

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І
ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ**

**СУЧАСНІ МЕТОДИ І ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ
СКЛАДНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЗАЦІЇ БІОТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання практичних занять**

для здобувачів
третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти
за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»
галузі знань 15 «Автоматизація та приладобудування»
Кваліфікація: PhD доктор філософії
(денної, вечірньої та заочної форми навчання)

Київ-2022

УДК 621.391(075.8)

У методичних вказівках подано опис практичних робіт, присвячених питанням розробки і використанню математичних і імітаційних моделей складних систем автоматизації біотехнічних об'єктів. Методичні вказівки до виконання практичних занять з навчальної дисципліни «Сучасні методи і засоби математичного моделювання складних систем автоматизації біотехнічних об'єктів» призначені для підготовки здобувачів третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» галузі знань 15 «Автоматизація та приладобудування» (кваліфікація: PhD доктор філософії).

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради ННІ енергетики, автоматики і енергозбереження Національного університету біоресурсів і природокористування України (протокол № 11 від 17 грудня 2021 р.).

Укладачі: д.т.н., проф. Н.А. Заєць, к.т.н., доцент В.О. Мірошник.

Рецензенти: д.т.н., проф., професор кафедри автоматизації та комп'ютерних технологій систем управління НУХТ Луцька Н.М., доцент кафедри АРС НУБіП України Опришко О.О.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

СУЧАСНІ МЕТОДИ І ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЗАЦІЇ БІОТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Методичні вказівки до виконання практичних робіт
для здобувачів
третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти
за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»
галузі знань 15 «Автоматизація та приладобудування»
Кваліфікація: PhD доктор філософії

Укладачі: ЗАЄЦЬ Наталія Анатоліївна,
МІРОШНИК Володимир Олександрович

Зав. Видавничим центром НУБіП А.П. Колесніков

Підписано до друку 17.01.22

Ум. друк. арк. 4,9

Наклад 100 прим.

Формат 60x84/16

Обл. вид. арк. 4,2

Зам. № 2917

Видавничий центр НУБіП

03041, вул. Героїв Оборони, 15

ЗМІСТ

Передмова	4
Практична робота № 1	
Моделювання складних систем автоматизації: компоненти й класифікація	6
Практична робота № 2	
Багатоканальна модель роботизованої системи із пуассонівським вхідним потоком й експонентним розподілом тривалості обслуговування	19
Практична робота № 3	
Статистичне моделювання складних систем автоматизації. Моделювання випадкових подій із заданим законом розподілу	35
Практична робота № 4	
Математичне моделювання робототехнічних систем біотехнічних об'єктів	50
Практична робота № 5	
Моделювання інтегратора (<i>Integrator</i>) і блоку диференціювання (<i>Derivative</i>)	62
Список літератури	70

ПЕРЕДМОВА

Постановка науково-технічної задачі аналізу і синтезу систем автоматизації біотехнічних об'єктів була обумовлена необхідністю розробки математичних та імітаційних моделей комплексування технічних і біологічних елементів в єдиному контурі управління.

У складних кібернетичних системах, призначених для підтримки фізіологічних умов існування організму зростають вимоги до об'єктивності результатів техніко-біологічних досліджень.

Предметом дисципліни «Сучасні методи і засоби математичного моделювання складних систем автоматизації біотехнічних об'єктів» є питання розробки і використання математичних і імітаційних моделей складних систем автоматизації.

Мета дисципліни є теоретична і практична підготовка аспірантів, отримання ними знань з розробки і дослідження математичних моделей складних систем автоматизації і вміння використовувати їх в навчальному процесі, дослідницьких і проектних роботах.

Об'єктом дисципліни є математичні моделі процесів і методи розрахунків складних систем автоматизації.

Завдання дисципліни полягають у формуванні у аспірантів інтегральної компетентності: Здатність продукувати нові ідеї, розв'язувати комплексні проблеми професійної та/або дослідницько-інноваційної діяльності у сфері автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій, застосовувати методологію наукової та педагогічної діяльності, а також проводити власне наукове дослідження, результати якого мають наукову новизну, теоретичне та практичне значення.

Дисципліна забезпечує формування таких компетентностей та програмних результатів навчання:

Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.

Здатність виконувати оригінальні дослідження, досягати наукових результатів, які створюють нові знання у сфері автоматизації, у тому числі біотехнічних об'єктів, з використанням комп'ютерно-інтегрованих технологій, керування складними організаційно-технічними чи кіберфізичними системами та дотичних до неї міждисциплінарних напрямках і можуть бути опубліковані у провідних наукових виданнях.

Здатність застосовувати сучасні методи дослідження, синтезу, проектування систем автоматизації, комп'ютерно-інтегрованих технологій, їх програмних та апаратних компонентів, спеціалізоване програмне забезпечення у науковій та навчальній діяльності.

Здатність створювати новітні системи автоматизації, комп'ютерно-інтегровані технології, розробляти їх технічне, інформаційне, математичне, програмне та організаційне забезпечення із застосуванням сучасних інформаційних технологій, інструментів та компонентів.

Здатність розробляти новітні робототехнічні системи складних біотехнічних об'єктів.

Мати передові концептуальні та методологічні знання з автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій та з дотичних міждисциплінарних напрямів, розуміти методологію наукових досліджень, уміти застосовувати їх у власних дослідженнях, скерованих на отримання нових знань та/або здійснення інновацій, та у викладацькій практиці.

Розробляти та досліджувати концептуальні, математичні і комп'ютерні моделі об'єктів і процесів автоматизації, ефективно використовувати їх для отримання нових знань та/або створення інноваційних розробок у сфері автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій та дотичних міждисциплінарних напрямках.

Планувати і виконувати експериментальні та/або теоретичні дослідження систем автоматизації, комп'ютерно-інтегрованих комплексів та їх складових з використанням сучасних методів дослідження, технічних, програмних засобів та з дотриманням норм академічної і професійної етики. Формулювати і перевіряти гіпотези; використовувати для обґрунтування висновків результати теоретичного аналізу, експериментальних досліджень і математичного та/або комп'ютерного моделювання, наявні літературні дані.

Розробляти і застосовувати сучасні методи аналізу, синтезу, проектування та дослідження систем автоматизації, комп'ютерно-інтегрованих технологій, їх програмних та апаратних компонентів.

Розробляти і застосовувати сучасні методи аналізу, синтезу, проектування та дослідження робототехнічних систем складних біотехнічних об'єктів.

У результаті вивчення навчальної дисципліни аспірант повинен знати:

– найбільш розповсюджені методи та засоби, які використовуються

при проведенні наукових досліджень;

– володіти навичками здобуття знань;

вміти:

– ставити наукову проблему, тобто вміти відокремити відомі та невідомі факти, факти пояснені та ті, що потребують пояснення; факти, що відповідають теорії та факти, що їй суперечать;

– самостійно здійснювати аналіз та моделювання предметної області;

– знаходити потрібну інформацію за допомогою бібліотечних каталогів та пошукових систем в Internet;

– робити вибір конкретних методів наукових досліджень;

– розрізняти методи теоретичних та емпіричних досліджень;

– виявляти переваги методів теоретичних досліджень та застосовувати ці методи до наукових досліджень;

– довести свої судження і спростувати (якщо необхідно) докази опонентів, сформулювати предмет доказу.

Практична робота № 1

Моделювання складних систем автоматизації: компоненти й класифікація

Час виконання роботи — 4 години.

Мета: ознайомлення з методами моделювання систем масового обслуговування та визначення їх характеристик.

Системи масового обслуговування — це системи, до яких у випадкові моменти часу надходять запити на обслуговування, які надійшовши, обслуговуються за допомогою наявних в розпорядженні системи каналів обслуговування.

З позиції моделювання процесу масового обслуговування ситуації, під час утворення черги запитів на обслуговування, виникають в такий спосіб. Надійшовши до обслуговуючої системи, запит приєднатися до черги інших запитів, що надійшли раніше. Канал обслуговування вибирає запит з вже існуючих у черзі, для того щоб розпочати обслуговування. Після завершення процедури обслуговування чергового запиту канал обслуговування приступає до обслуговування наступного запиту, якщо це передбачено в блоці очікування.

Цикл функціонування системи масового обслуговування подібного роду повторюється багаторазово протягом всього періоду роботи обслуговуючої системи. При цьому передбачається, що перехід системи на обслуговування чергового запиту після завершення обслуговування попереднього відбувається миттєво, у випадкові моменти часу.

Основними компонентами системи масового обслуговування будь-якого виду є:

- вхідний потік запитів або заявок, що надходять на обслуговування;
- дисципліна черги;
- механізм обслуговування.

Вхідний потік запитів. Для опису вхідного потоку потрібно задати імовірнісний закон, що визначає послідовність моментів надходження запитів на обслуговування і вказати їхню кількість в кожному наступному надходженні. При цьому, як правило, оперують поняттям «імовірнісний розподіл моментів надходження запитів». Тут можуть надходити як одиночні, так і групові запити (запити надходять групами в систему). В останньому випадку звичайно мова йде про систему обслуговування з паралельно-груповим обслуговуванням.

Дисципліна черги — це важливий компонент системи масового обслуговування, що визначає принцип, відповідно до якого запити, що надходять на вхід обслуговуючої системи приєднуються з черги до процедури обслуговування. Найчастіше використовуються дисципліни черги, обумовлені наступними правилами:

- першим прийшов — перший обслуговується;

- прийшов останнім — обслуговуєшся першим;
- випадковий відбір запитів;
- відбір запитів за критерієм пріоритетності;
- обмеження часу очікування моменту настання обслуговування (має місце черга з обмеженим часом очікування обслуговування, що асоціюється з поняттям «припустима довжина черги»).

Механізм обслуговування визначається характеристиками самої процедури обслуговування й структурою обслуговуючої системи. До характеристик процедури обслуговування відносять: тривалість процедури обслуговування й кількість запитів, що задовольняють у результаті виконання кожної такої процедури. Для аналітичного опису характеристик процедури обслуговування оперують поняттям “імовірнісний розподіл часу обслуговування запитів”.

Слід зазначити, що час обслуговування запитів залежить від його характеру або вимог клієнта, від стану й можливостей обслуговуючої системи. У ряді випадків доводиться також враховувати ймовірність виходу обслуговуючого приладу після закінчення визначеного інтервалу часу.

Структура обслуговуючої системи визначається кількістю й взаємним розташуванням каналів обслуговування (механізмів, приладів і т.п.). Насамперед варто підкреслити, що система обслуговування може мати не один канал обслуговування, а декілька; система такого роду здатна обслуговувати одночасно кілька запитів. У цьому випадку всі канали обслуговування пропонують ті самі послуги, і, можна стверджувати, що має місце паралельне обслуговування.

Система обслуговування може складатися з декількох різнотипних каналів обслуговування, через які повинно пройти кожен запит, що обслуговується, тобто в обслуговуючій системі процедури обслуговування запитів реалізуються послідовно. Механізм обслуговування визначає характеристики вихідного потоку вимог (запитів).

Предметом теорії масового обслуговування є встановлення залежності між факторами, що визначають функціональні можливості системи масового обслуговування і ефективністю її функціонування. У більшості випадків всі параметри, що описують системи масового обслуговування, є випадковими величинами або функціями, тому ці системи відносяться до стохастичним систем.

Випадковий характер потоку запитів (вимог) і тривалості обслуговування приводить до того, що в системі масового обслуговування відбувається випадковий процес. По характеру випадкового процесу, що відбуває в системі масового обслуговування (СМО), розрізняють системи марківські й немарківські. У марківських системах вхідний потік вимог (запитів) і вихідний потік обслужених вимог (запитів) є пуассонівськими. Пуассонівські потоки дозволяють легко описати й побудувати математичну модель системи масового обслуговування. Дані моделі мають прості рішення, тому більшість відомих додатків теорії масового обслуговування використовують марківську схему. У випадку немарківських процесів задачі дослідження систем масового

обслуговування значно ускладнюються й вимагають застосування статистичного моделювання, чисельних методів з використанням ЕОМ.

Незалежно від характеру процесу, що протікає в системі масового обслуговування, розрізняють два основних види СМО:

- системи з відмовами, у яких заявка, що надійшла в систему в момент, коли всі канали зайняті, одержує відмову й відразу ж залишає чергу;
- системи з очікуванням (чергою), у яких заявка, що надійшла в момент, коли всі канали обслуговування зайняті, стає в чергу й чекає, поки не звільниться один з каналів. Системи масового обслуговування з очікуванням діляться на системи з обмеженим очікуванням і системи з необмеженим очікуванням.

У системах з обмеженим очікуванням може обмежуватися:

- довжина черги;
- час перебування в черзі.

У системах з необмеженим очікуванням запит, що коштує в черзі, чекає обслуговування до тих пір, поки не підійде черга.

Всі системи масового обслуговування розрізняють за числом каналів обслуговування:

- одноканальні системи;
- багатоканальні системи.

Наведена класифікація СМО є умовною. На практиці найчастіше системи масового обслуговування виступають як змішані системи. Наприклад, запити очікують початку обслуговування до певного моменту, після чого система починає працювати як система з відмовами.

Одноканальна модель із пуасонівським вхідним потоком з експоненціальним розподілом тривалості обслуговування

Найпростішою одноканальною моделлю з імовірнісними вхідними потоками і процедурою обслуговування є модель, що характеризується розподілом інтервалів між надходженнями запитів і обслуговування. При цьому густина розподілу інтервалів між надходженнями запитів має вигляд

$$f_1(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \quad (1)$$

де λ — інтенсивність надходження запитів у систему.

Густина розподілу тривалості обслуговування:

$$f_2(x) = \mu \cdot e^{-\mu x}, \quad (2)$$

де μ — інтенсивність обслуговування.

Нехай система працює з **відмовами**. Необхідно визначити абсолютну й відносну пропускну здатність системи.

Представимо дану систему масового обслуговування у вигляді графа (рис. 1), у якого є два стани: S_0 — канал вільний (очікування); S_1 — канал зайнятий (виконується обслуговування заявки).

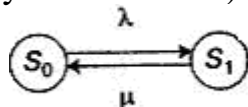


Рис. 1. Граф станів одноканальної СМО з відмовами

Позначимо ймовірності станів: $P_0(t)$ — ймовірність стану «канал вільний»; $P_1(t)$ — ймовірність стану «канал зайнятий». По розміченому графі станів (рис. 1) складемо систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей станів:

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t) \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -\mu \cdot P_1(t) + \lambda \cdot P_0(t). \end{cases} \quad (3)$$

Система лінійних диференціальних рівнянь (3) має розв'язок з урахуванням нормувальних умов $P_0(t) + P_1(t) = 1$. Розв'язок даної системи називається *несталим*, оскільки безпосередньо залежить від t і виглядає в такий спосіб:

$$P_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad (4)$$

$$P_1(t) = 1 - P_0(t) = 1. \quad (5)$$

Неважко переконатися, що для одноканальної СМО з відмовами ймовірність $P_0(t)$ є не що інше, як відносна пропускна здатність системи q .

Дійсно, P_0 — ймовірність того, що в момент t канал вільний і запит, що прийшов до моменту t , буде виконано, а отже, для даного моменту часу t середнє відношення числа обслужених заявок до числа тих, що надійшли, також дорівнює $P_0(t)$, тобто

$$q = P_0(t). \quad (6)$$

Після закінчення великого інтервалу часу (при $t \rightarrow \infty$) досягається стаціонарний (сталий) режим:

$$q = P_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda}. \quad (7)$$

Знаючи відносну пропускну здатність можна знайти абсолютну. *Абсолютна пропускна здатність (А)* — середнє число заявок, що може обслужити система масового обслуговування за одиницю часу:

$$A = \lambda \cdot q = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}. \quad (8)$$

Ймовірність відмови в обслуговуванні запиту буде дорівнювати ймовірності стану «канал зайнятий»:

$$P_{відм} = P_1 = 1 - P_0 = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (9)$$

Дана величина $P_{відм}$ може бути інтерпретована як середня частка

необслужених запитів серед поданих.

Приклад 1. Нехай одноканальна СМО з відмовами являє собою один пост щоденного обслуговування (ЩО) для годування тварин. Запит — тварина, що прийшла у момент, коли пост зайнятий, — одержує відмову в обслуговуванні. Інтенсивність потоку тварин $\lambda = 2,0$ (тварин за годину). Середня тривалість обслуговування — 1,5 години. Потік тварин і потік обслуговування є найпростішими.

Потрібно визначити в сталому режимі граничні значення:

- відносної пропускної здатності q ;
- абсолютної пропускної здатності A ;
- імовірності відмови $P_{відм}$.

Зрівняйте фактичну пропускну здатність СМО з номінальною, яка була б при умові, що кожен автомобіль обслуговувався точно 1,5 години і автомобілі їхали один за одним без перерви.

Розв'язок

1. Визначимо інтенсивність потоку обслуговування:

$$\mu = \frac{2}{1,5} = 1,333.$$

2. Обчислимо відносну пропускну здатність:

$$q = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{1,333}{1,333 + 2,0} = 0,40.$$

Величина q означає, що в сталому режимі система буде обслуговувати приблизно 40% тварин, що прибувають на пост ЩО.

3. Абсолютну пропускну здатність визначимо за формулою (8):

$$A = \lambda \cdot q = 2,0 \cdot 0,41 = 0,82.$$

Це означає, що система (пост ЩО) здатна здійснити в середньому 0,82 обслуговування тварин у годину.

4. Імовірність відмови:

$$P_{відм} = 1 - q = 1 - 0,40 = 0,6.$$

Це означає, що близько 60% прибулих тварин на пост ЩО одержать відмову в обслуговуванні.

5. Визначимо номінальну пропускну здатність системи:

$$A_{ном} = \frac{1}{t_{обсл}} = \frac{1}{1,5} = 0,666 \text{ (тварин у годину)}.$$

Виявляється, що $A_{ном}$ в 1,665 рази $\left(\frac{A_{ном}}{q} \right) = \left(\frac{0,666}{0,40} \right) = 1,665$ більше, ніж

фактична пропускну здатність, обчислена з урахуванням випадкового характеру потоку заявок і часу обслуговування.

Розглянемо одноканальну СМО з очікуванням.

Система масового обслуговування має один канал. Вхідний потік заявок на обслуговування — найпростіший потік з інтенсивністю λ . Інтенсивність потоку обслуговування дорівнює μ (тобто в середньому безупинно зайнятий

канал буде видавати μ обслужених заявок-запитів). Тривалість обслуговування — випадкова величина, підпорядкована показовому закону розподілу. Потік обслуговування є найпростішим пуассонівським потоком подій. Заявка (запит), що надійшла в момент, коли канал зайнятий, стає в чергу й очікує обслуговування.

Припустимо, що незалежно від того, скільки запитів надходить на вхід обслуговуючої системи, дана система (черга + клієнти, що обслуговуються) не може вмістити більше N -запитів (заявок), тобто клієнти, що не потрапили в очікування, змушені обслуговуватися в іншому місці. Джерело, що породжує заявки на обслуговування, має необмежену (нескінченно більшу) ємність.

Граф станів СМО в цьому випадку зображено на рис. 2.

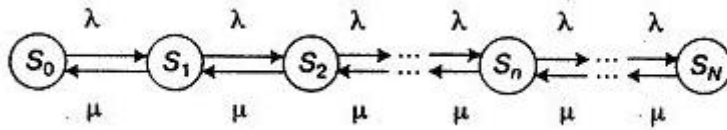


Рис. 2. Граф станів одноканальної СМО з очікуванням (схема загибелі й розмноження)

Стан СМО мають наступну інтерпретацію:

S_0 — «канал вільний»;

S_1 — «канал зайнятий» (черги немає);

S_2 — «канал зайнятий» (одна заявка чекає в черзі);

.....

S_n — «канал зайнятий» ($n - 1$ заявок чекають в черзі);

S_N — «канал зайнятий» ($N - 1$ заявок чекають в черзі). Стационарний

процес у даній системі буде описуватися наступною системою алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -\psi \cdot P_0 + P_1 = 0, & n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ - (1 - \psi) \cdot P_n + P_{n+1} + \psi \cdot P_{n-1} = 0, & 0 < n < N \\ \dots\dots\dots \\ - P_N + \psi \cdot P_{N-1} = 0, & n = N \end{cases}, \quad (10)$$

де $\psi = \frac{\lambda}{\mu}$; n — номер стану.

Розв'язок наведеної вище системи рівнянь (10) для нашої моделі СМО має вигляд

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{1 - \psi}{1 - \psi^{N+1}} \right) \cdot \psi^n, & \psi \neq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \\ \frac{1}{(N + 1)}, & \psi = 1. \end{cases} \quad (11)$$

$$P_0 = \frac{1 - \psi}{1 - \psi^{N+1}}. \quad (12)$$

Тоді

$$P_n = \begin{cases} P_0 \cdot \psi^n, & \psi \neq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \\ \frac{1}{(N+1)}, & \psi = 1. \end{cases}$$

Слід зазначити, що виконання умови стаціонарності $\psi = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ для даної СМО не обов'язкове, оскільки число запитів, що допускають в обслуговуючу систему, контролюється шляхом введення обмеження на довжину черги (яка не може перевищувати $N - 1$, а не співвідношенням між інтенсивностями вхідного потоку, тобто не $\psi = \frac{\lambda}{\mu}$ відношенням).

