

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І
ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ**

ФАКУЛЬТЕТ ЗАХИСТУ РОСЛИН, БІОТЕХНОЛОГІЙ ТА ЕКОЛОГІЇ

Кафедра фізіології, біохімії рослин та біоенергетики

Нестерова Н.Г.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до виконання практичних робіт

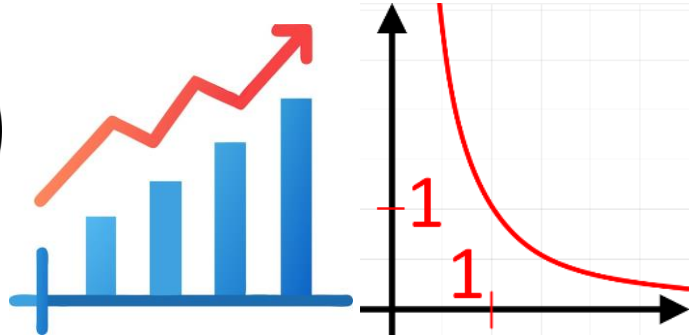
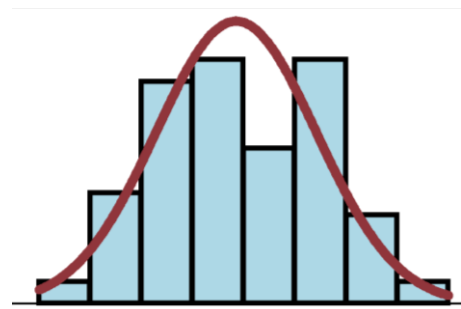
з дисципліни

«БІОМЕТРІЯ»

для студентів ОС «Бакалавр» очної форми навчання зі спеціальностей

162 «Біотехнологія та біоінженерія»

229 «Громадське здоров'я»



Київ 2024

УДК 57.087.1

Наведено методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни “Біометрія”. Навчальне видання містить практичні розрахунки, коротко наведені теоретичні положення та основні формули для обчислень потрібних біометричних показників, задачі і контрольні питання, виконання яких дозволяє поглибити і закріпити отримані на основі лекційного матеріалу знання.

Для студентів аграрних та біологічних ВНЗ із напрямів підготовки «Біотехнологія»

Рекомендовано до друку на засіданні кафедри фізіології, біохімії рослин та біоенергетики НУБіП України (протокол № 7 від 07 березня 2024 р.) та вченої ради факультету захисту рослин, біотехнологій та екології НУБіП України (протокол № 6 від 21 березня 2024 р.).

Укладач:

Нестерова Наталія Георгіївна – доц., к.с.-г.н., доцент кафедри фізіології, біохімії рослин та біоенергетики НУБіП України

Рецензенти:

Лісовий Микола Михайлович – проф., д.с.-г.н., професор кафедри екобіотехнології та біорізноманіття НУБіП України

Лендел Тарас Іванович – доц., к.т.н., доцент кафедри автоматичних та робототехнічних систем імені академіка І.І.Мартиненка НУБіП України

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

БІОМЕТРІЯ

до виконання практичних робіт для студентів ОС «Бакалавр» очної форми навчання зі спеціальностей 162 «Біотехнологія та біоінженерія» 229 «Громадське здоров'я» у вищих навчальних закладах III-IV рівнів акредитації

Формат 60x90 1/16. Папір офсетний. Друк цифровий.
Наклад 100 прим. Ум. друк. арк. 4,5. Зам. № 692.
Друк ЦП «Компринт». Свідоцтво ДК №4131 від 04.08.2011 р.
м. Київ, вул. Предславинська, 28
528-05-42, 067-209-54-30
email: komprint@ukr.net

ЗМІСТ

| | |
|--|--------|
| ВСТУП | - 3 - |
| Лабораторна робота №1 «ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТАТИСТИЧНОЇ СУКУПНОСТІ» | - 4 - |
| Лабораторна робота №2 «ВАРІАЦІЙНИЙ РЯД» | - 6 - |
| Лабораторна робота №3 «ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ВАРІЙОВАНИХ ОЗНАК» | - 8 - |
| Лабораторна робота №4 «СЕРЕДНІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКА» | - 10 - |
| Лабораторна робота №5 «ПОМИЛКИ РЕПРЕЗЕНТАТИВНОСТІ» | - 13 - |
| Лабораторна робота №6 «ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ ОДНОФАКТОРНИХ РІВНОМІРНИХ І НЕРІВНОМІРНИХ КОМПЛЕКСІВ МАЛИХ ГРУП» | - 15 - |
| Лабораторна робота №7 «ВИЗНАЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ ПОКАЗНИКІВ КОРЕЛЯЦІЇ ТА ЇХ ДОСТОВІРНОСТІ» | - 19 - |
| Лабораторна робота №8 «РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ. ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ РЕГРЕСІЇ» | - 22 - |
| ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ | - 25 - |
| СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ | - 26 - |
| ДОДАТКИ | - 27 - |

ВСТУП

Біометрія це сукупність математичних методів, що застосовують області математичної статистики і теорії ймовірностей у психології, соціології, біології, біотехнології, лісівництві тощо. Але, при цьому, біометрія має свою специфіку, свої відмінності і займає визначене місце у системі біологічних наук. Сучасна біометрія – це розділ біології, змістом якого є планування спостережень і статистична обробка отриманих результатів.

На сучасному етапі біометрія ґрунтується не тільки на таких математичних дисциплінах, як теорія ймовірностей і математична статистика, але і на інформатиці і програмуванні на ПК. Це наближає біометрію до власне комп'ютерних дисциплін. Використання спеціальних комп'ютерних програм за курсом «Біометрія» знайомить студентів з визначеними видами стандартного програмного забезпечення і підвищує якість навчання та наукової роботи.

Лабораторний практикум складений з урахуванням навчальної програми з дисципліни «Біометрія». **Метою даних методичних рекомендацій** є закріплення теоретичних знань та набуття досвіду математичної обробки даних дослідження. Кожен модуль складається з методичних рекомендацій щодо проведення лабораторних робіт, які містять тему та мету заняття, перелік необхідного обладнання та програмного забезпечення, список термінів та понять, знання яких обов'язкове для виконання лабораторного заняття, завдання для виконання лабораторних робіт та контрольні питання. Студентам запропоновано покроковий алгоритм із ілюстраціями дій у *MS Excel*. Для здійснення поточного контролю в кінці кожного лабораторного завдання наводиться перелік контрольних питань. Наприкінці посібника є питання та завдання для підсумкового контролю за семестр. Зміст запропонованого видання передбачає освоєння навичок та умінь студентами в галузі біометрії, описової статистики та аналізу біологічних даних.

При підготовці навчального видання використано досвід інших вузів, наукова та методична література, основний список якої наводиться у кінці. Навчальний посібник підготовлено для студентів вищих навчальних закладів III – IV рівнів акредитації напрям підготовки «Біотехнологія» та «Харчові технології».

