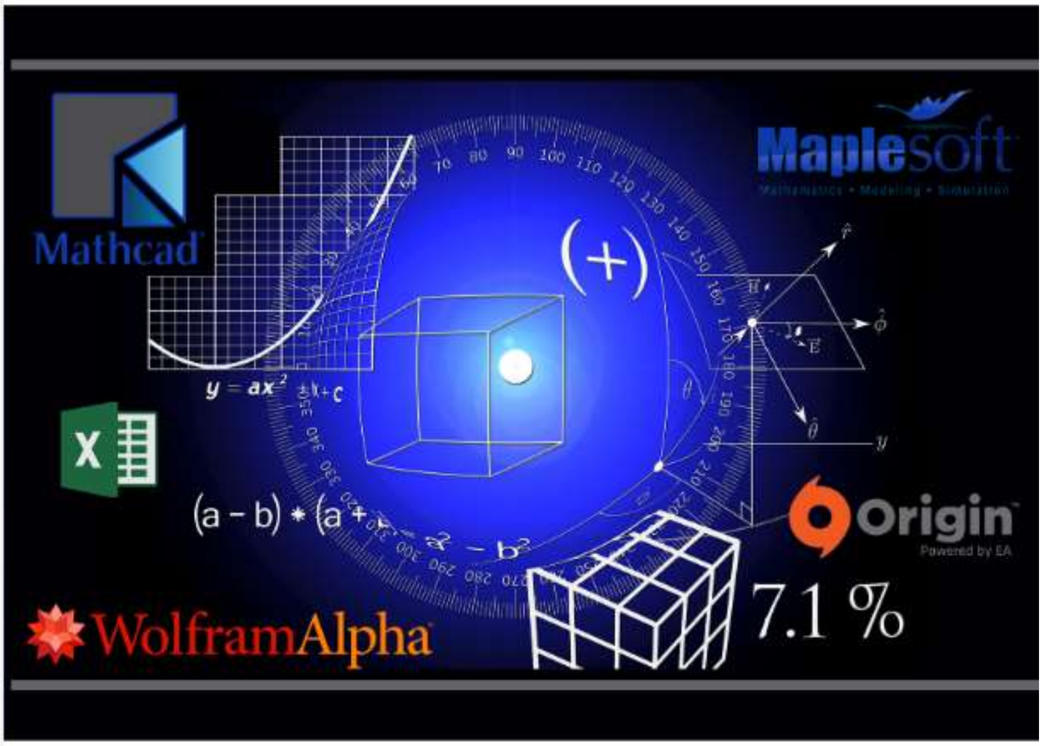
ЯСКОВЕЦЬ І.І., ОСИПОВА Т.Ю., КАСАТКІН Д.Ю., САВИЦЬКА Я.А.,
СМОЛІЙ В.В., ГУСЄВ Б.С., БЛОЗВА А.І., МАТУС Ю.В.



ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ В ОБЧИСЛЮВАЛЬНІЙ МАТЕМАТИЦІ ТА МОДЕЛЮВАННІ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ

Київ
2017

ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ В ОБЧИСЛЮВАЛЬНІЙ МАТЕМАТИЦІ ТА МОДЕЛЮВАННІ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ

Кафедра комп'ютерних систем і мереж

ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ В ОБЧИСЛЮВАЛЬНІЙ МАТЕМАТИЦІ ТА МОДЕЛЮВАННІ

Навчальний посібник

КОМПРІНТ

КИЇВ 2017

УДК 004.05.94 : 54(075)
ББК 32.97 : 22.1
П 78

Рекомендовано до друку Вченою радою Національного університету біоресурсів і природокористування України (протокол № 3 від 25.10.2017 р.)

Рецензенти:

Лахно В.А. - доктор технічних наук, професор, професор кафедри інформаційних систем та математичних дисциплін ПВНЗ «Європейський університет»;

Уткін Ю.В. - кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних систем і технологій Полтавської державної аграрної академії України;

Коваль Т.В. - кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики Національного університету біоресурсів і природокористування України.

Ясковець І.І., Осипова Т.Ю., Касаткін Д.Ю., Савицька Я.А., Смолій В.В., Гусєв Б.С., Блозва А.І., Матус Ю.В.

П 78 Програмне забезпечення в обчислювальній математиці та моделюванні [навчальний посібник] / І.І. Ясковець, Т.Ю. Осипова, Д.Ю. Касаткін, Я.А. Савицька, В.В. Смолій, Б.С.Гусєв, А.І. Блозва, Ю.В. Матус // - К.: НУБіП України, 2017.- 296 с.

Навчальний посібник призначений для студентів вищих навчальних закладів ОС «Бакалавр» біологічних та інженерних спеціальностей які вивчають математичні і статистичні методи та елементи моделювання у наукових дослідженнях. Посібник містить теоретичний матеріал, який надає можливість сформувати уявлення стосовно взаємозв'язку інформаційних технологій, програмних засобів, математичних визначень та формул, статистичної обробки даних та розрахунків у різних математичних процесорах та середовищах, які найбільш відомі на цей час. Представлений теоретичний матеріал доповнено практичними роботами з використанням сучасних програмних методів.

ЗМІСТ

Передмова 6

Розділ 1. Статистичні показники та MS Excel 9

1.1. Вибірковий метод. Точкові оцінки статистичних показників 9

1.2. Оцінка статистичних показників генеральної сукупності, визначення довірчих похибок та інтервалів 20

1.3.Дослідження експериментальних розподілів 27

1.4.Графічне порівняння експериментального розподілу з теоретичним 37

1.5.Порівняння параметрів нормального розподілу 44

1.6.Перевірка гіпотези про рівність середніх 50

1.7.Однофакторний дисперсійний аналіз 54

1.8.Двофакторний дисперсійний аналіз 60

1.9.Побудова двовимірної лінійної математичної моделі за методом найменших квадратів 64

1.10.Виявлення наявності і оцінка тісноти статистичної залежності між змінними та робота з формулами масивів 77

1.11.Використання формул масивів в MS Excel 82

1.12.Застосування формул масивів для виконання дій над матрицями в MS Excel 88

Розділ 2. Основи роботи в середовищі математичних розрахунків Wolfram Alfa 100

2.1. Основні відомості про Wolfram Alpha 100

2.2. Рішення рівнянь, систем рівнянь 101

2.3. Дослідження функцій 107

2.4. Матричні операції 113

2.5. Практичні завдання та висновки 115

Розділ 3. Математичний пакет ORIGIN 118

3.1. Інтерфейс ORIGIN 118

3.2. Побудова графіків 121

3.3. Обробка вихідних даних в режимі графіка 125

3.4. Взаємодія Origin з Microsoft Office 126

3.5. Програмування в Origin 127

Розділ 4. Основи роботи із системою MAPLE 129
4.1 Основні властивості та можливості пакету MAPLE 129
4.2 Структура вікна пакету MAPLE 130
4.3 Робочий документ математичної системи MAPLE та основні методи обчислень 131
4.4. Диференціальні рівняння 147
4.5. *Статистика* 151
4.6. Основні математичні операції на мові MAPLE 155
4.7. Практичні роботи в MAPLE 158

РОЗДІЛ 5. Основи роботи в середовищі MATHCAD 175
5.1. Призначення та можливості системи MATHCAD 175
5.2. Математичні вирази і типи даних в MathCAD 176
5.3. Обчислення функцій та побудова графічних областей в MathCAD ... 179
5.4. Практичні роботи та приклади обчислень в MathCAD 183

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ ТА ІНТЕРНЕТ-ДЖЕРЕЛ 223

ДОДАТКИ 229

Передмова

На всіх етапах історії людства відбувається узагальнення досвіду взаємодії людини із природою. Це виражається у розвитку науки про різні процеси у навколишньому середовищі. Внаслідок спостережень за об’єктами, процесами і, якщо це можливо, експериментальних досліджень ми виробляємо певні уявлення про оточуюче нас навколишнє середовище. Сукупність таких уявлень про дану об’єктивну реальність і називається її моделлю.

Суть експериментальних досліджень полягає у спостереженні і вимірюванні відгуку об’єкту на певну дію. Отримувані співвідношення типу дія - відгук дають можливість складати математичні рівняння, які описують матеріальний об’єкт в цілому, або його частину. Отримувана при цьому система рівнянь є математичною моделлю даної системи. Система може описуватися алгебраїчними, диференціальними або інтегральними рівняннями, або їх сукупністю. Отже, *математична модель представляє собою систему математичних співвідношень - функцій, формул, рівнянь та систем рівнянь які описують об'єкт, явище або процес.* Метод моделювання полягає у вивченні об'єкту, явищ та процесів шляхом побудови математичних моделей та їх дослідження. Для полегшення вирішення таких задач існує безліч програмних засобів та продуктів, вибрати та ознайомити з деякими є мета даного посібника.

Перевагою програмних засобів навчального призначення порівняно з традиційними засобами навчання є наявність зручних у використанні засобів візуалізації навчального матеріалу: статичне та динамічне представлення об'єктів, процесів, явищ, їх складових, наочне представлення закономірностей і результатів проведених експериментів, дослідів, знайдених розв’язків задач. Однією з переваг програмного забезпечення є швидкий зворотній зв'язок між користувачем і засобами ІКТ (інформаційно-комунікаційних технологій), який забезпечує реалізацію діалогу між користувачем і програмним навчальним середовищем. Такий зворотній зв'язок називають інтерактивністю програмного засобу. Завдяки використанню ПЗ, навчання може здійснюватись у тому темпі, який найбільше задовольняє студентів.

З появою подібних математичних пакетів робота фахівців, які у своїй діяльності використовують математичні методи, значно змінилася. При громіздких обчисленнях (вручну) у аналітичному чи числовому вигляді, завжди є велика ймовірність отримання помилок, які зводять нанівець клопітку роботу. Виникала необхідність багаторазової незалежної перевірки обчислень на кожному кроці. З появою доступної комп’ютерної техніки та математичних пакетів, роль людини стає важливою на першому етапі -

складанні математичних рівнянь, та на останньому – аналізі отриманих результатів. Проте, інколи виникає необхідність “підказати” комп’ютеру метод знаходження розв’язку диференціального чи інтегрального рівняння, або запропонувати йому використати те чи інше наближення.

