоки і з'єднувати їх з метою складання моделі системи або пристрою. При цьому складні рівняння стану, що описують роботу моделей систем або пристроїв, формуються автоматично без участі користувача, що значно полегшує і прискорює його роботу.

По зручності графічного призначеного для користувача інтерфейсу, достатку моделей (блоків) компонентів в безлічі бібліотек, різноманітністю віртуальних

засобів реєстрації та візуалізації результатів моделювання і, головне, за його надійності і достовірності Simulink 4.0 вигідно відрізняється від безлічі подібних програм. Особливо це відноситься до відкритості пакета і можливостям поповнення його бібліотек.

Пакет Simulink є ядром інтерактивного програмного комплексу, призначеного для математичного моделювання лінійних і нелінійних динамічних систем і пристроїв, представлених своєю функціональною блок-схемою, що називається S-моделлю, або просто моделлю. При цьому можливі різні варіанти моделювання: в тимчасовій області, в частотній області, з подієвим управлінням, на основі спектральних перетворень Фур'є, з використанням методу Монте-Карло (реакція на дії випадкового характеру) і т. д.

Для побудови функціональної блок-схеми модельованих пристроїв Simulink має велику бібліотеку блокових компонентів і зручний редактор блок-схем. Використовуючи палітри компонентів (набори), користувач за допомогою миші переносить потрібні блоки з палітр на робочий стіл пакета Simulink і з'єднує лініями входи і виходи блоків. Таким чином, створюється блок-схема системи або пристрої, тобто модель.

Simulink автоматизує наступний, найбільш трудомісткий етап моделювання: він становить і вирішує складні системи алгебраїчних і диференціальних рівнянь, що описують задану функціональну схему (модель), забезпечуючи зручний і наочний візуальний контроль за поведінкою створеного користувачем віртуального пристрою. Користувачеві досить уточнити (якщо потрібно) вид аналізу і запустити Simulink в режимі симуляції (звідки і назва пакета - Simulink) створеної моделі системи або пристрою.

Для запуску пакета Simulink необхідно натиснути кнопку Simulink в панелі інструментів головного вікна системи MATLAB (див. Рис.1.4, поз.8). При натисканні цієї кнопки відкривається вікно браузера бібліотек (рис.2.1).

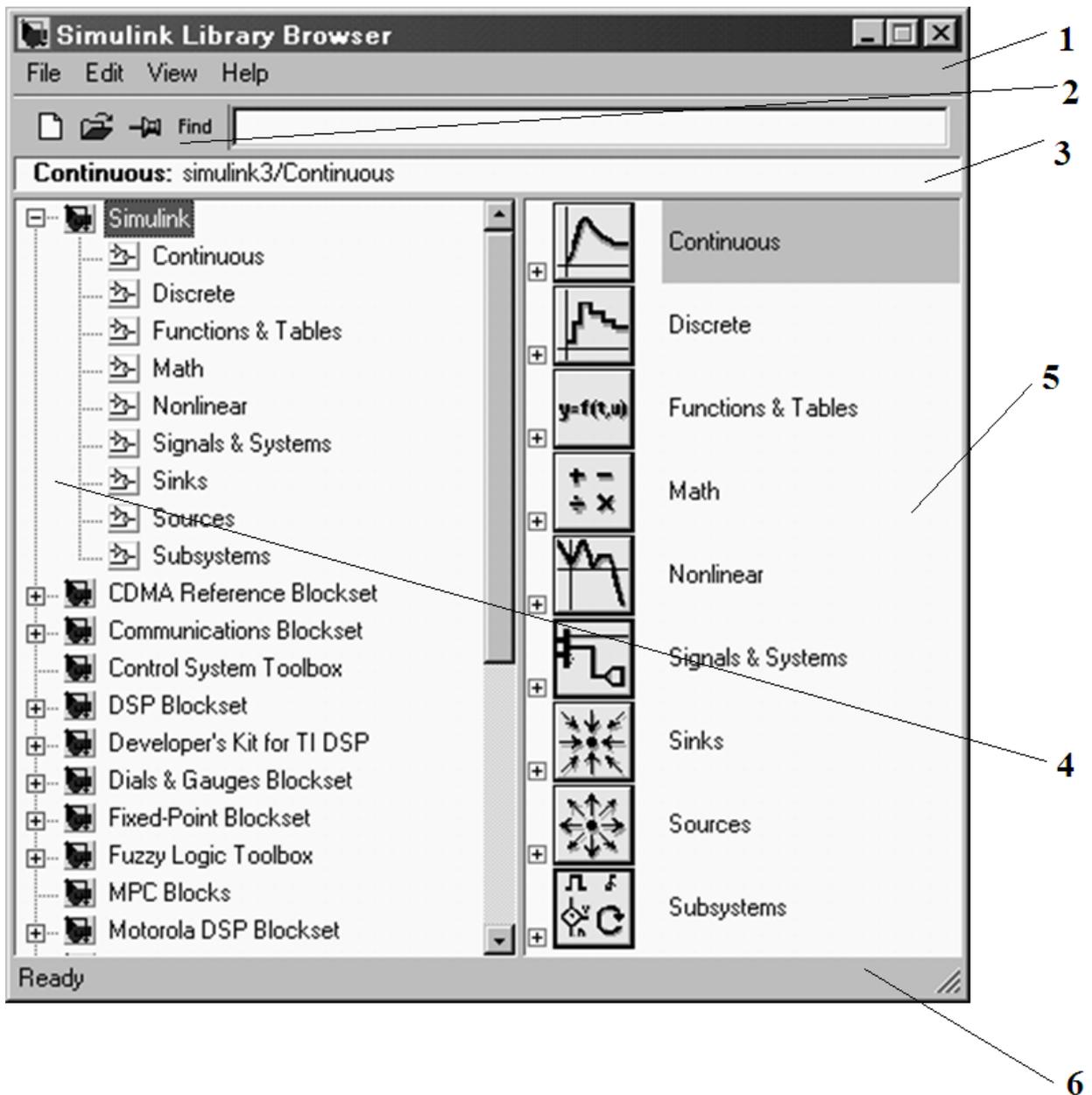


Рис.2.1. Вікно браузера бібліотек пакету Simulink

У вікні браузера міститься дерево компонентів бібліотек Simulink. Для перегляду того чи іншого розділу бібліотеки досить виділити його натисканням лівої кнопки миші, і в правій частині вікна Simulink Browser Library з'явиться набір піктограм компонентів активного розділу бібліотеки. Вікно браузера бібліотек складається з п'яти основних частин:

- 1 - командне меню;
- 2 - панель інструментів;
- 3 - поле інформаційних повідомлень;
- 4 - вікно розділів бібліотеки;
- 5 - вікно з вхідними в ці розділи підрозділами або блоками;
- 6 - рядок стану.

Командне меню браузера бібліотек

Командне меню містить наступні пункти і підпункти:

1) File - робота з файлами бібліотек:

- New - створення нової моделі або нового розділу бібліотеки, куди можуть входити як нові, так і вже існуючі блоки;
- Open - відкриття файлу (вікна) моделі або нового розділу бібліотеки;
- Preferences - редагування властивостей пакета Simulink.

2) Edit - додавання компонентів і їх пошук:

- Add to the current model - додати виділений блок в поточне вікно моделі;
- Find block - знайти блок в бібліотеці пакета Simulink;
- Find next block - продовжити пошук (за критерієм з попереднього пункту меню).

3) View - управління елементами браузеру бібліотек Simulink:

- Toolbar - показати / прибрати панель інструментів;
- Status bar - показати / прибрати рядок стану;
- Description - показати / прибрати поле інформаційних повідомлень;
- Stay on top - включити / вимкнути режим браузера "поверх всіх вікон";
- Collapse entire Browser - згорнути всі розділи бібліотек у вікні розділів браузера бібліотек;
- Expand entire Browser - розгорнути всі розділи бібліотек у вікні розділів браузера бібліотек;
- Large / Small Icon - встановлює розмір іконок (великий / малий) у вікні, що показує вміст розділів бібліотек;
- Show parameters for selected block - показати параметри для обраного блоку (еквівалентно двократному натисканню на ньому лівою кнопкою мишки).

4) Help - висновок довідки по Simulink:

- Help on the selected block - довідка по обраному блоку;
- Simulink Help - довідка по системі Simulink;
- Tip of the Day - виводить наступну підказку в поле інформаційних повідомлень.

Панель інструментів браузера бібліотек Simulink

Панель інструментів (рис.2.2) містить наступні кнопки:

- 1 - Create a new model - відкриває нове вікно для створення моделі;
- 2 - Open a model - відкриває існуючу модель;
- 3 - Stay on top - установка статусу вікна браузера "поверх всіх вікон";
- 4 - Find block - знайти блок.



Рис.2.2. Панель інструментів браузера бібліотек Simulink

В поле інформаційних повідомлень виникає назва та короткий опис виділеного розділу або блоку.

Якщо у вікні розділів бібліотек виділено якийсь розділ, то клацання правою кнопкою миші виводить контекстне меню з однією командою, що дозволяє вивести цей розділ у вікні, розташованому праворуч від вікна розділів, такий же ефект досягається дворазовим натисканням лівої кнопки миші на потрібному розділі.

На рис. 2.1 виділена основна бібліотека Simulink (в лівому вікні) і показані її розділи (в правому вікні). Основна бібліотека Simulink со-тримає досить велика кількість найрізноманітніших блоків, в рамках даного навчального посібника потрібні лише деякі з них, що застосовуються в теорії автоматичного управління (ТАУ).

Крім того, при натисканні правої кнопки миші на конкретному блоці виводиться лише незначна частина контекстне меню, що містить наступні коман-ди:

- 1) Add to the current model - додати виділений блок в поточну модель (також можна використовувати поєднання клавіш Ctrl + I);
- 2) Help for the 'block name' block - довідка по виділеному блоку (в ка-вичках міститься ім'я виділеного блоку);
- 3) Go up a level - перейти в бібліотеці на рівень вище;
- 4) Block parameters - параметри виділеного блоку (досягається так само, дворазовим натисканням лівої кнопки миші на блоці).

Блоки бібліотеки Simulink

2.2.1. Continuous - розділ безперервних блоків

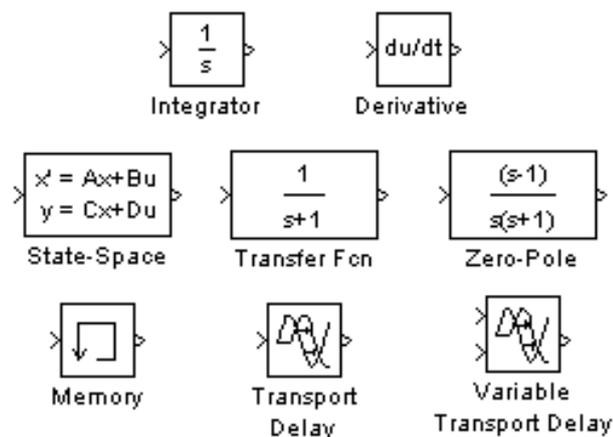


Рис. 2.3. розділ Continuous

До складу розділу безперервних блоків входять (рис 2.3):

- Derivative - диференціюючий блок;
- Integrator - інтегруючий блок;
- Transport Delay - блок постійного запізнювання;

- Transfer Fcn - блок, який реалізує передавальну функцію, задану у вигляді відношення поліномів (аперіодична і коливальна ланки);
- State-Space - лінійна аналогова система, задана у вигляді рівнянь стану, тобто у вигляді системи рівнянь, представленої у формі Коші;
- Zero-Pole - лінійна аналогова система, задана своїми нулями і полюсами;
- Memore - блок пам'яті, що виконує затримку на один крок модельного часу;
- Variable Transport Delay - блок пам'яті зі змінною затримкою.

Discrete - розділ дискретних блоків

- Discrete Transfer Fcn - блок, який реалізує передавальну функцію, задану у вигляді відношення поліномів (аперіодичне і коливальний ланки), для дискретних САУ;
- Discrete Time Integrator - інтегруючий блок для дискретних САУ. Виконує чисельне інтегрування вхідного сигналу;
- Zero-Order-Hold - екстраполятор нульового порядку;
- Unit Delay - блок затримки сигналу. Забезпечує затримку вхідного сигналу на заданий число кроків модельного часу;
- Discrete State-Space - блок завдання дискретного ланки матрицями його стану;

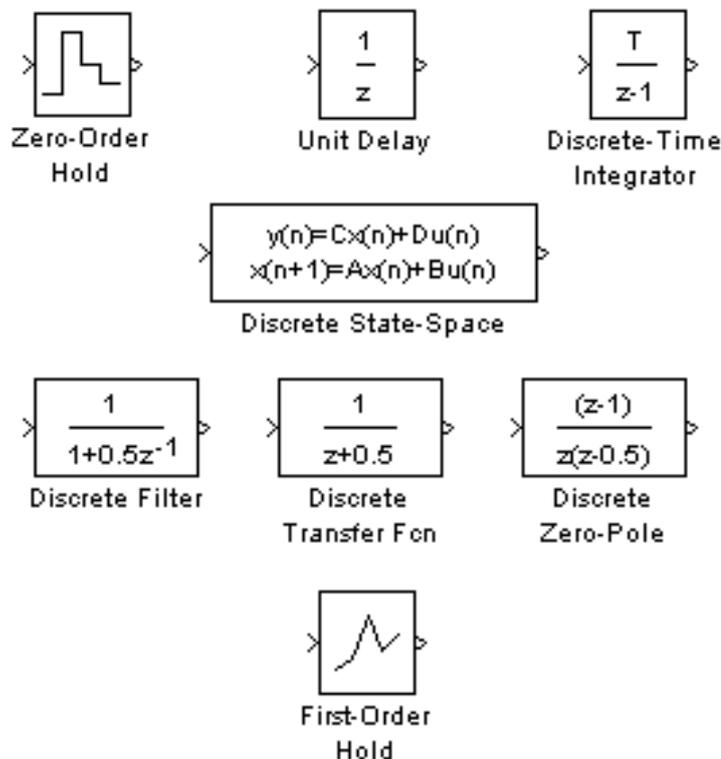


Рис.. 2.4. розділ Discrete

- Discrete Filter - блок завдання дискретного ланки через дискретну передавальну дрібно-раціональну функцію щодо $1 / Z$;
- Discrete Zero-Pole - блок завдання дискретного ланки через вказівку значень нулів і полюсів дискретної передавальної функції щодо $1 / Z$;

- First-Order Hold - екстраполятор першого порядку.