Лабораторна робота №1

«ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТАТИСТИЧНОЇ СУКУПНОСТІ»

Мета роботи: навчитися систематизувати результати спостереження та величину класового інтервалу

Основна частина

Для обчислення статистичних показників числових сукупностей досить часто використовують ряд розподілу – *варіаційний ряд*. *Варіаційний ряд* – це двомірний ряд чисел, що складається з варіант і відповідних їм частотам, розміщений у порядку зростання або спадання. *Варіанта* – це окреме значення ознаки, яке вона приймає в ряду розподілу. *Частотами* називають чисельності окремих варіант або кожної групи варіаційного ряду. Частоти можуть бути виражені як в абсолютних величинах, тобто числом будь-яких одиниць, так і у відносних величинах у вигляді часток і відсотків до підсумку.

Показники різноманітності ознаки.

Розмах варіації (R) – різниця між найбільшим та найменшим числових значень із сукупності (Ф.1.1).

$$R = X_{max} - X_{min} \quad (1.1)$$

де X_{max} – найбільше значення вибірки;

X_{min} – найменше значення вибірки.

При складанні варіаційного ряду всі значення ознаки розбиваються на рівні інтервали – *класи*. Оптимальне число класів (груп) визначається за **формулою Стерджеса** (Ф.1.2):

$$m = 1 + 3,322 \lg n, \quad (1.2)$$

де m – число інтервалів;*

n – обсяг сукупності.

*Величину m округлюють у більшу сторону до найближчого цілого числа.

Величина класів (h) або величина класового інтервалу дорівнює розмаху варіації, поділеного на неокруглене число класів. Величина класів встановлюється за формулою (Ф.1.3):

$$h = \frac{X_{max} - X_{min}}{m}, \quad (1.3)$$

Отримане дробове число при діленні округлюють до найближчого цілого числа. *Наприклад*, якщо отримано число 21,4, то за величину класового проміжку h потрібно взяти 22.

Завдання для виконання

Завдання 1. При вивченні довжини стебла троянд були отримані дані, які наведені в таблиці 1.1. Визначте свій варіант згідно із вашим номером у групі, після номера 7 починайте спочатку. Необхідно визначити об'єкт дослідження, ознаку, статистичний ряд та розрахувати величину класового інтервалу.

Таблиця 1.1

| Варіант | Вихідні дані | | | | | | | | | |
|--------------------|-----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | Довжина, см (x) | | | | | | | | | |
| 1. Троянда рожева | 56 | 50 | 59 | 66 | 72 | 68 | 52 | 69 | 60 | 73 |
| 2. Троянда жовта | 54 | 55 | 76 | 65 | 59 | 59 | 61 | 64 | 79 | 50 |
| 3. Троянда червона | 61 | 66 | 64 | 62 | 71 | 78 | 63 | 59 | 62 | 65 |
| 4. Троянда гола | 41 | 45 | 57 | 54 | 49 | 48 | 55 | 52 | 48 | 50 |
| 5. Троянда махрова | 57 | 58 | 68 | 51 | 53 | 64 | 69 | 72 | 54 | 63 |
| 6. Троянда синя F2 | 51 | 55 | 53 | 66 | 63 | 58 | 72 | 74 | 69 | 73 |
| 7. Троянда біла | 66 | 61 | 63 | 59 | 55 | 72 | 77 | 62 | 69 | 58 |

Висновок:

Контрольні запитання

1. Що таке ознака досліджуваного варіанту?
2. Яку інформацію можна отримати, знаючи величину класового інтервалу?

Лабораторна робота №2

«ВАРІАЦІЙНИЙ РЯД»

Мета роботи: навчитися будувати варіаційний ряд та розраховувати ліміти або межі варіації, розмах варіації.

Основна частина

Варіаційний ряд – це двомірний ряд чисел, що складається з варіант і відповідних їм частотам, розміщений у порядку зростання або спадання.

Межі класів. Кінець кожного класу повинен бути менше початку наступного на величину, рівну прийнятій точності вимірювання (ξ) (Ф.2.1).

$$W_{n(1)} = x_{\max} + 0.5 \cdot k - \xi \quad W_{n(2)} = x_{\max} - 0.5 \cdot k \quad (2.1)$$

Показники розподілу ознаки у *MS Excel* розраховуються за функціями, які наведені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Функції в MS Excel

| Показник | MS Excel |
|--------------------|----------|
| Найменше значення | МИН |
| Найбільше значення | МАКС |
| Обсяг сукупності | СЧЁТ |
| Мода | МОДА |
| Медіана | МЕДИАНА |

Вставка функцій / у вікні *Майстер функцій* в полі *Категорія* клацніть *Статистичні*, у полі *Функція* за допомогою смуги прокрутки перегорніть список назви функцій, знайдіть і оберіть необхідну функцію / клацніть і ОК (рис. 2.1).

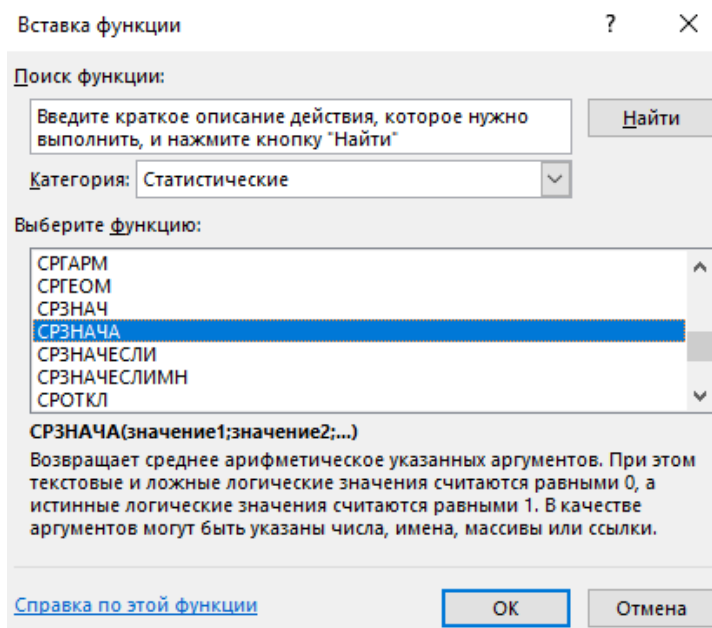


Рисунок 2.1 – Статистичні функції у MS Excel

Наприклад, щоб визначити обсяг сукупності n використовують функцію СЧЁТ (рис. 2.2).

| | А | В | С |
|---|----|--------------|---|
| 1 | х | | |
| 2 | 1 | | |
| 3 | 2 | | |
| 4 | 5 | | |
| 5 | 9 | | |
| 6 | 10 | | |
| 7 | 12 | | |
| 8 | n | =СЧЁТ(А2:А7) | |

Рисунок 2.2 – Визначення обсягу сукупності n

Завдання для виконання

Завдання 1.

1. При вивченні особливостей будови крон дерев в журнал занесені такі дані щодо розмірів площ їх горизонтальних проекцій (в m^2):

1) 3, 4, 2, 8, 6, 4, 3, 2, 4, 5.

2) 2, 7, 4, 7, 5, 5, 7, 2, 4, 5.

3) 2, 5, 6, 5, 2, 3, 4, 8, 3, 6.

4) 2, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 4, 3, 8.

2. На основі чотирьох вибірок побудуйте інтервальний варіаційний ряд, розрахуйте ліміти або межі варіації, розмах варіації.

Висновок:

Контрольні запитання

1. Що таке варіаційний ряд?

2. З яких елементів складається варіаційний ряд?