Визначимо характеристики одноканальної СМО з очікуванням й обмеженою довжиною черги, що дорівнює $(N - 1)$:

- ймовірність відмови в обслуговуванні заявки:

$$P_{\text{відм}} = P_N = \begin{cases} \left(\frac{1 - \psi}{1 - \psi^{N+1}} \right) \cdot \psi^n, & \psi \neq 1, \\ \frac{1}{(N+1)}, & \psi = 1. \end{cases} \quad (13)$$

- відносна пропускна здатність системи:

$$q = 1 - P_{\text{відм}} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1 - \psi}{1 - \psi^{N+1}} \right) \cdot \psi^n, & \psi \neq 1, \\ 1 - \frac{1}{(N+1)}, & \psi = 1. \end{cases} \quad (14)$$

- абсолютна пропускна здатність:

$$A = q \cdot \lambda \quad (15)$$

- середнє число заявок, що перебувають у системі:

$$L_s = \sum_{n=0}^N n \cdot P_n = \begin{cases} \frac{\psi \cdot [1 - (N+1) \cdot \psi^N + N \cdot \psi^{N+1}]}{(1 - \psi) \cdot (1 - \psi^{N+1})}, & \psi \neq 1 \\ N/2, & \psi = 1 \end{cases} \quad (16)$$

- середній час перебування заявки в системі:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(1 - P_N)} \quad (17)$$

- середня тривалість перебування клієнта (заявки) у черзі:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} \quad (18)$$

- середнє число заявок (клієнтів) у черзі (довжина черги):

$$L_q = \lambda(1 - P_N)W_q. \quad (19)$$

Приклад 2. Роботизований кран (пост) розвантаження сільськогосподарської продукції з автомобілей представляє собою одноканальну СМО. Число стоянок для автомобілів, що очікують розвантаження, обмежено й дорівнює 3 $[(N - 1) = 3]$. Якщо всі стоянки зайняті, тобто в черзі вже перебуває три автомобілі, то черговий автомобіль, що прибув на розвантаження, у чергу на обслуговування не стає. Потік автомобілів, що прибувають на розвантаження, розподілений за законом Пуасона й має інтенсивність $\lambda = 0,85$ (автомобіля в годину). Час розвантаження автомобіля розподілено за показовим законом й у середньому дорівнює 1,05 годин.

Потрібно визначити імовірнісні характеристики поста розвантаження, що працює в стаціонарному режимі.

Розв'язок

1. Параметр потоку обслуговування автомобілів:

$$\mu = \frac{1}{t_{\infty}} = \frac{1}{1,05} = 0,952$$

2. Наведена інтенсивність потоку автомобілів визначається як відношення інтенсивностей λ й μ , тобто

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,85}{0,952} = 0,893$$

3. Обчислимо фінальні ймовірності системи:

$$P_0 = \frac{1 - \psi}{1 - \psi^{N+1}} = \frac{1 - 0,893}{1 - 0,893^5} \approx 0,248;$$

$$P_1 = \psi \cdot P_0 = 0,893 \cdot 0,248 \approx 0,221;$$

$$P_2 = \psi^2 \cdot P_0 = 0,893^2 \cdot 0,248 \approx 0,198;$$

$$P_3 = \psi^3 \cdot P_0 = 0,893^3 \cdot 0,248 \approx 0,177;$$

$$P_4 = \psi^4 \cdot P_0 = 0,893^4 \cdot 0,248 \approx 0,158.$$

4. Імовірність відмови в обслуговуванні автомобіля:

$$P_{\text{відм}} = P_4 = \psi^4 \cdot P_0 \approx 0,158.$$

5. Відносна пропускна здатність поста розвантаження:

$$q = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - 0,158 = 0,842.$$

6. Абсолютна пропускна здатність поста розвантаження

$$A = q \cdot \lambda = 0,842 \cdot 0,85 = 0,716 \text{ (автомобіля за годину).}$$

7. Середнє число автомобілів, що перебувають на обслуговуванні і у

черзі (тобто в системі масового обслуговування):

$$L_s = \frac{\psi \cdot [1 - (N+1) \cdot \psi^N + N \cdot \psi^{N+1}]}{(1-\psi) \cdot (1-\psi^{N+1})} = \frac{0,893 \cdot [1 - (4+1) \cdot 0,893^4 + 4 \cdot 0,893^5]}{(1-0,893) \cdot (1-0,893^5)} = 1,77$$

8. Середній час перебування автомобіля в системі:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(1-P_N)} = \frac{1,77}{0,85(1-0,158)} \approx 2,473 \text{ години.}$$

9. Середня тривалість перебування заявки (запиту) в черзі на обслуговування:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = 2,473 - \frac{1}{0,952} = 1,423 \text{ години.}$$

10. Середнє число заявок у черзі (довжина черги):

$$L_q = \lambda(1-P_N)W_q = 0,85 \cdot (1-0,158) \cdot 1,423 = 1,02$$

Роботу розглянутого поста розвантаження можна вважати задовільною, тому що пост розвантаження не обслуговує автомобілі в середньому в 15,8% випадків ($P_{відм} = 0,158$).

Розглянемо одноканальну СМО з очікуванням без обмеження на місткість блоку очікування (тобто $N \rightarrow \infty$).

Решта умов функціонування СМО залишаються без змін.

Стаціонарний режим функціонування даної СМО існує при $t \rightarrow \infty$ для будь-якого $n = 0, 1, 2, \dots$ і коли $\lambda < \mu$. Система алгебраїчних рівнянь, що описують роботу СМО при $t \rightarrow \infty$ для будь-якого $n = 0, 1, 2, \dots$ має вигляд

$$\begin{cases} -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1 = 0, & n=0 \\ \lambda \cdot P_{n-1} + \mu \cdot P_{n+1} - (\lambda + \mu) \cdot P_n = 0, & n > 0 \end{cases} \quad (20)$$

Розв'язок даної системи рівнянь має вигляд

$$P_n = (1-\psi)\psi^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

де $\psi = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Характеристики одноканальної СМО з очікуванням, без обмеження на довжину черги наступні:

– середнє число клієнтів, що перебувають у системі клієнтів (заявок) на обслуговування:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = \frac{\psi}{1-\psi} \quad (22)$$

– середня тривалість перебування клієнта в системі:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{[\mu \cdot (1-\psi)]} \quad (23)$$

– середнє число клієнтів у черзі на обслуговуванні:

$$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\psi^2}{(1-\psi)} \quad (24)$$

- середня тривалість перебування клієнта в черзі:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\psi}{[\mu \cdot (1 - \psi)]}. \quad (25)$$

Приклад 3. Згадаємо про ситуації, розглянутої в прикладі 2, де мова йде про функціонування поста розвантаження сільськогосподарської продукції. Нехай розглянутий пост діагностики має у своєму розпорядженні необмежену кількість площадок для стоянки автомобілів, що прибувають на обслуговуванні, тобто довжина черги не обмежена.

Потрібно визначити фінальні значення наступних імовірнісних характеристик:

- імовірності станів системи (поста розвантаження);
- середнє число автомобілів, що перебувають у системі (на обслуговуванні й у черзі);
- середню тривалість перебування автомобіля в системі (на обслуговуванні й у черзі);
- середнє число автомобілів у черзі на обслуговуванні;
- середню тривалість перебування автомобіля в черзі.

Розв'язок

1. Параметр потоку обслуговування μ і наведена інтенсивність потоку автомобілів ψ визначені в прикладі 2:

$$\mu = 0,952; \psi = 0,893.$$

2. Обчислимо граничні ймовірності системи за формулами:

$$P_0 = 1 - \psi = 1 - 0,893 = 0,107;$$

$$P_1 = (1 - \psi) \cdot \psi = (1 - 0,893) \cdot 0,893 = 0,096;$$

$$P_2 = (1 - \psi) \cdot \psi^2 = (1 - 0,893) \cdot 0,893^2 = 0,085;$$

$$P_3 = (1 - \psi) \cdot \psi^3 = (1 - 0,893) \cdot 0,893^3 = 0,076;$$

$$P_4 = (1 - \psi) \cdot \psi^4 = (1 - 0,893) \cdot 0,893^4 = 0,068;$$

$$P_5 = (1 - \psi) \cdot \psi^5 = (1 - 0,893) \cdot 0,893^5 = 0,061. \text{ і т.д.}$$

Слід зазначити, що $P_0(t)$ визначає частку часу, протягом якого пост розвантаження вимушено не діє (простоє). У нашому прикладі вона становить 10,7%, тому що $P_0(t) = 0,107$.

3. Середнє число автомобілів, що перебувають у системі (на обслуговуванні й у черзі):

$$L_s = \frac{\psi}{1 - \psi} = \frac{0,893}{1 - 0,893} = 8,346 \text{ од.}$$

4. Середня тривалість перебування клієнта в системі:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{[\mu \cdot (1 - \psi)]} = \frac{1}{[0,952 \cdot (1 - 0,893)]} = 9,817 \text{ годин.}$$

5. Середнє число автомобілів у черзі на обслуговування:

$$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\psi^2}{(1-\psi)} = \frac{0,893^2}{(1-0,893)} = 7,453$$

6. Середня тривалість перебування автомобіля в черзі:

$$W_q = \frac{\psi}{[\mu \cdot (1-\psi)]} = \frac{0,893}{0,952 \cdot (1-0,893)} = 8,766 \text{ годин.}$$

7. Відносна пропускна здатність системи:

$q = 1$, тобто, кожна заявка, що надійшла в систему, буде обслужена.

8. Абсолютна пропускна здатність:

$$A = \lambda \cdot q = 0,85 \cdot 1 = 0,85$$

Слід зазначити, що роботизована система по здійсненню розвантаження автомобілів, насамперед цікавить кількість клієнтів, які відвідають пост розвантаження при знятті обмеження на довжину черги.

Допустимо, у первісному варіанті кількість місць для стоянки автомобілів, що прибувають, дорівнює трьом (див. приклад 2). Частота m виникнення ситуацій, коли прибуває на пост розвантаження автомобіль не має можливості приєднатися до черги:

$$m = \lambda \cdot P_N.$$

У нашому прикладі при $N = 3 + 1 = 4$ і $\psi = 0,893$

$$m = \lambda \cdot P_N \cdot \psi^4 = 0,85 \cdot 0,284 \cdot 0,8934 = 0,134 \text{ автомобіля за годину.}$$

При 12-годинному режимі роботи поста розвантаження це еквівалентно тому, що роботизована система в середньому за зміну (день) буде втрачати $12 \cdot 0,134 = 1,6$ автомобіля.

Зняття обмеження на довжину черги дозволяє збільшити кількість обслужених клієнтів у нашому прикладі в середньому на 1,6 автомобіля за зміну (12 годин роботи) поста розвантаження. Ясно, що рішення щодо розширення площі для стоянки автомобілів, що прибувають на пост розвантаження, повинно ґрунтуватися на оцінці економічного збитку, що обумовлений втратою клієнтів при наявності всього трьох місць для стоянки цих автомобілів.

Завдання на практичну роботу

1. Самостійно виконати перевірку результатів наведених прикладів 1, 2 і 3, використовуючи програму Mathcad.
2. Одноканальна СМО з відмовами представляє собою одну роботизовану лінію. Заявка (запит), що прийшла у момент, коли лінія зайнята, одержує відмову. Всі потоки подій найпростіші. Інтенсивність потоку $\lambda = 0,85$ (1,0; 0,5) викликів у хвилину. Середня тривалість розмови $\bar{t} = 1,8$ (2,0; 1,5) хв. Визначити імовірнісні характеристики СМО в сталому режимі роботи.
3. В одноканальну СМО з відмовами надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю $\lambda = 0,6$ (1,5; 0,8) заявки у хвилину. Час обслуговування заявки (запиту) має показовий розподіл з $\bar{t} = 2,5$ (1,2; 0,8) хв. Визначити імовірнісні характеристики СМО в сталому режимі роботи.
4. На пункт роботизованого техогляду надходить найпростіший потік заявок

(автомобілів) інтенсивності $\lambda = 4$ (3; 2) машини в годину. Час огляду розподілено за показовим законом і дорівнює в середньому 17 хв. (15; 10), у черзі може перебувати не більше 5 автомобілів. Визначити імовірнісні характеристики роботизованого пункту техогляду в сталому режимі.

5. Роботизований пост діагностики автомобілів являє собою одноканальну СМО з відмовами. Заявка (запит) на діагностику, що надійшла в момент, коли пост зайнятий, одержує відмову. Інтенсивність потоку заявок на діагностику $\lambda = 0,5$ (1,3; 0,4) автомобіля в годину. Середня тривалість діагностики $\bar{t} = 1,2$ (0,7; 1,5) години. Всі потоки подій у системі найпростіші. Визначити в сталому режимі імовірнісні характеристики системи.
6. Роботизована автозаправна станція представляє собою СМО з одним каналом обслуговування й одним стовпчиком. Площадка при АЗС допускає перебування в черзі на заправлення не більше трьох автомобілів одночасно. Якщо в черзі вже перебувають три автомобілі, черговий автомобіль, що прибув до станції, у чергу не стає, а проїжджає. Потік автомобілів, що прибувають для заправлення, має інтенсивність $\lambda = 0,7$ (1,1; 0,9) автомобіля за хвилину. Процес заправлення триває в середньому 1,25 хв. Всі потоки найпростіші. Визначити імовірнісні характеристики СМО в стаціонарному режимі.
7. Роботизований пост діагностики автомобілів — одноканальна СМО з відмовами. Заявка на діагностику, що надійшла в момент, коли пост зайнятий, одержує відмову. Інтенсивність потоку заявок на діагностику $\lambda = 1,5$ (1,3; 0,6) автомобіля в годину. Середня тривалість діагностики $\bar{t} = 2,2$ (1,2; 1,5) години. Всі потоки подій у системі найпростіші. Визначити в сталому режимі імовірнісні характеристики системи.
8. В роботизовану систему надходить найпростіший потік заявок на обслуговування з інтенсивністю $\lambda = 1,5$ (1,7; 1,1) заявки в день. Час обслуговування розподілений за показовим законом і дорівнює в середньому трьом дням. СМО має п'ять незалежних роботизованих ліній, що виконують обслуговування заявок. Черга заявок не обмежена. Дисципліна черги не регламентована. Визначити імовірнісні характеристики роботизованої системи як системи масового обслуговування, що працює в стаціонарному режимі.
9. На роботизовану залізничну сортувальну гірку прибувають потяги з інтенсивністю $\lambda = 2$ (1,8; 0,7) потяги в годину. Середній час, протягом якого гірка обслуговує потяг, дорівнює 0,4 (1,8; 0,5) годин. Потяги, що прибувають у момент, коли гірка зайнята, стають у чергу й очікують у парку прибуття, де є три запасних шляхи, на кожному з яких може очікувати один потяг. Потяг, що прибув у момент, коли всі три запасних шляхи в парку прибуття зайняті, стає в чергу на зовнішній шлях. Всі потоки подій найпростіші.

При сталому режимі знайдіть:

- середнє число потягів, що очікують у черзі (як у парку прибуття, так і

поза ним);

- середній час очікування в парку прибуття й на зовнішніх шляхах;
- середній час очікування складу в системі обслуговування;
- імовірність того, що прибулий потяг займе місце на зовнішніх шляхах.

10. Підрахуйте імовірнісні характеристики для найпростішої одноканальної СМО із трьома місцями в черзі при умовах $\lambda = 4$ (1,0; 3) заявки/година; $\bar{t} = 0,5$ (1,2; 0,4) години. З'ясуйте, як ці характеристики зміняться, якщо збільшити число місць у черзі до чотирьох.
11. Роботизована автозаправна станція являє собою СМО з одним каналом обслуговування й однією колонкою. Площадка при АЗС допускає перебування в черзі на заправленні не більше трьох автомобілів одночасно. Якщо в черзі вже перебуває три автомобілі, черговий автомобіль, що прибув до станції, у чергу не стає, а проїжджає мимо. Потік автомобілів, що прибувають для заправки, має інтенсивність $\lambda = 0,7$ (1,0; 0,8) автомобіля за хвилину. Процес заправки триває в середньому 1,25 (1,5; 0,8) хв. Всі потоки найпростіші. Визначити імовірнісні характеристики СМО в стаціонарному режимі.
12. Роботизований пост діагностики представляє собою одноканальну СМО. Число стоянок для автомобілів, що очікують проведення діагностики, обмежено й дорівнює 5 $[(N - 1) = 5]$. Якщо всі стоянки зайняті, тобто в черзі вже перебуває три автомобілі, то черговий автомобіль, що прибув на діагностику, у чергу на обслуговування не стає. Потік автомобілів, що прибувають на діагностику, розподілений за законом Пуассона й має інтенсивність $\lambda = 0,85$ (1,2; 0,7) (автомобіля в годину). Час діагностики автомобіля розподілено за показовим законом й у середньому дорівнює 1,05 (2,1; 1,5) годин.

Потрібно визначити імовірнісні характеристики роботизованого поста діагностики, що працює в стаціонарному режимі.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення системи масового обслуговування.
2. Приведіть формулу обчислення середньої тривалості перебування заявки (запиту) в черзі на обслуговування.
3. Що вважається предметом теорії масового обслуговування?
4. Наведіть приклади систем масового обслуговування.
5. Які правила дисципліни черги?
6. Якими характеристиками визначається механізм обслуговування?
7. Які основні види СМО розрізняють?

Практична робота № 2

Багатоканальна модель роботизованої системи із пуассонівським вхідним потоком й експонентним розподілом тривалості обслуговування

Час виконання роботи — 4 години.

Мета: ознайомлення з багатоканальною системою масового обслуговування з очікуванням та моделлю обслуговування роботизованого машинного парку.

У переважній більшості випадків на практиці системи масового обслуговування є багатоканальними, і, отже, **моделі з n обслуговуючими каналами** (де $n > 1$) становлять інтерес.

Процес масового обслуговування, що описується даною моделлю, характеризується інтенсивністю вхідного потоку λ , при цьому паралельно може обслуговуватися не більше n клієнтів (заявок). Середня тривалість обслуговування однієї заявки рівняється $\frac{1}{\mu}$. Вхідний і вихідний потоки є

пуассонівськими. Режим функціонування того чи іншого обслуговуючого каналу не впливає на режим функціонування інших обслуговуючих каналів системи, причому тривалість процедури обслуговування кожним з каналів є випадковою величиною, що підкоряється **експонентному закону розподілу**. Кінцева мета використання n паралельно включених обслуговуючих каналів полягає в підвищенні (у порівнянні з одноканальною системою) швидкості обслуговування вимог за рахунок обслуговування одночасно n клієнтів.

Граф станів багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами має вигляд, показаний на мал. 4.3.

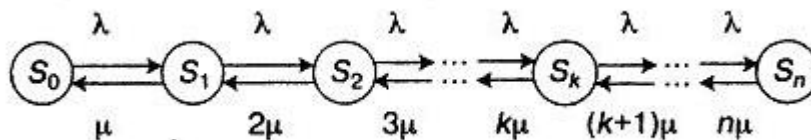


Рис. 1. Граф станів багатоканальної СМО з відмовами

СМО мають наступну інтерпретацію:

S_0 — всі канали вільні;

S_1 — зайнятий один канал, інші вільні;

.....

S_k — зайняті рівно k каналів, інші вільні;

.....

S_n — зайняті всі n каналів, інші вільні.

Рівняння Колмогорова для ймовірностей станів системи $P_0, \dots, P_k, \dots, P_n$ буде мати такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dP_0}{dt} = -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dP_k}{dt} = \lambda \cdot P_{k-1} - (\lambda + k \cdot \mu) \cdot P_k + \mu \cdot (k+1) \cdot P_{k+1}, & 1 \leq k \leq n-1 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dP_n}{dt} = \lambda \cdot P_{n-1} - \mu \cdot n \cdot P_n \end{cases} \quad (1)$$

Початкові умови розв'язку системи такі:

$$P_0(0) = 1, \quad P_1(0) = P_2(0) = \dots = P_k(0) = \dots = P_n(0) = 0.$$

Стаціонарні розв'язки системи:

$$\begin{cases} P_k = \frac{\frac{\psi^k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\psi^k}{k!}} = \frac{\psi^k}{k!} \cdot P_0, & k = 0, 1, 2, \dots, n \\ P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\psi^k}{k!}}, & k = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2)$$

де $\psi = \frac{\lambda}{\mu}$.

Формули для обчислення ймовірностей P_k називаються *формулами Ерланга*.