2.2.3. Function & Tables - розділ блоків функцій і таблиць

- Fcn - блок, який реалізує в пакеті Simulink будь-яку функцію системи MATLAB, де в якості параметра настройки можна ввести будь-який вираз, що обчислюється, аргументом якого виступає вхідний сигнал;
- MATLAB Fcn - подібний до попереднього блоку, але також дозволяє реалізовувати m-функції (програми, написані на мові програмування MATLAB);
- Look-Up Table, (2-D) і (n-D) - блоки даних, заданих у вигляді таблиць (дозволяють задати нелінійні блоки будь-якого виду), відрізняються один від одного розмірністю задавальних таблиць. Всі ці блоки виконують різного виду інтерполяції.

2.2.4. Math - розділ математичних блоків

- Gain - підсилювальний блок;
- Sum - суматор сигналів з різними знаками і будь-якою кількістю входів;
- Product - обчислювач, що формує на виході результат множення або ділення двох і більше вхідних сигналів. Як параметри налаштування вказується число входів і вид виконуваної операції;
- Dot Product - ланка, яка здійснює перемноження двох вхідних величин, якщо вони є скалярами. Ця ланка обчислює також суму поелементний творів двох вхідних векторів однакової довжини;
- Slider Gain - аналоговий підсилювач з інтерактивною налаштуванням;
- Matrix Gain - підсилювач, на вхід якого подається вектор;
- Mat Function - блок, що дозволяє вибрати одну з математичних функцій в поле налаштування і включити її в модель;
- Trigonometric Function - ланка формування тригонометричних функцій від вхідного сигналу. Вибір функції забезпечується у полі налаштування;

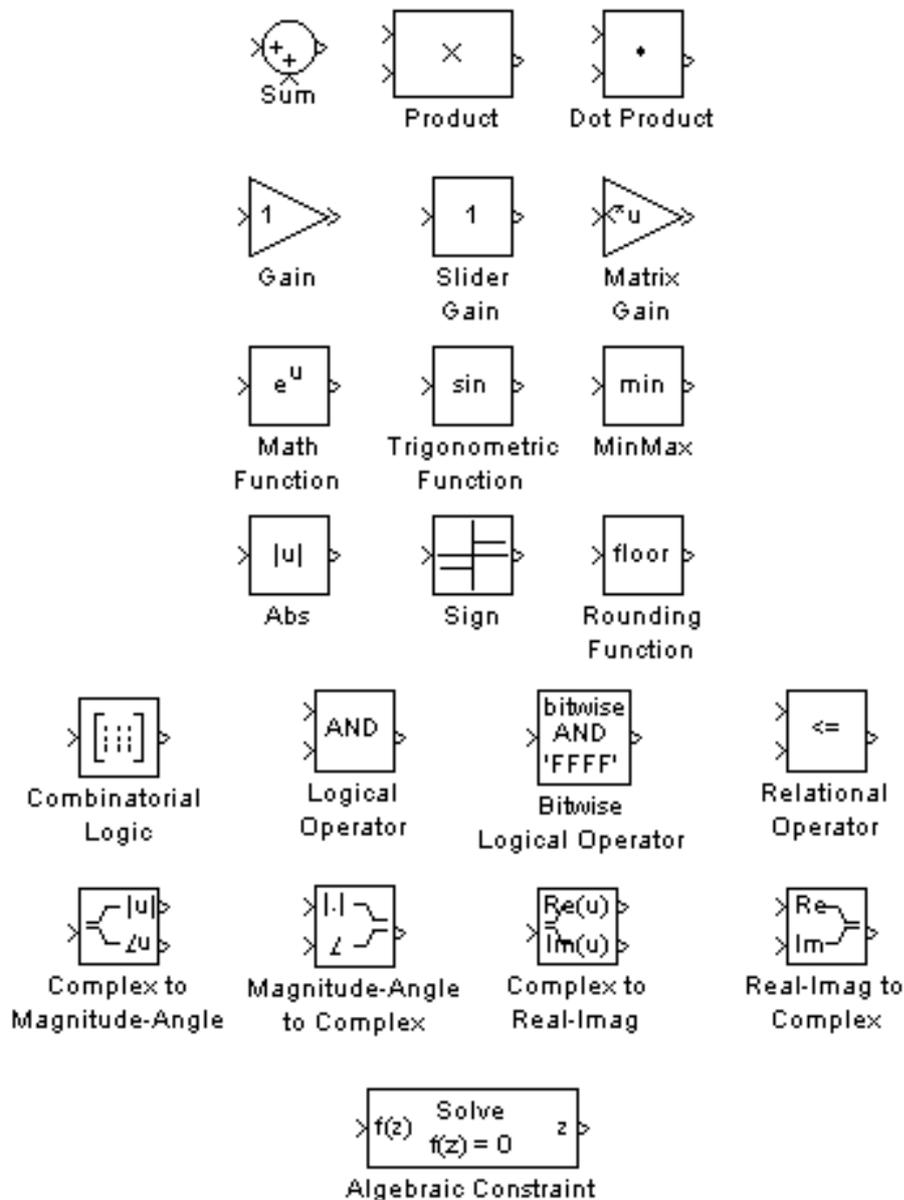
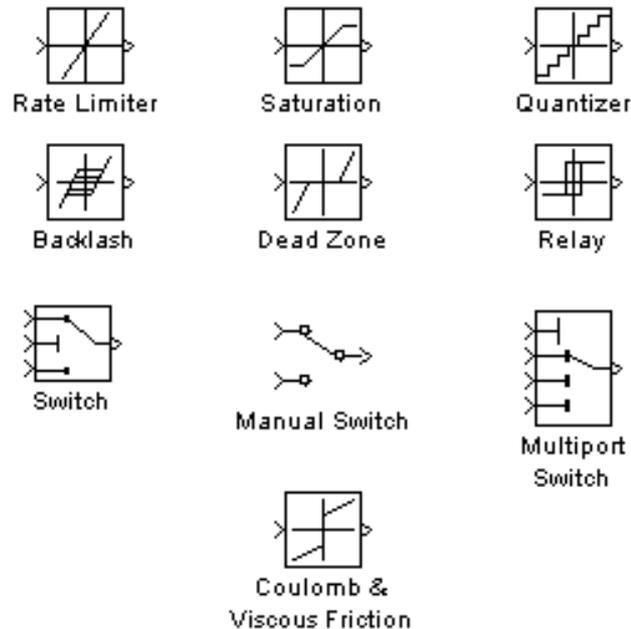


Рис. 2.5. розділ Math

- MinMax - блок вибирає мінімальне або максимальне значення вектора відповідно до завдання поля настройки. Вхідний сигнал на блок задається числовим вектором. У вікні настройки визначається також кількість входів;
- Abs - блок, який формує на виході абсолютне значення вхідного сигналу;
- Sign - блок-реле, що реагує на знак вхідного сигналу;
- Rounding Function - округлення вхідного сигналу;
- Combinatorial Logic - блок забезпечує перетворення вхідного сигналу відповідно до формованої у вікні настройки таблицею істинності;
- Logical Operation і Relaition Operator - блоки виробляють відомі логічні операції «і» і «чи», кількість входів задається в полі налаштування;
- Bitwise Logical Operator - універсальний блок, який реалізує будь-яку логічну функцію;

- Complex to Magnitude-Angle - блок, що дозволяє виділити модуль і фазу вхідної комплексної величини;
- Magnitude-Angle to Complex - блок, що перетворює вхідну величину, задану модулем і фазою в комплексну вихідну величину;
- Complex to Real-Image, Real-Image to Complex - блоки, що перетворюють комплексні величини з показовою форми в алгебраїчну і назад;
- Algebraic Constrain - блок, що дозволяє в структурну модель включати систему алгебраїчних рівнянь.

2.2.5. Nonlinear - розділ нелінійних блоків



Мал. 2.6. розділ Nonlinear

- Saturation - блок обмеження;
- Dead Zone - блок із зоною нечутливості;
- Relay - релейний блок;
- Rate Limiter - блок з обмеженням швидкості;
- Coulomb and Viscous Friction - блок фрикційних ефектів;
- Backlash - блок люфту;
- Switch і Multiport Switch - перемикачі одно- і багатовхідні;
- Quantizer - блок, що забезпечує квантування вхідного сигналу по рівню. У системах управління такі блоки є частиною аналого-цифрового перетворювача;
- Manual Switch - блок, який переключється вручну. В процесі моделювання за допомогою цього ключа зручно змінювати параметри і структуру моделі;
- Coulomb & Viscous Friction - блок, який реалізує характеристику тертя в механічних системах.

2.2.6. Signal & Systems - розділ блоків сигналів і систем

- Sub System - блок-підсистема (корисний у разі громіздких систем, частини яких можна за допомогою даного блоку замінити на один або кілька блоків-підсистем);
- In, Out - блоки входу / виходу, призначені для створення блоків-підсистем;
- Mux - мікшер сигналів, що збирає кілька сигналів в одну шину;
- Demux - блок, що виконує дію, зворотне дії попереднього блоку;
- Enable, Trigger - блоки, призначені для логічного управління роботою моделі;
- Bus Selector - блок виділяє з приєднаною до його порту шини необхідні сигнали. У вікні настройки блоку є два списки - вхідний і вихідний;
- Selector - блок вибирає з вхідного вектора елементи, які вказані в параметрах настройки;
- Merge - блок, який здійснює об'єднання вхідних сигналів;
- Matrix Concatenation - блок, що дозволяє векторний сигнал, представлений розгорнутої рядком або стовпцем, перетворити до «згорнутого» векторного сигналу;
- From, Goto Tag Visibility, Goto - блоки («Прийняти», «Ознака видимості», «Передати») використовуються спільно і призначені для обміну між різними даними моделі з урахуванням їх доступності;
- Data Store Memory, Data Store Read, Data Store Write - «Пам'ять», «Читання» і «Запис» даних, також використовуються спільно і забезпечують зберігання і передачу даних;
- Ground, Terminator - блоки використовуються в якості «заглушок» для невикористаних вхідних і вихідних портів відповідно;

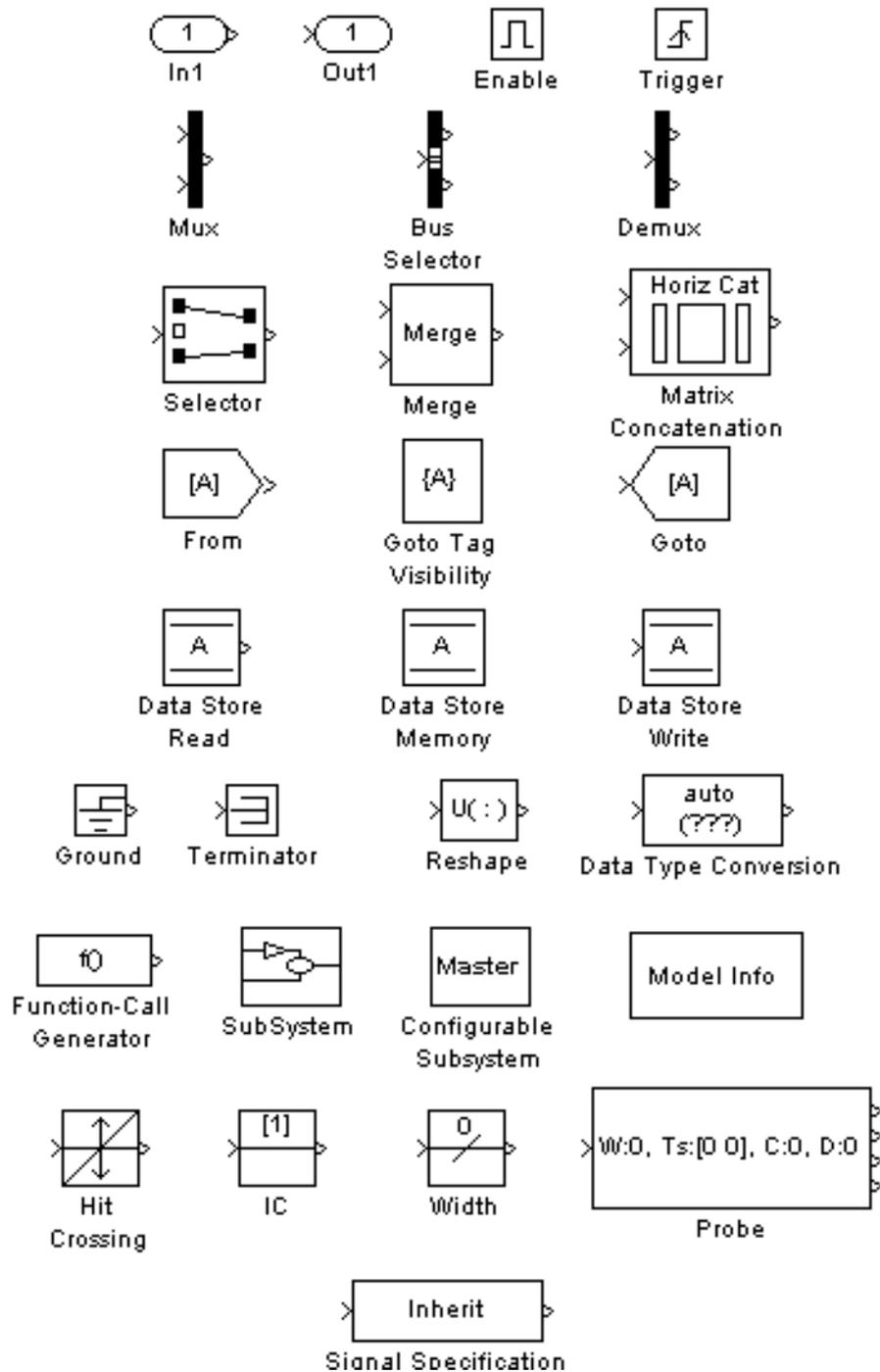


Рис. 2.7. Розділ Signal & Systems

- Reshape - блок, що дозволяє змінити розмірність вхідного сигналу;
- Data Type Conversion - блок, що забезпечує приведення типу даних вхідного сигналу до необхідного;
- Function-Call Generator - блок, що забезпечує запуск підключених до нього підсистем із заданою періодичністю;
- Configurable Subsystem - блок, який реалізує функцію будь-якої підсистеми, яка може бути бібліотечною або створеної користувачем;
- Model info - блок, що дозволяє отримати інформацію про модель;

- IC - блок, що дозволяє встановити початкове значення вхідного сигналу, значення якого задається у вікні настройки;
- Width - блок, який обчислює розмірність сигналу на вході;
- Probe - блок, що дозволяє отримати на виході необхідну інформацію про вхідному сигналі. Блок має один вхід, число виходів залежить від числа досліджуваних параметрів вхідного сигналу;
- Signal Specification - блок, що управляє процесом моделювання в залежності від параметрів вхідного сигналу.