Лабораторна робота №3

«ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ВАРІЙОВАНИХ ОЗНАК»

Мета роботи: навчитися розраховувати додаткові параметри варіаційного ряду: моду та медіану і відобразити варіаційний ряд у вигляді графічної варіаційної кривої.

Основна частина

Для вивчення мінливості певної ознаки складають *варіаційний ряд* – послідовність кількісних показників проявів станів певної ознаки (варіант), розташованих у черговості їх зростання чи зменшення.

Розподіл варіант усередині варіаційного ряду можна графічно зобразити у вигляді варіаційної кривої. Варіаційна крива – це графічне зображення кількісних показників мінливості певної ознаки, яке ілюструє межі модифікаційної мінливості та частоту зустрічальності окремих варіантів. За допомогою варіаційної кривої можна встановити середні показники і норму реакції певної ознаки.

На підставі даних вибірки будують *варіаційний ряд (ряд розподілу)*. У такому ряду кількісно мінлива ознака має назву варіюючої, а окремі її кількісні вияви називають варіантами (X_i). Розміщення матеріалу вибірки в один ряд (від X_{\min} до X_{\max}) називають ранжировкою ряду. Число, що показує, як часто трапляється певний варіант в складі даного ряду, називають частотою (P_i). Суму всіх частот (загальну кількість спостережень) позначають через n .

Мода – значення випадкової величини, що трапляється найчастіше в сукупності спостережень.

Медіана (\tilde{x}) – середнє значення, що відокремлює більшу половину і меншу половину вибірки, визначається за формулою 3.1 (Ф.1.5) для непарної кількості варіант і 3.2 (Ф.1.6) для парної кількості варіант:

$$\tilde{x} = X_{\frac{n+1}{2}}, \quad (3.1)$$

$$\tilde{x} = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}. \quad (3.2)$$

У *MS Excel* графічне зображення варіаційного ряду здійснюється за допомогою засобів **Аналіз даних**. Для цього необхідно виконати наступні дії:

- Підключити надбудову *Пакет аналізу MS Excel: Сервіс / Надбудови / у вікні Надбудови встановити прапорець Пакет аналізу та ОК* (рис. 3.1).

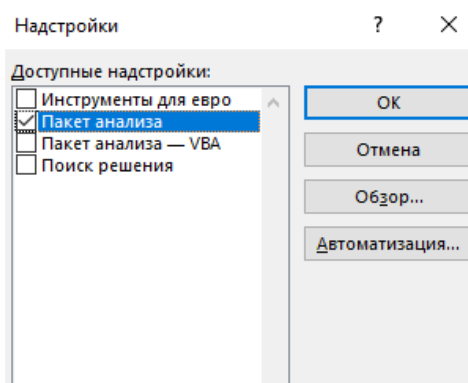


Рисунок 3.1 – Підключення *Пакету аналізу*

- Побудувати гістограму за даними: *Аналіз даних / Гістограма і ОК* / у вікні Гістограма в розділі *Вхідні дані* в поле Вхідний інтервал введіть посилання на діапазон комірок (наприклад A2:A12) і встановіть прапорець *Мітки* / в розділі параметри виводу включіть перемикач *Вихідний інтервал* і вкажіть будь-яку вільну комірку робочого листа (наприклад A19) / встановіть прапорець *Інтегральний відсоток* і *Вивід графіка* і ОК (рис. 3.2).

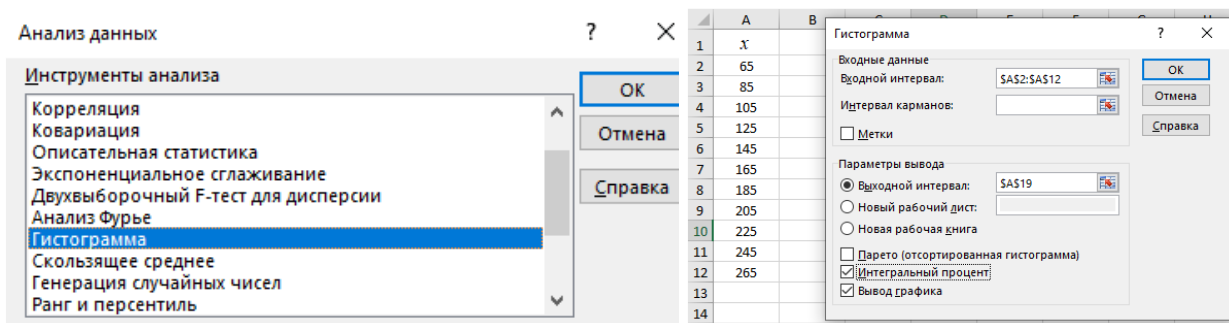


Рисунок 3.2 – Побудова гістограми

Завдання для виконання

Завдання 1.

1. Дослідники виміряли висоту рослин травостою на лучному газоні через тиждень після скошування. Отримали наступні результати:

22; 23; 22; 22; 17; 23; 20; 20; 21; 25; 27; 24; 22; 21; 16; 23; 18; 21; 24; 18; 21; 22; 25; 23; 21; 20; 25; 18; 21; 21; 24; 25; 19; 18; 22; 25; 27; 19; 17; 18; 22; 23; 24; 19; 26; 21; 25; 25; 23; 27.

2. Побудуйте варіаційний ряд та його параметри – моду і медіану. Також відобразіть варіаційний ряд у вигляді варіаційної кривої.

Висновок:

Контрольні запитання

1. Назвіть показники різноманітності ознаки?
2. Чи можна сказати, що при однорідній сукупності мода дорівнює медіані і чому?

Лабораторна робота №4

«СЕРЕДНІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКА»

Мета роботи: навчитись визначати середні величини і біометричні показники ряду розподілу.

Ключові слова: середнє арифметичне, дисперсія, стандартне відхилення.

Основна частина

Для повної характеристики однорідної статистичної сукупності використовуються узагальнюючі кількісні характеристики – статистичні показники.

Статистичні показники – це логічно-обґрунтовані кількісні характеристики, які описують ряди розподілу і дають змогу порівнювати їх між собою. До статистичних показників ряду розподілу чисельності відносяться: середні параметричні величини (арифметична, квадратична, кубічна, геометрична, гармонічна) і непараметричні – структурні (медіана та мода). Середні величини, як показники центральної тенденції, характеризують центр ряду розподілу.

Середнє арифметичне (\bar{x}) – це величина, яка є центром розподілу, навколо якої групуються всі варіанти статистичної сукупності і розраховується за формулою (Ф.4.1):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \quad (4.1)$$

де x – варіанти, що входять до складу даної сукупності;

n – загальне число варіант, або обсяг вибіркової сукупності.

Дисперсія (σ^2) – показник варіації, який вказує на характер розсіювання числових значень ознак розподілу чисельності, а також описує мінливість варіант відносно середнього значення і розраховується за формулами (Ф.4.2 – зважена) і (Ф.4.3 – незважена):

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum f}, \quad (4.2)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}. \quad (4.3)$$

Стандартне відхилення – показник, який характеризує ступінь розсіювання варіант навколо середнього значення, описує криву нормального розподілу і дає уявлення про найімовірнішу середню помилку окремого спостереження даної сукупності.