У даному посібнику висвітлені основні теми, які використовуються у практичній діяльності користувачів широкого кола: числові обчислення, алгебраїчне числення, побудова графічних залежностей, диференціальні рівняння, лінійна алгебра та статистика. Відображені також основні прийоми, які часто використовуються у процесі аналізу отриманих результатів. Сюди відноситься, зокрема, представлення функцій у вигляді рядів, у тому числі і асимптотичних, застосування різних маніпуляцій із математичними виразами: розкладання на множники, згортання виразів у більш прості форми запису, представлення тригонометричних виразів в експоненціальній формі, апроксимація статистичних залежностей аналітичними виразами, знаходження основних статистичних характеристик експериментальних даних, тощо.

В посібнику представлені методи статистичних розрахунків в середовищі офісного процесору MS Excel, використовуючи вбудовані функції та графічні можливості ПЗ.

Окремий розділ присвячений Origin – пакету програм від фірми OriginLab Corporation для чисельного аналізу даних і наукової графіки під керуванням операційної системи Microsoft Windows. Крім того, він сумісний з деякими програмними продуктами лінійки Microsoft Office, наприклад, з табличним процесором Microsoft Excel, що дозволяє, зокрема, легко здійснювати імпорт/експорт даних між цими програмами. За допомогою Origin можна проводити чисельний аналіз даних, включаючи різні статистичні операції, обробку сигналів тощо.

WolframAlfa – це онлайн–служба для проведення розрахунків, а також пошукова система, яка обчислює відповідь, ґрунтуючись на власній базі знань, яка містить дані з математики, фізики, астрономії, хімії, біології, медицини, історії, географії, політики, музики, кінематографії, а також інформацію про відомих людей та інтернет-сайти. WolframAlpha здатна переводити дані між різними одиницями вимірювання, системами числення, підбирати загальну формулу послідовності, знаходити можливі замкнуті форми для наближених дробових чисел, обчислювати суми, границі, інтеграли, розв'язувати рівняння і системи рівнянь, проводити операції з матрицями, визначати властивості чисел і геометричних фігур. Однак, розрахунок на підставі власної бази має і свої недоліки, в тому числі – вразливість до помилок даних.

У процесі статистичної обробки інформації та математичного моделювання виникає проблема розгляду рівнянь різного ступеня складності та їх систем. Ця обставина обумовлює використання при аналізі та прогнозуванні стану довкілля різних комп'ютерних технологій, що значно скорочує час, необхідний для розв'язку математичної задачі. У цьому відношенні, з точки зору авторів, доцільно використовувати математичні пакети, які використовують символьну мову, а саме Mathematica та Maple.

Ілюстративним матеріалом до теоретичного, у даному посібнику, слугують експериментальні результати отримані в галузі радіоекології. Це, по перше, обумовлене об'ємом наявного фактичного, тобто експериментального, матеріалу, а по друге один із авторів посібника (проф. Ясковець І.І.) має практичний досвід моделювання радіоекологічних процесів під час роботи в Інституті радіоекології та Інституті екології і біотехнології УААН. З іншої сторони, дослідження міграції радіонуклідів у навколишньому середовищі можна розглядати як метод мічених атомів в екології. На протязі свого «життя» нестабільні ізотопи мігрують у навколишньому середовищі як звичайні, стабільні, оскільки процеси міграції обумовлюються структурою зовнішніх електронних оболонок які одинакові для всіх ізотопів.

В основу даного посібника покладено теоретичні і практичні напрацювання, які автори на протязі останніх років читали для студентів на факультеті захисту рослин, біотехнологій та екології НУБіП України.

Розділ 1. Статистичні показники

1.1. Вибірковий метод. Точкові оцінки вибіркових статистичних показників

Статичні об'єкти, системи, процеси тощо, як правило, відзначаються складністю, залежністю від часу і великої кількості різноманітних факторів, вплив яких наперед неможливо врахувати, або передбачити. Результати вимірювань ознак таких об'єктів називають *випадковими* і до їх аналізу застосовують відповідний математичний апарат. *Випадковою* називають величину, яка в результаті вимірювань може прийняти одне можливе наперед невідоме значення, що залежить від випадкових чинників, дія яких наперед не може бути врахованою. Розрізняють випадкові величини які можуть приймати лише окремі, ізольовані значення, і випадкові величини, можливі значення яких заповнюють деякий проміжок.

Дискретною (перервною) називають випадкову величину, яка приймає окремі ізольовані значення з визначеними ймовірностями.

Неперервною називають випадкову величину, яка може приймати всі значення із деякого кінцевого або нескінченного проміжку. Результати багаторазових вимірювань певних ознак об'єктів відносяться до *випадкових дискретних величин.*

Генеральна і вибіркова сукупності

В експериментальних дослідженнях використовують поняття *генеральної* і *вибіркової* сукупностей. При проведенні суцільних досліджень, тобто досліджень кожного із об'єктів сукупності відносно ознаки, яка цікавить дослідника, говорять про належність цих об'єктів до генеральної сукупності. *Генеральною* називають сукупність об'єктів кількість яких n прямує до нескінченності, тобто $n \to \infty$. Як правило, проводити суцільне дослідження неможливо і/або недоцільно. Зазвичай від усієї кількості об'єктів певним чином відбирають частину об'єктів і проводять дослідження відносно певної ознаки відібраних об'єктів. Сукупність випадково відібраних із генеральної сукупності об'єктів називають *вибірковою сукупністю,* або *вибіркою. Обсягом* сукупності називають кількість *n* об'єктів цієї сукупності. Вибірка повинна правильно відтворювати властивості генеральної сукупності, від якої вона відібрана. Тобто вона повинна бути *репрезентативною.*

Визначення основних статистичних показників вибіркової сукупності випадкових величин

Мета математичної обробки результатів багаторазових вимірювань полягає в обчисленні найвірогіднішого значення величини, що визначається, та оцінці його точності і надійності. Така обробка ґрунтується на методах теорії імовірності та математичної статистики, які застосовуються для аналізу випадкових дискретних величин.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між можливими її значеннями і ймовірностями їх появи. Закон розподілу може бути заданий *таблично, аналітично* і *графічно.*

За достатньо великої кількості вимірювань випадкових величин їх поява підпорядковується нормальному закону розподілу (закону Гауса), формула якого має вигляд

$$f(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

f(x,μ,σ) - щільність ймовірності; *μ* - математичне сподівання випадкової величини (центр групування її значень**);** σ^2 - дисперсія випадкової величини (міра розсіювання значень випадкової величини відносно центру групування); *σ* середнє квадратичне відхилення випадкової величини (характеристика розсіювання значень випадкової величини відносно центру групування, яка дорівнює кореню квадратному з дисперсії); *е* - основа натурального логарифму. Таким чином, нормальний закон розподілу характеризується лише *двома параметрами,* *μ* - математичним сподіванням і *σ* - середнім квадратичним відхиленням.

Нормальний закон розподілу може точно описувати лише нескінченно велику кількість випадкових величин (генеральну сукупність).

Однак його застосовують і для опису репрезентативної вибіркової сукупності. У вибірках зі скінченим числом вимірювань n, точне обчислення μ та σ неможливе. Замість них розраховують середнє вибіркове значення $\bar{x}_{в}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σв вибіркову дисперсію $D_в$, та статистичні оцінки відповідних показників генеральної сукупності.

Таким чином, припускаючи, що експериментальні дані підпорядковуються нормальному закону розподілу, обчислюють параметри, що його характеризують: вибіркові середнє значення, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Середнє вибіркове значення $\bar{x}_{в}$ (середнє арифметичне значення ознаки вибіркової сукупності, що досліджується) визначається за формулою

$$\bar{x}_{в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (2)$$

x_i – значення *i*-ого вимірювання, *n* – кількість вимірювань.

Вибіркова дисперсія $D_в$ (середнє арифметичне квадратів відхилень значень ознаки x_i що досліджується, від середнього вибіркового значення $\bar{x}_{в}$) визначається за формулою

$$D_{в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}_{в}\right)^2 \qquad (3)$$

Вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$ визначається за формулою

$$\sigma_{в} = \sqrt{D_{в}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}_{в}\right)^2} \qquad (4)$$

Для оцінки варіації даних використовують вибірковий коефіцієнт варіації $C_в$, який обчислюється за формулою

$$C_в = \frac{\sigma_в}{x_в} \cdot 100\% \qquad (5)$$

Коефіцієнт варіації $C_в$ застосовують для порівняння варіації рядів спостережень, що відрізняються середніми значеннями і дисперсією. Окрім цього, $C_в$ - величина безрозмірна і може використовуватися для порівняння варіації рядів спостережень, що мають різні одиниці вимірювання.

1.1.1.Оцінка відхилення експериментального розподілу від нормального

Обчислення статистичних показників правомірне за умови підпорядкування експериментальних даних нормальному закону розподілу. При вивченні невідомих (експериментальних) розподілів, або розподілів, що відрізняються від нормального, виникає потреба кількісно оцінити цю відмінність. З цією метою застосовують спеціальні характеристики, зокрема асиметрію (коефіцієнт асиметрії) і ексцес (коефіцієнт ексцесу). Асиметрія показує, наскільки розподіл даних несиметричний відносно нормального розподілу. Якщо асиметрія є величиною додатною, то більша частина даних має значення, що перевищує середнє вибіркове $\overline{X}_в$. Якщо асиметрія менше нуля, то більша частина даних має значення менше за $\overline{X}_в$. Ексцес оцінює крутість, тобто величину більшого, або меншого підйому вершини графіка розподілу експериментальних даних порівняно з вершиною графіка нормального розподілу. Якщо ексцес є величиною додатною, то вершина графіка експериментального розподілу вище нормального, якщо ексцес менше нуля, то - нижче нормального. Для нормального розподілу ці показники дорівнюють нулю. Якщо для розподілу, що вивчається, асиметрія і ексцес знаходяться в межах ±0,5, то можна припустити, що експериментальний закон розподілу близький до нормального. При цьому припускають, що емпіричний і теоретичний нормальні розподіли мають однакові математичне сподівання (середнє) і дисперсію. За умови малої кількості спостережень, перед використанням асиметрії та ексцесу для оцінки близькості експериментального розподілу до нормального треба оцінити точність визначення вказаних характеристик.