2.2.7. Sinks - розділ блоків одержувачів сигналів

- Display - блок, що відображає цифрову інформацію (рівень сигналу в даний момент часу);
- Scope - віртуальний осцилограф, призначений для отримання тимчасових залежностей (перехідних процесів);
- XY Graph - віртуальний графічний пристрій (побудова фазових портретів і різних двомірних графіків);

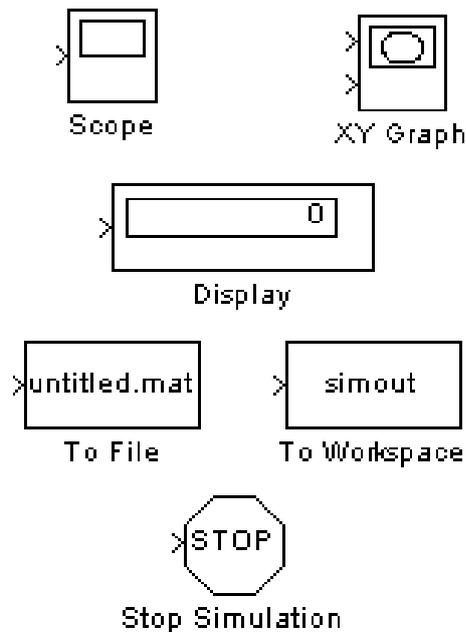


Рис. 2.8. розділ Sinks

- To File і To Workspace - блоки, що передають інформацію в файл або в робочу область MATLAB;
- Stop Simulink - зупинка симуляції.

2.2.8. Sources - розділ блоків джерел сигналів

- Band-Limited White Noise - генератор білого шуму;
- Chrip Signal - генератор сигналу з наростаючою частотою;
- Constant - джерело постійного впливу, що задає константу ($t < 0, y = 0; t \geq 0, y = \text{const}$);

- Discrete Pulse Generator - джерело дискретних імпульсів;
- From File і From Workspace - джерелом сигналу для цих блоків служить файл або робоча область MATLAB;
- Ramp - джерело наростаючого впливу;

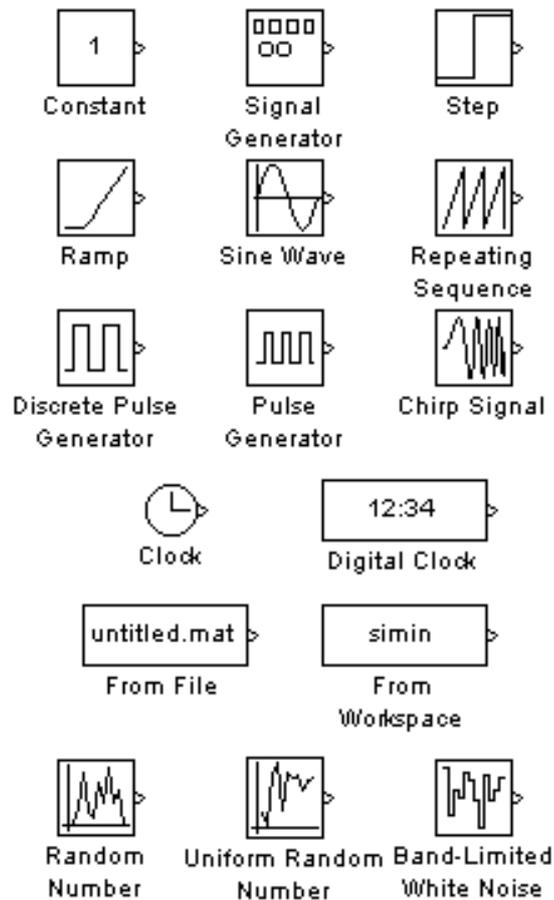


Рис. 2.9. розділ Sources

- Random Number - джерело випадкового сигналу з нормальним розподілом;
- Repeating Sequence - джерело пилообразного сигналу;
- Sine Wave - джерело синусоїдального впливу;
- Step - джерело перепаду сигналу ($t < \text{Step time}$, $y = \text{Initial value}$; $t > \text{Step time}$, $y = \text{Final value}$);
- Signal Generator - універсальний сигнал-генератор;
- Clock - джерело часу моделювання;
- Digital Clock - цифрове джерело часу.

2.2.9. Бібліотека Simulink Extras

Бібліотека Simulink Extras є додатковою бібліотекою пакета Simulink. Ця бібліотека містить набори блоків з більш широкими функціями, ніж розглянуті раніше розділи основної бібліотеки. Проте це зовсім не означає, що застосування цієї бібліотеки завжди краще. Пов'язано це з тим, що ускладнення функцій блоків, корисне при вирішенні ряду специфічних

завдань, обертається ускладненням моделювання при вирішенні більшості звичайних завдань.

Бібліотека Simulink Extras представлена на рис. 2.10. Робота з цією бібліотекою нічим не відрізняється від роботи з основною бібліотекою.

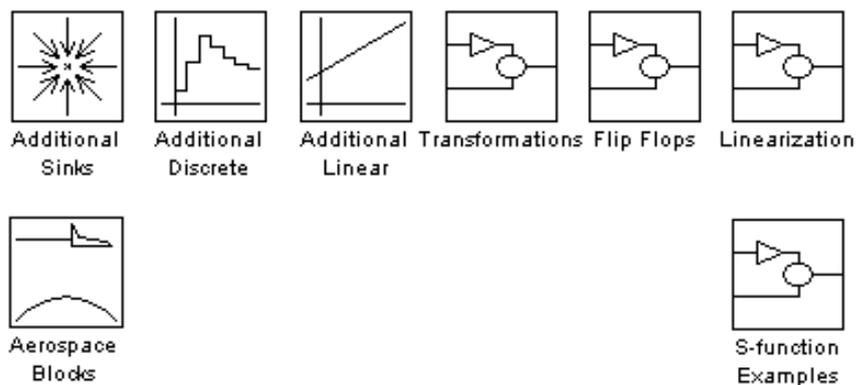


Рис.2.10. Бібліотека Simulink Extras

2.2.9.1. Additional Discrete - додаткові дискретні блоки

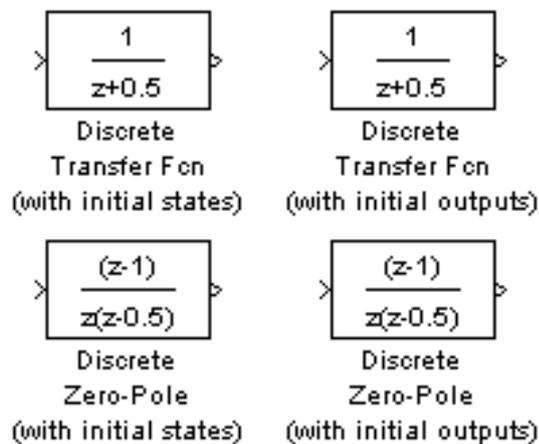


Рис. 2.11. додаткові дискретні блоки

Додаткові блоки Additional Discrete представлені всього чотирма блоками - по два варіанти відомих нам блоків Discrete Transfer Fcn і Discrete Zero-Pole (рис 2.11). Їх єдиною відмінністю від описаних раніше блоків є можливість ініціалізації входів і станів.

2.2.9.2. Additional Linear - додаткові лінійні блоки

Склад додаткових лінійних блоків розділу Additional Linear показаний на рис. 2.12. Блоки цього розділу можна розділити на дві категорії: PID-контролери і блоки типу State-Shfct, Transfer Fcn і Zero-Pole, доповнені можливостями вихідних сигналів і станів.

Для аналізу і синтезу систем управління найбільший інтерес представляють PID-контролери. Перший з них PID-controller - це досить універсальний блок, вихідний сигнал якого задається операційним виразом:

$$\text{OUT} = P + I / s + Ds,$$

де P - вхідний сигнал; I - його інтеграл; D - його похідна.

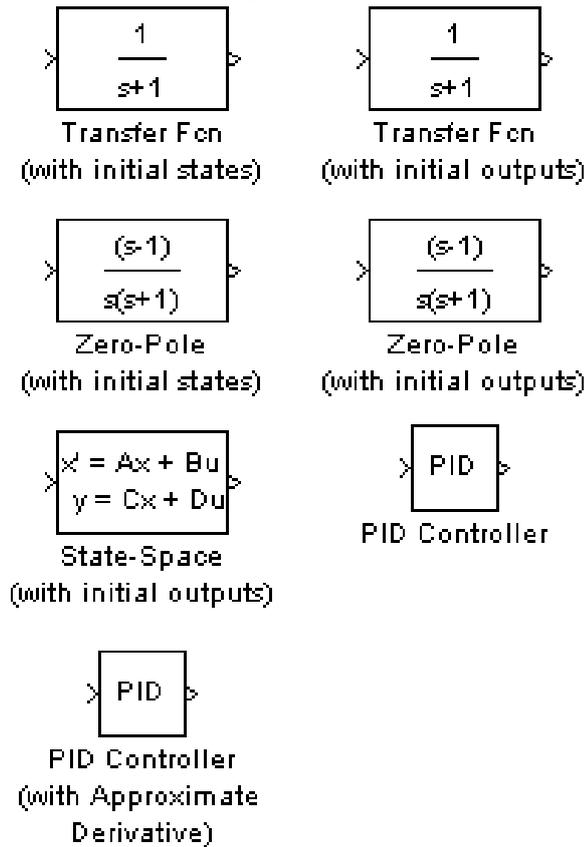


Рис. 2.12. додаткові лінійні блоки

Параметр P (за замовчуванням 1) фактично задає коефіцієнт зусилля-ня безінерційного підсилювальної ланки. Параметр I задає пропорційність інтегралу вхідного сигналу і, нарешті, параметр D задає пропорційність похідною вхідного сигналу. Параметри P, I і D задаються в таблиці настройки PID-контролера, тому задаючи різні значення зазначених параметрів, можна отримати П -, ІІІ -, ПД - і ІІІД - регулятори.

Другий PID-controller (with Approximate Derivative) с поліпшеної операцією диференціювання обчислює вихідний сигнал як:

$$\text{OUT} = P + I / s + Ds / (1 / Ns + 1).$$

За рахунок застосування додаткового параметра N поліпшується обчислення похідної.

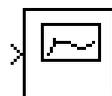
2.2.9.3. Додаткові блоки Additional Sinks

Розділ додаткових блоків Additional Sinks містить ряд нових віртуальних реєстраторів (рис. 2.13):

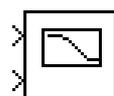
- Auto Correlator - автокоррелятор (використовується з пакетом Signal Processing Toolbox);
- Averaging Power Spectral Density - аналізатор спектральної щільності потужності з усередненням;



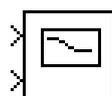
Power Spectral
Density



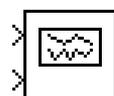
Averaging
Power Spectral
Density



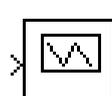
Spectrum
Analyzer



Averaging
Spectrum
Analyzer



Cross
Correlator



Auto
Correlator



Floating Bar Plot

ЛЕКЦІЯ 7

MATLAB/SIMULINK У ПОСТ-МОДЕЛЮВАННІ АСИНХРОННОГО ДВИГУНА

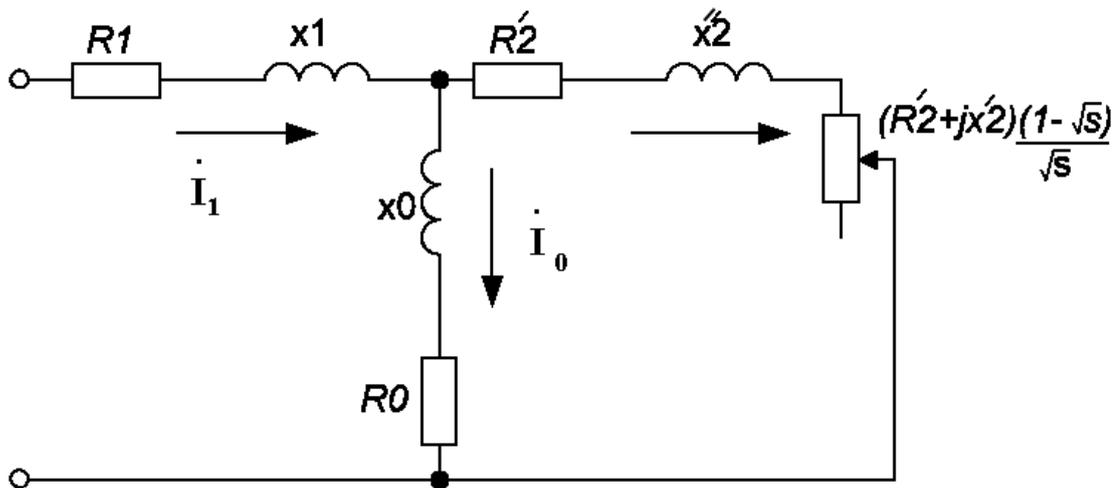
Реалізуємо модель перехідних процесів двигуна в пакеті Simulink застосування MatLab.

Математична модель асинхронного електродвигуна з короткозамкненим ротором

Відправною точкою в отриманні моделі буде узагальнена модель асинхронної машини (1) для сталого режиму, що представляється графічно у вигляді Т-подібної схеми заміщення:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1 = -\dot{E}_0 + \dot{I}_1 (r_1 + jX_1); \\ \dot{U}_2 = \dot{E}_0 - \dot{I}'_2 (r'_2 + jX'_{20}) \frac{1}{s^\alpha} - \dot{I}'_2 jX''_{20}; \\ \dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}'_2, \end{array} \right.$$

де x'_{20} - індуктивний опір феромагнітного ротора; x''_{20} - індуктивний опір к.з. обмотки ротора; α - коефіцієнт, що враховує властивості феромагнітного матеріалу.