Середнє квадратичне відхилення (σ) зважене і незважене розраховується відповідно за формулами (Ф.4.4) та (Ф.4.5):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 \cdot f}{\sum f}}, \quad (4.4)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} \quad (4.5)$$

Коефіцієнт варіації – це відносна величина, яка вказує на ступінь мінливості ознаки варіаційного ряду і розраховується за формулою (Ф.4.6):

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}, \quad (4.6)$$

при $V < 10\%$ – варіація незначна;
 при $V = 10-20\%$ – варіація середня;
 при $V > 20\%$ – варіація значна.

Дисперсія і стандартне відхилення виражаються в абсолютних величинах досліджуваної ознаки і можуть бути використані для порівняння ступеня мінливості **тільки однорідних вибірок** (вибірок, варіанти яких мають однакові одиниці вимірювання).

Коефіцієнт варіації виражається у відносних величинах (%) і може бути використаний для порівняння ступеня мінливості **як однорідних, так і неоднорідних вибірок**.

Показники варіації у *MS Excel* розраховуються за функціями, які наведені в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Функції в *MS Excel*

| Показник | <i>MS Excel</i> |
|--------------------------------|-----------------|
| Середнє арифметичне | СРЗНАЧ |
| Середньоквадратичне відхилення | СТАНДОТКЛОН |
| Дисперсія | ДИСПА |
| Округлення значення ознаки | ОКРУГЛ |
| Корінь квадратний | КОРЕНЬ |

Завдання для виконання

Завдання вибрати згідно із номером студента у групі: непарний обирає завдання 1, а парний – завдання 2.

Завдання 1. Лісівники визначали висоту саджанців сосни європейської (в дм) та отримали наступні показники:

| | | | | | | | | | | | |
|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Висота саджанців сосни, x_i | 65 | 85 | 105 | 125 | 145 | 165 | 185 | 205 | 225 | 245 | 265 |
| Число випадків, f_i | 6 | 0 | 4 | 8 | 17 | 27 | 30 | 10 | 10 | 5 | 2 |

Визначити середнє арифметичне висоти саджанців сосни, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.

Завдання 2. Вимірювали довжину листків дубу червоного. Результати вимірювань розподілилися наступним чином:

| | | | | | | | | | | | | | |
|----------------------------------|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|
| Довжина листка, x_i , см | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| Число випадків, f_i | 15 | 38 | 55 | 90 | 115 | 153 | 131 | 135 | 114 | 82 | 42 | 15 | 15 |

Визначити середнє арифметичне довжини листків дубу червоного, середнє квадратичне відхилення та коефіцієнт варіації.

Висновок:

Контрольні запитання

1. Дайте визначення терміну «статистичні показники».
2. Які показники відносяться до середніх параметричних величин та непараметричних величин?
3. Назвіть основні види середніх, які використовуються у біології.

Лабораторна робота №5

«ПОМИЛКИ РЕПРЕЗЕНТАТИВНОСТІ»

Мета роботи: отримати навички визначення достовірності емпіричних показників.

Основна частина

Розходження між величиною середнього арифметичного (\bar{x}) вибірки і величиною середнього арифметичного генеральної сукупності (M) називають *помилкою репрезентативності*, тобто помилкою, що допускається не в самому процесі вимірювальної роботи, а в результаті випадкового відбору варіант із генеральної сукупності при утворенні вибірки.

Величина статистичної помилки окремо взятої варіанти дорівнює квадратичному відхиленню, так як будь-який набутий емпіричний розподіл, що відповідає нормальному закону, практично укладається у межах трьох сігм, тобто $\pm 3\sigma$. Тому, помилку репрезентативності називають *середньою квадратичною помилкою*, або середньою помилкою m . Таким чином, середня квадратична помилка окремо взятої варіанти виражається у вигляді: $m\bar{x} = \pm\sigma$

Вибіркова середня (\bar{x}) відхиляється від свого математичного очікування чи середнього арифметичного (M) генеральної (теоретично розрахованої) сукупності менше в \sqrt{n} разів порівняно з окремими варіантами даного розподілу. Звідси (Ф.5.1):

$$m_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (5.1)$$

Оскільки весь варіаційний ряд випадкової величини, що підпадає нормальному розподілу, практично укладається в межах між $\bar{x}-3\sigma$ і $\bar{x}+\sigma$, то можна відзначити, що генеральна середня (M) таких розподілів не виходить за межі потрібного значення середньої помилки середнього арифметичного будь-якої вибірки, взятої із даної генеральної сукупності, тобто вона знаходиться в межах від $\bar{x}-3m\bar{x}$ до $\bar{x}+3m\bar{x}$ або в межах $\bar{x}\pm 3m\bar{x}$. Тому потрібне значення середньої квадратичної помилки називається *точною помилкою середнього арифметичного вибіркової сукупності*. А вираз $\bar{x}\pm 3m\bar{x}$ містить в собі так звані “**правила потрібної помилки**”.

При визначенні помилки середнього арифметичного на малих вибірках використовують число “ступеня свободи” ($n-1$) і формула приймає наступний вигляд (Ф.5.2):

$$m_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}. \quad (5.2)$$

Середня помилка середнього квадратичного відхилення вираховується за формулою (Ф.5.3):

$$m_\sigma = \frac{\sigma}{2n}. \quad (5.3)$$

А середня помилка коефіцієнта варіації (C) визначається за наступною формулою (Ф.5.4):

$$m_c = \frac{C}{\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \left(\frac{C}{100}\right)^2} . \quad (5.4)$$

Завдання для виконання

Завдання 1. Визначати помилки репрезентативності для експериментальних даних завдань лабораторної роботи №2.

Висновок:

Контрольні запитання

1. Що називають помилкою репрезентативності?
2. Що таке середня квадратична помилка і як вона розраховується?

Лабораторна робота №6

«ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ ОДНОФАКТОРНИХ РІВНОМІРНИХ І НЕРІВНОМІРНИХ КОМПЛЕКСІВ МАЛИХ ГРУП»

Мета роботи: отримати навички вивчення статистичного впливу одного або декількох факторів на результативну ознаку (навчитись проводити дисперсійний аналіз).

Основна частина

На практиці нерідко виникає необхідність в оцінці цілих комплексів кількісних показників, необхідність порівнювати між собою одночасно не дві, а кілька вибірок, об'єднаних в єдиний комплекс.

У будь-якому експерименті середні значення досліджуваних величин змінюються у зв'язку зі зміною основних факторів (кількісних та якісних), що визначають умови досліду, а також і випадкових факторів. Дослідження впливу тих чи інших факторів на мінливість середніх є задачею дисперсійного аналізу, який був розроблений Р.А. Фішером у 1925 році.

Дисперсійний аналіз використовує властивість адитивності дисперсії випадкової величини, що обумовлено дією незалежних факторів. Залежно від числа джерел дисперсії розрізняють *однофакторний* та *багатофакторний* дисперсійний аналіз.

Дисперсійний аналіз полягає у виділенні і оцінці окремих факторів, що викликають зміну досліджуваної випадкової величини. При цьому проводиться розклад сумарної вибіркової дисперсії на складові, обумовлені незалежними факторами. Кожна з цих складових є оцінкою дисперсії генеральної сукупності. Щоб вирішити, чи дієвий вплив даного фактору, необхідно оцінити значимість відповідної вибіркової дисперсії порівняно з дисперсією відтворення, обумовленою випадковими факторами.