Визначимо імовірнісні характеристики функціонування багатоканальної СМО з відмовами в стаціонарному режимі:

– імовірність відмови:

$$P_{\text{відм}} = P_n = \frac{\psi^n}{n!} \cdot P_0, \quad (3)$$

тому що заявка одержує відмову, якщо приходить у момент, коли всі n каналів зайняті. Величина $P_{\text{відм}}$ характеризує повноту обслуговування вхідного потоку;

– імовірність того, що заявка буде прийнята до обслуговування (вона ж — відносна пропускна здатність системи q) доповнює $P_{\text{відм}}$ до одиниці:

$$q = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - \frac{\psi^n}{n!} \cdot P_0 \quad (4)$$

– абсолютна пропускна здатність

$$A = \lambda \cdot q = \lambda \cdot (1 - P_{\text{відм}}) \quad (5)$$

– середнє число каналів, зайнятих обслуговуванням ($\bar{k}$) наступне:

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^n k \cdot P_k = \psi \cdot (1 - P_{\text{відм}}) \quad (6)$$

Величина $\bar{k}$ характеризує степінь завантаження СМО.

Приклад 1. Нехай n -канальна СМО представляє собою обчислювальний центр (ОЦ) роботизованої системи із трьома ($n = 3$) взаємозамінними ПЕОМ для розв'язання задач, що поступають. Потік задач, що поступають на ОЦ, має інтенсивність $\lambda = 1$ задачі в годину. Середня тривалість обслуговування $\bar{t}_{\text{обсл}} = 1,8$ година. Потік заявок на рішення задач і потік обслуговування цих заявок є найпростішими.

Потрібно обчислити фінальні значення:

- імовірності станів ОЦ;
- імовірності відмови в обслуговуванні заявки;
- відносної пропускної здатності ОЦ;
- абсолютної пропускної здатності ОЦ;
- середнього числа зайнятих ПЕОМ на ОЦ.

Визначити, скільки додатково треба придбати ПЕОМ, щоб збільшити пропускну здатність ОЦ в 2 рази.

Розв'язок

1. Визначимо параметр μ потоку обслуговування:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обсл}}} = \frac{1}{1,8} = 0,555$$

2. Наведена інтенсивність потоку заявок

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{0,555} = 1,8$$

3. Граничні ймовірності станів знайдемо за формулами Ерланга (2):

$$P_1 = \frac{\psi}{1!} \cdot P_0 = 1,8 \cdot P_0;$$

$$P_2 = \frac{\psi^2}{2!} \cdot P_0 = 1,62 \cdot P_0;$$

$$P_3 = \frac{\psi^3}{3!} \cdot P_0 = 0,97 \cdot P_0;$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^3 \frac{\psi^k}{k!}} = \frac{1}{1 + 1,8 + 1,62 + 0,97} \approx 0,18;$$

$$P_1 \approx 1,8 \cdot 0,186 \approx 0,344;$$

$$P_2 \approx 1,62 \cdot 0,186 \approx 0,301;$$

$$P_3 \approx 0,97 \cdot 0,186 \approx 0,18.$$

4. Імовірність відмови в обслуговуванні заявки

$$P_{\text{відм}} = P_3 = 0,18.$$

5. Відносна пропускна здатність ОЦ

$$q = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - 0,18 = 0,82.$$

6. Абсолютна пропускна здатність ОЦ

$$A = \lambda \cdot q = 1 \cdot 0,82 = 0,82.$$

7. Середнє число зайнятих каналів — ПЕОМ

$$\bar{k} = \psi \cdot (1 - P_{\text{відм}}) = 1,8 \cdot (1 - 0,18) = 1,476.$$

Таким чином, при установленому режимі роботи СМО в середньому буде зайнято 1,5 комп'ютера із трьох — інші півтора будуть простоювати. Роботу розглянутого ОЦ навряд чи можна вважати задовільною, тому що центр не обслуговує заявки в середньому в 18% випадків. Очевидно, що пропускну здатність ОЦ при даних λ і μ можна збільшити тільки за рахунок збільшення числа ПЕОМ.

Визначимо, скільки потрібно використати ПЕОМ, щоб скоротити число необслугованих заявок, що надходять на ОЦ, в 10 разів, тобто щоб імовірність відмови в рішенні задач не перевершували 0,0180. Для цього використаємо формулу (3):

$$P_{\text{відм}} = \frac{\psi^n}{n!} \cdot P_0.$$

Складемо наступну таблицю:

n	1	2	3	4	5	6
P_0	0,357	0,266	0,186	0,172	0,167	0,166
$P_{\text{відм}}$	0,643	0,367	0,18	0,075	0,026	0,0078

Розглянемо **багатоканальну систему масового обслуговування з очікуванням**. Процес масового обслуговування при цьому характеризується наступним: вхідний і вихідний потоки є пуасонівськими з інтенсивностями λ й μ відповідно; паралельно обслуговуватися можуть не більше S клієнтів. Система має S каналів обслуговування. Середня тривалість обслуговування одного клієнта дорівнює $\frac{1}{\mu}$.

В сталому режимі функціонування багатоканальної СМО з очікуванням і необмеженою чергою може бути описана за допомогою системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + n \cdot \mu) \cdot P_n + (n+1) \mu \cdot P_{n+1}, \text{ при } 1 \leq n < S \\ 0 &= \lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + S \cdot \mu) \cdot P_n + S \cdot \mu \cdot P_{n+1}, \text{ при } n \geq S \end{aligned} \quad (7)$$

Розв'язок системи рівнянь (7) має вигляд

$$\begin{cases} P_n = \frac{\psi^n}{n!} \cdot P_0, \\ P_n = \frac{\psi^n}{S! S^{n-S}} \cdot P_0, \end{cases} \begin{matrix} \text{при } 1 \leq n < S \\ \text{при } n \geq S \end{matrix} \quad (8)$$

де

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\psi^n}{n!} + \frac{\psi^s}{S! \left[1 - \frac{\psi}{S} \right]} \right\}^{-1} \quad (9)$$

Розв'язок буде дійсним при виконанні умови: $\left[\frac{\lambda}{\mu \cdot S} \right] < 1$.

Імовірнісні характеристики функціонування в стаціонарному режимі багатоканальної СМО з очікуванням і необмеженою чергою визначаються за формулами:

- ймовірність того, що в системі перебуває n клієнтів на обслуговуванні, визначається за формулами (8) і (9);
- середнє число клієнтів у черзі на обслуговування

$$L_q = \left[\frac{S \cdot \psi}{(S - \psi)^2} \right] \cdot P_s; \quad (10)$$

- середнє число клієнтів, що перебувають у системі (заявки на обслуговування і у черзі)

$$L_s = L_q + \psi; \quad (11)$$

- середня тривалість перебування клієнта (заявки на обслуговування) у черзі

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}; \quad (12)$$

- середня тривалість перебування клієнта в системі

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}. \quad (13)$$

Розглянемо приклади багатоканальної системи масового обслуговування з очікуванням.

Приклад 2. Роботизована майстерня заводу із трьома постами (каналами) виконує ремонт малої механізації. Потік несправних механізмів, що прибувають у майстерню, — пуасонівський і має інтенсивність $\lambda = 2,5$ механізми за добу, середній час ремонту одного механізму розподілено по показовому закону й дорівнює $\bar{t} = 0,5$ доби. Припустимо, що іншої майстерні на заводі немає, і, виходить, що черга механізмів перед майстернею може рости практично необмежено.

Потрібно обчислити наступні граничні значення імовірнісних характеристик системи:

- імовірності стану системи;

- середнє число заявок у черзі на обслуговування;
- середнє число заявок, що перебувають у системі;
- середню тривалість перебування заявки в черзі;
- середню тривалість перебування заявки в системі.

Розв'язок

1. Визначимо параметр потоку обслуговувань

$$\mu = \frac{1}{t} = \frac{1}{0,5} = 2$$

2. Наведена інтенсивність потоку заявок

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2,5}{2} = 1,25$$

при цьому $\frac{\lambda}{\mu \cdot S} = \frac{2,5}{2 \cdot 3} = 0,41$.

$$\frac{\lambda}{\mu \cdot S}$$

Оскільки $\frac{\lambda}{\mu \cdot S} < 1$, то черга не зростає й у системі настає граничний стаціонарний режим роботи.

3. Обчислимо ймовірності станів системи:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\psi^n}{n!} + \frac{\psi^s}{S! \left[1 - \frac{\psi}{S} \right]} \right\}^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{\psi^1}{1!} + \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\psi^3}{3! \left(1 - \frac{\psi}{3} \right)}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \psi + \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^3}{6 \left(1 - \frac{\psi}{3} \right)}} = \frac{1}{1 + 1,25 + \frac{1,25^2}{2} + \frac{1,25^3}{6 \left(1 - \frac{1,25}{3} \right)}} = 0,279$$

$$P_1 = \frac{\psi^1}{1!} \cdot P_0 = 1,25 \cdot 0,279 = 0,349;$$

$$P_2 = \frac{\psi^2}{2!} \cdot P_0 = \frac{1,25^2}{2!} \cdot 0,279 = 0,218;$$

$$P_3 = \frac{\psi^3}{3!} \cdot P_0 = \frac{1,25^3}{3!} \cdot 0,279 = 0,091;$$

$$P_4 = \frac{\psi^4}{4!} \cdot P_0 = \frac{1,25^4}{4!} \cdot 0,279 = 0,028.$$

4. Імовірність відсутності черги в майстерні

$$P_{\text{відсут}} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \approx 0,279 + 0,349 + 0,218 + 0,091 = 0,937.$$

5. Середнє число заявок у черзі на обслуговування

$$L_q = \left[\frac{S \cdot \psi}{(S - \psi)^2} \right] \cdot P_s = \left[\frac{3 \cdot 1,25}{(3 - 1,25)^2} \right] \cdot 0,091 = 0,111$$

6. Середнє число заявок, що перебувають у системі

$$L_s = L_q + \psi = 0,111 + 1,25 = 1,361$$

7. Середня тривалість перебування механізму в черзі на обслуговування

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,111}{2,5} = 0,044 \text{ доби.}$$

8. Середня тривалість перебування механізму в майстерні (у системі)

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,044 + \frac{1}{2} = 0,544 \text{ доби.}$$

Модель обслуговування роботизованого машинного парку

Модель обслуговування машинного парку — модель замкнутої системи масового обслуговування.

Розглянемо системи масового обслуговування, для яких λ залежить від стану системи, при чому джерело вимог є внутрішнім і генерує обмежений потік заявок.

Наприклад, обслуговується машинний парк, що складається з N машин, бригадою R роботів ($N > R$), причому кожна машина може обслуговуватися тільки одним роботом. Тут машини є джерелами вимог (заявок на обслуговування), а роботи — обслуговуючими каналами. Несправна машина після обслуговування використовується за прямим призначенням й стає потенційним джерелом виникнення запитів на обслуговування. Очевидно, що інтенсивність λ залежить від кількості машин, які у цей момент перебувають в експлуатації ($N - k$) і скільки машин обслуговуються або знаходяться в черзі, очікуючи обслуговування (k).

У розглянутій моделі ємність джерела запитів варто вважати обмеженою. Вхідний потік запитів виходить із обмеженого числа експлуатованих машин ($N - k$), які у випадкові моменти часу виходять із ладу й вимагають обслуговування. При цьому кожна машина з ($N - k$) перебуває в експлуатації. Генерує пуасонівський потік запитів з інтенсивністю X незалежно від інших об'єктів, загальний (сумарний) вхідний потік має інтенсивність $(N - k) \cdot \lambda$. Умова, що надійшла в систему в момент, коли вільний хоча б один канал, негайно йде на обслуговування. Якщо запит застає всі канали зайнятими обслуговуванням інших запитів, то він не залишає систему, а стає в чергу й чекає, поки один з каналів не стане вільним.

Таким чином, у замкнутій системі масового обслуговування вхідний потік запитів формується з вихідного.

Стан S_k системи характеризується загальним числом вимог, що перебувають на обслуговуванні і у черзі, рівним k . Для розглянутої замкнутої системи, мабуть, $k = 0, 1, 2, \dots, N$. При цьому, якщо система перебуває в стані S_k , то число об'єктів, що перебувають в експлуатації, дорівнює $(N - k)$.

Якщо λ — інтенсивність потоку запитів у розрахунку на одну машину,
то:

$$\lambda_k = \begin{cases} (N-k) \cdot \lambda, & 0 \leq k \leq N \\ 0, & k > N \end{cases};$$

$$\mu_k = \begin{cases} k \cdot \mu, & 0 \leq k \leq R, \\ R \cdot \mu, & R \leq k \leq N, \\ 0, & k > N. \end{cases}$$

Система алгебраїчних рівнянь, що описують роботу замкнутої СМО в стаціонарному режимі, має вигляд:

$$\begin{cases} 0 = -\psi \cdot N \cdot P_0 + P_0; \\ 0 = (N-k+1) \cdot \psi \cdot P_{k-1} - [(N-k) \cdot \psi + k] \cdot P_k + (k+1) \cdot P_{k+1}, & 0 < k < R \\ 0 = (N-k+1) \cdot \psi \cdot P_{k-1} - [(N-k) \cdot \psi + R] \cdot P_k + R \cdot P_{k+1}, & R \leq k < N \\ 0 = \psi \cdot P_{N-1} - R \cdot P_N. \end{cases} \quad (14)$$

Розв'язуючи дану систему, знаходимо ймовірність k -го стану:

$$P_k = \begin{cases} \frac{N! \cdot \psi^k}{k! \cdot (N-k)!} \cdot P_0, & 1 \leq k < R \\ \frac{N! \cdot \psi^k}{R! \cdot R^{k-R} \cdot (N-k)!} \cdot P_0, & R \leq k \leq N \end{cases} \quad (15)$$

Величина P_0 визначається з умови нормування $\sum_{k=0}^N P_k$ отриманих результатів за формулою (15) для P_k , $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Визначимо наступні ймовірнісні характеристики системи:

- середнє число вимог у черзі на обслуговування:

$$L_q = \sum_{k=R}^N (k-R) \cdot P_k; \quad (16)$$

- середнє число вимог, що перебувають у системі (на обслуговуванні і у черзі)

$$L_s = \sum_{k=1}^N k \cdot P_k; \quad (17)$$

- середнє число механіків (каналів), що «простоюють» через відсутність роботи

$$\bar{R}_x = \sum_{k=0}^{R-1} (R-k) \cdot P_k; \quad (18)$$

- коефіцієнт простою об'єкта, що обслуговується у черзі

$$\alpha_1 = \frac{L_q}{N}; \quad (19)$$

- коефіцієнт використання об'єктів (машин)

$$\alpha_2 = 1 - \left(\frac{L_s}{N} \right); \quad (20)$$

- коефіцієнт простою обслуговуючих каналів (механіків)

$$\alpha_3 = \frac{\bar{R}_z}{R}; \quad (21)$$

- середній час очікування обслуговування (час очікування обслуговування в черзі)

$$W_q = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2} \right) - \frac{1}{\mu}. \quad (22)$$

Приклад 3. Нехай для обслуговування десяти доїльних корів (ДК) виділено два робота однакової продуктивності. Потік відмов одного робота — пуасонівський з інтенсивністю $\lambda = 0,2$. Час обслуговування ДК підкоряється показовому закону. Середній час обслуговування однієї ДК одним роботом становить: $\bar{t} = 1,25$ година.

Можливі наступні варіанти організації обслуговування:

- два робота обслуговують всі десять ДК, так що при відмові ДК його обслуговує один з вільних роботів, у цьому випадку $R = 2, N = 10$;
- кожен з них обслуговує по п'ять закріплених за ним ДК. У цьому випадку $R = 1, N = 5$.

Необхідно вибрати найкращий варіант організації обслуговування ДК.

Розв'язок

1. Обчислимо параметр обслуговування

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{1,25} = 0,8$$

2. Наведена інтенсивність

$$\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,2}{0,8} = 0,25$$

3. Обчислимо імовірнісні характеристики СМО для двох варіантів організації обслуговування ПК.

Варіант 1

1. Визначимо ймовірності станів системи:

$$P_k = \begin{cases} \frac{N! \cdot \psi^k}{k! \cdot (N-k)!} \cdot P_0, & 1 \leq k < R \\ \frac{N! \cdot \psi^k}{R! \cdot R^{k-R} \cdot (N-k)!} \cdot P_0, & R \leq k \leq N \end{cases}$$

$$P_1 = \frac{10! \cdot 0,25^1}{1! \cdot (10-1)!} \cdot P_0 = 2,5 \cdot P_0;$$

$$P_2 = \frac{10! \cdot 0,25^2}{2! \cdot 2^{2-2} \cdot (10-2)!} \cdot P_0 = 2,812 \cdot P_0;$$

$$P_3 = \frac{10! \cdot 0,25^3}{2! \cdot 2^{3-2} \cdot (10-3)!} \cdot P_0 = 2,812 \cdot P_0;$$

$$P_4 = \frac{10! \cdot 0,25^4}{2! \cdot 2^{4-2} \cdot (10-4)!} \cdot P_0 = 2,461 \cdot P_0;$$

$$P_5 = \frac{10! \cdot 0,25^5}{2! \cdot 2^{5-2} \cdot (10-5)!} \cdot P_0 = 1,864 \cdot P_0;$$

$$P_6 = \frac{10! \cdot 0,25^6}{2! \cdot 2^{6-2} \cdot (10-6)!} \cdot P_0 = 1,154 \cdot P_0;$$

$$P_7 = \frac{10! \cdot 0,25^7}{2! \cdot 2^{7-2} \cdot (10-7)!} \cdot P_0 = 0,577 \cdot P_0;$$

$$P_8 = \frac{10! \cdot 0,25^8}{2! \cdot 2^{8-2} \cdot (10-8)!} \cdot P_0 = 0,216 \cdot P_0;$$

$$P_9 = \frac{10! \cdot 0,25^9}{2! \cdot 2^{9-2} \cdot (10-9)!} \cdot P_0 = 0,054 \cdot P_0;$$

$$P_{10} = \frac{10! \cdot 0,25^{10}}{2! \cdot 2^{10-2} \cdot (10-10)!} \cdot P_0 = 0,007 \cdot P_0.$$

Враховуючи, що $\sum_{k=0}^N P_k = 1$ і використовуючи результати розрахунку P_k , обчислимо P_0 :

$$\sum_{k=0}^N P_k = P_0 + 2,5 \cdot P_0 + 2,812 \cdot P_0 + 2,812 \cdot P_0 + \dots + 0,007 \cdot P_0 = 1$$

Звідки $P_0 = 0,065$.

Тоді

$$\begin{aligned}
P_1 &\approx 0,162; \\
P_2 &\approx 0,183; \\
P_3 &\approx 0,182; \\
P_4 &\approx 0,16; \\
P_5 &\approx 0,11; \\
P_6 &\approx 0,075; \\
P_7 &\approx 0,037; \\
P_8 &\approx 0,014; \\
P_9 &\approx 0,003; \\
P_{10} &\approx 0,000.
\end{aligned}$$

Визначимо середнє число ДК у черзі на обслуговування:

$$\begin{aligned}
L_q &= \sum_{k=R}^N (k-R) \cdot P_k = 0 + (3-2) \cdot 0,182 + (4-2) \cdot 0,16 + (5-2) \cdot 0,11 + (6-2) \cdot 0,075 + \\
&+ (7-2) \cdot 0,037 + (8-2) \cdot 0,014 + (9-2) \cdot 0,003 = 0,182 + 0,32 + 0,33 + 0,3 + 0,185 + \\
&+ 0,084 + 0,021 = 1,42
\end{aligned}$$

Знайдемо середнє число ДК, що перебувають у системі (на обслуговуванні й у черзі):

$$\begin{aligned}
L_s &= \sum_{k=1}^N k \cdot P_k = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 + 5 \cdot P_5 + 6 \cdot P_6 + 7 \cdot P_7 + \\
&8 \cdot P_8 + 9 \cdot P_9 + 10 \cdot P_{10} = 0,162 + 2 \cdot 0,183 + 3 \cdot 0,182 + 4 \cdot 0,16 + 5 \cdot 0,11 + \\
&+ 6 \cdot 0,075 + 7 \cdot 0,037 + 8 \cdot 0,014 + 9 \cdot 0,003 + 10 \cdot 0 = 3,11
\end{aligned}$$

Знайдемо середнє число робіт, що не працюють через відсутність роботи:

$$\bar{R}_n = \sum_{k=0}^{R-1} (R-k) \cdot P_k = (2-0) \cdot P_0 + (2-1) \cdot P_1 = 2 \cdot 0,065 + 1 \cdot 0,162 = 0,292$$

Коефіцієнт простою ДК в черзі наступний:

$$\alpha_1 = \frac{L_q}{N} = \frac{1,42}{10} = 0,142$$

Коефіцієнт використання ДК визначається за формулою:

$$\alpha_2 = 1 - \left(\frac{L_s}{N} \right) = 1 - \left(\frac{3,11}{10} \right) = 0,689$$

Коефіцієнт простою обслуговуючих робіт розраховується так:

$$\alpha_3 = \frac{\bar{R}_n}{R} = \frac{0,292}{2} = 0,146$$

Середній час очікування ДК обслуговування

$$W_q = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2} \right) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,2} \cdot \frac{1 - 0,689}{0,689} - \frac{1}{0,8} = 1,01 \text{ година.}$$

Варіант 2

Визначимо ймовірності станів системи:

$$P_k = \begin{cases} \frac{N! \cdot \psi^k}{k! \cdot (N-k)!} \cdot P_0, & 1 \leq k < R \\ \frac{N! \cdot \psi^k}{R! \cdot R^{k-R} \cdot (N-k)!} \cdot P_0, & R \leq k \leq N \end{cases};$$

$$P_1 = \frac{10! \cdot 0,25^1}{1! \cdot (5-1)!} \cdot P_0 = 1,25 \cdot P_0;$$

$$P_2 = \frac{5! \cdot 0,25^2}{1! \cdot 2^{2-1} \cdot (5-2)!} \cdot P_0 = 1,25 \cdot P_0;$$

$$P_3 = \frac{5! \cdot 0,25^3}{(5-3)!} \cdot P_0 = 0,938 \cdot P_0;$$

$$P_4 = \frac{5! \cdot 0,25^4}{(5-4)!} \cdot P_0 = 0,469 \cdot P_0;$$

$$P_5 = 5! \cdot 0,25^5 \cdot P_0 = 0,117 \cdot P_0;$$

$$\sum_{k=0}^N P_k = P_0 + 1,25 \cdot P_0 + 1,25 \cdot P_0 + 0,938 \cdot P_0 + 0,469 \cdot P_0 + 0,117 \cdot P_0 = 1.$$

Звідки $P_0 = 0,199$.