Асиметрія А визначається за формулою

$$A=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}_{\text{в}}\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}_{\text{в}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (6)$$

Ексцес Е визначається за формулою

$$E=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}_{\text{в}}\right)^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}_{\text{в}}\right)^2\right)^{2}}-3 \qquad (7)$$

1.1.2. Застосування вбудованих функцій MS Excel для визначення статистичних показників вибіркової сукупності

У MS Excel основні статистичні характеристики вибіркової сукупності визначаються за допомогою вбудованих функцій категорії **Статистические**. Для їх використання виконують такі дії:

- **Вставка=>Функция**;
- **або** користуються піктограмою *fx* (**Вставка функции**), яка розташована на панелі інструментів;
- у діалоговому вікні **Мастер функций**, що відкриється, у полі **Категория** вибирають **Статистические**;
- у полі **Выберите функцию** вибирають потрібну функцію;
- у діалоговому вікні **Аргументы функции**, що відкриється після вибору функції, вводять діапазон комірок з вхідними даними, або перевіряють, чи правильно він заданий, якщо діапазон комірок був попередньо вибраний;
- натискують кнопку **ОК**.

Перелік і призначення статистичних функцій наведено в табл.

Вид функції	**Призначення**
СЧЕТ	Обсяг вибірки
СРЗНАЧ	Вибіркове середнє значення
ДИСПР	Вибіркова дисперсія
СТАНДОТКЛОНП	Вибіркове середнє квадратичне відхилення
МАКС	Максимальне число вибіркової сукупності
МИН	Мінімальне число вибіркової сукупності
СКОС	Показник асиметрії A
ЭКСЦЕСС	Показник ексцесу E

1.1.3.Визначення вибіркових статистичних показників множини ознак, що досліджуються

Якщо об'єкт, процес, або система, що досліджуються, характеризуються не однією ознакою, а множиною ознак, які представлені своїми рядами спостережень, то для визначення множини статистичних показників виконують дії:

- визначають статистичний показник однієї ознаки за допомогою відповідної вбудованої функції категорії **Статистические**;
- розповсюджують, або копіюють вбудовану функцію на діапазон комірок, що потребують аналогічного виду обчислень.

Виявлення і вилучення анормальних даних

Однією із причин, коли за показниками асиметрії і ексцесу експериментальний закон розподілу не можна вважати близьким до нормального, є наявність у вибірковій сукупності анормальних даних, тобто таких даних, які за своїми значеннями різко відрізняються від решти. Такі дані не можна віднести до нормально розподілених. У разі підозри на наявність анормальних даних перевірці підлягають максимальне і мінімальне вибіркові значення.

Показники анормальності V_{max} і V_{min} визначають за формулами

$$V_{\max} = \frac{(x_{\max} - \bar{x}_в)}{\sigma_в}, \qquad V_{\min} = \frac{(\bar{x}_в - x_{\min})}{\sigma_в}, \qquad (8)$$

де $x_{\max}$, $x_{\min}$ – відповідно максимальне і мінімальне значення експериментальних даних; $\bar{x}_в$ - вибіркове середнє значення; $\sigma_в$ – вибіркове середнє квадратичне відхилення.

Для перевірки анормальності даних застосовують правило трьох сигм: якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищує потроєного середнього квадратичного відхилення. Тобто, якщо показники анормальності $V_{max,min} \leq 3$, то відповідне максимальне і/або мінімальне значення не є анормальним і з подальшого аналізу не вилучається. Якщо $V_{max,min} > 3$, то відповідне максимальне і/або мінімальне значення є анормальним і його з подальших досліджень виключають.

Після вилучення анормальних даних числові статистичні показники вибірки обчислюють повторно і перевіряють наступні максимальне і мінімальне значення на анормальність. Якщо при розрахунках за формулами використовувати посилання на адреси комірок з потрібними значеннями, то в Excel перерахунок показників виконається автоматично.

Практична робота №1. Вибірковий метод. Точкові оцінки вибіркових статистичних показників

Мета роботи: отримання практичних навичок з визначення точкових оцінок статистичних показників вибіркової сукупності.

Програма виконання роботи

1. Завантажити табличний процесор MS Excel.
2. Вибрати із табл. результати вимірювань трьох довільних показників якості ґрунту і оформити їх у вигляді таблиці на аркуші Excel.
3. Під останнім значенням першого ряду спостережень за допомогою вбудованих функцій категорії **Статистические**: **СЧЕТ**, **СРЗНАЧ**,

ДИСПР, **СТАНДОТКЛОНП**, **МАКС**, **МИН**, **СКОС**, **ЭКСЦЕСС** визначити відповідні статистичні показники, розташовуючи їх один під одним.

4. Визначити вибірковий коефіцієнт варіації за формулою (5).
5. Розповсюдити формули на дві комірки праворуч, щоб визначити відповідні показники для інших вибраних показників ґрунту.
6. Оцінити відповідність експериментальних розподілів нормальному за допомогою значень асиметрії та ексцесу (чи знаходяться відповідні значення в межах ± 0,5).
7. Скопіювати одержані результати на новий аркуш.
8. На новому аркуші визначити показники анормальності для мінімального і максимального значень вибірки за формулами (8).
9. Вилучити анормальні значення з вибірки, якщо такі виявлено.
10. Повторити визначення показників анормальності для наступних мінімального і/або максимального значень вибірки.
11. Вилучити анормальні значення з вибірки, якщо такі виявлені повторно.
12. Повторювати перевірку даних на анормальність і їх вилучення до виконання умови $V_{\max,\min} \leq 3$.
13. Після вилучення всіх виявлених анормальних експериментальних значень звернути увагу на те, як зміняться статистичні числові показники вибірки. Повторно оцінити відповідність експериментального розподілу нормальному розподілу за допомогою значень асиметрії та ексцесу.
14. Порівняти основні статистичні числові характеристики отримані до і після вилучення анормальних даних.
15. Відмітити, які показники при цьому змінилися.
16. Дати пояснення отриманим результатам.
17. Зберегти документ в папці під своїм прізвищем, яку помістити в папку "**Мои документы**".

Запитання для самоперевірки

1. Які величини називають випадковими?
2. Яка різниця між генеральною і вибірковою сукупностями випадкових величин?
3. У чому полягають мета і сутність статистичного аналізу дослідних даних?
4. Які основні статистичні показники застосовуються для характеристики вибіркових даних?
5. Що оцінюють за допомогою вибіркової дисперсії?
6. На припущені відповідності якому закону розподілу випадкових величин ґрунтується статистична обробка даних?
7. Які вбудовані функції табличного процесора MS Excel використовуються для визначення вибіркових статистичних показників? Як вони викликаються?
8. В чому полягають мета і сутність виявлення та вилучення анормальних значень із отриманої в процесі експерименту вибіркової сукупності даних?
9. Як оцінити близькість експериментального розподілу випадкових величин до нормального?
10. Про що свідчать негативні значення показників асиметрії і ексцесу?
11. Як провести розповсюдження статистичних функцій на діапазони комірок?
12. Які у Excel правила розрахунку за формулою?
13. За яким показником оцінюється варіація даних?
14. Який показник використовується для порівняння варіації рядів спостережень, що мають різні одиниці вимірювання?

Таблиця -Показники якості чорнозему типового

№ з/п	Щільність грунту, г/см3	Запаси продуктивної вологи,	Кислотність гідролітич	Кислотність обмінна,	Кислотність актуальна,	Сума ввібраних основ, мг-	Вміст гумусу, %	Вміст легкогідролізованого азоту	Вміст рухомого фосфору,	Вміст обмінного калію,	Вміст бору, мг/кг	Вміст марганцю, мг/кг	Вміст кобальту, мг/кг	Вміст міді, мг/кг
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1	1,13	117,36	2,61	6,79	5,89	22,31	2,54	123,37	27,85	58,08	0,41	15,96	0,04	2,69
2	1,12	99,73	3,53	6,75	5,92	25,43	2,15	96,05	57,51	48,08	1,02	38,64	1,49	3,53
3	1,13	95,44	1,85	6,50	6,03	4,25	2,54	87,14	310,33	39,18	0,01	13,74	1,39	10,96
4	1,10	168,44	2,69	6,33	0,97	27,24	1,93	11,71	106,99	64,74	0,66	18,48	1,54	2,47
5	1,06	103,41	3,38	6,78	6,33	25,27	2,47	70,84	74,57	42,14	0,61	16,32	1,42	3,85
6	1,16	84,04	0,03	6,69	6,01	26,60	2,32	127,76	71,56	76,24	0,71	14,49	1,76	2,20
7	1,15	123,81	3,22	6,04	6,06	31,53	2,51	92,67	98,31	24,57	0,44	15,51	1,62	3,59
8	1,19	101,34	1,57	7,08	6,85	31,08	8,75	89,62	11,94	72,91	0,77	1,18	1,63	2,98
9	1,29	85,53	2,62	7,03	6,30	27,43	2,45	128,88	100,73	185,87	0,67	15,21	1,56	0,66
10	1,21	18,78	1,56	1,23	7,24	22,75	2,17	103,96	64,86	46,48	0,55	13,91	1,99	1,88
11	1,22	108,62	1,43	7,09	5,42	30,66	3,23	98,42	38,45	39,59	0,60	18,01	1,85	3,52
12	1,21	109,62	2,60	6,97	6,24	19,84	3,47	81,87	116,92	58,76	0,51	14,08	1,56	3,16
13	1,22	114,17	0,96	6,45	6,41	27,72	1,47	109,04	37,48	54,35	0,60	18,12	1,93	2,90
14	1,20	118,59	2,21	6,55	7,01	24,14	3,40	78,71	42,54	50,20	5,84	15,89	1,82	0,50
15	1,10	113,65	2,59	7,01	6,51	25,95	1,68	70,34	164,04	7,35	0,65	14,08	1,91	3,68
16	1,16	95,65	3,33	7,08	5,34	26,56	0,52	118,15	99,05	57,13	0,80	14,87	4,82	2,68
17	1,12	77,51	1,44	6,82	5,51	27,72	2,14	52,47	132,62	47,16	0,80	14,98	1,72	2,36
18	1,20	136,52	2,03	6,47	7,40	29,55	2,38	84,82	102,32	61,09	0,60	14,86	1,48	3,91
19	1,15	127,95	2,63	6,51	6,57	32,13	2,95	81,18	120,79	20,38	0,48	16,19	1,83	4,56
20	1,12	86,46	2,43	6,68	6,20	26,55	2,36	89,51	74,93	38,81	0,52	15,28	1,57	2,74
21	1,12	111,80	2,44	7,12	5,78	26,54	1,40	115,49	142,30	48,36	0,73	14,07	1,71	4,23
22	3,41	142,10	2,66	7,78	5,69	25,01	2,48	116,17	1,58	45,45	0,52	15,01	1,54	3,49