Перевірку значимості оцінок дисперсії проводять за критерієм Фішера; коли розрахункове значення критерію Фішера виявиться меншим табличного, то вплив досліджуваного фактору немає підстав вважати значимим. Коли ж розрахункове значення критерію Фішера виявиться більшим за табличне, то цей фактор впливає на зміни середніх.

Факторами називають причини зміни характеристик біологічних об'єктів, а ті характеристики біологічних об'єктів, які змінюються під їх впливом, мають назву *результативних ознак*.

Методика дисперсійного аналізу зводиться до деякої загальної схеми – алгоритму (табл. 6.1).

Алгоритм дисперсійного аналізу однофакторних комплексів

| № | Зміст організаційної або математичної дії |
|---|---|
| 1 | Групування вибірових матеріалів у комбінаційну таблицю дисперсійного комплексу |
| 2 | Визначення значень: середнього арифметичного всього комплексу (\bar{x}) і групових середніх за градаціями організованого фактора (x_i) |
| 3 | Визначення загальної суми квадратів відхилень (D_y), тобто суми квадратів відхилень варіант від загальної середньої: $D_y = \Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{N}$ |
| 4 | Визначення міжгрупової суми квадратів відхилень, яка дорівнює сумі квадратів відхилень групових середніх від загальної середньої з урахуванням статистичної ваги (n_i) групових середніх: <ul style="list-style-type: none"> • у випадку рівних чисел варіант в градаціях комплексу – $D_x = n_i \Sigma \bar{x}_i^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{N}$; • у випадку різної кількості варіант в градаціях комплексу – $D_x = \Sigma [n_i (x_i - \bar{x})^2]$; |
| 5 | Визначення внутрішньогрупової суми квадратів, тобто суми квадратів відхилень групових варіант від групових середніх: $D_z = \Sigma x^2 - n \Sigma \bar{x}_i^2$ |
| 6 | Визначення дисперсій (середніх квадратів відхилень): <ul style="list-style-type: none"> • загальна: $\sigma_{заг}^2 = D_y / (N-1)$; • факторна: $\sigma_{факт}^2 = D_x / (a-1)$, де a – кількість груп; • остаточна: $\sigma_{ост}^2 = D_z / (N-a)$ |
| 7 | Визначення фактичного значення критерію $F_{факт.} = \frac{\sigma_{факт}^2}{\sigma_{ост}^2}$; |
| 8 | Порівняння фактичного значення критерію F з його табличним (стандартним) значенням для відповідного рівня значимості (p) і даних чисел |

У *MS Excel* однофакторний дисперсійний аналіз проводиться наступним чином: *Сервіс / Аналіз даних / Однофакторний дисперсійний аналіз* / вкажіть діапазон вхідних значень, групування за стовпцями, прапорець «Мітки» зніміть, вкажіть клітинку вихідного діапазону комірок.

Проаналізуйте отримані результати: порівняйте дисперсію всередині груп і між групами. Якщо вони значимо відрізняються (рівень значущості $P = 0,05$), то вважається, що фактор надає статистично значимий вплив на досліджувану змінну. Порівняйте розрахункове F і критичне значення статистики Фішера. Відмінність вважається **значимою**, якщо розрахункове значення більше критичного.

Завдання для виконання

Завдання 1. Користуючись табл. 6.1 провести дисперсійний аналіз експериментальних даних наведених в прикладі.

Досліджувався вплив кількості доглядів (розпушень ґрунту) на ріст 2-х річних сіянців ялівця карпатського після висаджування їх у відкритий ґрунт. Дослід організовано на однорідній території з виділенням дослідних площ розміром 0,5 га. Сукупність рослин на кожній дослідній площі є відповідною генеральною сукупністю. Вибіркові сукупності формувались шляхом відбору по 200 сіянців (за принципом ймовірності) для кожної дослідної ділянки. Дослід закладався в 3-х повторностях з градаціями регульованого фактору (розпушування) – відсутність (0), два (2), чотири (4), шість (6). Всього закладено 12 пробних площ, на яких у дослідних рослин заміряні восени річні прирости за висотою. Результати замірів згруповані у табл. 6.2.

Таблиця 6.2

Заміри приросту сіянців ялівця карпатського

| Варіант досліджу | Середній приріст рослин за варіантами, см | | | | Середній приріст за усіма варіантами |
|------------------|---|----|----|-------|--------------------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | n_i | |
| Контроль | 6 | 4 | 8 | 3 | |
| Догляди два рази | 8 | 12 | 3 | 8 | |
| Чотири рази | 12 | 14 | 16 | 3 | |
| Шість разів | 12 | 12 | 12 | 3 | |

Варто зазначити, що однакова кількість повторностей по всіх варіантах досліджу і участь лише одного регульованого фактору підтверджує класифікацію комплексу як однофакторного і рівномірного.

Завдання 2. Проведіть дисперсійний аналіз вимірів приростів лісових культур у висоту (см/міс) при внесенні різних доз мінеральних добрив (табл. 6.3):

Таблиця 6.3

Вихідні дані

| Варіанти факторів | Повторюваності за варіантами, x_i | | | |
|-------------------|-------------------------------------|---|---|---|
| 20% | 2 | 4 | 4 | 6 |
| 40% | 3 | 5 | 5 | 6 |
| 60% | 6 | 7 | 7 | 7 |

Завдання 3. Провести дисперсійний аналіз впливу заготовки живців на висоту каштанових саджанців (табл. 6.4):

Таблиця 6.4

| Фактор (живці різної довжини) | Вихідні дані | | | | | |
|-------------------------------|------------------------|----|----|----|----|----|
| | Висота по повторностях | | | | | |
| 1 | 14 | 22 | 18 | 27 | 6 | 45 |
| 2 | 26 | 41 | 47 | 32 | 35 | 27 |
| 3 | 25 | 43 | 28 | 21 | 13 | 26 |
| 4 | 15 | 16 | 12 | 14 | 20 | 16 |

Висновок:

Контрольні запитання

1. Що таке дисперсійний аналіз?
2. Передумови та постановка задачі однофакторного дисперсійного аналізу.
3. Загальна, факторна та залишкова суми квадратів відхилень та зв'язок між ними.

Лабораторна робота №7

«ВИЗНАЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ ПОКАЗНИКІВ КОРЕЛЯЦІЇ ТА ЇХ ДОСТОВІРНОСТІ»

Мета роботи: навчитись визначати числові показники кореляції, овоїти застосування стандартних функцій MS Excel для вирішення завдань аналізу зв'язків.

Основна частина

Більшість криволінійних зв'язків, які зустрічаються у біології, близькі до прямолінійних і їх зручніше аналізувати з використанням коефіцієнта кореляції.

Між морфологічними елементами живих організмів існує певний взаємозв'язок, який полягає в тому, що із збільшенням або зменшенням розміру одного елемента (x) відповідно збільшуються або зменшуються розміри іншого елемента (y).

Кореляційний зв'язок розрізняють:

- за формою: прямолінійний або криволінійний;
- за напрямом: прямий (додатній) або зворотній (від'ємний);
- за тісністю: дуже тісний, тісний, значний, помірний, слабкий.