Тоді

$$P_1 \approx 0,249;$$

$$P_2 \approx 0,249;$$

$$P_3 \approx 0,187;$$

$$P_4 \approx 0,093;$$

$$P_5 \approx 0,023.$$

Середнє число ДК у черзі на обслуговування:

$$L_q = \sum_{k=R}^N (k-R) \cdot P_k$$

$$L_q = (2-1) \cdot 0,249 + (3-1) \cdot 0,187 + (4-1) \cdot 0,093 + (5-1) \cdot 0,023 = 0,994$$

Середнє число ДК, що перебувають на обслуговуванні і у черзі розраховується так:

$$L_s = \sum_{k=1}^N k \cdot P_k = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 + 5 \cdot P_5 =$$

$$= 0,249 + 2 \cdot 0,249 + 3 \cdot 0,187 + 4 \cdot 0,093 + 5 \cdot 0,023 = 1,8.$$

Середнє число робіт, що простоюють через відсутність роботи:

$$\bar{R}_n = \sum_{k=0}^{R-1} (R-k) \cdot P_k = (1-0) \cdot P_0 = 0,199$$

Коефіцієнт простою ДК в черзі:

$$\alpha_1 = \frac{L_q}{N} = \frac{0,994}{5} = 0,199$$

Коефіцієнт використання ДК:

$$\alpha_2 = 1 - \left(\frac{L_s}{N} \right) = 1 - \left(\frac{1,8}{5} \right) = 0,64$$

Коефіцієнт простою обслуговуючих робіт:

$$\alpha_3 = \frac{R_*}{R} = \frac{0,199}{1} = 0,199$$

Середній час очікування ДК обслуговування:

$$W_q = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2} \right) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,2} \cdot \frac{1 - 0,64}{0,64} - \frac{1}{0,8} = 1,56 \text{ година.}$$

Зведемо отримані результати за двома варіантами у наступну таблицю:

Підсумкові імовірнісні характеристики	Варіанти	
	1	2
α_1	0,142	0,199
α_2	0,689	0,64
α_3	0,146	0,199
W_q , години	1,01	1,56

Таким чином, у варіанті 1 кожна ДК знаходиться в черзі чекаючи початку її обслуговування приблизно 0,142 частини робочого часу, що менше цього показника при варіанті 2 організації робіт. Далі у варіанті 1 імовірність того, що ДК і будь-який момент часу буде працювати вище, ніж у варіанті 2, і дорівнює $\alpha_2^1 = 0,689 > \alpha_2^2 = 0,64$. Очевидно, варіант 1 організації робіт з обслуговування ДК ефективніше, ніж варіант 2.

Завдання на практичну роботу

Самостійно виконати перевірку результатів наведених прикладів 1, 2 і 3, використовуючи програму Mathcad.

1. В обчислювальному центрі роботизованої системи працює 5 комп'ютерів. Найпростіший потік задач, що надходять на ОЦ, має інтенсивність $\lambda = 10$ (15; 9) задач у годину. Середній час розв'язку задачі дорівнює 12 (10; 5) хв. Заявка одержує відмову, якщо всі комп'ютери зайняті. Знайдіть імовірнісні характеристики системи обслуговування (ОЦ).
2. На промисловому підприємстві вирішується питання про те, скільки буде потрібно робітників для роботи в ремонтному цеху. Нехай підприємство має 10 (11; 5) машин, що вимагають ремонту з урахуванням числа що ремонтуються. Відмови машин відбуваються із частотою $\lambda = 10$ (12; 4) відк/годину. Для усунення несправності механікові потрібно в середньому

$\bar{t} = 3$ (2; 7) хв. Розподіл моментів виникнення відмов є пуасонівським, а тривалість виконання ремонтних робіт розподілена експоненціально. Можливо організувати 4 (9; 5) або 6 (7; 2) робочих місць у цеху для робіт підприємства. Необхідно вибрати найбільш ефективний варіант забезпечення ремонтного цеху роботами.

3. На підприємстві є дві роботизовані лінії, кожна з яких може обслужити в середньому 30 (20; 10) т сільхозпродукції (СХП) за годину. Потік СХП найпростіший, з інтенсивністю, рівною 40 (30; 35) т СХП за годину. Черга необмежена. Дисципліна черги не регламентована. Час обслуговування підкоряється експонентному закону розподілу. Обчислити імовірнісні характеристики СМО в стаціонарному режимі й визначити доцільність розгортання третьої роботизованої лінії на підприємстві, що працює з такою же продуктивністю, як і перші два.
4. В інструментальному відділенні роботизованого складального цеху працюють три робота. У середньому за 1 хв. за інструментом приходять 0,8 замовника ($\lambda = 0,8$) (1,0; 0,9). Обслуговування одного замовника займає у робота $\bar{t} = 1,0$ (1,5; 1,2) хв. Черга не має обмеження. Відомо, що потік замовників за інструментом — пуасонівський, а час обслуговування підкоряється експоненціальному закону розподілу. Вартість 1 хв. роботи замовника дорівнює 30 грн. (35; 40), а робота — 15 грн. (18; 10). Знайдіть середні втрати роботизованого цеху при даній організації обслуговування в інструментальному відділенні (вартість простою) при стаціонарному режимі роботи.
5. Доїльний апарат (ДА) працює без перерви. Середній час обслуговування доїльної корови (ДК) — 2 хв. (1; 3). Середнє число ДК протягом однієї години, дорівнює $\lambda = 20$ (25; 10) ДК/година. Всі потоки в системі найпростіші. Визначити середню довжину черги, імовірність простою ДА, середній час знаходження ДК у ДА (у черзі й на обслуговуванні), середній час очікування в черзі в умовах стаціонарного режиму роботи ДА.
6. На роботизовану станцію технічного обслуговування (СТО) автомобілів кожні дві години під'їжджає в середньому одна машина. Станція має 6 (7; 9) постів обслуговування. Черга автомобілів, що очікують на обслуговування, необмежена. Середній час обслуговування однієї машини — 2 (1; 1,5) години. Всі потоки в системі найпростіші. Визначити імовірнісні характеристики станції технічного обслуговування автомобілів.
7. В обчислювальному центрі працює 9 персональних комп'ютерів (ПК). Найпростіший потік несправностей має інтенсивність 0,3 (0,8; 0,5) відмови в день. Середній час усунення однієї несправності одним інженером дорівнює 1,5 години. Комп'ютери обслуговують три інженери з однаковою продуктивністю. Всі потоки подій найпростіші. Можливі наступні варіанти організації обслуговування ПК:
 - три інженери обслуговують всі 9 комп'ютерів, так, що при відмові ПК його обслуговує один з вільних інженерів, у цьому випадку $R = 3$; $N = 9$;
 - кожен із трьох інженерів обслуговує трьох закріплених за ним ПК. У

цьому випадку $R = 1$; $N = 3$.

Необхідно вибрати найкращий варіант організації обслуговування ПК.

8. Мале транспортне підприємство експлуатує десять моделей автомобілів однієї марки. Найпростіший потік поломки автомобілів має інтенсивність $\lambda = 0,25$ відмови в день. Середній час усунення однієї поломки автомобіля одним механіком дорівнює 2 години. Всі потоки подій найпростіші. Можливі два варіанти обслуговування:

- всі автомобілі обслуговують два механіки з однаковою продуктивністю;
- всі автомобілі підприємства обслуговують три механіки з однаковою продуктивністю.

Необхідно вибрати найкращий варіант організації обслуговування автомобілів.

9. Одноканальна роботизована система може наготувати (обслужити) в середньому 30 свиней за годину. Потік свиней дорівнює 60 одиниць за годину. Всі вони “нетерплячі” й ідуть, якщо в черзі знаходяться 5 одиниць. Всі потоки подій найпростіші. Визначити наступні імовірнісні характеристики системи для стаціонарного режиму роботи:

- імовірність обслуговування свинки;
- абсолютну пропускну здатність системи;
- середню довжину черги;
- середній час очікування в черзі;
- середній час усього обслуговування;
- імовірність простою системи.

10. Є двоканальна найпростіша СМО з відмовами. На її вхід надходить потік заявок з інтенсивністю $\lambda = 3$ (4; 2) заявки в годину. Середній час обслуговування однієї заявки $\bar{t} = 0,5$ (0,8; 0,3) години. Кожна обслужена заявка приносить дохід 5 грн. Вміст каналу обходиться 3 грн/годину. З’ясувати, чи вигідно в економічних відносинах збільшити число каналів СМО до трьох.

11. Система масового обслуговування — квиткова каса із трьома касирами і необмеженою чергою. Пасажирів, що бажають купити квиток, приходить у середньому 5 чоловік за 20 хв. Потік пасажирів можна вважати найпростішим. Касир у середньому обслуговує трьох пасажирів за 10 хв. Час обслуговування підкорюється показовому закону розподілу. Визначити імовірнісні характеристики СМО в стаціонарному режимі.

12. Технічні пристрої (ТП) можуть час від часу виходити з ладу (відмовляти). Потік відмов ТП найпростіший з інтенсивністю $\lambda = 1,6$ (1,2; 0,2) відмов за добу. Час відновлення ТП має експонентний розподіл. Математичне очікування часу обслуговування $\bar{t} = 0,5$ (1,9; 0,6) доби. Кількість каналів, що виконують обслуговування ТП, дорівнює 5 од. Кількість заявок у черзі не обмежено. Визначити імовірнісні характеристики СМО, що виконують обслуговування ТП в сталому режимі.

Контрольні запитання

1. Дайте пояснення багатоканальної системи масового обслуговування з очікуванням?
2. Чим характеризується процес масового обслуговування?
3. Чому дорівнює середня тривалість обслуговування однієї заявки?
4. Зобразіть граф станів багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами.
5. Приведіть рівняння Колмогорова для ймовірностей станів системи.

Практична робота № 3

Статистичне моделювання складних систем автоматизації. Моделювання випадкових подій із заданим законом розподілу

Час виконання роботи — 4 години.

Мета: ознайомлення методами статистичного моделювання, розігруванням дискретної випадкової величини.

Метод статистичного моделювання (або метод Монте-Карло) — це спосіб дослідження поведінки імовірнісних систем (економічних, технічних і т.д.) в умовах, коли невідомі повною мірою внутрішні взаємодії в цих системах.

Цей метод полягає у відтворенні досліджуваного фізичного процесу за допомогою імовірнісної математичної моделі й обчисленні характеристик цього процесу. Одне таке відтворення функціонування системи називають *реалізацією* або *випробуванням*. Після кожного випробування реєструють сукупність параметрів, що характеризують випадковий результат реалізації. Метод заснований на багаторазових випробуваннях побудованої моделі з наступною статистичною обробкою отриманих даних з метою визначення числових характеристик розглянутого процесу у вигляді статистичних оцінок його параметрів. Процес моделювання функціонування економічної системи зводиться до машинної імітації досліджуваного процесу, який як би копіюється на ЕОМ з усіма супровідними його випадками.

Перші відомості про метод Монте-Карло були опубліковані наприкінці 40-х рр. Авторами методу є американські математики Дж. Нейман і С. Улам. У нашій країні перші роботи були опубліковані в 1955-1956 р. В.В. Чавчанідзе, Ю.А. Шрейдером і В.С. Владимировим.

Основою методу статистичного моделювання є закон великих чисел. Закон великих чисел у теорії ймовірностей доводить для різних умов збіжності за ймовірністю середніх значень результатів великої кількості спостережень до деяких постійних величин.

Під законом великих чисел розуміють ряд теорем. Наприклад, одна з **теорем П. Л. Чебишева** формулюється так: “При необмеженому збільшенні числа незалежних випробувань n , середнє арифметичне вільних від систематичних помилок і рівноточних результатів спостережень ξ_i випадкової величини ξ , що має кінцеву дисперсію $D(\xi)$, сходиться по ймовірності до математичного сподівання $M(\xi)$ цієї випадкової величини”. Це можна записати в наступному виді:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - M(\xi) \right| < \varepsilon \right\} = 1, \quad (1)$$

де ε — мала додатна величина.

Теорема Бернуллі: При необмеженому збільшенні числа незалежних випробувань в тих самих умовах частота $P^*(A)$ настання випадкової події A сходиться по ймовірності до його ймовірності P , тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{m_i^*}{n} - P\right| < \varepsilon\right\} = 1. \quad (2)$$

Відповідно до даної теореми, для одержання ймовірності будь-якої події, наприклад імовірності станів деякої системи $P_i(t)$, $i = \overline{0, k}$, обчислюють частоти

$$P_i^* = \frac{m_i^*}{n}$$

для однієї реалізації (випробування), далі проводять подібні обчислення для числа реалізацій, рівного n . Результати усереднюють і цим самим з деяким наближенням, одержують ймовірності станів системи. На підставі обчислених ймовірностей визначають інші характеристики системи. Слід зазначити, що, чим більше число реалізацій n , тим точніше результати обчислення шуканих величин (ймовірностей станів системи).

Розв'язок будь-якої задачі методом статистичного моделювання складається з:

- розробки й побудови структурної схеми процесу, виявленні основних взаємозв'язків;
- формального опису процесу;
- моделювання випадкових явищ (випадкових подій, випадкових величин, випадкових функцій), що супроводжують функціонування досліджуваної системи;
- моделювання (з використанням даних, отриманих на попередньому етапі) функціонування системи — відтворенні процесу відповідно до розробленої структурної схеми й формального опису;
- нагромадження результатів моделювання, їхній статистичній обробці, аналізі й узагальненні.

На відміну від описаних раніше математичних моделей, результати яких відбивали стійке в часі поведіння системи, результати, одержувані при статистичному моделюванні, піддані експериментальним помилкам. Це означає, що будь-яке твердження, що стосується характеристик системи, що моделюється повинно ґрунтуватися на результатах відповідних статистичних перевірок.

Експериментальні помилки при статистичному моделюванні в значній мірі залежать від точності моделювання випадкових явищ, що супроводжують функціонування досліджуваної системи.

Відомо, що при вивченні імовірнісних систем випадкові явища можуть інтерпретуватися у вигляді випадкових подій, випадкових величин і випадкових функцій. Отже, моделювання випадкових явищ зводиться до моделювання випадкових подій, випадкових величин і випадкових функцій. Тому що випадкові події й випадкові функції можуть бути представлені через випадкові

величини, то й моделювання випадкових подій і випадкових функцій виконується за допомогою випадкових величин. У зв'язку із цим розглянемо спочатку способи моделювання випадкових величин.

Моделювання випадкових величин

Для моделювання випадкової величини необхідно знати її закон розподілу. Найбільш загальним способом одержання послідовності випадкових чисел, розподілених за довільним законом, є спосіб, в основі якого лежить їхнє формування з вихідної послідовності випадкових чисел, розподілених в інтервалі $[0, 1]$ за рівномірним законом.

Рівномірно розподілені в інтервалі $[0, 1]$ послідовності випадкових чисел можна одержати трьома способами:

- ☐ використання таблиць випадкових чисел;
- ☐ застосування генераторів випадкових чисел;
- ☐ метод псевдовипадкових чисел.

При розв'язковій задачі без застосування ЕОМ найчастіше використовують **таблиці випадкових чисел**. У таблицях випадкових чисел випадкові цифри імітують значення дискретної випадкової величини з рівномірним розподілом:

x_i	0	1	2	3	...	9
p_i	0,1	0,1	0,1	0,1	...	0,1

При складанні таких таблиць виконується умова, щоб кожна із цих цифр від 0; 1;...; 9 зустрічалася приблизно однаково часто й незалежно від інших з імовірністю $p_i = 0,1$.

Найбільша з опублікованих таблиць випадкових чисел містить 1000 000 цифр. Таблиці випадкових чисел скласти не так просто. Вони вимагають ретельної перевірки за допомогою спеціальних статистичних тестів.

При розв'язковій задачі на ЕОМ для вироблення випадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі $[0, 1]$, можуть застосовуватися **генератори випадкових чисел**. Дані генератори перетворюють результати випадкового фізичного процесу у двійкові числа. У якості випадкового фізичного процесу звичайно використовують власні шуми (випадковим чином мінлива напруга).

Недоліки даного способу одержання випадкових чисел наступні:

1. Важко перевірити якість вироблюваних чисел.
2. Випадкові числа не відтворені (якщо їх не запам'ятовувати), і, як наслідок, не можна повторити розрахунок на ЕОМ для виключення випадкового збою.

Одержання псевдовипадкових чисел з рівномірним законом розподілу полягає у виробленні псевдовипадкових чисел. *Псевдовипадкові числа* — це числа, отримані за якою-небудь формулою і значення випадкової величини, що імітуються. Під словом “імітуючі” мається на увазі, що ці числа задовольняють ряд тестів так, ніби вони були значеннями цієї випадкової величини.

Перший алгоритм для одержання псевдовипадкових чисел запропонував Дж. Нейман. Це так званий метод середини квадратів, що полягає в наступному:

$$\gamma_0 = 0,9876, \gamma_0^2 = 0,97535376,$$

$$\gamma_1 = 0,5353, \gamma_1^2 = 0,28654609,$$

$$\gamma_2 = 0,6546 \quad \text{і т.д.}$$

Алгоритм себе не виправдав: вийшло більше, ніж потрібно, малих значень γ_i — випадкових чисел. У цей час розроблено множину алгоритмів для одержання псевдовипадкових чисел.

Назвемо достоїнства методу псевдовипадкових чисел.

1. На одержання кожного випадкового числа витрачається кілька простих операцій, так що швидкість генерації випадкових чисел має той же порядок, що й швидкість роботи ЕОМ.
2. Малий об'єм пам'яті ЕОМ для програмування.
3. Кожне із чисел легко відтворити.
4. Якість випадкових чисел, що генеруються достатньо перевірити один раз.

Велике число розрахунків за методом Монте-Карло здійснюється з використанням псевдовипадкових чисел. Від послідовності випадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі $[0, 1]$, неважко перейти до послідовності випадкових чисел за довільно заданим законом розподілу.

Розігрування дискретної випадкової величини

Нехай потрібно розіграти дискретну випадкову величину, тобто одержати послідовність її можливих значень x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), знаючи закон розподілу X :

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	P_1	P_2	P_3	...	P_n

Позначимо через R неперервну випадкову величину. Величина R розподілена рівномірно в інтервалі $(0, 1)$. Через r_j ($j = 1, 2, \dots$) позначимо можливі значення випадкової величини R . Розіб'ємо інтервал $0 < R < 1$ на осі Or точками з координатами $P_1, P_1 + P_2, P_1 + P_2 + P_3, P_1 + \dots + P_{n-1}$ на n часткових інтервалів $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$.

Тоді одержимо:

$$\text{Довжина } \Delta_1 = P_1 - 0 = P_1.$$

$$\text{Довжина } \Delta_2 = (P_1 + P_2) - P_1 = P_2.$$

.....

$$\text{Довжина } \Delta_n = 1 - (P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1}) = P_n.$$

Звідси, довжина часткового інтервалу з індексом i дорівнює ймовірності P з тим же індексом. Довжина $\Delta_i = P_i$.

Таким чином, при попаданні випадкового числа r_i в інтервал Δ_i випадкова величина X приймає значення x_i з імовірністю P_i .

Теорема 1:

Якщо кожному випадковому числу r_j ($0 \leq r_j < 1$), що потрапило в інтервал Δ_i , поставити у відповідність можливе значення x_i , то величина, що розігрується буде мати заданий закон розподілу.