23	1,19	102,76	5,88	6,64	5,39	26,82	2,76	74,80	101,95	66,62	0,63	15,20	1,69	2,44
24	1,15	69,39	2,95	6,94	5,67	27,52	3,05	63,57	82,20	30,18	0,55	16,94	1,11	2,80
25	1,17	81,48	2,93	6,93	6,76	28,03	3,63	280,12	112,42	50,82	0,55	14,99	1,60	4,23
26	1,24	283,16	2,48	7,74	6,67	25,38	2,07	66,93	128,23	24,47	0,68	15,08	1,37	4,57
27	1,12	98,92	1,82	7,49	6,58	27,59	2,60	117,22	85,28	64,58	0,71	16,79	1,46	4,19
28	1,16	110,21	2,63	15,22	5,67	47,36	1,67	99,69	129,84	59,05	0,60	14,88	1,55	3,25
29	1,23	97,38	2,19	7,00	15,99	24,84	0,66	111,95	33,34	72,81	0,85	18,29	1,40	3,05
3O	1,21	102,55	1,70	6,34	7,00	28,20	3,56	127,42	165,28	67,70	0,56	15,58	1,71	3,04
31	0,99	119,51	3,78	6,32	6,21	27,65	2,18	96,44	142,45	62,21	0,85	14,89	1,42	3,07
32	1,03	113,26	1,44	6,65	6,03	23,59	1,24	113,01	95,81	39,52	0,61	15,66	1,31	2,70
33	1,17	116,90	1,11	6,18	5,97	29,37	1,35	140,16	96,87	52,58	0,55	13,92	1,64	5,24
34	1,12	86,46	2,57	6,81	6,40	29,83	2,66	51,36	43,84	58,98	0,61	14,35	1,38	2,97
35	1,09	87,45	1,30	6,08	6,45	20,19	2,86	84,15	53,44	51,92	0,75	13,92	1,62	2,92
36	1,17	87,48	2,01	7,74	6,16	24,67	1,86	103,63	89,04	67,82	0,67	17,64	1,59	1,87
37	1,21	101,06	2,91	4,96	6,24	25,61	3,65	90,72	81,54	66,94	0,72	17,53	1,83	3,65
38	1,18	83,39	1,90	7,12	6,41	31,13	2,92	103,26	127,76	35,69	0,77	15,55	1,88	2,27
39	1,16	53,61	1,66	7,91	5,81	31,90	3,41	116,38	31,75	49,99	0,74	15,55	1,32	3,62
40	1,11	133,89	1,69	7,25	6,13	25,94	2,84	103,97	115,31	58,63	0,73	14,32	1,43	5,35
41	1,14	124,43	3,07	7,31	5,47	27,53	1,61	85,41	84,90	41,67	0,82	15,80	1,58	3,95
42	1,12	111,79	1,58	6,02	6,30	28,09	3,20	86,03	93,12	43,76	0,56	15,67	1,58	3,65
43	1,15	89,38	1,42	5,65	7,04	29,07	1,68	135,60	112,91	36,62	0,67	16,23	1,72	4,47
44	1,22	90,92	2,74	6,88	5,75	28,41	2,48	69,94	53,53	23,21	0,57	18,09	2,21	5,68

1.2. Оцінка статистичних показників генеральної сукупності, визначення довірчих похибок та інтервалів

1.2.1. Оцінка статистичних показників генеральної сукупності

Точне визначення статистичних показників генеральної сукупності неможливе, так як кількість вимірювань при цьому $n \rightarrow \infty$. Тому використовують *оцінки* відповідних показників.

В якості *оцінки генерального середнього* приймається середнє вибіркове значення.

В якості оцінки дисперсії генеральної сукупності використовують *виправлену вибіркову дисперсію* S^2 *(або* $D_г$*)*, яка

визначається за формулою:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}_в\right)^2 \qquad (9)$$

де дріб $\frac{n}{n-1}$ називають поправкою Бесселя. За малих значень n поправка суттєво відрізняється від одиниці, при збільшені n вона прямує до одиниці. При $n > 50$ практично немає різниці між S^2 і $D_в$,

Для оцінки середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності випадкових величин використовують *виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення* S *(або* $\sigma_г$*)*, яке визначається за формулою:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2}{n-1}} \qquad (10)$$

1.2.2.Застосування вбудованих функцій MS Excel для визначення оцінок статистичних показників генеральної сукупності

Для визначення оцінок статистичних показників генеральної сукупності використовують вбудовані функції категорії **Статистические:**

ДИСП - для оцінки генеральної дисперсії;

СТАНДОТКЛОН – для оцінки генерального середнього квадратичного відхилення.

Аргументами зазначених функцій є діапазон комірок з вхідними даними.

Визначення довірчих похибок і довірчих інтервалів для статистичних характеристик генеральної сукупності випадкових величин

Визначення довірчих похибок і інтервалів ґрунтується на деяких інтервальних характеристиках випадкових величин.

Довірчим інтервалом називають інтервал, у який потрапляє істинне значення величини, що вимірюється, з заданою ймовірністю γ.

Надійністю результатів вимірювань називають імовірність γ того, що істинне значення величини, що вимірюється, потрапляє в даний довірчий інтервал. Надійність виражається в частках одиниці, або у відсотках.

Рівнем значущості називається величина $\alpha=1-\gamma$, яка характеризує ймовірність помилки, тобто частку ризику в оцінці істинного значення величини, що вимірюється. Рівень значущості – це ймовірність, якою вирішено знехтувати в заданій області досліджень.

Визначення довірчого інтервалу для математичного сподівання Правила побудови довірчого інтервалу для математичного сподівання залежать від того, відома чи не відома дисперсія генеральної сукупності $D_г$. Розглянемо випадок, коли дисперсія відома, генеральна сукупність підпорядковується нормальному закону розподілу. У цьому випадку:

■ Визначається *абсолютна довірча похибка* $\varepsilon_{\bar{x}_в}$ вибіркового середнього за формулою:

$$\varepsilon_{\bar{x}_в} = \sigma_в \frac{t_\gamma}{\sqrt{n}} \qquad (11)$$

де n – кількість спостережень;

$\sigma_в$ – вибіркове середнє квадратичне відхилення;

t_γ – коефіцієнт довіри, що береться із таблиці значень функції Лапласа Ф(t) при Ф(t) $=\gamma/2$, де γ– задана ймовірність.

Для прикладних досліджень приймається γ=0,95 (γ=95%), що відповідає рівню значущості α = 1–γ= 1–0,95 = 0,05. При цьому t_γ =1,96. t_γ ще називають *нормованим* значенням нормально розподіленої випадкової величини.

Абсолютну довірчу похибку ще називають *точністю оцінки.*

■ Визначається *відносна довірча похибка* вибіркового середнього:

$$\delta_{\bar{x}_в} = \frac{t_\gamma \sigma_в}{\bar{x}_в \sqrt{n}} = \frac{\varepsilon_{\bar{x}_в}}{\bar{x}_в} \qquad (12)$$

За потреби забезпечення результатів вимірювань заданою точністю, тобто необхідною відносною довірчою похибкою, із формули (12) визначають потрібне число спостережень *n:*

$$n = \left(\frac{t_\gamma \cdot \sigma_в}{\delta_{\bar{x}_в} \cdot \bar{x}_в} \right)^2 \qquad (13)$$

Наприклад, для визначення кількості вимірювань, яка б забезпечувала відносну довірчу похибку на рівні 5% формула (13) матиме вигляд:

$$n = \left(\frac{t_\gamma \cdot \sigma_в}{0{,}05 \cdot \bar{x}_в} \right)^2 \qquad (14)$$

Межі довірчого інтервалу математичного (генерального середнього) визначаються за формулами:

нижня межа: $\mu_{\min} = \bar{x}_в - \varepsilon_{\bar{x}_в}$ (15)

верхня межа: $\mu_{\min} = \bar{x}_в + \varepsilon_{\bar{x}_в}$ (16)

Ширина довірчого інтервалу h генерального середнього значення визначається за формулою:

$$h = \mu_{\min} - \mu_{\max} \qquad (17)$$

$$\bar{x}_в - \varepsilon_{\bar{x}_в} \le \mu \le \bar{x}_в + \varepsilon_{\bar{x}_в} \qquad (18)$$

При цьому, $P(\bar{x}_в - \varepsilon_{\bar{x}_в} \le \mu \le \bar{x}_в + \varepsilon_{\bar{x}_в}) = \gamma$ (19)

Формули (12) і (13) у прикладних дослідженнях займають особливе місце. За ними можна, наприклад, обчислити обсяг вибірки n необхідний для оцінки середнього значення нормально розподіленої вибіркової сукупності з заданою надійністю γ і точністю $\varepsilon_{\bar{x}_в}$, а також для заданої точності і відомого обсягу вибірки можна визначити надійність (імовірність).