T-подібна схема заміщення узагальненої асинхронної машини

Рівняння звичайного асинхронного двигуна (так далі називатимемо асинхронний двигун з к.з. ротором) виходять з (1), якщо покласти $\alpha = 1$ и $x'_{20} = 0$.

Рівняння асинхронного двигуна з феромагнітним ротором виходять з (1), якщо покласти $\alpha = \text{var}$ (зазвичай приймають $\alpha = 0,5$) и $x''_{20} = 0$.

Математична модель узагальненої машини (2) для усіх машин Роду циліндричних, записується в загальному випадку як:

$$\begin{bmatrix} u_{su} \\ u_{ru} \\ u_{rv} \\ u_{sv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{su} + \frac{d}{dt} L_{su} & \frac{d}{dt} M & M\omega_k & L_{sv}\omega_k \\ \frac{d}{dt} M & r_{ru} + \frac{d}{dt} L_{ru} & L_{rv}(\omega_k - \omega_r) & M(\omega_k - \omega_r) \\ -M(\omega_k - \omega_r) & -L_{ru}(\omega_k - \omega_r) & r_{ru} + \frac{d}{dt} L_{ru} & \frac{d}{dt} M \\ -L_{su}\omega_k & -M\omega_k & \frac{d}{dt} M & r_{su} + \frac{d}{dt} L_{su} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_{su} \\ i_{ru} \\ i_{rv} \\ i_{sv} \end{bmatrix}$$

Асинхронна машина з к.з. ротором виходить з узагальненої моделі при наступних видових мутаціях:

а) в системі координат α, β швидкість обертання системи координат $\omega_k = 0$;

б) до обмоток статора підводяться синусоїдальні напруги $u_{s\alpha}, u_{s\beta}$ з частотою f_1 , зрушені в часі на 90° ;

в) оскільки ротор короткозамкнений, то $u_{r\alpha} = u_{r\beta} = 0$;

г) оскільки машина циліндрична, то через симетрію активні і індуктивні опори статора і ротора по однойменних осях приймаємо рівними: $r_{s\alpha} = r_{s\beta} = r_s$; $r_{r\alpha} = r_{r\beta} = r_r$.

При цьому система (2) вироджується до виду (3)

$$\begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ 0 \\ 0 \\ u_{s\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + \frac{d}{dt}L_s & \frac{d}{dt}M & 0 & 0 \\ \frac{d}{dt}M & r_r + \frac{d}{dt}L_r & -L_r\omega_r & -M\omega_r \\ M\omega_r & L_r\omega_r & r_r + \frac{d}{dt}L_r & \frac{d}{dt}M \\ 0 & 0 & \frac{d}{dt}M & r_s + \frac{d}{dt}L_s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix}$$

Приведемо систему (3) до зручного для моделювання виду:

$$\frac{d\Psi_{s\alpha}}{dt} = u_{s\alpha} - r_1 i_{s\alpha} + \omega_e \Psi_{s\beta};$$

$$\frac{d\Psi_{s\beta}}{dt} = u_{s\beta} - r_1 i_{s\beta} - \omega_e \Psi_{s\alpha};$$

$$\frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} = -r_r i_{r\alpha} - \Psi_{r\beta} (\omega_e - \omega_r);$$

$$\frac{d\Psi_{r\beta}}{dt} = -r_r i_{r\beta} + \Psi_{r\alpha} (\omega_e - \omega_r),$$

де ω_e - швидкість обертання системи координат;

У пакеті Simulink MatLab зручно скласти модель для випадку обертання системи координат із швидкістю ротора $\omega_e = \omega_r$.

Перепишемо систему (3) за цих умов і доповнимо її рівнянням руху :

$$\frac{d\Psi_{s\alpha}}{dt} = u_{s\alpha} - r_1 i_{s\alpha} + \omega_r \Psi_{s\beta};$$

$$\frac{d\Psi_{s\beta}}{dt} = u_{s\beta} - r_1 i_{s\beta} - \omega_r \Psi_{s\alpha};$$

$$\frac{d\Psi_{r\alpha}}{dt} = -r_r i_{r\alpha};$$

$$\frac{d\Psi_{r\beta}}{dt} = -r_r i_{r\beta};$$

$$\frac{d}{dt} \omega = p \frac{M_e \pm M_c}{J_r},$$

електромагнітний момент знаходимо із потокозчеплень:

$$M_e = \frac{3}{2} p \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} (\Psi_{s\beta} \Psi_{r\alpha} - \Psi_{s\alpha} \Psi_{r\beta}).$$

Модель асинхронного двигуна в Simulink

Розглянемо приклад формування моделі асинхронного двигуна з к.з. ротором в Simulink.

Початкові дані та ініціалізація. Усі змінні, які використовуватимуться в розрахунках, запишемо в m -файлі. В

цьому випадку модель Simulink, побудована на змінних, а не на конкретно заданих числових значеннях, буде інваріантна до двигуна. Міняючи m -файл, ми отримуватимемо результати для нової машини без редагування блоків моделі. Параметри задаються в абсолютних величинах: напруга [В], струм [А], частота [Гц], опір [Ом].

%Параметри АД з КЗР 15 кВт

%Початкові дані

U1 = 220

Uf = U1*sqrt(3)

Ixx = 7.8

m = 3

p = 2

r1 = 0.402

x1 = 0.725

r21 = 0.196

x21 = 1.02

f1 = 50

w0e = 2*pi*f1

w0 = w0e/p

J = 0.098*2

cosFixx = 0.11

%Розрахунок індуктивностей

zs = Uf/Ixx

xs = zs*sqrt(1 - cosFixx^2)

xm = xs - x1

xr1 = xm + x21

Ls = x1/w0e

Lr = x21/w0e

L1 = xs/w0e

L2 = xr1/w0e

Lm = xm/w0e

$$M = 2 * L_m / 3$$

%Розрахунок коефіцієнтів моделі

$$K_s = L_m / L_1$$

$$K_r = L_m / L_2$$

$$\text{sigma} = 1 - K_s * K_r$$

clc

Розрахунок параметрів моделі не потребує коментарів, оскільки очевидний із загальноприйнятих позначень і відомих формул.

Координатний перетворювач. Реальні значення координат положення статора і ротора можна отримати тільки в моделях, реалізованих в косокутних сепаратних системах просторових координат. Під реальними значеннями розуміємо процеси статора в нерухомій системі координат, ротора - в системі координат, пов'язаній з ротором. При використанні узагальнених і приведених просторових координат для отримання реальних процесів необхідно використовувати координатні перетворювачі. У загальному випадку перехід координати положення x з однієї ортогональної системи в іншу здійснюється за виразом (6):

$$x_{\alpha}^{(2)} = x_{\alpha}^{(1)} \cos(\delta_{k1} - \delta_{k2}) - x_{\beta}^{(1)} \sin(\delta_{k1} - \delta_{k2});$$

$$x_{\beta}^{(2)} = x_{\alpha}^{(1)} \sin(\delta_{k1} - \delta_{k2}) + x_{\beta}^{(1)} \cos(\delta_{k1} - \delta_{k2}),$$

де δ_{k1} , δ_{k2} - кути положення просторових систем координат;

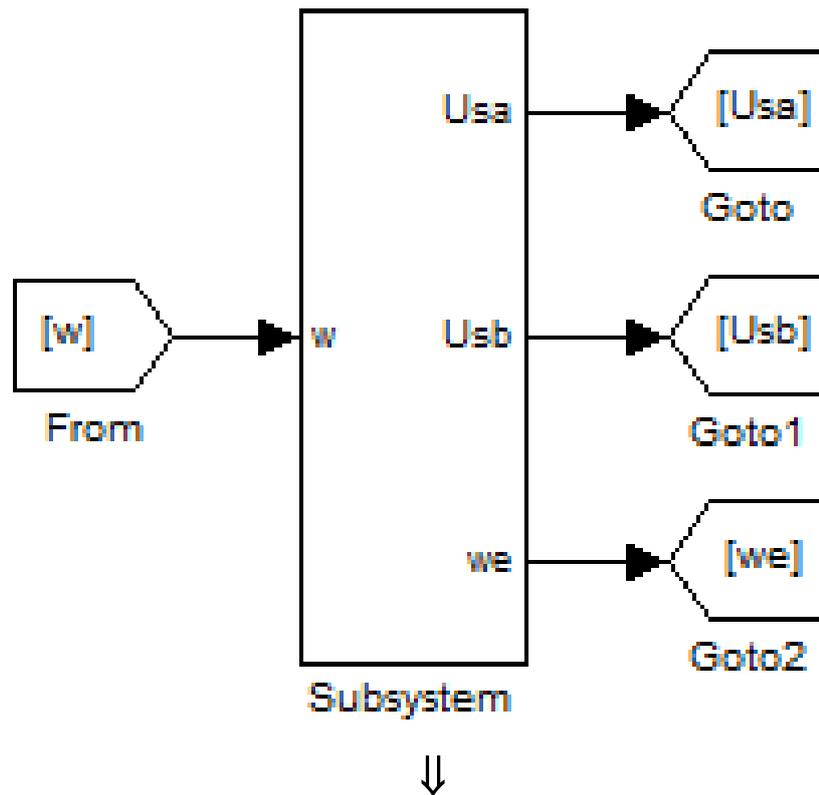
$$\delta_{k1} = \int \omega_{k1} dt, \quad \delta_{k2} = \int \omega_{k2} dt ;$$

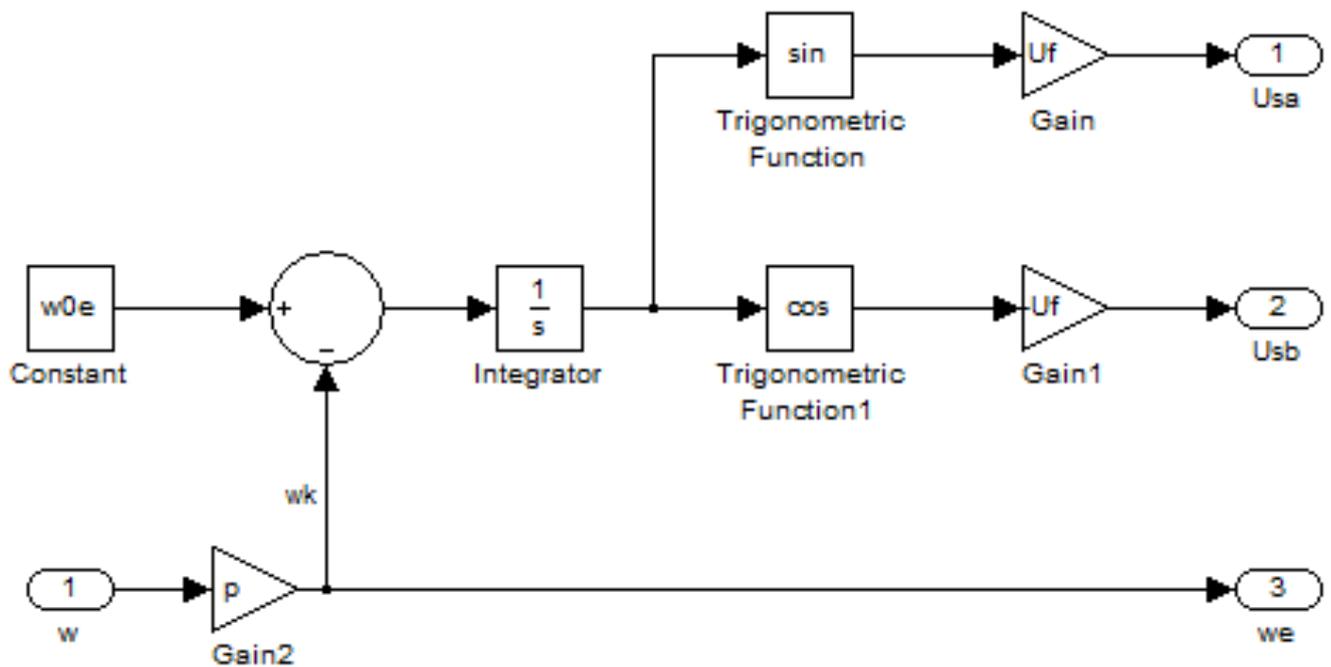
$x_{\alpha}^{(1)}, x_{\beta}^{(1)}$ - проєкції вектора x на осі α, β координатної системи (1);

$x_{\alpha}^{(2)}, x_{\beta}^{(2)}$ - проєкції вектора x на осі α, β координатної системи (2).

При структурному моделюванні координатного перетворювача реалізуються вирази (6). Координатні перетворювачі доцільно формувати у вигляді підсистеми.