Алгоритм розігрування дискретної випадкової величини заданої законом розподілу

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
P	P_1	P_2	P_3	$\dots$	P_n

1. Потрібно розбити інтервал $(0, 1)$ осі Or на n часткових інтервалів: $\Delta_1 = (0; P_1)$, $\Delta_2 = (P_1; P_1 + P_2)$, ..., $\Delta_n = (P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1}; 1)$.
2. Вибрати (наприклад, з таблиці випадкових чисел або в комп'ютері) випадкове число r_j .

Якщо r_j потрапило в інтервал Δ_i , то випадкова величина, що розігрується дискретна, прийняла можливе значення x_i .

Приклад 1. Розіграти 8 значень дискретної випадкової величини X , закон розподілу якої задано у вигляді таблиці:

X	$X_1 = 3$	$X_2 = 11$	$X_3 = 24$
P	$P_1 = 0,25$	$P_2 = 0,16$	$P_3 = 0,59$

Розв'язок

1. Розіб'ємо інтервал $(0, 1)$ осі Or точками з координатами 0,25; 0,25 + 0,16 = 0,41 на три часткових інтервали;
 $\Delta_1 = (0; 0,25)$, $\Delta_2 = (0,25; 0,41)$, $\Delta_3 = (0,41; 1)$.
2. Випишемо з таблиці випадкових чисел 9 чисел, наприклад 0,10; 0,37; 0,08; 0,99; 0,12; 0,66; 0,31; 0,85.
3. Випадкове число $r_1 = 0,10$ належить першому частковому інтервалу, тому випадкова величина, що розігрується, прийняла можливе значення $x_1 = 3$. Випадкове число $r_2 = 0,37$ належить іншому частковому інтервалу, тому, величина, що розігрується прийняла можливе значення $x_2 = 11$. Аналогічно отримаємо інші можливі значення дискретної випадкової величини X .

Отже, розігруванні можливі значення X такі: 3; 11; 3; 24; 3; 24; 11; 24.

Як бачимо, можна одержати множину значень випадкової величини X із заданим законом розподілу.

Розігрування неперервної випадкової величини

Нехай потрібно розіграти неперервну випадкову величину X , тобто одержати послідовність її можливих значень x_i ($i = 1, 2, \dots$). При цьому функція розподілу $F(X)$ відома.

Теорема 2.

Якщо r_i — випадкове число, то можливе значення x_i випадкової неперервної величини, що розігрується X з відомою функцією розподілу $F(X)$ відповідне r_i , є коренем рівняння

$$F(x_i) = r_i.$$

Алгоритм розігрування неперервної випадкової величини:

1. Необхідно вибрати випадкове число r_i .
2. Прирівняти обране випадкове число відомої функції розподілу $F(X)$ і

одержати рівняння $F(x_i) = r_i$.

3. Розв'язати дане рівняння відносно x_i . Отримане значення x_i буде відповідати одночасно й випадковому числу r_i і заданому закону розподілу $F(X)$.

Приклад 2. Розіграти 3 можливі значення неперервної випадкової величини X , розподіленої рівномірно в інтервалі (2; 10).

Розв'язок

Функція розподілу величини X має вигляд:

$$F(x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

За умовою, $a = 2$, $b = 10$, отже

$$F(x) = \frac{x - 2}{8}.$$

Відповідно до алгоритму розігрування неперервної випадкової величини прирівняємо $F(X)$ до обраного випадкового числа r_i . Одержимо звідси:

$$\frac{(x_i - 2)}{8} = r_i \Rightarrow x_i = 8r_i + 2. \quad (3)$$

Далі відповідно до алгоритму виберемо три випадкових числа, розподілених рівномірно в інтервалі (0; 1). Наприклад $r_1 = 0,11$; $r_2 = 0,17$; $r_3 = 0,66$.

Підставимо ці числа в рівняння (3). Одержимо відповідні можливі значення x :

$$x_1 = 8 \cdot 0,11 + 2 = 2,88; \quad x_2 = 8 \cdot 0,17 + 2 = 3,36; \quad x_3 = 8 \cdot 0,66 + 2 = 7,28$$

Приклад 3. Безперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом з відомою функцією

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda(x)} \quad (x > 0, \text{ параметр } \lambda > 0 \text{ відомий}).$$

Потрібно знайти формулу для розігрування можливих значень X .

Розв'язок

Відповідно до алгоритму розігрування безперервної випадкової величини одержимо рівняння

$$1 - e^{-\lambda x_i} = r_i.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно x_i . Одержимо:

$$e^{-\lambda x_i} = 1 - r_i, \quad -\lambda x_i = \ln(1 - r_i), \quad \Rightarrow \quad x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r_i).$$

Випадкове число r_i перебуває в інтервалі (0, 1). Отже число $(1 - r_i)$ також випадкове й належить інтервалу (0, 1). Тобто випадкові величини R й $1 - R$ розподілені однаково, тобто рівномірно в тому самому інтервалі (0, 1). Тому для відшукання значення x_i можна скористатися більш простою формулою:

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r_i.$$

Розігрування випадкової величини X , розподіленої нормально

Відомо, що якщо випадкова величина R розподілена рівномірно в інтервалі $(0, 1)$, то її математичне очікування $M(R) = 1/2$, а дисперсія $D(R) = 1/12$.

Складемо суму n незалежних випадкових величин R_j ($j = 1, 2,$

$\dots, n$), які розподілені рівномірно в інтервалі $(0, 1)$. Одержимо $\sum_{j=1}^n R_j$.

Пронормуємо цю суму. Для цього знайдемо спочатку її математичне очікування й дисперсію. Відомо, що математичне очікування суми випадкових величин дорівнює сумі математичних очікувань доданків. Сума R_i містить n доданків. Математичне очікування кожного доданка дорівнює $1/2$. Отже математичне очікування суми дорівнює:

$$M\left[\sum_{j=1}^n R_j\right] = \frac{n}{2}.$$

Аналогічно для дисперсії суми R_j одержимо:

$$D\left[\sum_{j=1}^n R_j\right] = \frac{n}{12}.$$

Звідси середнє квадратичне відхилення суми R_j :

$$\sigma_z = \sqrt{n/12}.$$

Тепер пронормуємо суму R_j .

Для цього віднімемо із суми R_j математичне очікування цієї суми й розділимо на середнє квадратичне відхилення суми R_j . Одержимо

$$\frac{\sum_{j=1}^n R_j - n/2}{\sqrt{n/12}}; \quad \left(\text{тобто } \frac{x - a}{\sigma}\right).$$

На підставі центральної граничної теореми теорії ймовірностей при $n \rightarrow \infty$ розподіл цієї нормованої випадкової величини прагне до нормального закону з параметрами $a = 0$ й $\sigma = 1$.

При кінцевому n розподілі можна розглядати як приблизно нормальне. Наприклад, при $n = 12$ одержимо досить точне для практики наближення

$$\frac{\sum_{j=1}^{12} R_j - 6}{1} = \sum_{j=1}^{12} R_j - 6.$$

Таким чином, маємо, що для того щоб розіграти можливе значення x_i нормальної випадкової величини X с параметрами $a = 0$ й $\sigma = 1$, потрібно скласти 12 незалежних випадкових чисел і з отриманої суми відняти 6.

$$x_i = \sum_{i=1}^{12} r_i - 6 = S_i - 6.$$

Приклад 4.

1. Розіграти 100 можливих значень випадкової величини X розподіленої нормально з параметрами $\alpha = 0$ й $\sigma = 1$.

2. Оцінити параметри розіграної випадкової величини X .

Розв'язок

1. Виберемо 12 випадкових чисел розподілених рівномірно в інтервалі $(0, 1)$ з таблиці випадкових чисел або з комп'ютера. Складемо ці числа й із суми віднімемо 6, у підсумку одержимо:

$$x_1 = (0,10 + 0,09 + \dots + 0,67) - 6 = -0,99.$$

Аналогічним чином знайдемо інші можливі значення $x_2, x_3, \dots, x_{100}$.

2. Виконавши необхідні розрахунки знайдемо вибірккову середню, яка є оцінкою α^* і вибірккове середнє квадратичне відхилення, що є оцінкою σ^* . Одержимо:

$$\alpha^* = \bar{x}_8 \approx -0,05; \quad \sigma^* = \sqrt{D_8} \approx 1,04.$$

Як бачимо, оцінки задовільні, тобто α^* близько до нуля, а σ^* близько до одиниці.

Якщо потрібно розіграти значення нормальної ненормованої випадкової величини з математичним очікуванням α відмінним від нуля й σ відмінним від одиниці, то спочатку грають можливі значення x_i нормованої випадкової величини, а потім знаходять шукане значення за формулою:

$$z_i = \sigma \cdot x_i + \alpha,$$

яка отримана зі співвідношення:

$$x_i = \frac{z_i - \alpha}{\sigma}.$$

Таблиця 1.

Формули для моделювання випадкових величин

Закон розподілу випадкової величини	Щільність розподілу	Формула для модулювання випадкової величини
Експонентний	$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln \xi_i$
Вейбула	$f(x) = \frac{a}{b} \left(\frac{x}{a}\right)^{a-1} \exp \left[-\left(\frac{x}{a}\right)^a \right]$	$x_i = -b (\ln \xi_i)^{1/a}$
Гама-розподіл (η — цілі числа)	$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\eta)} \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot x^{\eta-1}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\eta} \ln(1 - \xi_j)$
Нормальне	$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$	$x_i = \bar{x} + \sigma \left(\sum_{j=1}^{\eta} \xi_j - 6 \right)$

Моделювання систем масового обслуговування з використанням методу Монте-Карло

У реальних умовах функціонування СМО є перехідні режими, а вхідні й вихідні потоки вимог є далеко не найпростішими. У цих умовах для оцінки якості функціонування систем обслуговування широко використовують **метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло)**. Основою рішення задачі дослідження функціонування СМО в реальних умовах є статистичне моделювання вхідного потоку вимог і процесу їхнього обслуговування (вихідного потоку вимог).

Для розв'язку задачі статистичного моделювання функціонування СМО повинні бути задані наступні вихідні дані:

- опис СМО (тип, параметри, критерії ефективності роботи системи);
- параметри закону розподілу періодичності надходжень вимог у систему;
- параметри закону розподілу часу перебування умови в черзі (для СМО з очікуванням);
- параметри закону розподілу часу обслуговування вимог у системі.

Розв'язок задачі статистичного моделювання функціонування СМО складається з наступних етапів.

1. Виробляють рівномірно розподілене випадкове число ξ_i .
2. Рівномірно розподілені випадкові числа перетворюють у величини із заданим законом розподілу:
 - інтервал часу між надходженнями вимог (запитів) у систему (Δt_i);
 - час відходу заявки (запиту) із черги (для СМО з обмеженою довжиною черги);
 - тривалість обслуговування умови каналами (Δt_{co}).
3. Визначають моменти настання подій:
 - надходження умови на обслуговування;
 - відхід умови із черги;
 - закінчення обслуговування умови в каналах системи.
4. Моделюють функціонування СМО в цілому й накопичують статистичні дані про процес обслуговування.
5. Установлюють новий момент надходження умови в систему, і обчислювальна процедура повторюється відповідно до викладеного.
6. Визначають показники якості функціонування СМО шляхом обробки результатів моделювання методами математичної статистики.

Методику розв'язку задачі розглянемо на прикладі **моделювання СМО з відмовами**.

Нехай система має два однотипних канали, що працюють із відмовами, причому моменти часу закінчення обслуговування на першому каналі позначимо через t_{1i} , на другому каналі — через t_{2i} . Закон розподілу інтервалу часу між суміжними умовами, що поступають задається щільністю розподілу $f_1(t)$. Тривалість обслуговування також є випадковою величиною з щільністю розподілу $f_1(t_0)$.

Процедура розв'язку задачі буде виглядати так:

1. Виробляють рівномірно розподілене випадкове число ξ_i .
2. Рівномірно розподілене випадкове число перетворюють у величини із заданим законом розподілу, використовуючи формули табл. 1. Визначають реалізацію випадкового інтервалу часу (Δt_i) між надходженнями вимог (запитів) у систему.
3. Обчислюють момент надходження заявки на обслуговування: $t_i = t_{i-1} + \Delta t_i$.
4. Порівнюють моменти закінчення обслуговування попередніх заявок на першому $t_{1(i-1)}$ і другому $t_{2(i-1)}$ каналах.
5. Порівнюють момент надходження заявки t_i з мінімальним моментом закінчення обслуговування (допустимо, що $t_{1(i-1)} < t_{2(i-1)}$):
 - якщо $[t_i - t_{1(i-1)}] < 0$, то заявка (запит) одержує відмову й виробляють новий момент надходження заявки описаним способом;
 - якщо $[t_i - t_{2(i-1)}] \geq 0$, то відбувається обслуговування.
6. При виконанні умови 5 б) визначають час обслуговування i -ї заявки на першому каналі Δt_{1i} шляхом перетворення випадкової величини ξ_i у величину (час обслуговування i -ї заявки) із заданим законом розподілу.
7. Обчислюють момент закінчення обслуговування i -ї заявки на першому каналі $t_{1i} = [t_{1(i-1)} + \Delta t_{1i}]$.
8. Установлюють новий момент надходження заявки, і обчислювальна процедура повторюється відповідно до викладеного.
9. У ході моделювання СМО накопичуються статистичні дані про процес обслуговування.
10. Визначають показники якості функціонування системи шляхом обробки накопичених результатів моделювання методами математичної статистики.

Моделювання потоків відмов елементів складних технічних систем

Під **складною технічною системою** будемо розуміти систему, що складається з елементів (два й більше). Відмова одного з елементів системи приводить до відмови системи в цілому.

Розглянемо послідовність заміन деякого певного елемента Z даного найменування. Експлуатація кожного нового елемента починається з моменту закінчення терміну служби попереднього. Перший елемент відпрацьовує час Δt_1 , другий — Δt_2 , третій — Δt_3 і т.д.

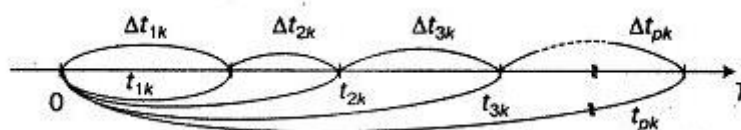


Рис. 1. Тимчасова епіюра випадкової ситуації при k -му досліді у випадку миттєвого відновлення системи, що відмовила, шляхом заміни елемента

Випадкова ситуація, що склалася в k -му досліді (ситуації) для елемента

Z, показана на рис. 1.

На рис. 1 видно, що система починає свою роботу в момент часу $t = 0$ й, відпрацювавши випадковий час Δt_{1k} , виходить із ладу в момент $t_{1k} = \Delta t_{1k}$. У цей момент система миттєво відновлюється (елемент замінюється) і знову працює випадковий час Δt_{2k} . Після закінчення деякого часу система (елемент) знову виходить із ладу в момент $t_{2k} = \Delta t_{1k} + \Delta t_{2k} = t_{1k} + \Delta t_{2k}$ і знову миттєво відновлюється.

Уважають, що інтервали часу між відмовами $\Delta t_{1k}, \Delta t_{2k}, \dots, \Delta t_{pk}$ являють собою систему взаємно незалежних випадкових величин із густиною розподілу наробітків між відмовами $f(\Delta t_1), f(\Delta t_2), \dots, f(\Delta t_p)$.

Моменти відмов або відновлень утворюють у кожному k -му дослідженні (випробуванні) ряд чисел за наступним правилом:

$$\begin{aligned} t_{1k} &= \Delta t_{1k}; \\ t_{2k} &= \Delta t_{1k} + \Delta t_{2k} = t_{1k} + \Delta t_{2k}; \\ t_{3k} &= \Delta t_{1k} + \Delta t_{2k} + \Delta t_{3k} = t_{2k} + \Delta t_{3k}; \\ &\dots\dots\dots \\ t_{pk} &= \Delta t_{1k} + \Delta t_{2k} + \dots + \Delta t_{pk} = t_{(p-1)k} + \Delta t_{pk}. \end{aligned} \quad (4)$$

або

$$t_{pk} = \sum_{i=1}^p \Delta t_{ik} = \sum_{i=1}^{p-1} \Delta t_{ik} + \Delta t_{pk},$$

де t_{ik} — час роботи (наробіток) елемента до i -го відмови в k -му досліді, година; $i = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, N}$; Δt_{ik} — час роботи (наробіток) елемента між $(i - 1)$ -м й i -му відмовами в k -ій реалізації, година, $i = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, N}$.

Числа $t_{1k}, t_{2k}, \dots, t_{pk}$ утворюють випадковий потік, що називається *процесом відновлення*. Цей процес є різним для різних елементів і триває до закінчення терміну служби системи. Вивченням таких процесів займається теорія відновлення.

З великої кількості різних процесів відновлення для дослідження надійності елементів технічної системи (ті, що ремонтують і не ремонтують) використовують три типи процесів:

- □ простий, при якому всі функції розподілу наробітків до першого і між наступними відмовами $F_i(t)$ рівні;
- загальний, при якому вид функції розподілу наробітку до першої відмови елемента, установленого в системі заводом-виготовлювачем, відрізняється від виду функцій розподілу наробітків елементів при наступних замінах, тобто $F_1(t) \neq F_i(t)$, $i = 2, 3, 4, \dots$
- складний, при якому всі функції розподілу $F_i(t)$ різні.

Основною характеристикою процесу відновлення є функція відновлення $\Omega(t)$ і її диференціальна характеристика — щільність відновлення $\omega(t)$,

обумовлені наступними формулами:

$$\Omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t); \quad (5)$$

$$\omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t), \quad (6)$$

де $F_n(t)$ і $f_n(t)$ — відповідно щільність і функція розподілу наробітку до n -ї відмови.

У випадку незалежності наробітків між відмовами функції розподілу $F_n(t)$ наробітків до n -ї відмови перебувають шляхом послідовного застосування правила згортки для суми двох випадкових величин:

$$F_n(t) = F_{n-1}(t) \cdot F(\Delta t_n) = \int_0^t F_{n-1}(t - \Delta t) \cdot dF(\Delta t); \quad (7)$$

$$F_1(t) = F(t).$$

Слід зазначити, що складність одержання аналітичних виразів для $\Omega(t)$ й $\omega(t)$ за формулами (5), (6) полягає в тому, що формула (7) лише для деяких законів розподілу обчислюється в кінцевому виді. Використання аналітичних методів розрахунку щільності $\omega(t)$ і функції відновлення $\Omega(t)$ обмежені через складність математичної формалізації застосовуваних стратегій відновлення працездатності технічних систем і необхідності обліку множини факторів, що впливають на заміну елемента в системі. У цих умовах найбільш ефективним методом розрахунку $\Omega(t)$ і $\omega(t)$ є метод Монте-Карло.

Розрахунок провідної функції й параметра потоку відмов цим методом у випадку простого, загального або складного процесів виконується в наступному порядку.

За відомими законами розподілу наробітків елементів з використанням формул перетворення (табл. 1) моделюються масиви випадкових величин Δt_{ik} між $(i-1)$ й i -ю відмовами. Розмірність кожного масиву дорівнює N .

Далі обчислюються значення наробітків до i -ї відмови t_{ik} за формулами:

$$t_{ik} = t_{(i-1)k} + \Delta t_{ik}; \quad (8)$$

$$t_{1k} = \Delta t_{1k}, \quad (9)$$

де i — номер відмови, $i = \overline{1, p}$; k — номер реалізації при моделюванні, $k = \overline{1, N}$; p — максимальне число відмов елемента, одержуване в k -й реалізації випадкового процесу.

Потім отримані випадкові величини наробітків t_{ik} групуються за інтервалами часу.

Номера інтервалів, у які попадають моменти виникнення відмов $t_{1k}, t_{2k}, \dots, t_{ik}, \dots, t_{pk}$ визначаються за формулами:

$$\gamma = \text{CEIL} \left(\frac{t_{ik}}{\Delta t} \right), \quad (10)$$

де $\text{CEIL}\left(\frac{t_{ik}}{\Delta t}\right)$ — найменше ціле число, не менше $\frac{t_{ik}}{\Delta t}$; Δt_i — величина інтервалу часу.

Параметр i провідна функція потоку відмов в j -му інтервалі часу визначається за формулами:

$$\omega_j(t) = \sum_{i=1}^p n_{ij} / \Delta t \cdot N = \frac{n_j}{\Delta t \cdot N}; \quad (11)$$

$$\Omega(t) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^p n_{ij} = \frac{S_j}{N}; \quad (12)$$

де n_{ij} — число попадань випадкового наробітку до i -ї відмови t_{ik} в j -й інтервал часу ($j = \overline{1, h}$) за N реалізацій.

$$n_j = \sum_{i=1}^p n_{ij}; \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^p n_{ij} = \begin{cases} S_1 = n_1 \\ S_2 = n_1 + n_2 \\ \dots\dots\dots \\ S_k = n_1 + n_2 + \dots + n_j + \dots + n_k \end{cases} \quad (5.14)$$

де h — максимальне число інтервалів часу.