Для визначення абсолютної довірчої похибки в Excel існує функція **ДОВЕРИТ.** Зазначена функція має три аргумента: **Альфа –** рівень значущості (для прикладних досліджень α=0,05); **Станд_откл –** оцінка середнього квадратичного відхилення (визначається за допомогою вбудованої функції **СТАНДОТКЛОН); Размер –** кількість спостережень n (визначається за допомогою вбудованої функції **СЧЕТ).**

Для оцінки точності вимірювань використовують також *стандартну похибку середнього* Δ, яка визначається за формулою:

$$\Delta = \frac{S}{\sqrt{n}} \tag{20}$$

де S - оцінка генерального середнього квадратичного відхилення, n кількість вимірювань.

Визначення довірчого інтервалу для генеральної дисперсії Зазначений параметр визначається за формулою:

$$\frac{nD_в}{\chi_2^2} \le D_г \le \frac{nD_в}{\chi_1^2} \tag{21}$$

де $D_в$ - вибіркова дисперсія, n - кількість вимірювань, χ_1^2, χ_2^2 критерії Пірсона.

Критерії Пірсона визначаються із таких положень:

$$P\left(\chi^2 > \chi_1^2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975 \tag{22}$$

$$P\left(\chi^2 > \chi_2^2\right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025 \tag{23}$$

За таблицею χ^2-розподілу, або іншими засобами для числа степенів свободи $f=n-1$ та одержаних імовірностей 0,975 і 0,025 знаходять значення χ_1^2, χ_2^2.

Для обчислення значення критерію χ^2 в MS Excel є вбудована функція **ХИ2ОБР** аргументами якої є задана ймовірність і число степенів свободи

$f=n-1$.

1.2.3.Визначення довірчого інтервалу для генерального середнього квадратичного відхилення

Зазначений параметр при $n \leq 30$ визначається за формулою:

$$\frac{\sqrt{n}\cdot\sigma_в}{\chi_2} \leq \sigma_г \leq \frac{\sqrt{n}\cdot\sigma_в}{\chi_1} \tag{24}$$

За великих обсягів вибірки $n>30$ довірчий інтервал для генерального середнього квадратичного відхилення визначається за формулою:

$$\frac{\sqrt{2n}\cdot\sigma_в}{\sqrt{2n-3}+t_\gamma} \leq \sigma_г \leq \frac{\sqrt{2n}\cdot\sigma_в}{\sqrt{2n-3}-t_\gamma} \tag{25}$$

де t_γ - нормоване значення нормально розподіленої випадкової величини, яке відповідає заданій надійності γ і визначається за таблицею функції Лапласа Ф(t).

Визначення статистичних показників за допомогою засобу "Описательная статистика"

До методів описової статистики відносять методи опису вибірки за допомогою різних числових показників.

В MS Excel існує засіб **Описательная статистика,** який дозволяє одночасно визначити ряд статистичних показників. Щоб скористатися засобом **Описательная статистика,** виконують дії:

■ вибирають меню **Сервис=>Анализ данных=>Описательная статистика;**

■ у відповідному діалоговому вікні в поле **Входные данные** вводять діапазон комірок з експериментальними даними;

■ у полі **Метки в первой строке** ставлять галочку, якщо перший рядок вхідного діапазону містить заголовок стовпчика, або нічого не ставлять, якщо заголовка немає;

■ у групі показників **Параметры вывода** відмічають галочкою пункт **Итоговая статистика**;

■ рівень надійності за замовчуванням дорівнює 0,05 – за необхідності зміни рівня надійності, активізують перемикач **Уровень надежности** і вводять потрібне значення;

■ натискують кнопку **ОК**;

■ в результаті виконаних дій з'явиться таблиця з такими статистичними показниками експериментальних даних:

Назва показника	**Зміст показника**
Среднее	середнє значення
Стандартная ошибка	стандартна похибка середнього , яка визначається за формулою (20)
Медиана	значення, яке ділить вибірку на дві, рівні за числом вимірювань, частини
Мода	значення, яке має найбільшу частоту появи
Стандартное отклонение	оцінка генерального середнього квадратичного відхилення
Дисперсия выборки	оцінка генеральної дисперсії
Эксцесс	ексцес
Асимметричность	асиметрія
Интервал	інтервал варіювання (розмах вибірки – різниця між максимальним і мінімальним
Минимум	мінімальне значення вибірки
Максимум	максимальне значення вибірки
Сумма	сума усіх значень вибірки
Счет	кількість вимірювань

Практична робота №2. Оцінка статистичних показників генеральної сукупності, визначення довірчих похибок та інтервалів

Мета роботи: отримання практичних навичок з визначення оцінок статистичних показників генеральної сукупності, довірчих похибок та довірчих інтервалів

Програма виконання

1. Скопіювати в новий документ експериментальні дані і результати обчислень із П_р_№1 – один із показників (після вилучення анормальних значень).
2. За допомогою вбудованих функцій визначити оцінки генеральної дисперсії і генерального середнього квадратичного відхилення.
3. За формулою (11) визначити абсолютну довірчу похибку середнього.
4. За формулою (12) визначити відносну довірчу похибку середнього.
5. За формулою (20) визначити стандартну похибку середнього.
6. За формулою (13) обчислити необхідну кількість вимірювань для забезпечення відносної похибки середнього значення на рівні 7%.
7. За формулами (15) і (16) обчислити верхню і нижню межі довірчого інтервалу для математичного сподівання.
8. Перевірити правильність визначення абсолютної похибки середнього за допомогою вбудованої функції **ДОВЕРИТ.**
9. За формулою (21) обчислити довірчий інтервал для генеральної дисперсії.
10. За формулами (24) або (25) обчислити довірчий інтервал для генерального середнього квадратичного відхилення.
11. Використовуючи власні отримані дані та вбудовані функції категорії **Текстовые** **СЦЕПИТЬ** (або оператор &) та **ФИКСИРОВАННЫЙ**, записати межі довірчих інтервалів для

математичного сподівання μ, генеральної дисперсії $D_г$ і середнього квадратичного відхилення $\sigma_г$ у такому вигляді:

Межі довірчого інтервалу для $D_г$	$4{,}8 \leq D_г \leq 7{,}2$

12. Провести перевірку визначення деяких статистичних показників за допомогою засобу **Описательная статистика.**

13. Порівняти результати, одержані шляхом розрахунків, з результатами, одержаними шляхом використання засобу **Описательная статистика.**

<u>Запитання для самоперевірки</u>

1. Що називається поправкою Бесселя?
2. Як співвідносяться вибіркова дисперсія і оцінка дисперсії генеральної сукупності.
3. Від чого залежить величина абсолютної похибки середнього? Що можна зробити, щоб похибка була меншою?
4. Яка вбудована функція застосовується для визначення абсолютної похибки середнього значення?
5. Що називають довірчим інтервалом?
6. Що називають надійністю результатів вимірювань?
7. Що називають рівнем значущості?
8. Які показники обчислюються за допомогою засобу **Описательная статистика?**
9. У яких випадках використовуються вбудовані статистичні функції, а у яких - **Описательная статистика?**

1.3.Дослідження експериментальних розподілів

Емпіричним (експерименталъним) називають розподіл відносних частот. Для його дослідження використовують апарат математичної статистики.

Теоретичним називають розподіл імовірностей. Для його вивчення застосовують теорію ймовірностей.

Для дослідження експериментального розподілу результати експерименту представляють у вигляді послідовності чисел $x_1, x_2, \ldots x_k$.

Якщо експериментальне значення x_1 спостерігалось n_1 раз, значення x_2 спостерігалось n_2 раз і т. д., то значення x_i називаються *варіантами,* а числа їх спостережень n_i – *частотами.* Процедура підрахунку частот називається *групуванням даних.*

Обсяг вибірки n дорівнює сумі всіх частот n_i.

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_k \qquad (26)$$

Відносною частотою (частістю) значення x_i називається відношення частоти спостережень цього значення n_i до загального обсягу вибірки n.

$$w_i(n) = \frac{n_i}{n} \qquad (27)$$

Статистичним розподілом частот (або просто розподілом частот) називається перелік варіант і відповідних їм частот, записаний у вигляді таблиці

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	$n_к$

Розподілом відносних частот називається перелік варіант і відповідних їм відносних частот.

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої сполучають точки $(x_1;n_1),(x_2;n_2),\ldots(x_k;n_k)$. Для побудови полігону на осі абсцис відкладають варіанти x_i, а на осі ординат відповідні їм частоти n_i.

Точки $(x_i;n_i)$ сполучають відрізками прямих і отримують полігон частот.

Полігоном відносних частот (частостей) називають ламану, відрізки якої сполучають точки $(x_1;w_1),(x_2;w_2)\ldots(x_к;\ w_k)$. Для побудови полігону відносних частот на осі абсцис відкладають варіанти x_i, а на осі ординат – відповідні їм відносні частоти w_i.. Точки $(x_i;\ w_i)$ сполучають відрізками прямих і отримують полігон відносних частот.

Статистичний розподіл вибірки за частотами може бути графічно зображеним за допомогою гістограми. Для її побудови всі експериментальні значення розбиваються на декілька інтервалів $[x_i,\ x_{i+1})$, які називаються *класовими або частковими інтервалами,* або *кишенями.* Довжина λ i-го класового інтервалу дорівнює: $\lambda = x_{i+1} – x_i$. Якщо обсяг вибірки великий, то можна вибрати $к$ класових інтервалів однакової довжини $\lambda = (x_{max} – x_{min})/k$, де $x_{\max}$ і $x_{\min}$- найбільша і найменша варіанти відповідно. Кількість класів (k) визначають за формулою

$$k=l+3{,}32\cdot log(n), \qquad (28)$$

де n - кількість спостережень (визначається за допомогою вбудованої функції **СЧЕТ);** *log(n)* – визначається за допомогою відповідної вбудованої функції Excel категорії **Математические.**

Гістограмою частот називають фігуру, яка складається з прямокутників, основою яких є класові інтервали довжиною λ, а висоти дорівнюють n_i. Для побудови гістограми частот на осі абсцис відкладають класові інтервали, а над ними проводять відрізки, паралельні осі абсцис на відстані n_i.