У прикладі, що розглядається, на вхід координатного перетворювача подаватиметься швидкість обертання ротора ω , а на виході формується напруга U_{α} і U_{β} відповідно, для осей α і β швидкість обертання системи координат ω_e





Підсистема координатного перетворювача

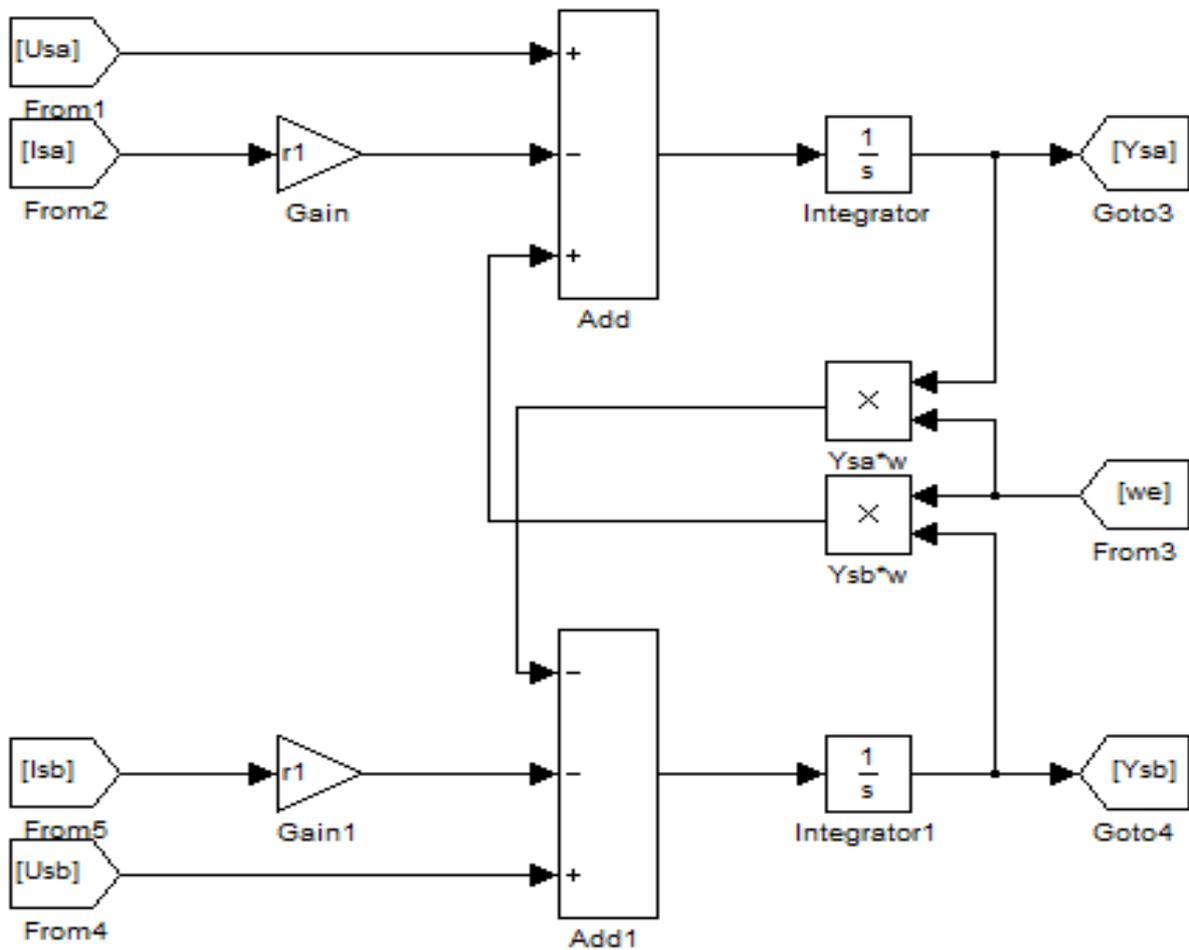
Іменовані змінні w_0e , U_f , p в координатному перетворювачі повинні відповідати змінним, записаним раніше в m -файлі.

Структурне представлення диференціальних рівнянь.

Диференціальні рівняння перехідних процесів (4) за допомогою блоків, доступних в Simulink, формують модель електродвигуна.

Модель рівнянь статора. На вхід моделі подаються напруги U_α , U_β і частота обертання системи координат ω_e , що формуються координатним перетворювачем, а також доки не показані струми статора $I_{s\alpha}$, $I_{s\beta}$ по осях α і β . На виході моделі отримуються

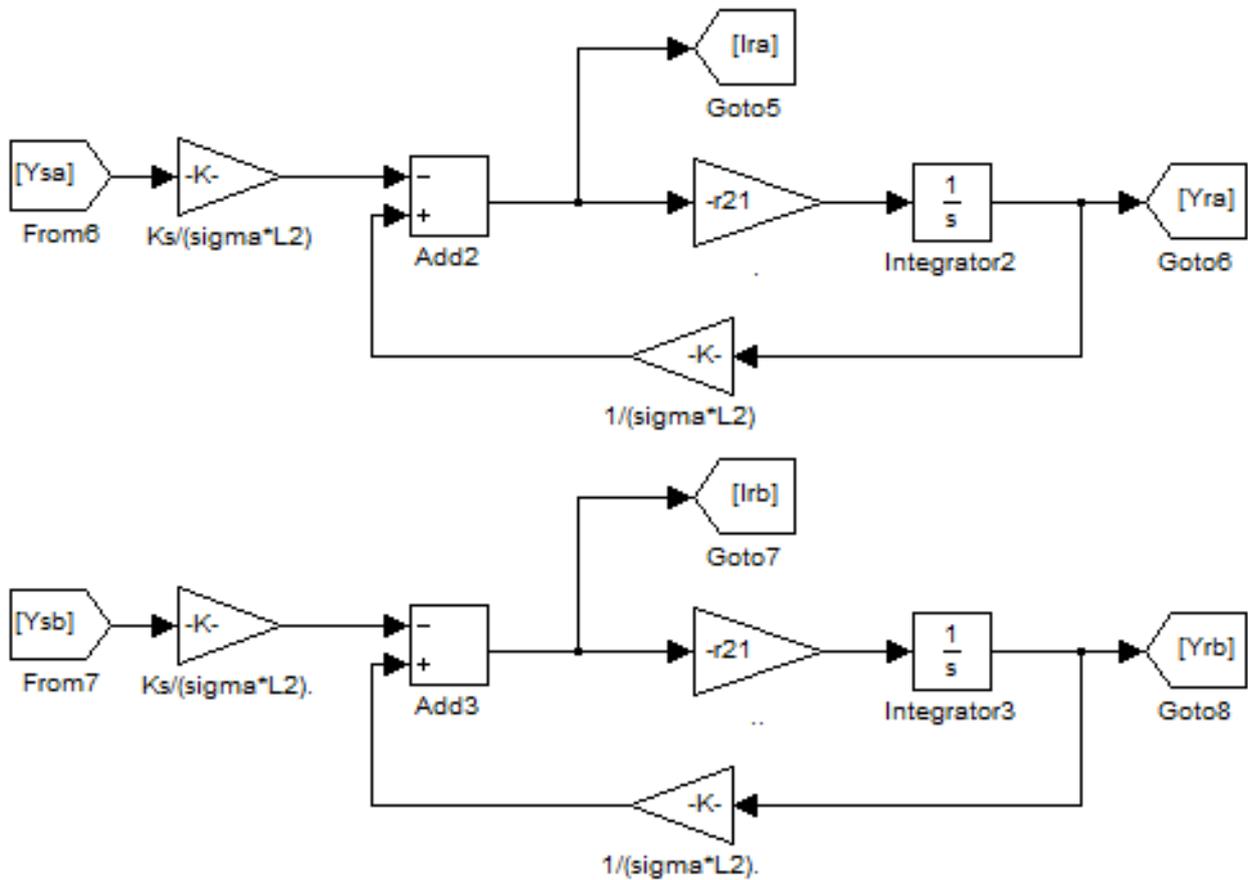
інтегральні значення потокозчеплень статора $\Psi_{s\alpha}$ і $\Psi_{s\beta}$ по осях α і β .



Структурна схема рівнянь статора

Модель рівнянь ротора. На вхід моделі подаються потокозчеплення статора $\Psi_{s\alpha}$ і $\Psi_{s\beta}$.

На виході моделі формуються струми ротора (використовуються в моделі статора) і інтегральні значення потокозчеплень ротора $\Psi_{r\alpha}$ і $\Psi_{r\beta}$ по осях α і β .

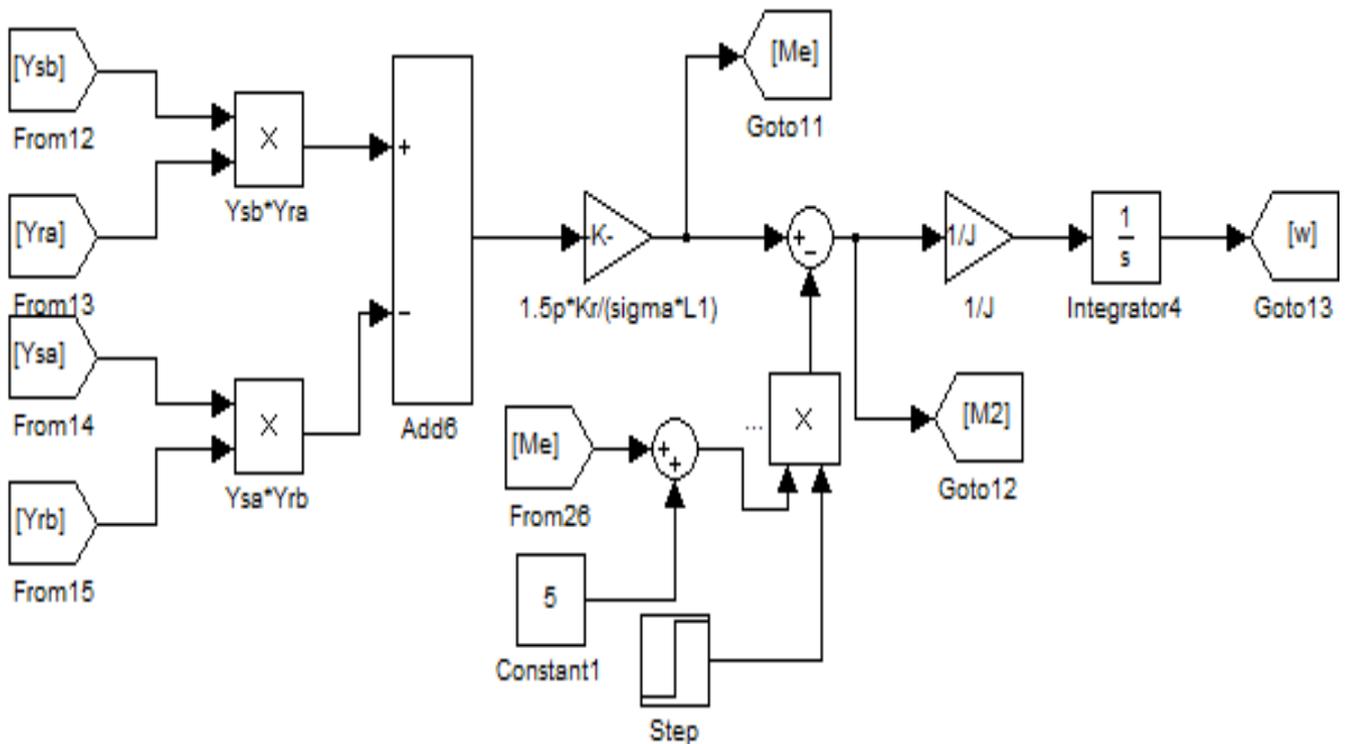


Структурна схема рівнянь ротора

В результаті симуляції моделей статора і ротора ми отримуємо необхідні дані, а саме потокозчеплення статора і ротора, для моделювання механічних процесів в електродвигуні за рівнянням електромагнітного моменту (5).

Структурна схема механічних процесів.

На вхід моделі подаються потокозчеплення статора $\Psi_{s\alpha}$, $\Psi_{s\beta}$ і ротора $\Psi_{r\alpha}$, $\Psi_{r\beta}$. На виході отримуємо електромагнітний момент M_e , момент на валу M_2 і частоту обертання ротора ω .



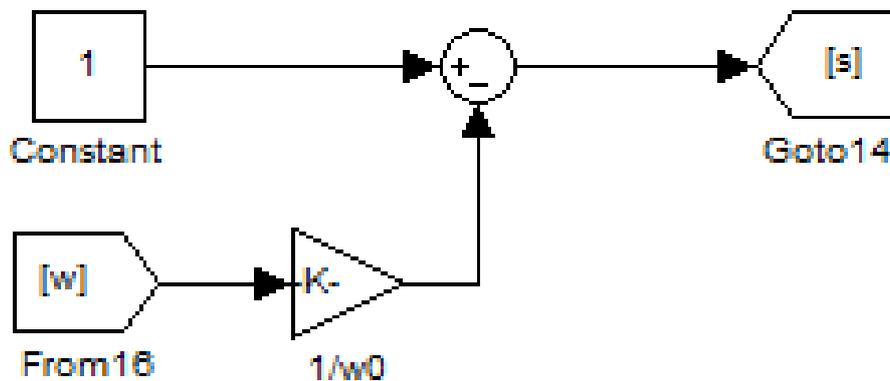
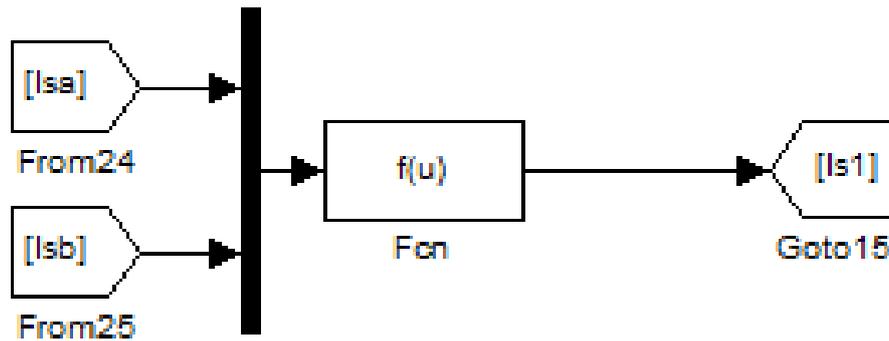
Структурна схема блоку динаміки

Слід звернути увагу на підхід до формування навантаження. Константа 5 і електромагнітний момент M_e підсумовуються, і подаються через блок множення на негативний вхід суматора з електромагнітним моментом на позитивному терміналі. Завдяки використанню блоку *Step*, сигнал активуються на першій секунді після пуску. Результатом роботи такої структури буде отримання статичної механічної характеристики асинхронного двигуна.