Приклад 5. Закони розподілу наробітків елемента системи до першої й другої відмов і відповідні параметри цих законів наведені в наступній таблиці:

№ відмови	Закон розподілу	Параметри закону	
		$a(\lambda)$	b
1	Вейбула	1,4	45,8
2	Експонентний	0,3	—

Визначити номери тимчасових інтервалів, на яких відбудуться перша й друга відмови в ході першого досліджень (випробування) ($\Delta t_i = 1$ година).

Розв'язок

1. Виберемо рівномірно розподілене випадкове число. Допустимо $\xi_i = 0,725$.

2. Обчислимо випадкові значення наробітків на відмову елемента використовуючи формули табл. 1.

$$t_{11} = \Delta t_{11} = -b \cdot (\ln \xi_1)^{1/\lambda} = -45,8 \cdot (\ln 0,725)^{1/4} = 20,37 \text{ годин};$$

$$t_{21} = t_{11} + \Delta t_{21};$$

$$\Delta t_{21} = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \xi_1 = -\frac{1}{0,3} \cdot \ln 0,725 = 1,07 \text{ година};$$

$$t_{21} = t_{11} + \Delta t_{21} = 20,37 + 1,07 = 21,44 \text{ година}.$$

3. Визначимо номер тимчасового інтервалу, на якому відбудуться відмови

$$\gamma = \text{CEIL}\left(\frac{t_{\text{ж}}}{\Delta t}\right)$$

перша відмова

$$\gamma = \text{CEIL}\left(\frac{t_{11}}{\Delta t}\right) = \text{CEIL}\left(\frac{20,37}{1}\right) = 21;$$

друга відмова

$$\gamma = \text{CEIL}\left(\frac{t_{21}}{\Delta t}\right) = \text{CEIL}\left(\frac{21,44}{1}\right) = 22.$$

У ході першої реалізації елемент системи перший раз відмовить на 21-му тимчасовому інтервалі, а друга відмова відбудеться на 22-му тимчасовому інтервалі.

Завдання на практичну роботу

1. Самостійно виконати перевірку результатів наведених прикладів 1, 2, 3, 4 і 5 використовуючи програму Mathcad.
2. Періодичність надходження заявок на обслуговування підкоряється показовому закону розподілу Середній інтервал між надходженнями заявок у систему дорівнює $\bar{t} = 2$ (1; 4) години. Визначити послідовність значень тривалості інтервалів між надходженнями заявок. Число реалізацій дорівнює 10 (9; 12).
3. Час обслуговування працівника підприємства касою бухгалтерії є випадковою величиною, розподіленої відповідно до закону Вейбула. Середній час обслуговування $\bar{t} = 3$ (2; 4) хв., середнє квадратичне відхилення дорівнює $\sigma = 2$ (3; 5) хв. Потрібно змодельовати випадкову величину, що відповідає цим умовам. Число реалізацій прийняти рівним 10 (11; 9).
4. При обробці експериментальних даних було встановлено, що час, який витрачається на станції технічного обслуговування автомобілів для заміни двигуна, розподілено за нормальним законом, параметри якого $\bar{x} = 2,8$ (1,8; 3,0) години на один двигун й $\sigma_{\bar{x}} = 0,6$ (0,5; 0,8) години. Потрібно змодельовати для відзначених умов випадкову величину — години X , що витрачаються для заміни двигуна. Число реалізацій прийняти рівним 5 (8; 4).
5. Час перевірки приймання квартального звіту інспектором податкової служби (t) величина випадкова, розподілена відповідно до закону Вейбула. Середній час перевірки й приймання дорівнює $\bar{t} = 20$ (21; 30) хв. Коефіцієнт варіації величини t дорівнює $V_t = 0,52$ (1,0; 0,4). Потрібно змодельовати для заданих умов випадкові числа t (число реалізацій прийняти рівним 10).

6. Середнє число справних верстатів у токарському цеху на заводі дорівнює $\bar{x} = 6$ (3; 5). Середнє квадратичне відхилення $\sigma_{\bar{x}} = 2,2$ (1,8; 2,5). Потрібно змодельовати число справних верстатів у цеху (число реалізацій дорівнює 5) за умови, що випадкова величина X має гамма-розподіл.
7. Система має два елементи. Середня періодичність першого елемента $\bar{t}_1 = 60$ (50; 40) годин, другого елемента — $\bar{t}_2 = 85$ (91; 74) годин. Періодичності відмови першого й другого елементів — випадкові величини, підкорюються експонентному закону розподілу. Визначити параметр і функцію розподілу потоку відмов системи за інтервалом часу $\Delta t = 8$ (7; 5) годин. Число реалізацій $N = 10$.
8. Періодичність перевірки підприємств податкової інспекції — величина випадкова (Δt), що підкоряється закону гамма-розподілу. Середній інтервал перевірки $\bar{\Delta t} = 2,5$ (1,8; 3,0) міс. Коефіцієнт варіації величини Δt дорівнює $V = 0,38$ (0,4; 0,8). Потрібно змодельовати для заданих умов можливі моменти перевірок підприємства податковою інспекцією (число реалізацій прийняти рівним 10).
9. Середнє число працюючих машин на заводі $\bar{x} = 25$ (30; 28). Коефіцієнт варіації числа працюючих $V = 0,6$ (1,0; 1,5). Потрібно змодельовати число працюючих машин на заводі (число реалізацій дорівнює 10). Випадкова величина X має розподіл Вейбула.
10. Після кожної перевірки підприємства податковою інспекцією ймовірність появи необхідності аудиторської перевірки даного підприємства $P = 0,72$ (1,0; 0,5). Змодельуйте шість випробувань. Визначити послідовність проведення різних перевірок підприємства.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення складної технічної системи.
2. З яких етапів складається розв'язок задачі статистичного моделювання функціонування СМО?
3. У чому полягає метод Монте-Карло?
4. Дайте визначення теоремі Л. Л. Чебишева.
5. Дайте визначення теоремі Бернуллі.
6. Наведіть формули для моделювання випадкових величин.

Практична робота № 4

Математичне моделювання робототехнічних систем біотехнічних об'єктів

Час виконання роботи — 4 години.

Мета: *Ознайомитися з особливостями математичного імітаційного моделювання систем на ЕОМ з використанням Matlab.*

Математичне моделювання робототехнічних систем біотехнічних об'єктів (РТС) є важливим етапом їх проектування. На цьому етапі виконується аналіз динамічних властивостей РТС з точки зору відповідності технологічним вимогам, уточнюється структура системи керування, типи регуляторів, їх параметри. При моделюванні можна з впевненістю досліджувати поведінку системи в аварійних ситуаціях, що неможливо на лабораторних, і тим більше на діючих промислових установках. Іноді моделювання проводять для того, щоб оцінити коректність прийнятих при математичному опису системи спрощень.

Математичне моделювання на ЕОМ зводиться до розв'язання системи диференціальних або різницевих рівнянь, що описують динамічні властивості досліджуваного об'єкту, в результаті чого отримують графіки перехідних процесів об'єкту в характерних режимах його роботи.

При дослідженні систем автоматичного регулювання вихідним матеріалом для моделювання дуже часто є структурна схема, що представляє собою графічну інтерпретацію математичного опису системи. В структурну схему, крім неперервних та (або) дискретних динамічних ланок можуть входити арифметичні ланки, "типові нелінійності" та нелінійності довільного типу, задані аналітично або графічно, різні ключі, логічні елементи тощо.

Перехідні процеси можна розраховувати як за допомогою програм, написаних будь-якою алгоритмічною мовою, що потребує від дослідника достатньо високої кваліфікації в галузі програмування та обчислювальної математики, так і за допомогою спеціалізованого програмного забезпечення, що дозволяє користувачу задавати моделі у вигляді математичних рівнянь або у вигляді структурних схем, обирати методи розв'язання диференціальних рівнянь та їх параметри в діалоговому режимі та отримувати результати у зручній формі.

Одним із найзручніших програмних засобів структурного математичного моделювання на теперішній час є додаток *Simulink* пакету *MATLAB*.

Основою для розробки моделей в *Simulink* є бібліотеки блоків, з котрих складаються структурні схеми САР, що повинні бути дослідженими. Розрахунок перехідних процесів може бути виконаний за допомогою відповідних операцій *Simulink-меню* або в програмному режимі (з використанням функцій пакета *MATLAB*).

Simulink можна запустити з командної стрічки пакету *MATLAB* однойменною командою

>>simulink

де » — запрошення *MATLAB* до введення команди, або спеціальною кнопкою на панелі інструментів.

При цьому на екрані відкривається вікно (рис. 1) з бібліотеками блоків, яке має назву *Simulink Library Browser* (Навігатор *Simulink*-Бібліотек).

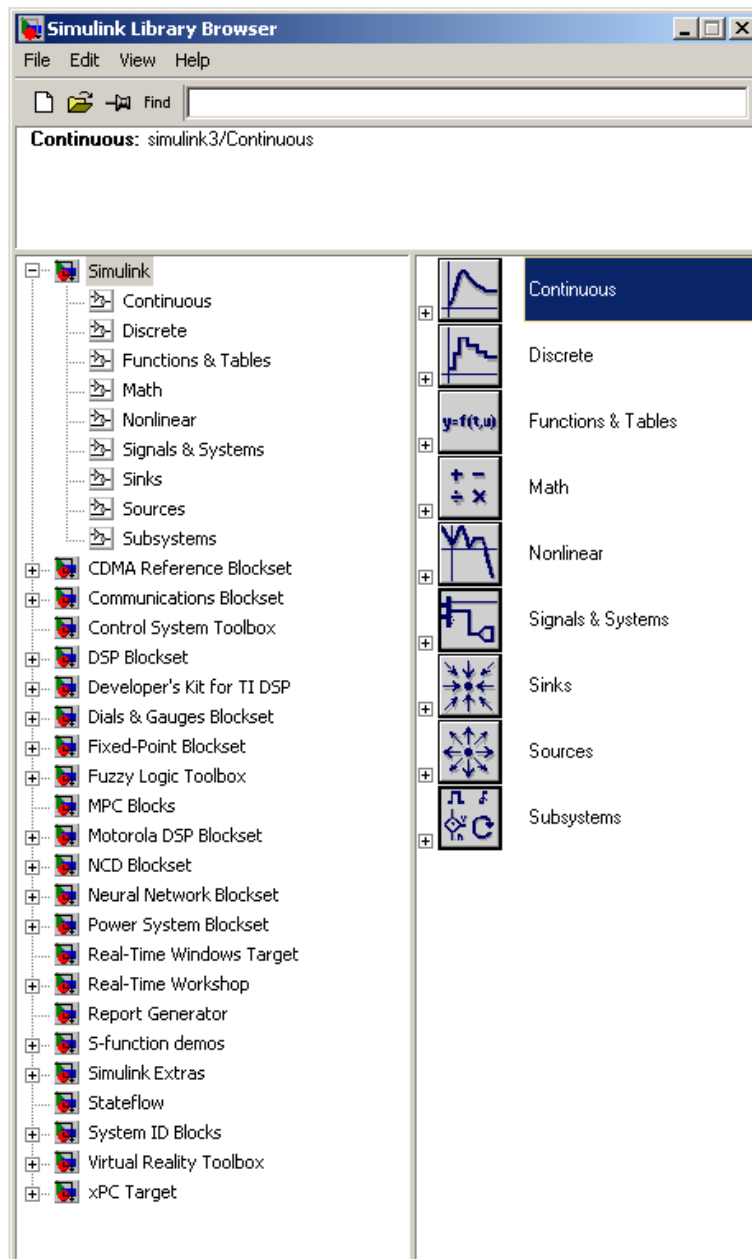


Рис. 1. Вікно *Simulink Library Browser*

Кожну бібліотеку можна розкрити подвійним щикликом миші на піктограмі (іконці) бібліотеки в правій частині вікна або вибором назви бібліотеки в лівій частині вікна. При цьому піктограми блоків обраної бібліотеки замішують піктограми бібліотек.

До основних *Simulink*-бібліотек відносяться ті, що розташовані у верхньому рядку вікна *Simulink 3*, тобто

<i>Source</i>	джерела вхідних сигналів;
<i>Sinks</i>	блоки, що реєструють;
<i>Continues</i>	неперервні лінійні динамічні ланки;
<i>Discrete</i>	дискретні лінійні динамічні ланки;
<i>Math</i>	математична бібліотека;
<i>Functions & Tables</i>	функції та таблиці;
<i>Nonlinear</i>	нелінійні блоки;
<i>Signals & Systems</i>	сигнали та системи;
Subsystem s	підсистеми.

Розділ *Blocksets & Toolboxes* являє собою сукупність бібліотек установок та інструментів, зміст якої (не повний) показано на рис. 2.

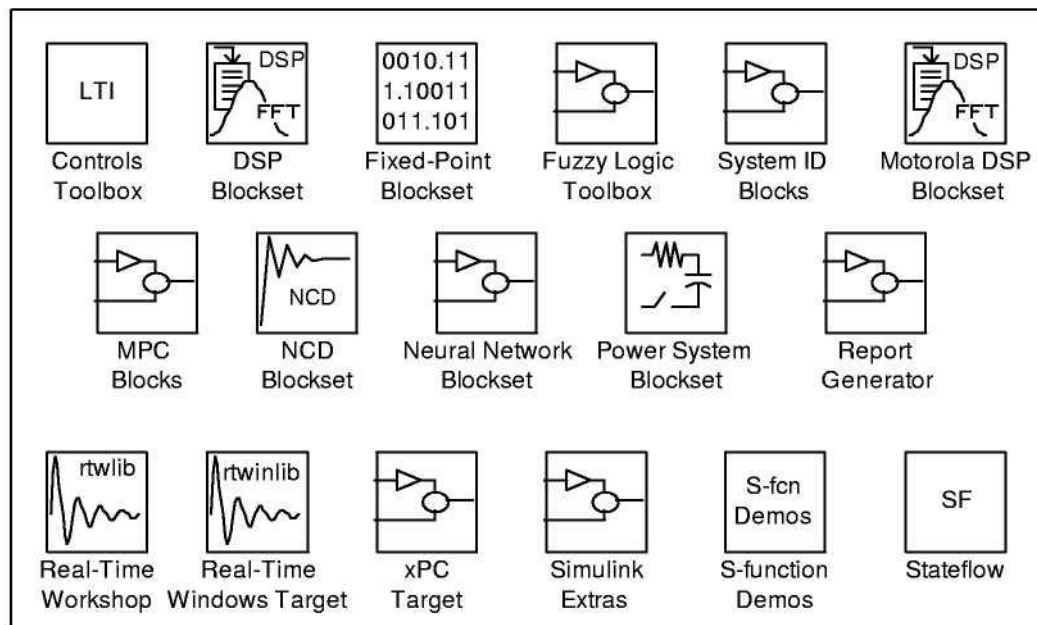


Рис. 2. Вікно бібліотек "*Blocksets & Toolboxes*"

До цієї сукупності належать:

<i>Control Toolbox</i>	аналіз і синтез лінійних систем;
<i>DSP Blockset</i>	пристрої, що використовують <i>Discrete Signal Processing Toolbox</i> (обробка дискретних сигналів);
<i>Motorola DSP Blockset</i>	пристрої обробки дискретних сигналів фірми Motorola;
<i>Fixed-Point Blockset</i>	пристрої, що використовують операції з фіксованою точкою з <i>Fixed-Point Blockset</i> ;
<i>Fuzzy Logic Toolbox</i>	Fuzzy-регулятори з демонстраціями;
<i>System ID Blocks</i>	блоки ідентифікації;
<i>MPC Blocks</i>	блоки, що використовують <i>Model Predictive Control Toolbox</i> (прогнозне керування);

<i>NCD Blockset</i>	пристрої, що використовують <i>Nonlinear Control Design Toolbox</i> (синтез нелінійних
<i>Neural Network</i>	елементи нейронних мереж;
<i>Power System Blockset</i>	елементи електричних схем і систем, силова електроніка, електричні машини;
<i>Report Generator</i>	генератор звітів;
<i>Real-Time Workshop</i>	майстерня реального часу;
<i>Real-Time Windows</i>	<i>Windows-платформа</i> реального часу;
<i>xPC Target</i>	хРС-платформа реального часу;
<i>Simulink extras</i>	спеціальні блоки <i>Simulink</i> ;
<i>S-Function Demos</i>	демонстрація блоків <i>Simulink</i> , побудованих з використанням S-функцій;
<i>Stateflow</i>	система моделювання подій.

Із спеціальних бібліотек (*Simulink extras*), представлених на рис. 3, для спеціалістів в галузі електроприводу найбільший інтерес представляють:

<i>Additional Linear</i>	аналогові лінійні неперервні динамічні ланки з початковими умовами (п.у.);
<i>Additional Discrete</i>	дискретні динамічні ланки з п.у.;
<i>Additional Sinks</i>	пристрої, що реєструють, для спектрального аналізу;
<i>Flip Flops</i>	тригери.

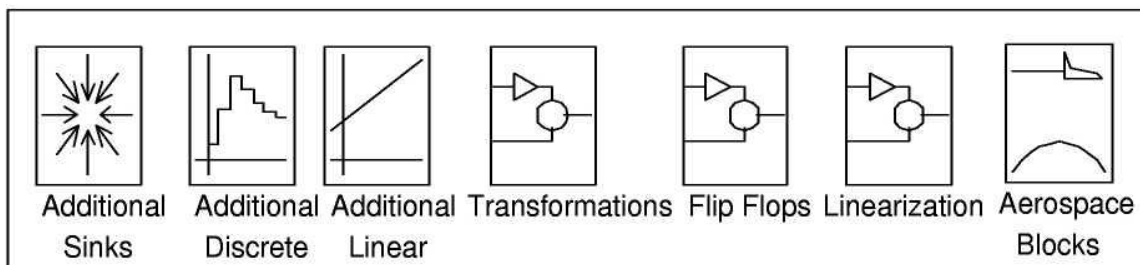


Рис. 3. Вікно бібліотек *Simulink extras*

При подвійному клацанні мишею по піктограмі блоку відкривається вікно введення його параметрів, в якому відображаються ім'я блоку, його тип, короткий опис та поля введення параметрів із супроводжуючими їх запитами. Більш докладну інформацію про блок можна отримати, звернувшись до функції *Help*. Піктограма блоку найчастіше відображує його динамічні або статичні властивості і реагує на зміну параметрів.

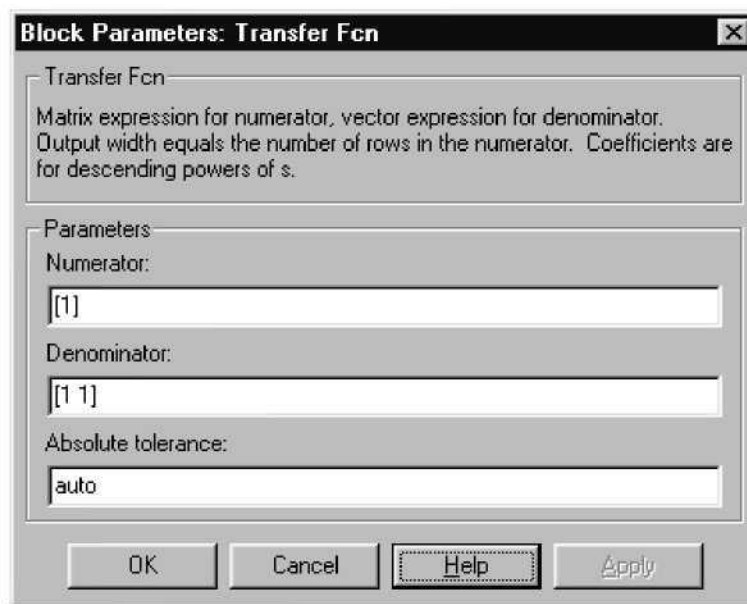


Рис. 4. Вікно введення параметрів блоку *Transfer Fcn*

Як приклад, на рис. 4 наведено вікно введення параметрів блоку *Transfer Function*.

Параметри блоків можуть бути константами, змінними, функціями або виразами, припустимими в *MATLAB*. Будь-які змінні, від яких залежить параметр, повинні бути визначені в робочому середовищі (*Matlab Workspace*) до початку процесу моделювання, у противному випадку *Simulink* сигналізує про наявність помилки в цьому блоці.

Клавіша *Apply* дозволяє оцінити результат зміни параметрів, не закриваючи вікна *Block Parameters*, клавіша *OK* закриває вікно введення параметрів із запам'ятовуванням виконаних змін, клавіша *Cancel* закриває вікно введення параметрів зі скасуванням внесених змін.