Гістограмою відносних частот називають фігуру, яка складається із прямокутників, основами яких служать класові інтервали довжиною λ, а висоти рівні w_i. Для побудови гістограми відносних частот на осі абсцис відкладають класові інтервали, а над ними проводять відрізки, паралельні осі абсцис, на відстані w_t.

Побудова розподілу частот

Проводять сортування вхідних даних за збільшенням. Для цього виокремлюють діапазон комірок з вхідними даними, виконують дії:

- **Данные=> Сортировка;**
- у діалоговому вікні **Сортировка данных** вибирають пункт **По возрастанию;**
- натискують кнопку ОК.

Отриманий ряд дозволяє оцінити максимальне та мінімальне значення варіант і різницю між ними. Ця інформація використовується для підрахунку потрібного числа класів при побудові згрупованого розподілу частот.

У вільній комірці визначають кількість класів *к,* на які треба розподілити дослідні дані за формулою (28). Одержане значення *к,* округлюють до цілого. Визначають величину класового інтервалу за формулою

$$\lambda = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} \tag{29}$$

За необхідності округлюють одержане значення до цілого. *Для одержання масиву класових інтервалів* можна задавати їх вручну, або користуватись засобами автозаповнення. В останньому випадку:

- вводять у вільну комірку мінімальне число вибірки, натискують клавішу **Enter**;
- активізують комірку з мінімальним значенням вибірки, виконують команду **Правка=>Заполнить=>Прогрессия;**
- у діалоговому вікні **Прогрессия** у полі **Шаг** установлюють довжину класового інтервалу, в полі **Тип** вказують

Арифметическая, в полі **Предельное зачение** - максимальне значення вибірки;

- у полі **Расположение** відмічають **По столбцам;**
- натискують кнопку ОК.

У результаті виконаних дій буде виведено масив класових інтервалів (кишень). Якщо кінцеве значення масиву класових інтервалів виявилося меншим за максимальне значення вибірки, тоді нижче добавляють ще один класовий інтервал вручну.

Для побудови масиву частот виконують дії:

- праворуч від діапазону комірок з масивом класових інтервалів виокремлюють комірки стовпчика для виведення частот, причому на одну більше, ніж займає масив класових інтервалів;
- виконують дії **Вставка=> Функция=> Статистические => Частота;**
- у діалоговому вікні функції **Частота** у відповідні поля вводять адреси комірок, що містять масив вхідних (експериментальних) даних і масив класових інтервалів;
- натискують клавішу F2, а потім одночасно клавіші **<Ctrl>+<Shift>+<Enter>;**
- в результаті у вибраний діапазон комірок буде виведено масив частот;
- якщо замість масиву частот виведеться одне число, треба впевнитися, що діапазон комірок для виведення частот виокремлено вірно, а потім ще раз натиснути клавішу F2 і одночасно клавіші **<Ctrl>+<Shift>+<Enter>;**
- правильність підрахунків перевіряють шляхом обчислення суми отриманих частот, яка має дорівнювати кількості експериментальних даних.

Вбудована функція MS Excel **Частота** дозволяє одержати розподіл частот по класовим інтервалам, причому, якщо розподіл класових інтервалів розпочинається зі значення x_i, то до нього входять частоти появи значень, які $\leq x_i$. Якщо наступне значення класового інтервалу x_{i+1}, то до нього входять частоти появи значень, які x_i < i < x_{i+1}.

1.3.1. Побудова розподілу відносних частот

Як відомо, відносні частоти (частості) – це частоти, поділені на загальне число спостережень (число експериментальних даних). Стовпчик з відносними частотами будують поруч зі стовпчиком з частотами. Для побудови розподілу відносних частот виконують такі дії:

- у вільній комірці, якщо це не зроблено раніше, підраховують кількість експериментальних даних (суму частот) за допомогою вбудованої функції **СЧЕТ;**

■ у першу комірку стовпчика для побудови розподілу відносних частот вводять формулу ділення значення першої комірки з частотою на кількість спостережень, використовуючи відповідні посилання на адреси комірок;

■ на адресу комірки з першим значенням частоти робиться відносне посилання, на адресу комірки з сумою частот – абсолютне;

■ натискують клавішу **Enter**;

■ активізують комірку з першим отриманим значенням відносної частоти й розповсюджують формулу на діапазон комірок, призначений для побудови розподілу відносних частот.

■ для перевірки правильності розрахунків визначають суму відносних частот, яка має дорівнювати 1.

1.3.2. Побудова розподілів накопичених частот і частостей

Для заповнення діапазону комірок накопиченими частотами виконують дії:

■ у вибраній комірці після знаку "=" (дорівнює) записують відносне посилання на адресу першої комірки зі значенням частоти - це буде перше значення розподілу накопичених частот;

■ у наступну комірку після знаку "=" вводять адресу другої комірки зі значенням частоти, знак "+" і адресу попередньої комірки зі значенням першої накопиченої частоти;

■ натискують клавішу **Enter**;

■ активізують комірку, в якій з'явилося друге значення накопиченої частоти;

■ методом автозаповнення заповнюють діапазон стовпчика значеннями накопиченої частоти (протягують маркер автозаповнення);

■ останнє значення діапазону має відповідати сумі частот.

Для розрахунку накопичених частостей проводять описані вище дії, використовуючи діапазон комірок не з частотами, а з відносними частотами (частостями). Останнє число діапазону відносних накопичених частот має дорівнювати одиниці.

1.3.3. Побудова полігону, гістограми і кумуляти

Побудова полігонів:

■ виокремлюють стовпчики, які містять класові інтервали (кишені) і частоти;

■ виконують дії: **Вставка=>Диаграмма;**

■ у діалоговому вікні **Мастера диаграмм (шаг 1 из 4): тип диаграммы** на закладці **Стандартные** в групі **Тип** вибирають **Точечная,** в групі **Вид** вибирають **Точечная диаграмма, на которой значення соединены отрезками;**

■ для того, щоб переглянути, як буде виглядати полігон на даному етапі, натискують кнопку **Просмотр результата** в цьому ж діалоговому вікні - в результаті на місці групи **Вид** з'явиться поле **Образец,** в якому буде показано полігон;

■ натискують кнопку **Далее;**

■ у наступному вікні **Мастера диаграмм (шаг 2 из 4): источник данных** нічого не змінюють, треба лише впевнитися, що відмічено **Ряды** в **столбиках** і натиснути кнопку **Далее;**

■ у наступному вікні **Мастера диаграмм (шаг 3 из 4): параметры диаграммы** на закладці **Заголовки** вводять у полі **Название диаграммы** заголовок "Полігон частот"; у полі **Ось X (категорий)** - назву осі X: "Класові інтервали"; у полі **Ось Y (значенний)** -назву осі Y: "Частоти";

■ на закладці **Линии сетки** знімають галочку з перемикача **Ось Y (значений): основные линии;**

■ на закладке **Легенды** знімають галочку з перемикача **Добавить легенду** і натискують кнопку **Готово;**

■ одержану діаграму редагують далі: за допомогою миші рисунку надають квадратної форми;

■ для того, щоб прибрати сірий фон діаграми, натискують двічі мишею в сірій області - в результаті з'явиться вікно **Формат области построения,** в якому в групі **Заливка** відмічають **Прозрачная** і натискують кнопку ОК;

■ у діалоговому вікні **Формат оси,** яке викликається натискуванням правою кнопкою миші на осі, на закладці **Шкала** за потреби змінюють початкове значення вісі і ціну основних поділок.

Аналогічним чином будується полігон частостей. Необхідно впевнитися, що правильно задані інтервали комірок з класовими інтервалами і частостями. Після дій з форматування діаграми необхідно звернути увагу на те, що числа по вісі *Y* можуть мати різну кількість знаків після коми. Щоб кількість знаків після коми була однаковою виконують дії:

■ двічі натискують мишею на даній осі;

■ в діалоговому вікні **Формат оси** вибирають закладку **Число;**

■ в групі **Числовые форматы** вибирають **Числовой** і встановлюють **Число десятичных знаков: 2** (це число задане за замовчуванням);

■ натискують кнопку **ОК.**

Побудова гістограми

В **Пакете анализа** меню **Сервис** є інструмент для швидкої побудови гістограми, який так і називається **Гистограмма.** Для побудови гістограми:

■ викликають діалогове вікно **Гистограмма;**

■ задають діапазони комірок з вхідними даними і класовими інтервалами (кишенями);

■ відмічають галочкою перемикач **Вывод графика;**

■ натискують кнопку ОК.

Інструмент **Гистограмма** виводить два стовпчики: **Карманы і Частота.** У стовпчику **Карманы** дублюються задані раніше класові інтервали. У стовпчику **Частота** повторно виводяться обчислені для кожного класового інтервалу частоти. Сама гістограма виводиться справа від стовпчика частот. Форматування гістограми здійснюється звичними для форматування графіків способами. Для заміщення зазорів між прямокутниками на гістограмі викликають меню **Формат рядов данных.** Для цього:

■ встановлюють курсор на поле одного із прямокутників і натискують праву клавішу миші;

■ у контекстному меню, що відкриється, вибирають **Формат рядов данных=>Параметры;**

■ у вікні **Ширина зазора** встановлюють 0;

■ натискують кнопку ОК.

Гістограму можна побудувати також за допомогою **Мастера диаграмм,** вибравши відповідний вид графіка.