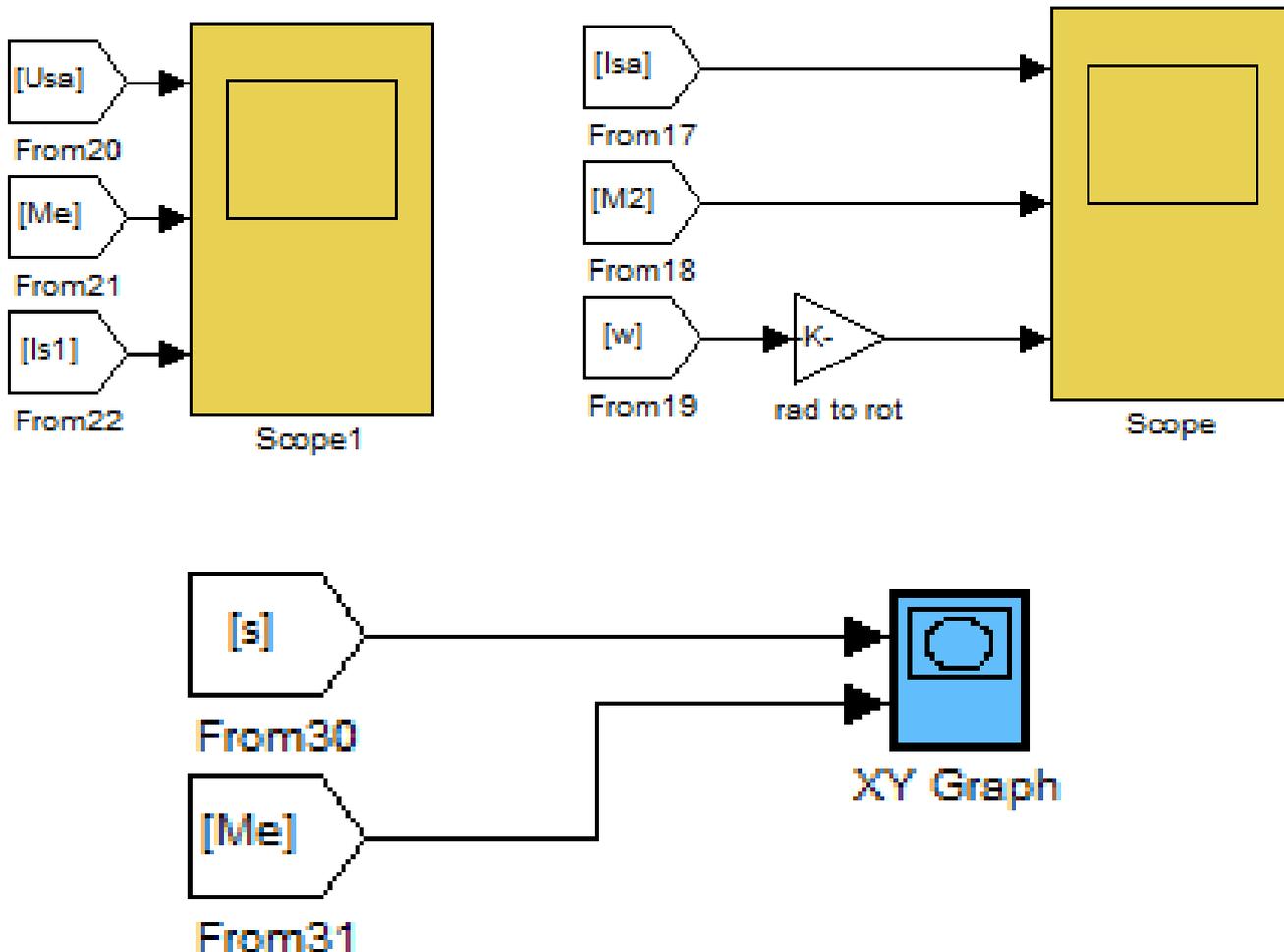
В якості додаткових структур для формування вихідних сигналів на блоки побудови графіків використовуємо перетворення миттєвих значень струмів статора по осях α і β на абсолютні (квадратний корінь з суми квадратів струмів $I_{s\alpha}$, $I_{s\beta}$), а також розрахунок ковзання

Структурні схеми блоків побудови характеристик перехідних процесів

Миттєві значення виводяться за допомогою блоку *Scope*, механічна характеристика - через блок *XY Graph*. Оскільки частота обертання розраховується в радіанах, то перед побудовою вона переводиться в об/хв.



Розрахунок модуля струму статора і ковзання



Структурні схеми побудови характеристик

Аналіз результатів моделювання.

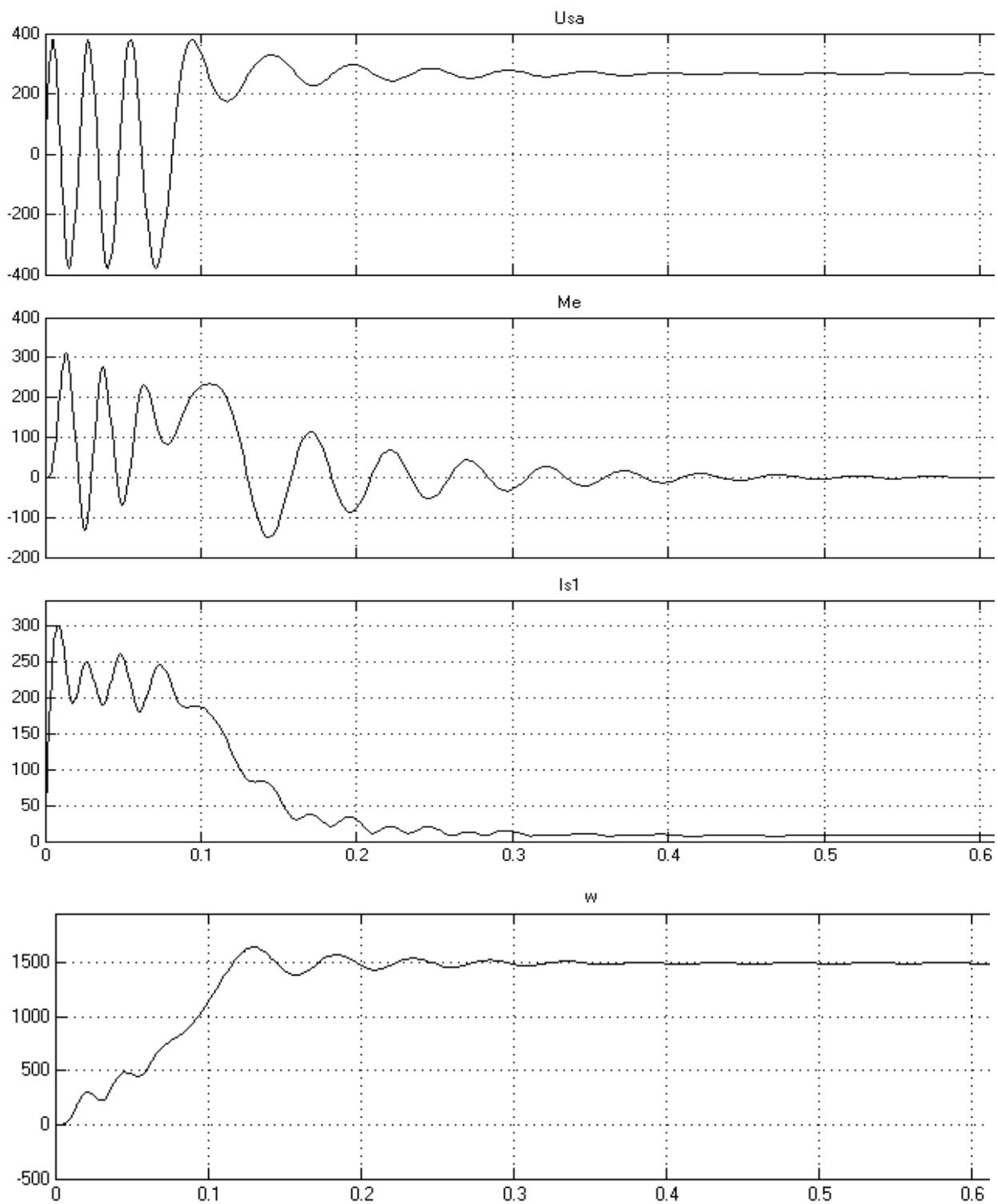
Виконаємо в MatLab моделювання асинхронного двигуна з к.з. ротором за розглянутими вище структурними схемами.

У конфігураторі рішення (Solution) вибираємо змінний крок (Variable-step) і вирішувач звичайних диференціальних рівнянь методом Адамса (ode113 Adams) з відносною точністю 1e-05.

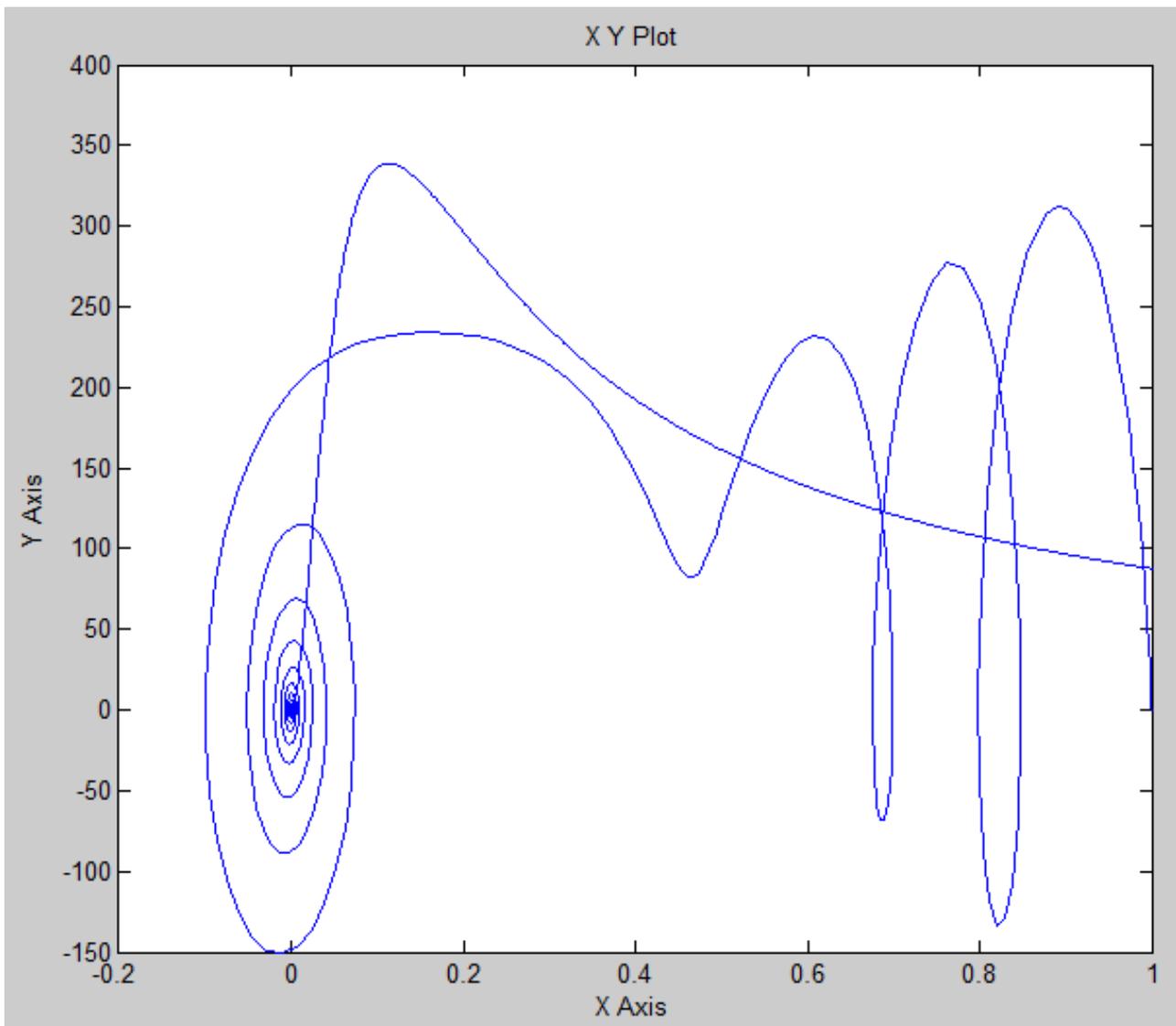
Параметри базової машини, а також параметри, отримані в результаті оптимального проектування, зведені в табл.1.

Таблиця 1 - Параметри базової і оптимальної машин

Найменування	Базова машина	Оптимальна машина
$r_1, \text{Ом}$	0.4021	0.400
$x_1, \text{Ом}$	0.811	0.824
$r_2, \text{Ом}$	0.192	0.189
$x_2, \text{Ом}$	0.806	0.818
$I_{xx}, \text{А}$	7.92	8.16
$\cos \varphi_{xx}$	0.106	0.107
Варійовані параметри		
$D, \text{мм}$	185	183
$l_\delta, \text{мм}$	130	129
Критерії оптимальності		
ККД	0.885	0.884
$I_{п}/I_{н}$	5.84	5.76



Перехідні характеристики базової машини



Механічні характеристики базової машини

На рисунках по осі абсцис відкладений час пуску в секундах.

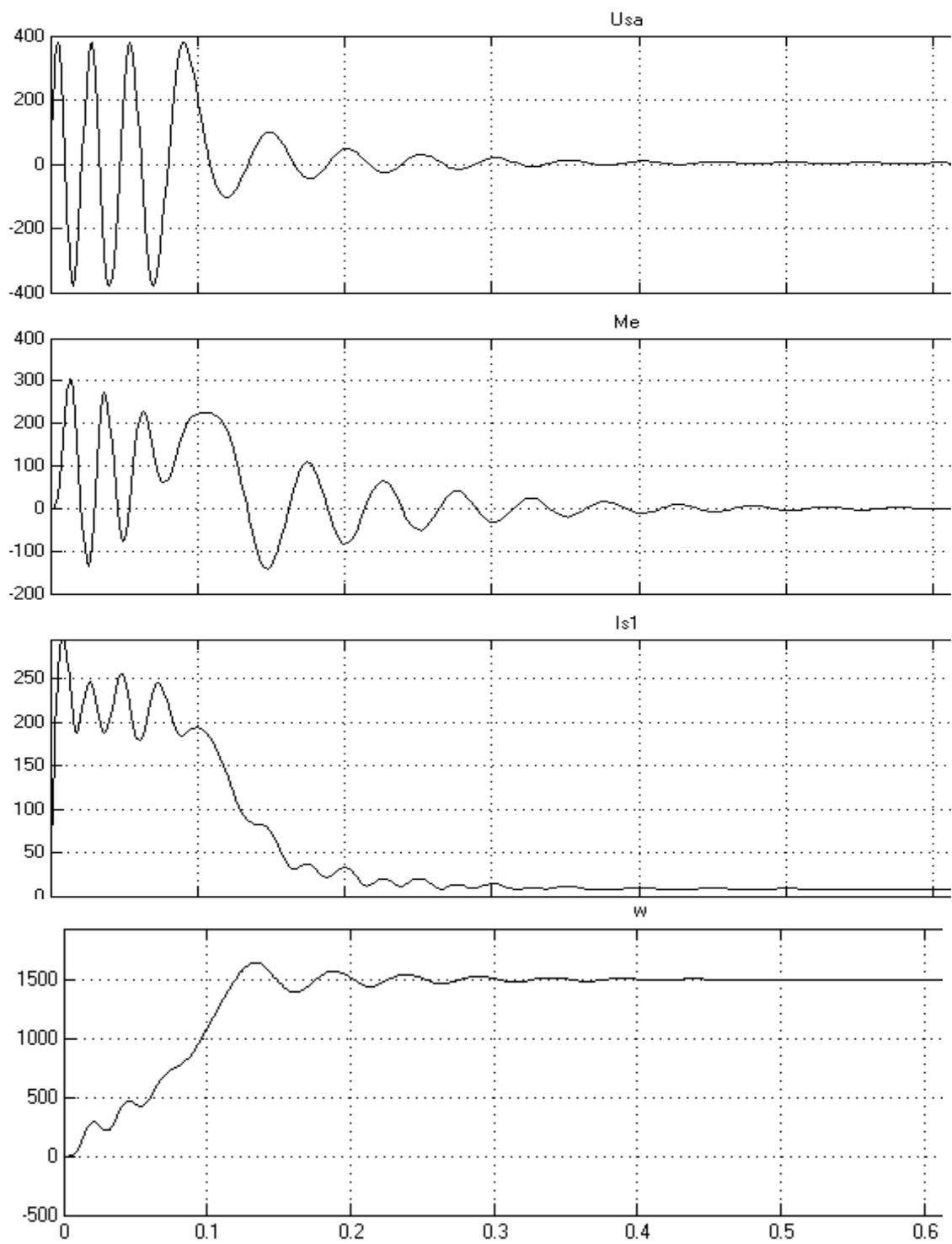
На осі ординат відповідно до написів графіків представлені:

U_{sa} - миттєві значення напруги статора по осі α ;

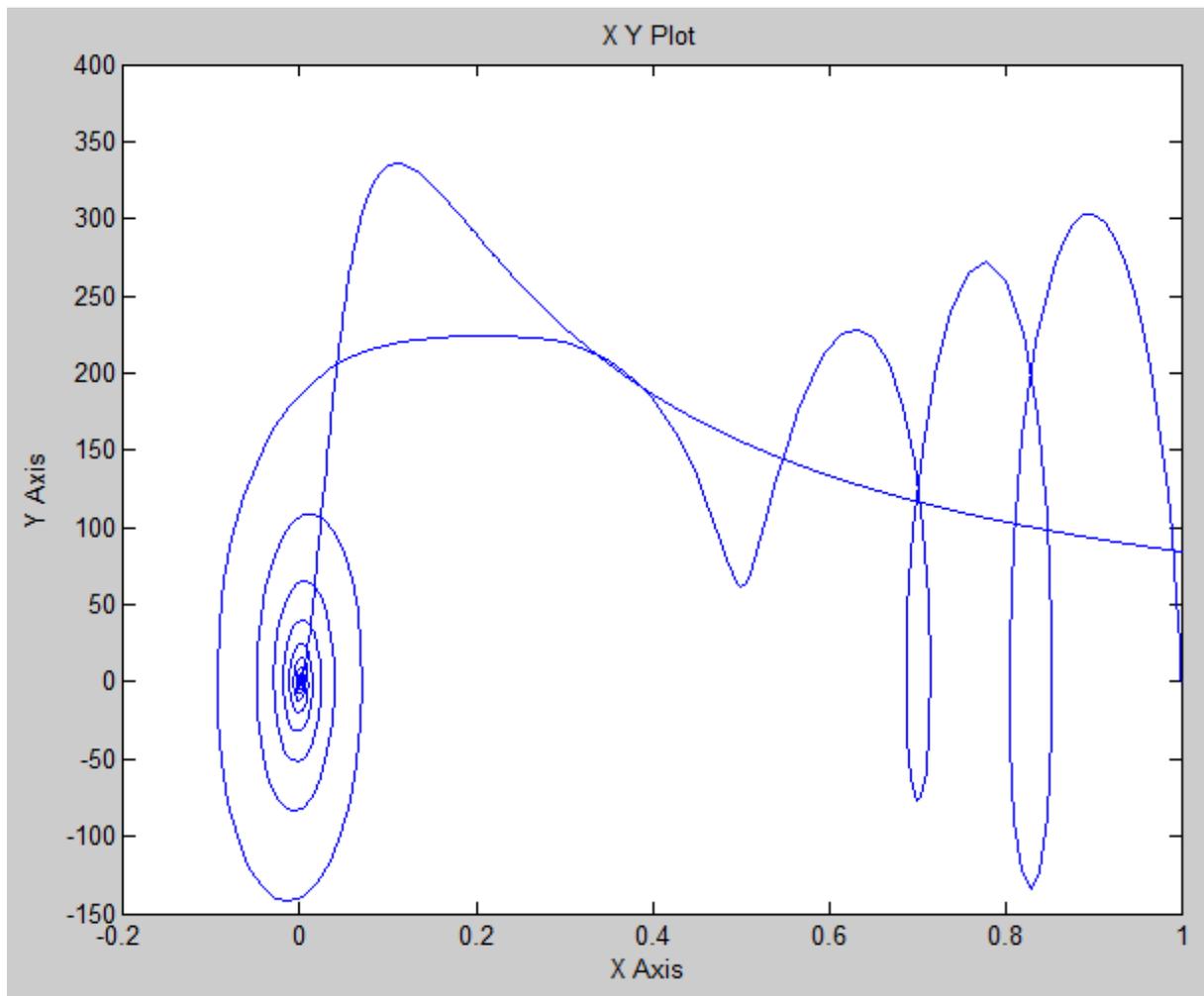
M_e - електромагнітний момент, Нм;

I_{s1} - модуль струму статора, А;

ω - частота обертання ротора, об/хв.



- Характеристики оптимальної машини



- Механічні характеристики оптимальної машини

Критеріями отримання оптимального рішення при моделюванні машини в динамічному режимі служать:

- максимум миттєвих значень фазних струмів контуру статора;**
- максимум миттєвих значень фазних струмів роторного контуру;**
- максимум миттєвого значення електромагнітного моменту;**
- струм, еквівалентний по активних втратах фазному струму статора в динамічному режимі;**

- максимум миттєвого значення повної потужності;
- максимум миттєвого значення активної потужності;
- максимум миттєвого значення корисної потужності;
- максимум миттєвого значення співвідношення активних потужностей;
- максимум миттєвого значення коефіцієнта потужності;
- середні за один період живлячої напруги значення повної, активної і корисної потужностей;
- співвідношення активних потужностей;
- коефіцієнт потужності.

За результатами моделювання відповідно до приведених критеріїв оптимальності, можна зробити наступні висновки:

1) у оптимальній машині нижче максимум миттєвих значень фазних струмів контуру статора, що було очікувано, оскільки при статичній оптимізації в якості критерію оптимальності був заданий мінімум кратності пускового струму

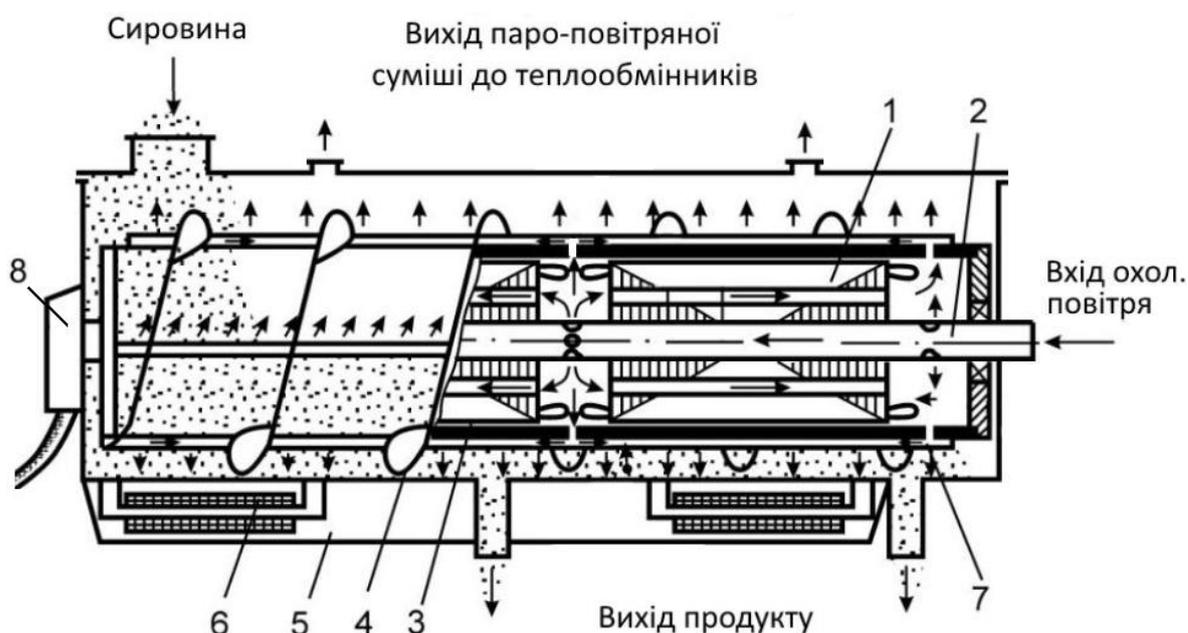
2) у оптимальній машині нижче максимум миттєвого значення електромагнітного моменту, що знижує механічне ударне навантаження на привід у момент пуску;

3) у оптимальній машині нижче рівень коливань частоти обертання ротора в області навколо синхронної швидкості.

Таким чином, був завершений повний цикл оптимального проектування - від оптимізації базової машини в статичному режимі, до контролю критеріїв оптимальності в режимі динаміки

ЛЕКЦІЯ 8

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗАНИХ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ПОЛІФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧАХ



1 – статор двигунового (гальмівного) модуля; 2 – порожнистий нерухомий вал; 3 – зовнішній ротор-шнек; 4 – днище шнека; 5 – корпус; 6 – індуктори підігріву днища; 7 – аксіальні канали ротора-шнека; 8 – введення живлячої напруги.

Конструктивно-технологічна схема шнекового ПЕМП

Взаємозв'язок електромагнітних і теплових процесів в поліфункціональних електромеханічних перетворювачах.

Взаємний вплив тихелектромагнітних, теплових і механічних процесів, складність конфігурації активної зони перетворювача і нелінійність фізичних характеристик його матеріалів вимагають використання методів теорії поля для

отримання достовірних результатів при розрахунковому аналізі робочих характеристик і режимів роботи ПЕМП.

Закон проникнення індукованого струму в глиб плоского провідника при гармонійно змінному в часі магнітному полі приблизно можна виразити наступним виразом:

$$J(y) = J_m e^{-ky} ,$$

де $k = \sqrt{\omega\mu/2\rho}$;

ω - кутова частота зміни поля;

μ - магнітна проникність;

ρ - питомий опір.

Зворотна величина $\Delta = 1/k$ називається умовною глибиною проникнення змінного струму в масивний провідник і дорівнює відстані від поверхні провідника, на якому значення струму зменшується в e разів. Якщо питомий опір провідника лінійно залежить від температури по відомому закону

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] ,$$

де ρ_0 - питомий опір при температурі T_0 , то за інших рівних умов із збільшенням температури T провідника збільшується і глибина проникнення його струмів

$$\Delta = \sqrt{2\rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] / \omega\mu} .$$

З іншого боку при зміні розподілу струмів в перетині провідника міняється щільність тепловиділень і закон розподілу температури, тобто виявляється і зворотний вплив електромагнітних явищ на теплові явища.

Стосовно масивно-роторних електричних машин і, зокрема, до ПЕМП збільшення глибини проникнення струмів масивного ротора унаслідок його нагрівання веде до істотної зміни конфігурації струмопровідного шару вторинного контуру, зменшенню його активного опору і збільшенню індуктивності розсіяння і, як результат, – до значної зміни механічних і робочих характеристик машини. Особливо це сильно виявляється у високо-використовуваних електричних машинах нетрадиційних конструкцій із значним рівнем нагрівання активних електропровідних елементів .

Узагальнена математична модель поліфункціонального електромеханіческого перетворювача.

Сформулюємо узагальнену математичну модель (ММ) ПЕМП. Узагальненість ММ полягає в тому, що вона заснована на використанні загальних фундаментальних рівнянь ланцюгів обмоток ПЕМП, рівнянь фізичних полів в його активній зоні і рівнянь руху рухомої частини. Така модель в цілому відображає всю сукупність фізичних процесів, незалежно від типу і конструктивного виконання перетворювача. Розглянемо найбільш перспективний для практичного використання двохмодульний ПЕМП, що складається з двох робочих модулів: двигунового і гальмівного. Проте побудована модель легко розповсюджується на інші ПЕМП з довільною кількістю модулів.

При побудові ММ ПЕМП приймемо наступні **основні спрощуючі допущення:**

1. Взаємозв'язані електромагнітний і тепловий процеси в двигуновому модулі відбуваються незалежно від аналогічних процесів в гальмівному модулі ПЕМП. *Взаємний вплив модулів враховується при формуванні сумарного електромагнітного моменту, що діє на загальний ротор перетворювача, за допомогою складання електромагнітних моментів модулів.*

2. Для аналізу електромагнітного і теплового полів ПЕМП використовуються двовимірні польові моделі в межах поперечного перетину кожного з модулів ПЕМП.

Вплив додаткових ефектів, пов'язаних з нерівномірністю розподілу локальних характеристик ПЕМП уздовж його довжини, повинен досліджуватися окремо. До таких ефектів слід віднести :

а) нерівномірність розподілу температури по довжині масивного ротора зважаючи на різну інтенсивність теплових втрат на ділянках ротора, відповідних довжинам кожного з модулів;

б) взаємний вплив магнітних потоків розсіяння лобових частин обмоток статора в примикаючих торцевих зонах модулів.

Вплив цих ефектів не є визначальними при формуванні параметрів і характеристик перетворювача, і, тому, при побудові узагальненої моделі ПЕМП ними нехтуватимемо.

Узагальнена ММ взаємозв'язаних електромагнітних, теплових і механічних процесів в ПЕМП представляється наступними рівняннями і математичними виразами.