Для знайомства з можливостями додатку *Simulink* та особливостями роботи деяких блоків можна скористатися демонстраціями, які зручно запускати з вікна *MATLAB Demo Window*. Воно з'являється на екрані при виконанні команди

>>demo

або

>>demo simulink

та пропонує наступні демонстрації:

1) *General model demonstrations and samples* (основні демонстрації):

Bangbang — *State event handling* (побудова фазового портрету),

Bounce — *Bouncing ball using reset integrator* (підстрибування м'яча з використанням інтегратора із скиданням вихідного сигналу),

Countersdemo — *Counter demonstration* (демонстрація лічильників),

dblcart1 — *Double cart demonstration* (двомасова система, що складається з двох возиків, з'єднаних між собою пружиною),

dblpend1 — *Pendulum with one joint* (маятник з одним суглобом),

dblpend2 — *Pendulum with two joints* (маятник з двома суглобами),
Hardstop — *Friction model with hard stops* (модель тертя),
Hydcyl — *Hydraulic cylinder model* (модель гідравлічного циліндра),
hydcyl4 — *Four hydraulic cylinders* (чотири гідравлічних циліндри),
hydrod — *Two hydraulic cylinders interconnected with a stiff rod* (два гідравлічних циліндри з жорстким шатуном),
onecart — *Single cart/spring demonstration* (візок з пружиною, до якої прикладається періодичне зусилля, з анімацією),
penddemo — *Inverted pendulum (on cart) with animation* (інверсний маятник, встановлений на візку, з дискретним спостерігачем стану),
simppend — *Simple pendulum demonstration* (простий маятник),
simquat — *Quaternion rotation with animation* (обертання кватерніона),
slprimes — *Simulink prime number generator* (генератор простих чисел),
thermo — *Thermodynamic model of a house* (термодинамічна модель будинку),
toilet — *Toilet tank flushing animation* (злив туалетного бачка),
vdp — *Van der Pol system of equations* (розв'язання рівнянь Ван дер Поля);

2) *Feature demonstrations and samples* (особливі демонстрації):

Busdemo — *Bus block* (блоки створення шини та її селектора),
Combfilter — *Data Typing with filter* (фільтрація сигналів одиночної та подвійної точності),
Datatypesdemo — *Data Typing demonstration* (демонстрація використання різних типів арифметичних даних),
Enablesub — *Enabled subsystems* (підсистеми, які виконуються при додатному значенні керуючого сигналу),
Enabsubs — *Advanced Enabled subsystems* (підсистеми з керуючим входом, що надає дозвіл на їх роботу, з додатковими можливостями),
if sub — *If block* (демонстрація умовного блоку, що керує виконанням підсистем),
logdemo — *Flip-flop blocks* (тригери),
mergedemo — *Merge block* (блок поєднання),
priority demo — *Block priority* (блок пріоритету),
triggeredsub — *Triggered subsystems* (підсистеми, які виконуються при перетині керуючим сигналом нуля та утримують вихідний сигнал до наступного перетину),
zeroxing — *Zero-crossing detection* (реєстрація перетину нуля),
matrixdemos — *Matrix signals* (матричні сигнали),
sl_subsys_semantics — *Subsystem semantics* (семантика підсистем),
sfundemos — *S-Functions* (демонстрація S-функцій);

3) *Automotive model demonstrations and samples* (автомобільні моделі);

4) *Aerospace model demonstrations and samples* (аерокосмічні моделі);

5) *Power System Blockset Demos* (електричні джерела, машини, трансформатори, лінії електропередач, силова електроніка):

Psbfilter — *Steady-state operation of linear circuit filter* (аналіз усталеного режиму роботи лінійного фільтра п'ятої гармоніки),

Psbtransient — *Transient analysis of a linear circuit* (аналіз перехідних процесів у лінії електропередач),
Psbtransfo — *Three-winding distribution transformer* (розподільчий трансформатор з трьома витками),
Psbtransfosat — *Energization of a three-phase Saturable Transformer* (збудження трифазного трансформатора з насиченням),
psbsurgnetwork — *AC network Surge Arrester* (сіть змінного струму з громовідводом),
psbrectifier — *Three-phase diode rectifier* (трифазний діодний випрямляч),
psbconverter — *Thyristor Converter* (тиристорний перетворювач),
psbswitching — *Ideal Switch in switching circuit* (ідеальний ключ),
psbmosconv — *Mosfet converter* (транзисторний Mosfet-перетворювач),
psbbuckconv — *Gto Thyristor in buck converter topology* (тиристор у складі перетворювача-компенсатора реактивної потужності),
psbloadshed — *Load shedding on a simplified alternator*,
psbturbine — *Synchronous generator powered by hydraulic turbine*,
psbpwm — *Asynchronous machine fed by PWM inverter* (асинхронна машина з живленням від ШІМ-інвертора),
psbpmmotor — *PM synchronous motor fed by PWM inverter inverter* (явнополіусна синхронна машина з живленням від ШІМ-інвертора),
psbtriphaseline — *Single phase energization of a three-phase line* (однофазне живлення трифазної лінії),
psbmonophaseline — *Switching of a single phase line* (підключення однофазної лінії),
psbmachines — *Machines and load flow* (машини та навантаження),
psbcompensated — *Case study 1 Series compensated network* (послідовна компенсована мережа),
psbdcdrive — *Case study 2 Chopper fed DC motor drive* (двигун постійного струму з імпульсним керуванням),
psbregulator — *Case study 3 Synchronous machine and regulator* (синхронна машина і регулятор),
psbfrequency — *Case study 4 Variable frequency induction motor drive* (асинхронний електропривод зі змінною частотою),
psbhvdc — *Case study 5 HVDC transmission system* (високовольтна лінія електропередач постійного струму).

Збереження моделей. Для збереження моделей та інших файлів користувача в *MATLAB* передбачена папка *work*. У ній можна створити нову папку, наприклад, *C:\matlab\work\model*. Шлях до файлів-моделей необхідно додати у список доступних директорій за допомогою операції *Set Path* → *Add Folder...* / *Add with Sub-folders...* функції *File* основного меню командного вікна *MATLAB*. Нову папку можна поставити на початок списку (*Move to Top*), на кінець списку (*Move to Bottom*), перемістити на одну позицію вниз (*Move Down*) або догори (*Move Up*). Якщо не виконати запис нового списку до файлу, то

установка діє тільки протягом поточного сеансу роботи. Для того, щоб використовувати нову установку в майбутніх сеансах, потрібно записати її до файлу (*MATLAB \ toolbox \ local \ pathdef.m*) за допомогою клавіші *Save*. Файли моделей і бібліотек додатку *Simulink* повинні мати маску **.mdl*.

Моделювання з командного рядка MATLAB. Існує три різних рівня використання *Simulink*. Найбільш простий і наочний спосіб — це моделювання за допомогою меню з фіксацією результатів блоком *Scope*. Робота таким методом доцільна на початковому етапі створення та налагодження моделі. Другий спосіб полягає у використанні функцій моделювання, аналізу графічно заданих функцій, які або вводяться з командного рядка пакету *Matlab*, або записуються до командного файлу (*script-файл*) та виконуються при запуску цього файлу. Третій спосіб полягає в безпосередньому доступі до S-функцій (функцій спеціального формату, що описують модель). При цьому від користувача вимагається достатньо висока кваліфікація.

При моделюванні із командного рядка необхідно виконати команду:

`[t, x, y] = sim('model', time, options, u),`

де **model** — ім'я файлу, в якому запам'ятована модель; **time= tfinal / [tstart, tfinal] / [tstart, tout, tfinal]** **tstart** — початковий час моделювання (за замовчуванням 0); **tfinal** — кінцевий час моделювання; **tout** — час фіксації результатів; **options** — вектор-рядок параметрів моделювання, які встановлюються функцією **simset**; **U** — вхідний сигнал; **t** — вектор-стовпець часу; **X** — матриця змінних стану системи; **y** — матриця вихідних змінних.

Функція **sim** дозволяє запам'ятати значення не всіх, а тільки потрібних вихідних сигналів, якщо у переліку вихідних параметрів застосувати замість змінної у змінні **y1, y2, ... , yn**, де число, яким закінчується ім'я змінної, означає номер вихідного порту.

Функція **simset**, що встановлює параметри моделювання, має формат:

`options = simset(name1, value1, name1, value1,...)`

При зверненні до **simset** без аргументів на екран виводиться список імен параметрів, їх можливі значення та значення, що встановлюються за замовчуванням:

```

» simset
Solver: [ 'VariableStepDiscrete' |
          'ode45' | 'ode23' | 'ode113' | 'ode15s' | 'ode23s' |
          'FixedStepDiscrete' |
          'ode5' | 'ode4' | 'ode3' | 'ode2' | 'ode1' ]
RelTol: [ positive scalar {1e-3} ]
AbsTol: [ positive scalar {1e-6} ]
Refine: [ positive integer {1} ]
MaxStep: [ positive scalar {auto} ]
InitialStep: [ positive scalar {auto} ]
MaxOrder: [ 1 | 2 | 3 | 4 | {5} ]
FixedStep: [ positive scalar ]
OutputPoints: [ {'specified'} | 'all' ]
OutputVariables: [ {'txy'} | 'tx' | 'ty' | 'xy' | 't' | 'x' | 'y' ]
MaxRows: [ non-negative integer {0} ]
Decimation: [ positive integer {1} ]
InitialState: [ vector {} ]
FinalStateName: [ string {} ]
Trace: [ comma separated list of 'minstep', 'siminfo', 'compile' {} ]
SrcWorkspace: [ 'base' | {'current'} | 'parent' ]
DstWorkspace: [ 'base' | {'current'} | 'parent' ]
ZeroCross: [ {'on'} | 'off' ]

```

Встановлені параметри можна вивести на екран за допомогою функції **simget**.

Завдання на практичну роботу

1. Вивчити інтерфейс середовища *MATLAB* та додатку *Simulink*, ознайомитися з основними та спеціальними бібліотеками *Simulink*. Випробувати засоби створення та редагування власної моделі.
2. Ознайомитися з основними демонстраціями *Simulink* та демонстраціями поширення *Power System Blockset*.
3. Ознайомитися з демонстраційною моделлю і створити власну бібліотеку блоків, перелік яких наведено у таблиці 1 згідно варіанту; вивчити способи збереження і редагування бібліотек.

Таблиця 1.

№ вар.	Демонстраційна модель для вивчення		Перелік стандартних блоків для створення бібліотеки
	<i>Simulink</i>	<i>Power System Blockset</i>	
1	<i>Automotive /Engine timing simulation</i>	<i>Power Electronics / Universal Bridge in DC/DC PWM Converter(Discrete)</i>	<i>Integrator, Transfer Fcn, Fcn, Gain, Product, Sum, Dead Zone</i>
2	<i>Automotive /Engine timing eith closed loop control</i>	<i>Power Electronics / Three-phase PWM Converters (Discrete)</i>	<i>Integrator, Derivative, Memory, Fcn, Look-Up Table, Gain, Product, Sum</i>
3	<i>Automotive /Automotive suspension</i>	<i>Power Electronics / DC/DC and DC/AC PWM Converters (Discrete)</i>	<i>Integrator, Transfer Fcn, Fcn, Gain, Product, Sum, Backlash</i>

4	<i>Automotive /Hydraulic system models</i>	<i>Drives /AC Motor Drive - Vector Control (Discrete)</i>	<i>Integrator, Derivative, State-Space, Fcn, Look-Up Table, Gain, Product, Sum</i>
5	<i>Aerospace / F-14 flight control simulation</i>	<i>Drives / Chopped-fed DC motor drive (Discrete)</i>	<i>Integrator, Transfer Fcn, Fcn, Gain, Product, Sum, Quantizer</i>
6	<i>Aerospace /F-14 digital flight control simulation</i>	<i>Drives / Chopped-fed DC motor drive (Continuous)</i>	<i>Integrator, Derivative, Fcn, Look-Up Table, Zero-Pole, Gain, Product, Sum</i>
7	<i>Aerospace /Missile airframe trim and linearize demonstration</i>	<i>Drives /Starting a DC motor</i>	<i>Integrator, Transfer Fcn, Fcn, Gain, Product, Sum, Rate Limiter</i>
8	<i>Aerospace /Radar tracking demonstration</i>	<i>Machines / Synchronous Machine and Regulator</i>	<i>Integrator, Derivative, Math Function, Look-Up Table, Gain, Product, Sum</i>
9	<i>Aerospace /Lunar Module digital autopilot</i>	<i>Machines /Machines and Loadflow</i>	<i>Integrator, Transfer Fcn, Fcn, Gain, Product, Sum, Relay</i>
10	<i>General / Friction with hard stops model</i>	<i>Machines / Stream turbine and Governor System</i>	<i>Integrator, Derivative, Min-Max, Look-Up Table, Gain, Product, Sum</i>
11	<i>General / Counter demonstration</i>	<i>Machines / Permanent magnet Synchronous Machine</i>	<i>Integrator, Transfer Fcn, Fcn, Gain, Product, Sum, Saturation</i>
12	<i>General / Inverted pendulum animation</i>	<i>Machines /Asynchronous Machine</i>	<i>Integrator, Derivative, Rounding Function, Look-Up Table, Gain, Sum</i>
13	<i>General / Double spring mass system simulation</i>	<i>Machines / Synchronous Machine</i>	<i>Integrator, Transfer Fcn, Fcn, Gain, Product, Sum, Coulomb & Viscous Friction</i>

1. Рекомендована послідовність виконання 1-го пункту завдання

1) Завантажити систему за допомогою ярлика, через програмне меню, або через провідник; ознайомитися з командами *MATLAB-меню File, Edit, View, Win dow, Help*, призначенням кнопок панелі інструментів, змістом та призначенням окремих вікон середовища *MATLAB*. Особливу увагу звернути на можливість зміни поточного каталогу (меню *Current Directory* на панелі інструментів) та встановлення доступу до каталогу (меню *File → Set Path....*).

2) Створити власну папку в робочій директорії *work* та встановити доступ до неї з середовища пакету *MATLAB*.

3) Запустити *Simulink Library Browser* за допомогою кнопки, або з командного рядка *MATLAB*; ознайомитися з командами його меню *File, Edit, View, Help* та призначенням кнопок панелі інструментів *Simulink*. Усвідомити призначення функції *Find* на панелі інструментів.

4) Відкрити бібліотеки *Simulink* у графічному вигляді, ознайомитися з ними та проаналізувати за назвою їхні зміст і призначення. Ознайомитися з

блоками, що входять до кожної з бібліотек; особливу увагу приділити блоками бібліотек *Simulink* і *Power System Blockset*;5) Відкрити вікно для створення нової *Simulink*-моделі, перетягти до нього декілька блоків з *Simulink*-бібліотек. Ознайомитися з командами меню *File*, *Edit*, *View*, *Simulation*, *Format*, *Help* *Simulink*-вікна та з основними прийомами створення і редагування моделей.

При виконанні останнього пункту виконати такі дії: пересування блоку, його розмноження, поворот, зміну розміру, перейменування, приховування та візуалізацію імені, зміну кольору фону та контурів блоку, зміну розміру шрифту; з'єднання блоків між собою, розгалуження лінії зв'язку, вставку незалежних коментарів, та коментарів, прив'язаних до ліній зв'язку; запис моделі у створену Вами папку.

2. Рекомендована послідовність виконання 2-го пункту завдання

1) Запустити демонстраційну програму *MATLAB*. Увагу зосередити на демонстраціях розділів *Simulink* і *Blocksets* → *Power System*. Усвідомити загальне призначення кожної з демонстраційних моделей, при цьому не вносити до моделей жодних змін! (Якщо вони випадково були внесені, тоді не слід зберігати модель при її закритті.)

2) Відкрити демонстраційну модель, назва якої наведена в табл. 1.2, зберегти її копію у власній папці, надавши їй оригінальне ім'я, що відрізняється від імен демонстраційних моделей та стандартних файлів *MATLAB* (наприклад, *ivanov_demo_lab1*). Всі подальші зміни виконувати лише в моделі, що збережена у власній папці.! Ознайомитися з призначенням моделі в цілому, та її підсистем.

3) Серед останніх виділити замасковані і незамасковані підсистеми і ознайомитися із їхньою структурою. Виконати демонстраційне моделювання процесів в системі, переглянути результати, звернувши увагу на засіб їх фіксації.

4) Ознайомитися з параметрами діалогового вікна керування процесом моделювання (меню *Simulation* → *Simulation parameters...*), уявити їхнє значення. Вивчити способи встановлення параметрів окремих блоків моделі. Виконати декілька пробних сеансів моделювання при різних параметрах меню *Simulation* → *Simulation parameters...* та різних параметрах блоків моделі.

3. Рекомендована послідовність виконання 3-го пункту завдання

1) Відчинити вікно для побудови власної бібліотеки блоків (меню *File* → *New* → *Library*) та мишею перетягти до нього потрібні стандартні блоки *Simulink* (див. табл.). Розташувати блоки усередині вікна в зручній послідовності, після чого зберегти *mdl-файл* бібліотеки у власній папці з оригінальним іменем (наприклад, *ivanov_mylibrary_lab1*).

2) Закрити бібліотеку та відкрити її знову; впевнитися в тому, що тепер вона заблокована для редагування.

3) Розблокувати бібліотеку (меню *Edit* → *Unlock library*), залучити до неї новий блок (вибрати довільно), запам'ятати файл та закрити бібліотеку.

При використанні в моделях блоків з власних бібліотек слід пам'ятати, що при необхідності роботи з такою моделлю на іншому комп'ютері, слід копіювати в доступні для папки не тільки модель але й власні бібліотеки. Іншим

виходом, що дозволяє обійтися без копіювання бібліотек, є розривання зв'язку блоків з нестандартними бібліотеками перед використанням моделей на інших комп'ютерах.

Контрольні запитання

1. Пояснити призначення команд меню середовища *MATLAB*, кнопок панелі інструментів та окремих вікон (*Command Window*, *Command History*, *Current Directory* та ін.).
2. Яким чином можна виконати встановлення за власним бажанням поточного каталогу та доступних каталогів *MATLAB*? Навіщо це робити?
3. Пояснити призначення команд меню та кнопок панелей інструментів вікон *Simulink Library Browser* та *Simulink*.
4. Дати загальну характеристику бібліотек та блоків *Simulink* і *Power System Blockset*.
5. Перелічити основні прийоми створення та редагування моделей. Як виконується встановлення потрібних параметрів моделювання, яка мета цього встановлення?
6. За якими правилами і навіщо створюють власні бібліотеки блоків?
7. З яких міркувань обирають метод і параметри чисельного інтегрування при моделюванні?
8. Які засоби моделювання у середовищі *Simulink* Вам відомі?
9. Як виконати моделювання з командного рядка *MATLAB*?
10. Пояснити призначення параметрів чисельного інтегрування, що встановлюються функцією *simset*.

Практична робота № 5

Моделювання інтегратора (*Integrator*) і блоку диференціювання (*Derivative*)

Час виконання роботи — 4 години.

Мета: Ознайомитися з особливостями операцій інтегрування та диференціювання в Matlab.

Бібліотека *Continuous* програми *Simulink*, що представлена на рис. 1, містить у собі блоки аналогового інтегрування (*Integrator*) та диференціювання (*Derivative*), лінійні неперервні динамічні ланки довільного порядку в різних формах їхнього математичного опису (*Transfer Fcn*, *Zero-Pole* і *State-Space*) і ланки запізнювання (*Memory*, *Transport Delay* і *Variable Transport Delay*).

Integrator (Інтегратор)

У *Simulink 2.x* є 3 типи аналогових інтеграторів (*Integrator*, *Limited Integrator* і *Reset Integrator*). Починаючи з версії 2.0 всі три інтегратори об'єднані в одному, котрий може працювати в різних режимах за рахунок вибору відповідних установок у вікні параметрів, що показано на рис. 1, 2. Зміни режиму роботи інтегратора відображаються на вигляді його піктограми.

Найпростіший інтегратор (див. *Integrator* на рис. 3) інтегрує вхідний сигнал u із заданою початковою умовою x_0 (*Initial condition*).

Для того, щоб обмежити вихідний сигнал аналогового інтегратора (див. блок *Limited Integrator*), необхідно встановити прапорець *Limit output* і ввести значення параметрів y_{max} (*Upper saturation limit*) і y_{min} (*Lower saturation limit*). Припустимим значенням цих параметрів є константа $Inf(\infty)$, що дозволяє обмежувати блок тільки знизу або тільки зверху.

Слід зазначити, що інтегратор з обмеженням не можна замінити послідовним з'єднанням інтегратора без обмеження і типової нелінійності «обмеження координат» (блок *Saturation* бібліотеки *Nonlinear*). Для правильного обмеження вихідного сигналу інтегратора при перетинанні ним однієї з меж необхідно перевести блок з режиму інтегрування до режиму збереження інформації підключенням до його входу замість сигналу нульової константи, який інтегрується, як це показано на рис. 4. Повернення до режиму інтегрування відбувається при зміні знаку вхідного сигналу.

Можна візуалізувати порт обмеження, встановленням прапорця *Show saturation port* (див. блок *Limited Integrator 1*).

Інтегратор може працювати із скиданням вихідного сигналу в початкове значення (див. ланки *Reset Integrator*). Цим режимом керує меню, що випадає, опції *External reset*, яке пропонує наступні варіанти: *none* — скидання не виконується; *rising* — скидання виконується при перетинанні керуючим сигналом нульової лінії знизу нагору; *falling* — скидання виконується при перетинанні керуючим сигналом нульової лінії зверху вниз; *either* — скидання виконується при перетинанні керуючим сигналом "нуля" в обох напрямках; *level*

— при нульовому значенні керуючого сигналу виконується інтегрування, а при ненульовому — скидання та утримання інтегратора в початковому стані.