Побудова кумулятивної кривої

Кумулятивна крива (крива накопичених частот, або крива накопичених частостей) будується таким чином: по осі абсцис відкладають класові інтервали, а по осі ординат – накопичені частоти, або накопичені частості. Другим варіантом побудови кумулятивної кривої є використання інструменту **Сервис => Пакет анализа => Гистограмма:**

■ у діалоговому вікні **Гистограмма** вказують **Входной интервал** - діапазон комірок з вхідними даними, **Интервал карманов** -діапазон комірок з класовими інтервалами (кишенями);

■ відмічають галочкою **Интегральный % і Вывод графика;**

■ натискують кнопку ОК - в результаті з'явиться таблиця з даними і об'єкт з двома графіками;

■ в області графіка натискують праву клавішу миші;

■ у контекстному меню, що відкриється, вибирають пункт **Входные данные;**

■ у діалоговому вікні, що відкриється, переходять на закладку **Ряд;**

■ в однойменному полі **Ряд** вилучають ряд, що має назву **Частота;**

■ натискують кнопку ОК;
■ натискують праву клавішу миші в області графіка;
■ вибирають у контекстному меню пункт **Параметры диаграммы;**
■ вводять необхідні виправлення в назви заголовків;
■ натискують праву клавішу миші на осі *У*;
■ у контекстному меню вибирають **Формат оси;**
■ переходять на закладку **Число,** відмічають формат **Числовой;**
■ натискують кнопку ОК.

1.3.4. Визначення частоти попадання випадкової величини в заданий класовий інтервал

Розподіл частот використовують для визначення частоти попадання випадкової величини в заданий класовий інтервал. Наприклад, результати дослідження вмісту сухої речовини у цибулі наведені у табл.3

Таблиця 3 - Частотний розподіл вмісту сухої речовини в цибулі, %

Класові інтервали	**Частоти**	**Частості**	**Накопичені частоти**	**Накопичені частості**
15	1	0,0345	1	0,0345
16	4	0,1379	5	0,1724
17	8	0,2759	13	0,4483
18	10	0,3448	23	0,7931
19	4	0,1379	27	0,9310
20	2	0,0690	29	1,0000

Згідно з представленими даними, для дослідження вмісту сухої речовини в цибулі було проведено 29 вимірювань. Кількість випадків, які потрапляють в той чи інший класовий інтервал наведено у другій графі (розподіл частот). Наприклад, вимагається визначити, скільки вимірювань вмісту сухої речовини прийме значення >16 і ≤18 %. Підраховуючи частоти, встановлюють, що із 29 випадків вимогам задовольняють 18 значень. Наприклад, вимагається визначити, який відсоток вимірювань буде мати значення вмісту сухої речовини ≤17%. Використовуючи розподіл відносних накопичених частот (накопичених частостей), встановлюють, що вимогам відповідає 0,4483 (44,83%) вимірювань.

Розподіл відносних частот використовують також для порівняння двох рядів спостережень, що мають різну кількість вимірювань.

Практична робота №3. Дослідження експериментальних розподілів

<u>Мета роботи:</u> одержання практичних навичок дослідження експериментальних розподілів шляхом групування та графічного аналізу експериментальних даних, побудови розподілів частот і частостей, накопичених частот і частостей, полігонів, гістограм

<u>Програма виконання</u>

1. Відкрити документ MS Excel з даними П_р_1.

2. Скопіювати на новий аркуш дані одного із показників П_р_1, розподіл якого після вилучення анормальних даних найбільш близький до нормального.

3. Перейменувати аркуш з даними, присвоївши йому ім'я П_р_3.

4. Провести сортування вхідних даних за збільшенням.

6. Визначити кількість класів *k,* на які треба розподілити дослідні дані, *k* округлити до цілого.

7. Визначити величину класового інтервалу *λ*. За необхідності округлити отримане значення до цілого.

8. Побудувати розподіл частот .

9. Побудувати розподіл відносних частот (частостей).

10. Побудувати розподіли накопичених частот і частостей .

10. Побудувати полігони частот і відносних частот, гістограму і кумулятивну криву (див. зразки рис.).

11. Визначити, який відсоток вимірювань ≤ середнього значення класових інтервалів ?

<u>Запитання для самоперевірки</u>

1. Для чого застосовуються розподіли частот, відносних частот (частостей), накопичених частот і накопичених частостей?

2. Як побудувати за допомогою засобів MS Excel розподіл частот?

3. Які особливості побудови розподілів накопичених частот?

4. Які особливості побудови полігонів частот і частостей?

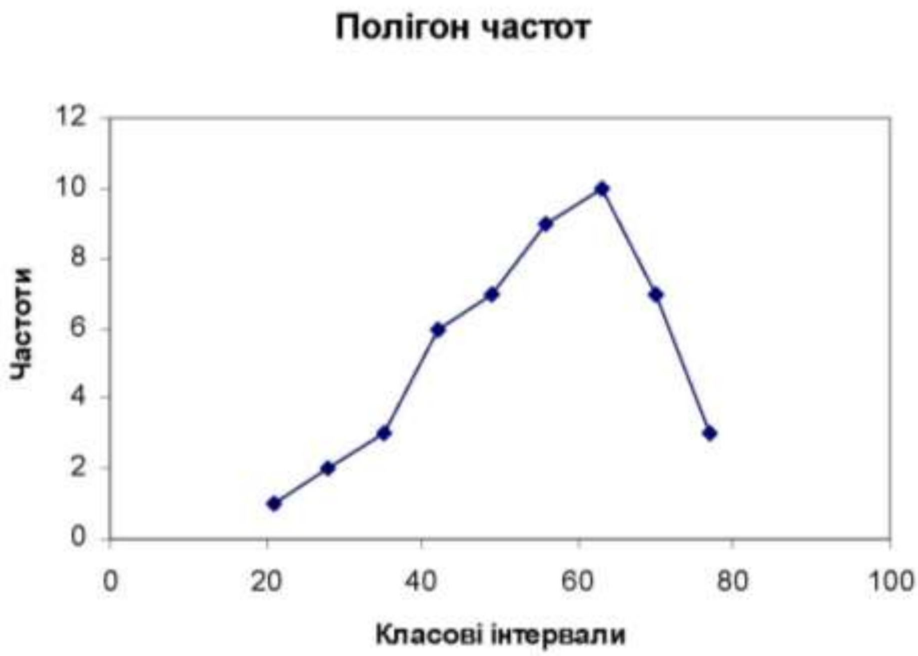
5. За допомогою яких засобів MS Excel будують гістограми?

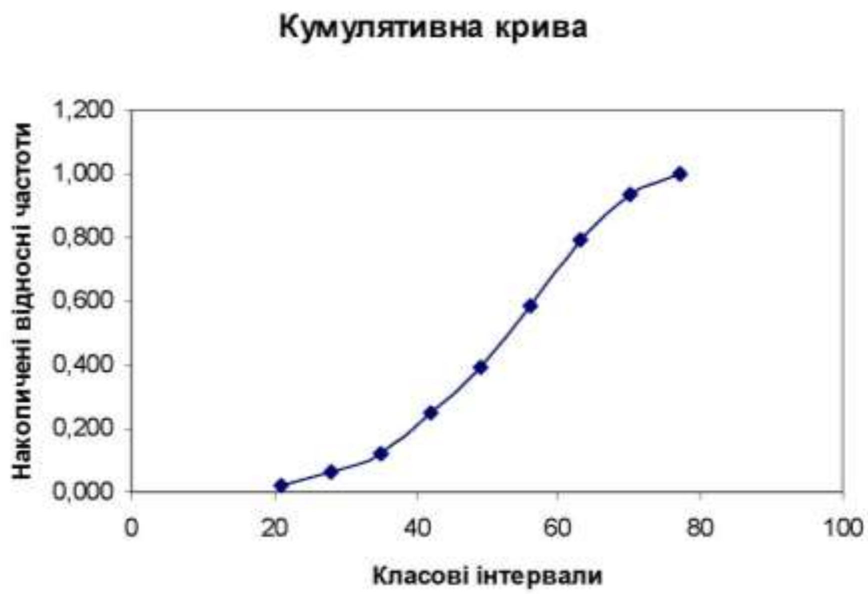
6. Як визначити частоту попадання випадкової величини в заданий класовий інтервал?

7. Як визначити кількість спостережень, яка не перевищує задану межу?

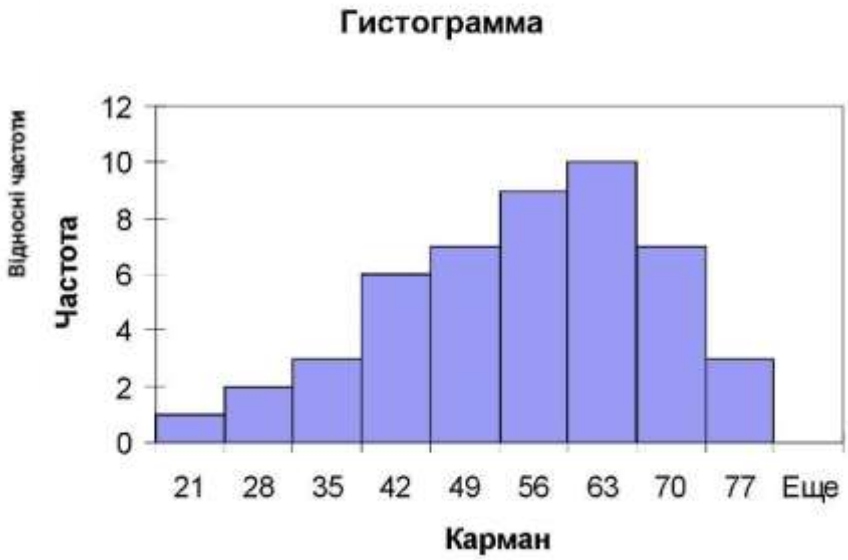
8. Як порівняти два ряди експериментальних даних, що мають різну кількість вимірювань?

Зразки рисунків побудованих графіків





Полігон відносних частот



1.4.Графічне порівняння експериментального розподілу з теоретичним

1.4.1.Диференціальна і інтегральна функції нормального розподілу

Теоретичним розподілом називають розподіл ймовірностей появи того чи іншого значення.