Коефіцієнт кореляції (r) – числовий показник простої лінійної кореляції, який описує напрям і тісноту зв'язку між досліджуваними величинами, вимірює зв'язок лише при лінійній формі залежності, а його абсолютне значення знаходиться в межах від -1 до $+1$. При значенні $r = 0$ – зв'язок відсутній; при $+1$ – пряма кореляційна залежність; а при -1 – зворотня (Ф.7.1).

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})}{\sqrt{(x - \bar{x})^2 \cdot (y - \bar{y})^2}} \quad (7.1)$$

Якщо зв'язку дати оцінку 1, то віддалення від 1 (0,9; 0,8; 0,7;...0,1; 0) буде характеризувати тісноту відповідного кореляційного зв'язку. Показник $r > 0,9$ свідчить про дуже тісний зв'язок, $r = 0,7-0,9$ – тісний зв'язок; $r = 0,5-0,7$ – значний зв'язок; $r = 0,3-0,5$ характеризує помірний зв'язок, а $r < 0,3$ – слабкий зв'язок.

Макет рекомендованої допоміжної таблиці для розрахунків коефіцієнта кореляції наведено в табл. 7.1.

Таблиця 7.1

| x | y | $x - \bar{x}$ | $y - \bar{y}$ | $(x - \bar{x})^2$ | $(y - \bar{y})^2$ |
|-----|-----|---------------|---------------|-------------------|-------------------|
|-----|-----|---------------|---------------|-------------------|-------------------|

Помилка коефіцієнта кореляції розраховується за формулою (Ф.7.2):

$$S_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}} \quad (7.2)$$

де n – об'єм вибірки.

Показник достовірності коефіцієнта кореляції розраховується за формулою (Ф.7.3):

$$t_r = \frac{r}{S_r}; \quad (7.3)$$

Критичне (стандартне) значення критерія $t_{5\%}$ береться з таблиць (додаток 1) за числом ступенів свободи: $\nu=n-2$. Порівнюючи фактичне і критичне значення критеріїв, роблять відповідний висновок:

- якщо $t_f > t_{5\%}$ – коефіцієнт кореляції достовірний; встановлену тісноту зв'язку доведено;
- якщо $t_f < t_{5\%}$ – коефіцієнт кореляції недостовірний; причиною може бути недостатній об'єм вибірки або відсутність зв'язку.

Кореляційний аналіз в *MS Excel*.

Коефіцієнт кореляції у *MS Excel* розраховується за допомогою статистичної функції **КОРЕЛЛ**, в полях *Массив1* і *Массив2* вводять послідовно посилання на діапазон значення x і на діапазон значення y відповідно і *OK*.

Завдання для виконання

Завдання 1. Проаналізувати наявність зв'язку між діаметрами і висотами у 10 дерев ялівця звичайного. Зробити висновки.

| | | | | | | | | | | |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| X | 19,6 | 17,7 | 13,5 | 21,9 | 15,1 | 11,4 | 21,1 | 16,4 | 21,5 | 19,3 |
| Y | 19,0 | 18,9 | 17,4 | 19,2 | 19,8 | 10,7 | 20,2 | 19,1 | 22,1 | 20,5 |

Завдання 2. Провести аналіз залежності між довжиною 20 окремих листків липи широколистої та їх площами (табл. 7.2), визначених на основі індивідуальних вимірів. Зробити висновки.

Таблиця 4.2

Вихідні дані

| Номери листків (пар) | Довжина листка, см (x) | Площа листка, см ² (y) |
|----------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| 1 | 16,1 | 7,4 |
| 2 | 17,3 | 8,7 |
| 3 | 18,6 | 10,3 |
| 4 | 20,0 | 11,2 |
| 5 | 21,3 | 12,9 |
| 6 | 21,6 | 13,2 |
| 7 | 21,8 | 13,7 |
| 8 | 22,0 | 14,1 |
| 9 | 22,4 | 14,3 |
| 10 | 22,8 | 14,8 |
| 11 | 23,1 | 15,2 |
| 12 | 23,3 | 16,2 |
| 13 | 23,3 | 16,7 |
| 14 | 23,7 | 17,0 |
| 15 | 24,0 | 17,4 |
| 16 | 24,1 | 19,2 |
| 17 | 25,2 | 19,3 |
| 18 | 26,0 | 20,3 |
| 19 | 26,5 | 21,4 |
| 20 | 26,4 | 22,3 |

Висновок:

Контрольні запитання

1. Що таке кореляція і якою вона буває?
2. Що таке основний показник кореляційного аналізу та його використання?

Лабораторна робота №8

«РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ. ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ РЕГРЕСІЇ»

Мета роботи: навчитись проводити регресійний аналіз.

Основна частина

При оцінці ступеня взаємозв'язку статистичних величин важливо провести математичне моделювання, тобто підібрати аналітичне рівняння, яке відповідало б природі досліджуваного явища з метою передбачення поведінки незалежної характеристики об'єкта при зміні залежного параметра. Динаміка взаємної залежності між змінними величинами отримала назву **регресії**, а методика дослідження регресії носить назву **регресійного аналізу**.

Метою регресійного аналізу є встановлення певного виду рівняння, графічне вираження якого (**лінія регресії**) добре апроксимує розподіл фактичних значень ознаки. Будь-яка залежність може бути описана рівнянням виду: $y = f(x)$, де y – залежна ознака (значення функції), x – незалежна факторна ознака (аргумент функції).

Регресія – це зміна значення функції в залежності від зміни одного або декількох аргументів.

Емпіричний ряд регресії – це подвійний ряд значень ознак аргументу і значень відповідних ознак функції. Якщо при зростанні чи спаданні аргументу функція також пропорційно зростає чи спадає, регресія є прямолінійною, в іншому випадку – криволінійною.

Найпростішим прикладом регресії є рівняння прямої: $y = a + b x$, де y – залежна ознака; x – незалежна ознака; a – вільний член рівняння (ордината точки перетину прямої з віссю ординат); b – коефіцієнт лінійної регресії (абсциса точки перетину прямої з віссю абсцис).

Коефіцієнт лінійної регресії (b) – це число, яке вказує напрям і середню величину зміни залежної ознаки при зміні факторної на одиницю виміру. Коефіцієнт b має знак коефіцієнта кореляції. Коефіцієнт a приймає додатне значення, якщо лінія регресії перетинає вісь OY над початком координат і від'ємне значення, якщо лінія регресії проходить нижче початку координат. Чим більший коефіцієнт b , тим більший кут нахилу прямої.

До завдань регресійного аналізу належить:

- обчислення коефіцієнтів рівняння;
- встановлення достовірності коефіцієнтів рівняння;
- знаходження теоретичних (найімовірніших) значень залежної ознаки;
- обчислення середнього квадратичного відхилення від регресії (помилка рівняння);
- вирівнювання емпіричних рядів;
- оцінка точності вирівнювання;
- визначення ефекту регресії при вимірюванні варіації залежної ознаки;
- вибір рівняння, яке найточніше описує існуючу залежність;
- визначення стандартної помилки обчисленого значення.

При обчисленні коефіцієнтів рівнянь можна використати наступні способи: графічний, спосіб вибраних точок, спосіб найменшої помилки, за центральними

відхиленнями, за способом Маркова, за коефіцієнтом кореляції, спосіб найменших квадратів та за числовими коефіцієнтами (спосіб Труля).