При виборі будь-якого варіанта, крім *none*, до блоку приєднується керуючий вхідний порт (*Reset port*).

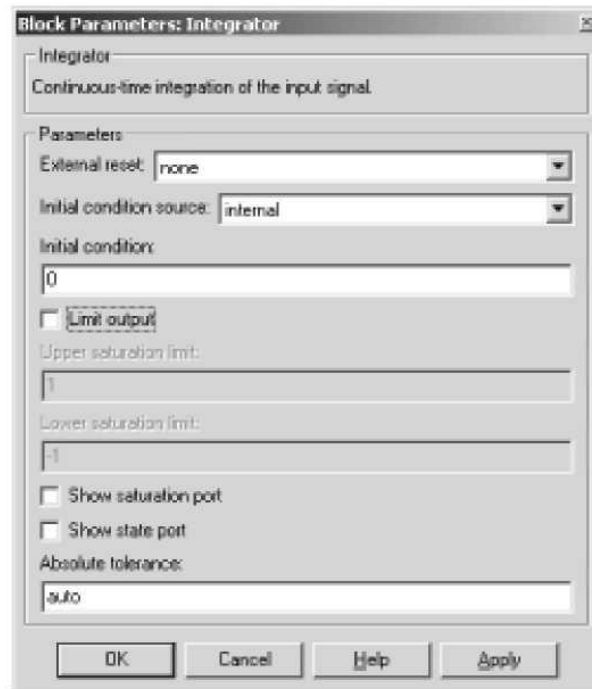
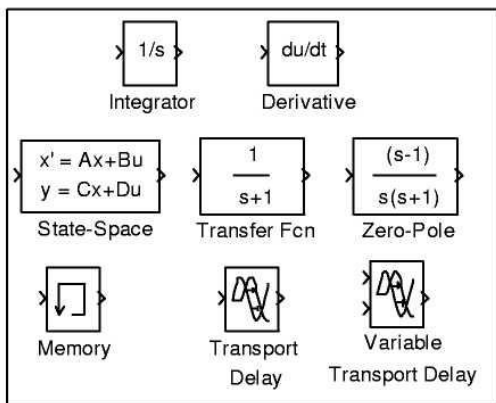


Рис. 1. Бібліотека неперервних параметрів

Рис. 2. Вікно визначення динамічних блоків (*Continuous*) блоку *Integrator*

На рис. 3 зображені піктограми блоку *Integrator* з різними установками режимів.

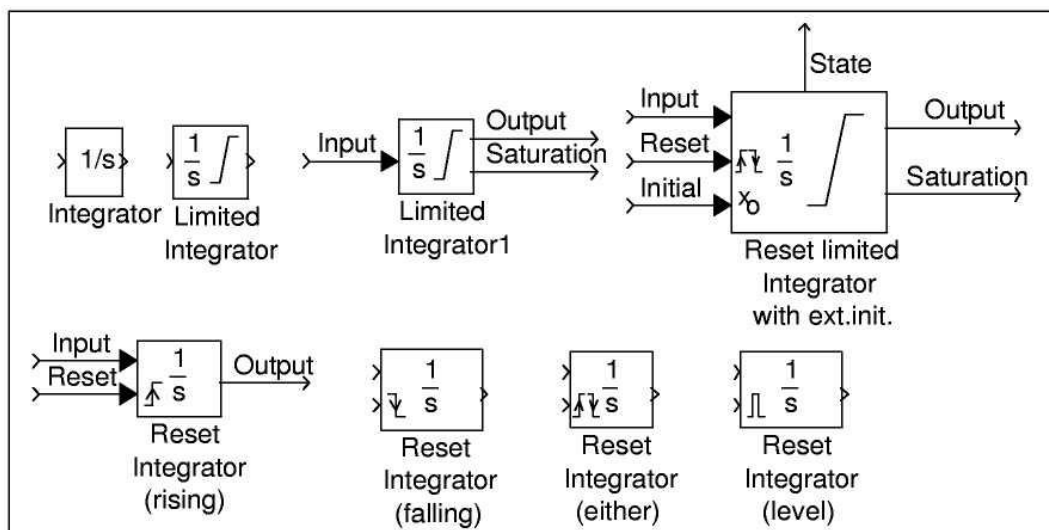


Рис. 3. Піктограми інтеграторів, які працюють у різних режимах

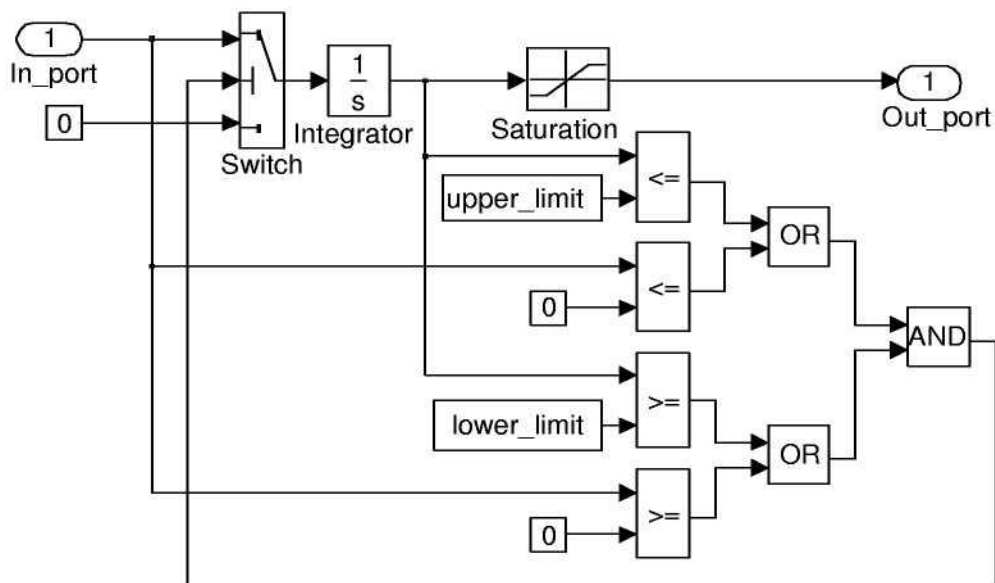


Рис. 4. Розгорнута модель інтегратора з обмеженням вихідного сигналу

Інтегратор може використовувати як внутрішні (*internal*), так і зовнішні (*external*) початкові умови. Вибір здійснюється за допомогою меню опції *Initial condition source*. При виборі режиму *external* блок одержує додатковий вхідний порт, до якого можна приєднати блок *IC* (Початкова умова) бібліотеки *Connections*. При виборі режиму *internal* діє початкова умова, що встановлюється в полі параметра *Initial condition*. Задавати зовнішні початкові умови має сенс тільки для інтегратора із скиданням (див. ланку *Reset limited integrator with ext. init.*).

Для організації скидання або зміни початкових умов у функції вихідного сигналу інтегратора необхідно, щоб уникнути утворення алгебраїчної петлі, замість вихідного порту використовувати порт стану, для чого потрібно візуалізувати його установкою прапорця *Show state port*. Сигнал стану інтегратора формується раніше, ніж вихідний сигнал, хоча і має з ним однакові значення. Приклад використання ланки *Integrator* в режимах *Reset* і *Limited* можна побачити в демонстраційному прикладі *Bouncing ball* (модель *bounce*).

Друга область застосування порту стану — це передача сигналів з однієї підсистеми, виконуваної за умовою, до іншої. Для демонстрації цього прикладу можна скористатися моделлю *clutch*.

Установка параметрів розрахунку і його виконання

Перед виконанням розрахунків необхідно попередньо задати їх параметри. Задавання параметрів розрахунку виконується в панелі керування меню *Simulation/Parameters*. Вигляд панелі керування наведений на рис. 5.

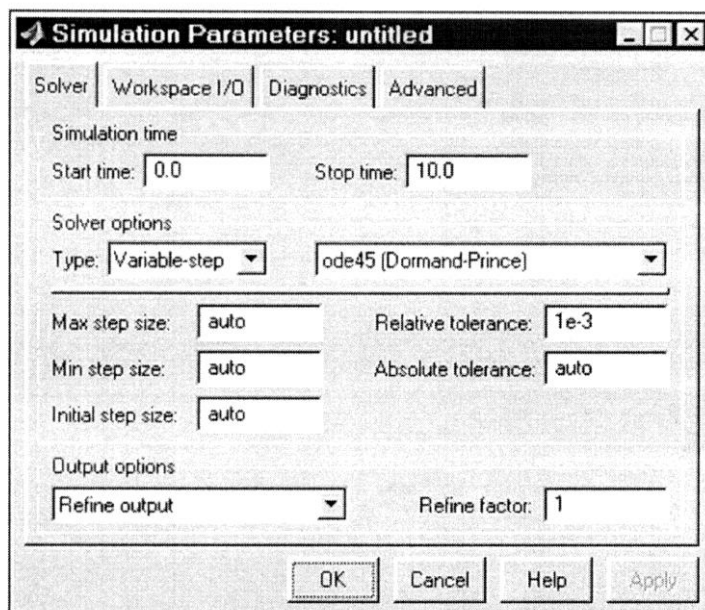


Рис. 5. Панель керування

Вікно настройки параметрів розрахунку має 4 вкладки:

- **Solver (Розрахунок)** — Встановлення параметрів розрахунку моделі.
- **Workspace I/O (Уведення/виведення даних у робочу область)** — Встановлення параметрів обміну даними з робочою областю **MATLAB**.
- **Diagnostics (Діагностика)** — Вибір параметрів діагностичного режиму.
- **Advanced (Додатково)** — Встановлення додаткових параметрів.
- Встановлення параметрів розрахунку моделі виконується за допомогою елементів керування, розміщених на вкладці **Solver**. Ці елементи розділено на три групи (рис. 5):

- **Simulation time** (Інтервал моделювання, або, інші слова, час розрахунку),

- **Solver options** (Параметри розрахунку),

- **Output options** (Параметри висновку).

Simulation time (Інтервал моделювання або час розрахунку)

Час розрахунку задається вказівкою початкового (**Start time**) та кінцевого (**Stop time**) значень часу розрахунку. Початковий час, як правило, задається рівним нулю. Величина кінцевого часу задається користувачем виходячи з умов розв'язуваної задачі.

Solver options (Параметри розрахунку)

При виборі параметрів розрахунку необхідно вказати спосіб моделювання (**Type**) і метод розрахунку нового стану системи. Для параметра **Type** доступні два варіанти — з фіксованим (**Fixed-step**) або зі змінним (**Variable-step**) кроком. Як правило, **Variable-step** використовується для моделювання неперервних систем, а **Fixed-step** — для дискретних.

Список методів розрахунку нового стану системи містить кілька варіантів. Перший варіант (**discrete**) використовується для розрахунку дискретних

систем. Інші методи використовуються для розрахунку неперервних систем. Ці методи різні для змінного (**Variable-step**) та для фіксованого (**Fixed-step**) кроку часу, але, по сутності, являють собою процедури розв'язку систем диференціальних рівнянь. Докладний опис кожного з методів розрахунку станів системи наведено у вбудованій довідковій системі **MATLAB**.

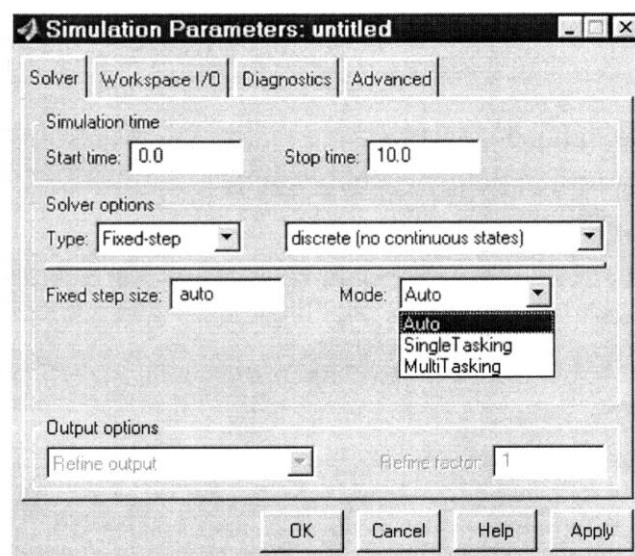


Рис. 6. Вкладка **Solver** при виборі фіксованого кроку розрахунку

Нижче двох списків, що розкриваються, **Type** перебуває в області, вміст якої змінюється залежно від обраного способу зміни модельного часу. При виборі **Fixed-step** в даній області з'являється текстове поле **Fixed-step size** (величина фіксованого кроку), що дозволяє вказувати величину кроку моделювання (див. рис. 6).

Величина кроку моделювання за замовчуванням встановлюється системою автоматично (**auto**). Необхідна величина кроку може бути уведена замість значення **auto**, або в формі числа, або як вигляд виразу, що обчислюється.

Output options (Параметри висновку)

У нижній частині вкладки **Solver** задаються настройки параметрів висновку вихідних сигналів змодельованої системи (Output options). Для даного параметра можливий вибір одного із трьох варіантів:

- **Refine output** (Скоректований висновок) — дозволяє змінювати дискретність реєстрації модельного часу та тих сигналів, які зберігаються в робочій області **MATLAB** за допомогою блоку **To Workspace**. Встановлення величини дискретності виконується в рядку редагування **Refine factor**, розташованій праворуч. За замовчуванням, значення **Refine factor** дорівнює 1, це означає, що реєстрація виконується з кроком $\Delta t = 1$ (тобто для кожного значення модельного часу). Якщо задати **Refine factor** рівним 2, то буде реєструватися кожне друге значення сигналів, 3 — кожне третє т.д. Параметр **Refine factor** може приймати тільки цілі позитивні значення.

- **Produce additional output** (Додатковий вивід) — забезпечує

додаткову реєстрацію параметрів моделі в задані моменти часу; їхні значення вводяться в рядку редагування (в цьому випадку вона називається **Output times**) у вигляді списку, укладеного в квадратні дужки. При використанні цього варіанту базовий крок реєстрації (Δt) дорівнює 1. Значення часу в списку **Output times** можуть бути дробовими числами й мати довільну точність.

– **Produce specified output only** (Формувати тільки заданий вивід) — встановлює висновок параметрів моделі тільки в задані моменти часу, які вказуються в полі **Output times** (Моменти часу висновку).

Derivative (Похідна)

Виконує чисельне диференціювання вхідного сигналу:

$$y(t_i) = \frac{\Delta u_i}{\Delta t_i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \approx \frac{du}{dt}.$$

Точність результату залежить від розміру кроку диференціювання. Менший розмір кроку дозволяє одержати більш точний результат.

Перед початком моделювання значення вхідного сигналу дорівнює нулеві.

При диференціюванні дискретного сигналу з періодом переривання T_s вихідний сигнал являє собою послідовність імпульсів в моменти часу, які збігаються з моментами зміни вхідного сигналу:

$$y(t_i) = \begin{cases} \frac{u(kT_s) - u(kT_s - T_s)}{t_i - t_{i-1}} & \text{при } t_i = kT_s; \\ 0 & \text{при } t_i \neq kT_s. \end{cases}$$

В цьому випадку блок може бути описаний дискретною передаточною функцією

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t} = \frac{z - 1}{\Delta t \cdot z}.$$

Блок зупинки моделювання Stop Simulation

Забезпечує завершення розрахунку, якщо вхідний сигнал блоку стає не рівним нулю.

При подачі на вхід блоку ненульового сигналу **Simulink** виконує поточний крок розрахунку, а потім зупиняє моделювання. Якщо на вхід блоку подати векторний сигнал, то для зупинки розрахунку досить, щоб один елемент вектора став ненульовим. На рис. 7 наведено приклад використання даного блоку. В прикладі зупинка розрахунку відбувається, якщо вихідний сигнал блоку **Transfer Function** стає більшим або рівним 0,99.

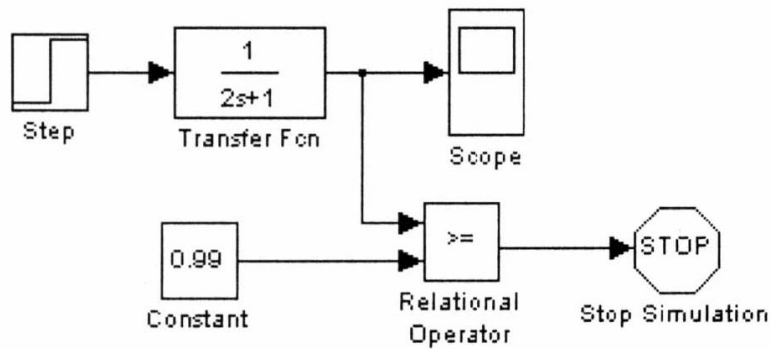


Рис. 7. Застосування блоку Stop Simulation

Завдання на практичну роботу

1. Для вивчення властивостей інтегратора при роботі його в різних режимах, набрати модель, зображену на рис. 4, зафіксувати результати моделювання та пояснити їх.
2. Скласти модель інтегратора, підключеного до виходу джерела прямокутних імпульсів. Щоб можна було спостерігати осцилограми як на виході джерела, так і на виході інтегратора, до схему включити блок мультиплексора сигналів Мух з двома входами. Щоб підключити нижній вхід до вже задіяного виходу джерела знадобиться створити відвід лінії (рис. 8). Запустити модель і отримати результат моделювання.

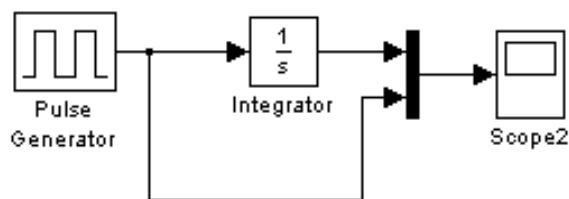


Рис. 8. Приклад моделі з відводом лінії

3. Перевірити роботу моделі зображеної на рис. 7.
4. Створити модель пристрою, що виконує диференціювання зображену на рис. 9.

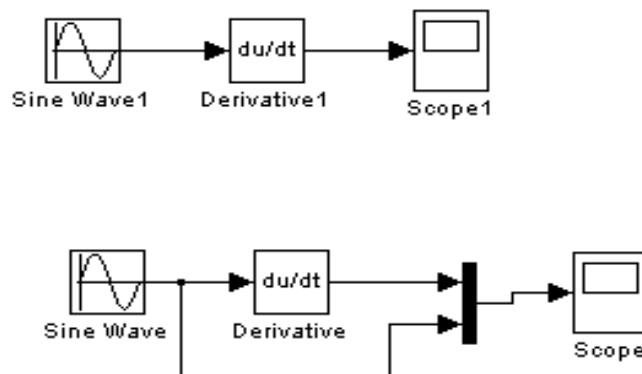


Рис. 9. Приклад моделі диференціювання

5. Який сигнал отримаємо на осцилографі при диференціюванні **1** синусоїдального сигналу?

Контрольні запитання

1. Які форми математичного опису лінійних неперервних систем Ви знаєте?
2. Що таке характеристичний поліном, характеристичне рівняння, нулі і полюси системи?
3. Як скласти математичний опис системи у просторі стану?
4. Як отримати передавальну функцію з диференційного рівняння?
5. В яких режимах може працювати блок *Integrator*?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. MATLAB 6/6.1/6.5 + Simulink 4/5. Основы применения / Дьяконов В.П. - М.: СОЛОН-Пресс, 2004. - 768 с.
2. MATLAB und SIMULINK. Beispielorientierte Einführung in die Simulation dynamischer Systeme / Josef Hoffman - Bonn Addison-Wesley-Longman. - 1998.
3. Кузьменко Б.В., Лисенко В.П. Моделювання систем. Навчальний посібник.- К.: НАУ, 2008.- 129 с.
4. Кузьменко Б.В., Лисенко В.П. Моделювання систем. Частина друга. Імітаційне моделювання.- К.: НАУ, 2008.- 110 с.

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради ННІ енергетики, автоматики і енергозбереження Національного університету біоресурсів і природокористування України (протокол № 11 від 17 грудня 2021 р.).

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

СУЧАСНІ МЕТОДИ І ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЗАЦІЇ БІОТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Методичні вказівки до виконання практичних робіт
для здобувачів
третього (освітньо-наукового) рівня вищої освіти
за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»
галузі знань 15 «Автоматизація та приладобудування»
Кваліфікація: PhD доктор філософії

**ЗАЄЦЬ Наталія Анатоліївна,
МІРОШНИК Володимир Олександрович**

Підписано до друку 17.01.22
Ум. друк. арк. 5,9
Наклад 20 прим.

Формат 60x84/16
Обл. вид. арк. 5,2
Зам. № 2916

Віддруковано у Видавничому центрі НУБіП України
вул. Героїв Оборони, 15, Київ, 03041, тел. 527-81-55, e-mail: nubipdruk@ukr.net
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4097 від 17.06.2011

ДЛЯ НОТАТОК

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