Умови електричної рівноваги контурів обмоток статорів модулів ПЕМП описуються наступними диференціальними рівняннями:

$$u_k = r_k i_k + \frac{d\psi_k}{dt},$$

де u_k, i_k, r_k, ψ_k – відповідно напруга, струм, активний опір і повне магнітне потокоцеплення обмотки статора;

$k = 1, 2$ – індекс модуля ($k = 1$ для двигунового модуля, $k = 2$ – для гальмівного). ***Повні потокоцеплення знаходяться після розрахунку електромагнітного поля.***

Як визначальна функція електромагнітного поля використовується векторний магнітний потенціал \vec{A}_z , який зручний для аналізу поля в поперечному перетині електричної машини. У загальному вигляді *диференціальне рівняння електромагнітного поля в приватних похідних щодо векторного магнітного потенціалу має наступний вигляд:*

$$\frac{1}{\mu} \Delta \vec{A} - \gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \gamma (\vec{v} \times \text{rot} \vec{A}) = -\vec{J}_{\text{стор}},$$

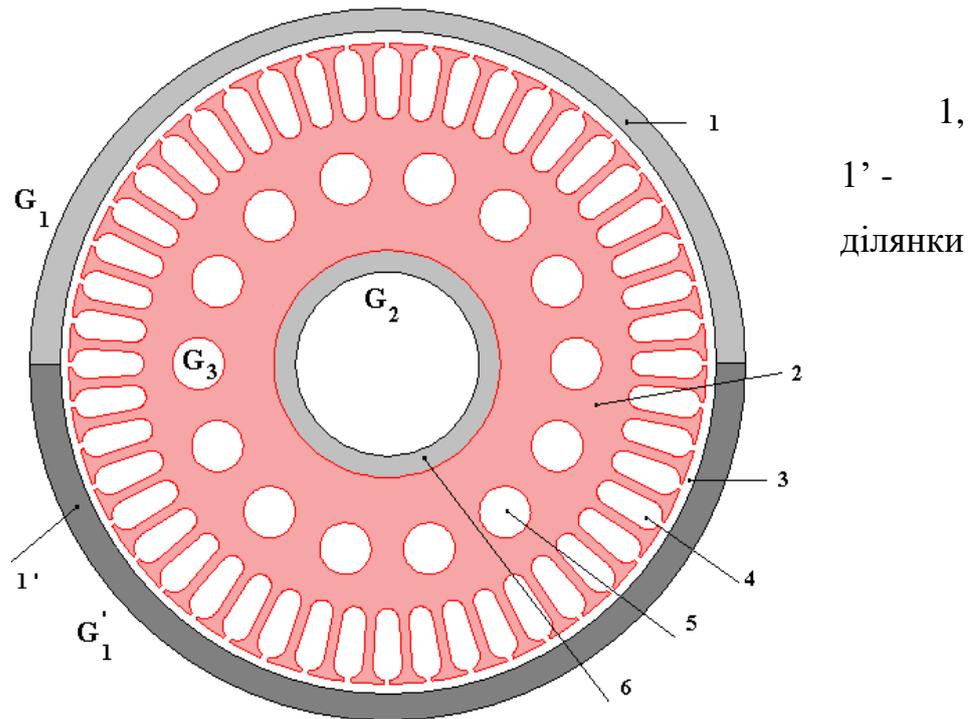
де μ, γ – магнітна проникність і електропровідність ділянок середовища в межах розрахункової області;

$J_{\text{стор}}$ – значення щільності струму, викликаного сторонніми ЕРС;

\vec{v} – швидкість руху електропровідного тіла відносно джерела магнітного поля;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{- оператор Лапласа}$$

Відповідно до другого прийнятого допущення польовий аналіз виконуватимемо в межах двовимірної розрахункової області, що відображає поперечний перетин модуля ПЕМП. Приклад такої області показаний на рисунку.



зовнішнього ротора; 2 - внутрішній статор; 3 - повітряний зазор; 4 - напівзакриті пази статора; 5 - аксіальні вентиляційні канали; 6 - порожнистий вал статора.

Поперечний перетин ПЕМП

Для обліку різних умов охолодження верхньої ділянки ротора, що інтенсивно охолоджується повітрям, і нижньої ділянки, зануреної в сипкий матеріал, область зовнішнього ротора ПЕМП представлена двома підобластями 1 і 1'. Внутрішній статор ПЕМП містить пази з трифазною обмоткою і аксіальні вентиляційні канали. Для ПЕМП з іншими даними в конфігурації розрахункової області виконуються відповідні зміни.

При аналізі двовимірного поля в поперечному перетині ПЕМП в декартовій системі координат векторний магнітний потенціал має тільки одну осьову складову $\vec{A}(x, y, t) = \vec{e}_z A_z(x, y, t)$, вектор швидкості рівний $\vec{v} = \vec{e}_x v_x + \vec{e}_y v_y$ і рівняння переписується в наступному вигляді:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} - \gamma \frac{\partial A_z}{\partial t} - \gamma \left(v_x \frac{\partial A_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -J_{z.стор}.$$

Відмінна від нуля електропровідність матеріалу задається тільки в масивному роторі ПЕМП. При цьому півкільця ротора 1 і 1' можуть мати різні значення електропровідності. Це дозволяє досліджувати вплив несиметрії параметрів ротора, викликаних різним нагрівом окремих його ділянок. Для шихтованих сердечників статора приймається $\gamma = 0$. Хоча вихрові струми в листах шихтованих магнітопроводів існують, вони практично не впливають на характер розподіл поля в активній зоні машини. Дія цих струмів враховується тільки при розрахунку ККД. Тому для області статора справедливе рівняння Пуассона:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -J_{z.стор}.$$

Джерела поля - стороння щільність струмів задається в перетині пазів статора відповідно до схеми обмотки статора. Зокрема, якщо в пазах, в яких лежать провідники фази «А», задається амплітудне значення щільності струму, J_{\max} то в пазах з провідниками фаз «В» і «С» задається $-J_{\max} / 2$ і так далі. Величина еквівалентної щільності струму в пазу статора розраховується по наступному виразу:

$$J_{\max} = I \sqrt{2} w_{II} / S_{II},$$

де I – значення струму обмотки статора, що діє;

w_{II} – число послідовно сполучених елементарних провідників в пазу;

S_{II} – площа перетину паза статора.

Для обертального руху ротора лінійні швидкості в кожній точці ротора виражаються через кутову частоту обертання ротора ω_R . При цьому швидкості рівні $v_x = \omega_R y$, $v_y = \omega_R x$, де x, y - координати довільної точки ротора.

По відомій функції векторного магнітного потенціалу на підставі співвідношення $B = \text{rot } A$ легко знайти складові вектора магнітної індукції:

$$B_x = \partial A_z / \partial y, B_y = -\partial A_z / \partial x.$$

Аналіз сталих режимів роботи ПЕМП при величинах, що гармонійно змінюються в часі, проводиться за допомогою методу комплексних амплітуд. При цьому рівняння набуває наступний вигляд:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \dot{A}_z}{\partial y^2} - j\omega_1 \gamma \dot{A}_z - \gamma \omega_R \left(y \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x} - x \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y} \right) = -\dot{J}_{z.\text{стор}},$$

де ω_1 - кутова частота струмів обмотки статора

Рівняння доповнюються граничними умовами – значенням векторного магнітного потенціалу або його нормальної похідної на зовнішніх межах розрахункової області, що відображає активну зону ПЕМП. Такими межами для ПЕМП є – зовнішня поверхня масивного ротора $G_1 + G_1'$ і внутрішня поверхня валу статора G_2 . Зазвичай на цих поверхнях задаються однорідні граничні умови першого роду

$$A(x, y, t) |_{G_1+G_1', G_2} = 0.$$

Завдання граничної умови еквівалентне ухваленню допущення про відсутність магнітних потоків розсіяння в зовнішній простір через дані межі.

При вирішенні нестационарного польового рівняння необхідно задати початкові умови – значення шуканої функції усередині області в початковий розрахунковий момент часу t_0 :

$$A(x, y, z, t) |_{t=t_0} = A_0(x, y, t_0).$$

При аналізі характерних для ПЕМП динамічних процесів, наприклад пуску, зазвичай задається однорідна початкова умова $A_0(x, y, t_0) = 0$.

Для визначення індукованої в роторі густини струму може бути використаний наступний вираз, що витікає з першого рівняння системи рівнянь Максвелла:

$$J_z = \text{rot}_z H = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right).$$

Після розрахунку поля векторного магнітного потенціалу нескладно знайти повне магнітне потокозчеплення всіх фаз обмотки статора по наступному виразу :

$$\psi_k = \frac{2l_a w_{II}}{S_{II}} \int_{S_A} A_z \cdot ds,$$

де S_A - площа інтеграції, що складається з сумарної площі поперечного перетину сторін всіх послідовно сполучених котушок фази, що мають струми одного напрямку;

l_a - активна довжина статора.

Визначене потокозчеплення включає складові від потоків пазового і диференціального розсіювання, а також враховує укорочення кроку котушок

обмотки і розподіл котушок фази по пазах, які в класичній теорії електричних машин відображаються за допомогою обмотувального коефіцієнта. **Польовий метод не вимагає введення і використання обмотувальних коефіцієнтів.**

У кожній точці ротора питомі втрати розраховуються по виразу:

$$Q = J_z^2 / \gamma(T),$$

де електропровідність заліза ротора в кожній його крапці залежить від температури T згідно із законом

$$\gamma(T) = \gamma_0 / (1 + \alpha T),$$

де γ_0 - електропровідність “холодного” ротора;

α - температурний коефіцієнт.

Диференціальне рівняння теплового поля в часткових похідних щодо температури T має наступний вигляд:

$$\lambda \Delta T - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -Q,$$

де λ, c, ρ - відповідно теплопровідність, теплоємність і щільність матеріалу;

Q - питомі теплові втрати.

У декартових координатах для двовимірної картини поля рівняння переписується в наступному вигляді:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = Q.$$

Взаємозв'язок рівнянь електромагнітного і теплового полів виявляється у взаємному впливі температури, електропровідності, щільності вихрових струмів і питомих теплових втрат, яка відображається у попередніх виразах. Також як і для рівняння електромагнітного поля для рівняння теплового поля задаються

граничні і початкові умови. Вибір граничних умов обумовлений особливостями системи вентиляції ПЕМП. При побудові ММ припустимо, що основна теплопередача в навколишнє середовище теплової енергії в активних елементах ПЕМП здійснюється шляхом конвективного теплообміну між нагрітою поверхнею і потоком повітря, що охолоджує. Такий теплообмін відбувається відповідно до закону Ньютона–Ріхмана, а на відповідній межі задається гранична умова третього роду :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{G_1, G_2, G_3} = -\frac{\alpha}{\lambda} (T - T_0),$$

де α - коефіцієнт тепловіддачі;

T_0 - температура повітря, що охолоджує.

Ця гранична умова задається на верхній частині зовнішньої межі ротора G_1 , на внутрішній поверхні полого валу статора G_2 і на поверхнях G_3 аксіальних вентиляційних каналів, виконаних в сердечнику статора. Теплообмін на нижній частині поверхні ротора G_1' , яка стикається з сипким матеріалом, що транспортується, має складну фізичну природу. З фізичної точки зору найбільш адекватним є припущення про передачу джоульових втрат, що виділилися в нижній половині ротора сипкому матеріалу у вигляді теплового потоку через поверхню G_1' . Цьому припущенню відповідає гранична умова другого роду, яка задає середню величину теплового потоку на межі розрахункової області G_1' :

$$q|_{G_1'} = \frac{1}{R_{2н}} \int_{S'} Q ds = \frac{1}{R_{2н}} \int_{S'} [J_z^2 / (\gamma) T] ds,$$

де $R_{2н}$ - зовнішній радіус ротора;

S' - область інтеграції.

Така умова також обумовлює взаємозв'язок електромагнітного і теплового завдань.

Рівняння руху ротора ПЕМП з урахуванням силової дії обох модулів представляється рівнянням механічної рівноваги моментів:

$$J \frac{d\omega_R}{dt} = M_{EM1} - M_{EM2} - M_C,$$

де J - момент інерції ротора;

M_{EM1} M_{EM2} M_C - відповідно електромагнітні моменти, що створюються першим (двигуновим) і другим (гальмівним) модулем і механічний момент опору навантаження. **У сталих режимах** при русі ротора з незмінною швидкістю обертання виконується рівність:

$$M_{EM1} = M_{EM2} + M_C.$$

Електромагнітні моменти модулів визначаються за наслідками розрахунку електромагнітного поля. **Найбільш ефективним методом розрахунку електромагнітних моментів, який був використаний в даній роботі, є метод тензора магнітного натягнення**. Відповідно до цього методу електромагнітний момент розраховується інтеграцією тангенціальної складової вектора тензора магнітного натягнення T_τ по наступному виразу:

$$M_{EM} = 2 \cdot p \cdot F_\tau \cdot R_\delta = 2 \cdot p \cdot R_\delta \int_0^\tau T_\tau \cdot dl = \frac{2 \cdot l_a \cdot p \cdot R_\delta}{\mu_0} \int_0^\tau B_n \cdot B_\tau \cdot dl,$$

де F_τ , T_τ - тангенціальні складові електромагнітної сили і тензора магнітного натягнення;

R_δ - радіус повітряного зазору;

B_n, B_τ - нормальна і тангенціальна складові магнітної індукції в повітряному зазорі;

p - число пар полюсів;

τ - полюсне ділення.

Для симетричної конструкції моменти всіх полюсів однакові і, тому, інтеграція ведеться в повітряному зазорі уздовж довжини одного полюсного ділення.

Механічний момент навантаження обумовлений опором сипкого матеріалу і має характер, що наближається до лінійної залежності. Цей момент може бути представлений наступною залежністю:

$$M_C = M_{C0} + k\omega_R,$$

де k - коефіцієнт навантаження;

M_{C0} - постійна складова моменту навантаження, не залежна від швидкості валу (тертя і ін.).

Сформульована математична модель моделює зв'язані електромагнітний і тепловий процеси в активній зоні кожного модуля ПЕМП з урахуванням електричних процесів в обмотках статора і умови рівноваги прикладених до ротора механічних моментів. **Така модель називається коло – польова ММ ПЕМП і дозволяє проаналізувати як динамічні, так і сталі режими роботи ПЕМП.**

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради ННІ енергетики, автоматики і енергозбереження Національного університету біоресурсів і природокористування України (протокол № 11 від 17 грудня 2021 р.).

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕНЕРГІЇ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для здобувачів

третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти
за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка» галузі знань 14 «Електрична інженерія»

Кваліфікація: PhD доктор філософії

Заблодський Микола Миколайович

Підписано до друку 17.12.21

Ум. друк. арк. 5,9

Наклад 20 прим.

Формат 60x84/16

Обл. вид. арк. 5,2

Зам. № 2915

Віддруковано у Видавничому центрі НУБіП України

вул. Героїв Оборони, 15, Київ, 03041, тел. 527-81-55, e-mail: nubipdruk@ukr.net

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4097 від 17.06.2011