У даній лабораторній роботі пропонується для визначення коефіцієнтів регресії $a_{x/y}$ і $b_{x/y}$ використовувати наступні формули (Ф.8.1 і Ф.8.2):

$$a_{x/y} = y_c - b_{x/y} \cdot x_c \quad (8.1)$$

$$b_{x/y} = \frac{\sum xy - nx_c y_c}{\sum x^2 - nx_c^2} \quad (8.2)$$

Помилку рівняння регресії визначають за формулою (Ф.8.3):

$$m_{yx} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - y_i)^2 \cdot n_i}{n - f}} \quad (8.3)$$

де $y_i - y_i$ – відхилення фактичних значень результуючої ознаки від теоретичних;
 n – кількість пар спостережень;
 f – число коефіцієнтів рівняння.

Достовірність коефіцієнта лінійної регресії $a_{x/y}$ визначають за наступними формулами (Ф.8.4) і (Ф.8.5):

коефіцієнта a :

$$t_\phi = \frac{a}{m_{yx} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{x_c}{\sigma_x}\right)^2}} \quad (8.4)$$

коефіцієнта b :

$$t_\phi = \frac{b \cdot \sigma_x \cdot \sqrt{n-1}}{m_{yx}} \quad (8.5)$$

де m_{yx} – помилка рівняння регресії;
 a – вільний член рівняння;
 x_c – середнє значення незалежної ознаки;
 σ_x – стандартне відхилення ряду x ;
 b – коефіцієнт лінійної регресії.

Завдання для виконання

Завдання 1. Ознайомитися із основами регресійного аналізу з особливостями визначення коефіцієнтів регресії прямої та параболи: обчислити коефіцієнти регресії прямої для біологічних ознак наведених у табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Вихідні дані

| | | | | | | | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| x_i | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 |
| y_i | 14,3 | 16,5 | 18,6 | 19,1 | 19,5 | 20,6 | 20,6 | 20,7 | 21,9 | 22,0 | 22,7 | 24,0 |
| n_i | 8 | 17 | 33 | 25 | 32 | 31 | 20 | 17 | 8 | 4 | 3 | 2 |

Висновок:

Контрольні запитання

1. Що таке регресія?
2. Побудова емпіричних рядів регресії.
3. Що таке рівняння регресії?
4. Що таке коефіцієнт регресії?
5. Які є способи визначення коефіцієнтів регресії?

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

На першій лабораторній парі викладач проводить вступний інструктаж з техніки безпеки, здобувачі вищої освіти знайомляться з робочими місцями, правилами проведення та задачі лабораторних робіт.

Кожна робота повинна бути захищена. Захист лабораторної роботи складається з уміння здобувача вищої освіти викласти основні теоретичні положення теми, методики дослідження, проаналізувати отримані результати.

Критерії оцінки лабораторних робіт наведені в табл. 9.1.

Таблиця 9.1

Критерії оцінки лабораторних робіт

| Критерії виконання та захисту лабораторної роботи | Сума балів ECTS | Оцінка за національною шкалою |
|---|------------------------|--|
| Усі розрахунки виконано вірно. Висновки зроблено коректно. Здобувач вищої освіти може пояснити хід виконання роботи та навести формули, що застосовувались. | 90 – 100 | відмінно |
| Усе перелічене вище, але робота захищена із запізненням без поважних причин. | 82 – 89 | добре |
| У роботі знайдено незначні відхилення розрахунків. | 75-81 | |
| Здобувач вищої освіти не може пояснити хід виконання лабораторної роботи та навести приклади й формули, що застосовувались. | 66-74 | задовільно |
| Лабораторну роботу виконано із помилками та без захисту. | 60-65 | |
| Лабораторну роботу не виконано. | 0-59 | незадовільно з можливістю повторного складання |

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Атраментова Л.О., Утевська О.М. Біометрія: підруч. для студ. вищ. навч. закл. – Х.: Ранок, 2007. – 176 с.
2. Біла Ю.М. Методичні вказівки до вивчення курсу «Біометрія». – Х., 2017 – 52 с.
3. Прилуцький Ю.І., Ільченко О.В., Цимбалюк О.В., Костерін С.О. Статистичні методи в біології: підручник. Київ: Наукова думка, 2017. 216 с.
4. Прилуцький Ю.І., Костерін С.О. Комп'ютерне моделювання в біології. Київ. Наукова думка. 2024. 196 с.
5. Калінін М.І. Біометрія: Підручник для студентів вузів біологічних і екологічних напрямків./ Калінін М.І., Єлісеєв В.В. – Миколаїв: Вид-во МФ НаУКМА, 2000. – 204 с.
6. Чепур С.С. Біометрія: Методичний посібник. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2015. – 40 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Стандартні значення критерію Стьюдента

| Число ступенів свободи $u=n_1+n_2-2$ | Критерій Стьюдента t_{st} при імовірності безпомилкового заключення p | | | |
|---|---|--------|--------|--------|
| | 0.1 | 0.05 | 0.02 | 0.01 |
| 1 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.952 |
| 3 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | 1.782 | 2.179 | 2.684 | 3.055 |
| 13 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | 1.732 | 2.131 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 1.723 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | 1.714 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| 30 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 |
| ∞ | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |

Значення критерію Фішера F

| U ₂ | Ступінь свободи для більшої дисперсії U ₁ | | | | | | | | | | | |
|--|--|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 16 | 24 | 30 | 50 | ∞ |
| 5%-ний рівень значущості F _{0,05} | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 9,3 | 9,1 | 9,0 | 8,9 | 8,8 | 8,8 | 8,7 | 8,7 | 8,6 | 8,6 | 8,6 | 8,5 |
| 4 | 6,6 | 6,4 | 6,3 | 6,2 | 6,0 | 5,9 | 5,8 | 5,8 | 5,8 | 5,7 | 5,7 | 5,6 |
| 5 | 5,4 | 5,2 | 5,1 | 5,0 | 4,8 | 4,7 | 4,7 | 4,6 | 4,5 | 4,5 | 4,4 | 4,4 |
| 6 | 4,8 | 4,5 | 4,4 | 4,3 | 4,2 | 4,1 | 4,0 | 3,9 | 3,8 | 3,8 | 3,8 | 3,7 |
| 7 | 4,4 | 4,1 | 4,0 | 3,9 | 3,7 | 3,6 | 3,6 | 3,5 | 3,4 | 3,4 | 3,4 | 3,2 |
| 8 | 4,1 | 3,8 | 3,7 | 3,6 | 3,4 | 3,4 | 3,4 | 3,2 | 3,1 | 3,1 | 3,0 | 2,9 |
| 9 | 3,9 | 3,6 | 3,5 | 3,4 | 3,2 | 3,2 | 3,1 | 3,0 | 2,9 | 2,9 | 2,8 | 2,7 |
| 10 | 3,7 | 3,5 | 3,3 | 3,2 | 3,1 | 3,0 | 2,9 | 2,8 | 2,7 | 2,7 | 2,6 | 2,5 |
| 12 | 3,5 | 3,3 | 3,1 | 3,0 | 2,9 | 2,8 | 2,7 | 2,6 | 2,5 | 2,5 | 2,4 | 2,3 |
| 16 | 3,2 | 3,1 | 2,9 | 2,8 | 2,7 | 2,5 | 2,4 | 2,3 | 2,2 | 2,2 | 2,1 | 2,0 |
| 18 | 3,2 | 2,9 | 2,8 | 2,7 | 2,5 | 2,4 | 2,3 | 2,3 | 2,2 | 2,1 | 2,0 | 1,9 |
| 24 | 3,0 | 2,8 | 2,6 | 2,5 | 2,4 | 2,3 | 2,2 | 2,1 | 2,0 | 1,9 | 1,9 | 1,7 |
| 40 | 2,8 | 2,6 | 2,5 | 2,3 | 2,2 | 2,1 | 2,0 | 1,9 | 1,8 | 1,7 | 1,7 | 1,5 |
| 120 | 2,7 | 2,4 | 2,3 | 2,2 | 2,0 | 1,9 | 1,8 | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 1,5 | 1,3 |
| ∞ | 2,6 | 2,4 | 2,2 | 2,1 | 1,9 | 1,8 | 1,8 | 1,6 | 1,5 | 1,5 | 1,4 | 1,0 |
| 1%-ний рівень значущості F _{0,01} | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 29,5 | 28,7 | 28,2 | 27,9 | 27,5 | 27,0 | 26,8 | 26,6 | 26,5 | 26,5 | 26,4 | 26,1 |
| 4 | 16,7 | 16,0 | 15,5 | 15,2 | 14,8 | 14,5 | 14,4 | 14,2 | 13,9 | 13,8 | 13,7 | 13,5 |
| 5 | 12,1 | 11,4 | 11,0 | 10,7 | 10,3 | 10,1 | 9,9 | 9,7 | 9,5 | 9,4 | 9,2 | 9,0 |
| 6 | 9,8 | 9,2 | 8,8 | 8,5 | 8,1 | 7,9 | 7,7 | 7,5 | 7,3 | 7,2 | 7,1 | 6,9 |
| 7 | 8,4 | 7,8 | 7,5 | 7,2 | 6,8 | 6,6 | 6,5 | 6,3 | 6,1 | 6,0 | 5,8 | 5,6 |
| 8 | 7,6 | 7,0 | 6,6 | 6,4 | 6,0 | 5,8 | 5,7 | 5,5 | 5,3 | 5,2 | 5,1 | 4,9 |
| 9 | 7,0 | 6,4 | 6,1 | 5,8 | 5,5 | 5,3 | 5,1 | 4,9 | 4,7 | 4,6 | 4,5 | 4,3 |
| 10 | 6,6 | 6,0 | 5,6 | 5,4 | 5,1 | 4,9 | 4,7 | 4,5 | 4,3 | 4,3 | 4,1 | 3,9 |
| 12 | 6,0 | 5,4 | 5,1 | 4,8 | 4,5 | 4,3 | 4,2 | 4,0 | 3,8 | 3,7 | 3,6 | 3,4 |
| 16 | 5,3 | 4,8 | 4,4 | 4,2 | 3,9 | 3,7 | 3,6 | 3,4 | 3,2 | 3,1 | 3,0 | 2,8 |
| 20 | 4,9 | 4,4 | 4,1 | 3,9 | 3,6 | 3,4 | 3,2 | 3,0 | 2,9 | 2,8 | 2,6 | 2,4 |
| 30 | 4,5 | 4,0 | 3,7 | 3,5 | 3,2 | 3,0 | 2,8 | 2,7 | 2,5 | 2,4 | 2,2 | 2,0 |
| 60 | 4,1 | 3,6 | 3,3 | 3,1 | 2,8 | 2,6 | 2,5 | 2,3 | 2,1 | 2,0 | 1,9 | 1,6 |
| 120 | 3,9 | 3,5 | 3,2 | 3,0 | 2,7 | 2,4 | 2,3 | 2,2 | 1,9 | 1,9 | 1,7 | 1,4 |
| ∞ | 3,8 | 3,3 | 3,0 | 2,8 | 2,5 | 2,3 | 2,2 | 2,0 | 1,8 | 1,7 | 1,5 | 1,0 |

Критичне значення χ^2 для трьох степенів довірчої імовірності

| Число ступенів свободи, U | Рівень значущості | | | Число ступенів свободи, U | Рівень значущості | | |
|---------------------------|-------------------|------|-------|---------------------------|-------------------|-------|-------|
| | 0.95 | 0.99 | 0.999 | | 0.95 | 0.99 | 0.999 |
| 1 | 3.8 | 6.6 | 10.8 | 26 | 38.9 | 45.6 | 54.1 |
| 2 | 6.0 | 9.2 | 13.8 | 27 | 40.1 | 47.0 | 55.5 |
| 3 | 7.8 | 11.3 | 16.3 | 28 | 41.3 | 48.3 | 56.9 |
| 4 | 9.5 | 13.3 | 18.5 | 29 | 42.6 | 49.6 | 58.3 |
| 5 | 11.1 | 15.1 | 20.5 | 30 | 43.8 | 50.9 | 59.7 |
| 6 | 12.6 | 16.8 | 22.5 | 32 | 46.2 | 53.5 | 62.4 |
| 7 | 14.1 | 18.5 | 24.3 | 34 | 48.6 | 56.0 | 65.2 |
| 8 | 15.5 | 20.1 | 26.1 | 36 | 51.0 | 58.6 | 67.9 |
| 9 | 16.9 | 21.7 | 27.9 | 38 | 53.4 | 61.1 | 70.7 |
| 10 | 18.3 | 23.2 | 29.6 | 40 | 55.8 | 63.7 | 73.4 |
| 11 | 19.7 | 24.7 | 31.3 | 42 | 58.1 | 66.2 | 76.1 |
| 12 | 21.0 | 26.2 | 32.9 | 44 | 60.5 | 68.7 | 78.7 |
| 13 | 22.4 | 27.7 | 34.5 | 46 | 62.8 | 71.2 | 81.4 |
| 14 | 23.7 | 29.1 | 36.1 | 48 | 65.2 | 73.7 | 84.0 |
| 15 | 25.0 | 30.6 | 37.7 | 50 | 67.5 | 76.2 | 86.7 |
| 16 | 26.3 | 32.0 | 39.3 | 55 | 73.3 | 82.3 | 93.2 |
| 17 | 27.6 | 33.4 | 40.8 | 60 | 79.1 | 88.4 | 99.6 |
| 18 | 28.9 | 34.8 | 42.3 | 65 | 89.8 | 94.4 | 106.0 |
| 19 | 30.1 | 36.2 | 43.8 | 70 | 90.5 | 100.4 | 112.3 |
| 20 | 31.4 | 37.6 | 45.3 | 75 | 96.2 | 106.4 | 118.5 |
| 21 | 32.7 | 38.9 | 46.8 | 80 | 101.9 | 112.3 | 124.8 |
| 22 | 33.9 | 40.3 | 48.3 | 85 | 107.5 | 118.2 | 131.0 |
| 23 | 35.2 | 41.6 | 49.7 | 90 | 113.1 | 124.1 | 137.1 |
| 24 | 36.4 | 43.0 | 51.2 | 95 | 118.7 | 130.0 | 143.3 |
| 25 | 37.7 | 44.3 | 52.5 | 100 | 124.3 | 135.8 | 149.4 |