Як уже відзначалося, *нормальним законом розподілу імовірностей* (або просто нормальним розподілом) називається закон розподілу неперервної випадкової величини, заданий щільністю розподілу у вигляді формули (1). Наведена функція називається також *диференціальною функцією нормального розподілу.*

Інтегральна функція нормального розподілу визначається за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad (1)$$

1.4.2.Засоби MS Excel для визначення диференціальної і інтегральної функцій нормального розподілу

В Excel серед статистичних функцій є функція **НОРМРАСП**, яка дозволяє обчислити як диференціальну функцію нормального розподілу *f(x)*, так і інтегральну функцію розподілу *F(x).* Ця функція має наступні параметри: **НОРМРАСП**(x;α;σ;***тип***), де x - значення змінної, для якої необхідно обчислити функцію; α- середнє значення нормального розподілу; σ - оцінка стандартного відхилення цього розподілу; ***тип*** - це логічне значення, що визначає тип функції розподілу: ***тип*** - приймає значення ***ИСТИНА*** або ***ЛОЖЬ***. Якщо вказати в якості цього параметру ***ИСТИНА,*** то буде обчислена інтегральна функція *F(x)* нормального розподілу, а якщо - ***ЛОЖЬ***, то буде обчислена диференціальна функція розподілу *f(x).*

Експериментальний розподіл випадкових величин за достатньо великої кількості спостережень наближається до нормального закону (закону Гауса). Перевірка емпіричного (експериментального) закону розподілу на "нормальність" необхідна для підтвердження коректності виконання статистичного аналізу експериментальних даних, оцінки його достовірності й надійності, вибору статистичних критеріїв щодо порівняння середніх значень і дисперсій, підтвердження можливості застосування експериментальних даних для моделювання. Окрім цього, невідповідність експериментального розподілу теоретичному нормальному може бути викликана наявністю у вибірці анормальних значень, неправильним вибором факторів, що впливають на параметр оптимізації, або їх рівнів варіювання, впливу неконтрольованих, або некерованих факторів, що призводить до появи не усунених залишків систематичних, методичних, або інструментальних похибок. Цей факт вимагає додаткового аналізу умов проведення експерименту і одержаних результатів.

Графічний статистичний аналіз експериментальних даних дозволяє візуально оцінити вигляд експериментального розподілу за формою полігону частот, або частостей, а також візуально порівняти графіки теоретичних і експериментальних диференціальних та інтегральних функцій розподілу.

Остаточний висновок щодо закону розподілу вибіркової сукупності можна зробити тільки шляхом оцінки його відповідності теоретичному за допомогою спеціальних критеріїв згоди.

1.4.3.Графічне порівняння емпіричного розподілу з теоретичним

Для графічної ілюстрації одержаних результатів будують графіки теоретичної та експериментальної інтегральної й диференціальної функцій нормального розподілу.

Для побудови інтегральних функцій розподілу:

- копіюють відсортовані за збільшенням результати вимірювань одного із показників (П_р_3) на новий аркуш, масиви класових інтервалів, відносних частот і відносних накопичених частот;
- у вільних комірках визначають, якщо не було встановлено раніше, середнє вибіркове значення за допомогою вбудованої функції **СРЗНАЧ** і виправлене середнє квадратичне відхилення - за допомогою **СТАНДОТКЛОН;**
- у першу комірку вільного стовпчика, яка знаходиться в одному рядку з першим значенням скопійованих експериментальних даних, вводять формулу для підрахунку інтегральної функції нормального розподілу експериментальних величин: **=НОРМРАСП** (відносне посилання на адресу комірки з першим значенням вхідних даних; абсолютне посилання на адресу комірки зі значенням середнього; абсолютне посилання на адресу комірки зі значенням виправленого середнього квадратичного відхилення; **ИСТИНА**);
- копіюють формулу так, щоб були задіяні всі вхідні дані, тобто, до рядка, що містить останнє значення вхідних даних;
- виокремлюють діапазон комірок з вхідними даними та діапазон комірок зі значеннями інтегральної функції нормального розподілу, використовуючи клавішу **Ctrl**, якщо вони не сумісні;
- викликають **Мастер диаграмм** і будують графік, як це було описано в П_р_ № 3;
- проводять відповідні редагування і форматування графіка, щоб він мав вигляд, поданий на рис.;
- для побудови експериментальної інтегральної функції розподілу

натискують праву клавішу миші на вільному місці графіка теоретичної інтегральної функції;

- у контекстному меню, що відкриється, вибирають пункт **Исходные данные;**
- переходять на закладку **Ряд** і натискують кнопку **Добавить;**
- в полі **Название** вводять "експериментальна";
- в поле **Значення оси X** вводять діапазон комірок зі значеннями класових інтервалів;
- в поле **Значення оси У** вводять діапазон комірок зі значеннями накопичених частостей;
- проводять редагування і форматування графіків відомими способами;

або:

- використовують побудований в П_р_3 графік кумулятивної кривої (накопичених відносних частот) і до нього добавляють графік теоретичної інтегральної функції нормального розподілу.

Для побудови диференціальних функцій нормального розподілу виконують дії:

- у першу комірку вільного стовпчика вводять формулу для підрахунку диференціальної функції нормального розподілу експериментальних величин, наприклад: = **НОРМРАСП** (адреса комірки з першим значенням експериментальних даних; адреса комірки зі значенням середнього; адреса комірки зі значенням виправленого середнього квадратичного відхилення; **ЛОЖЬ**), використовуючи абсолютні і відносні посилання на адреси комірок;
- натискують клавішу **Enter**;
- активізують комірку з формулою і за допомогою маркера авто заповнення розповсюджують формулу так, щоб вказана функція була визначена для всіх експериментальних даних;
- для побудови графіка теоретичної диференціальної функції нормального розподілу виокремлюють діапазон комірок з вхідними

даними та діапазон комірок зі значеннями диференціальної функції;

- викликають **Мастер диаграмм** і аналогічним чином будують теоретичну диференціальну криву нормального розподілу;
- натискують праву клавішу миші на вільному місці діаграми;
- у контекстному меню, що відкриється, вибирають пункт **Исходные данные;**
- у діалоговому вікні, що відкриється, переходять на закладку **Ряд** і натискують кнопку **Добавить;**
- у полі **Название** вводять "експериментальна";
- у полі **Значення оси Х** вводять діапазон комірок зі значеннями класових інтервалів;
- в поле **Значення оси У** вводять діапазон комірок зі значеннями частостей;
- проводять редагування і форматування графіків;
- приклади побудованих графіків подано на рисунках.

Практична робота №4. Графічне порівняння експериментального розподілу з теоретичним

<u>Програма виконання</u>

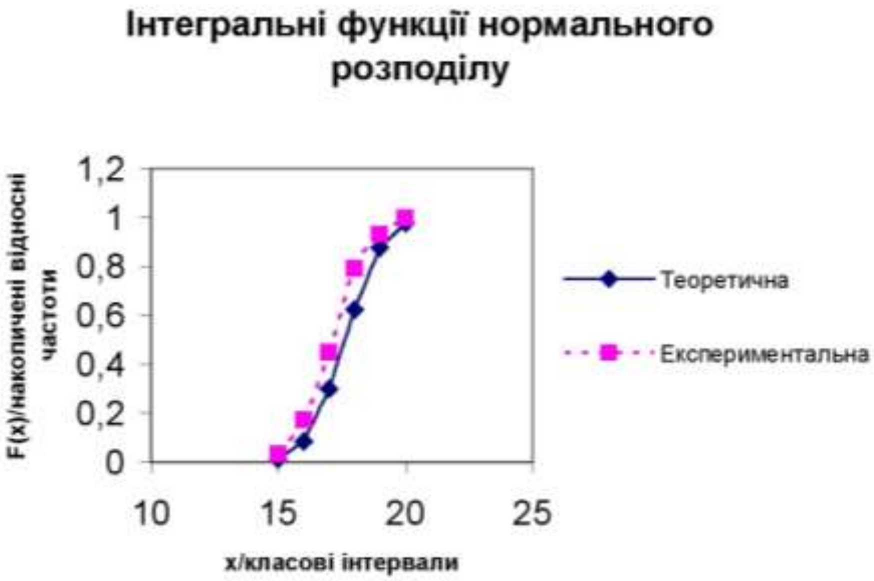
1. Відкрити документ, що містить П_р_№3.
2. Скопіювати експериментальні дані, масив класових інтервалів, масиви частостей і накопичених частостей на новий аркуш, або в новий документ.
3. Побудувати теоретичні й експериментальні диференціальні та інтегральні функції нормального розподілу.
4. Провести редагування і форматування графіків згідно з рисунками.

<u>Запитання для самоперевірки</u>

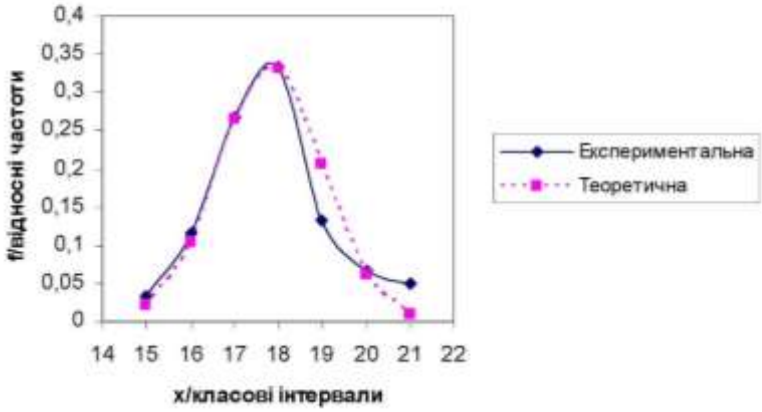
1. Що називається інтегральною і диференціальною функціями

нормального розподілу випадкових величин?

2. Яка вбудована функція Excel слугує для побудови теоретичних нормальних розподілів?
3. Як обчислити значення і побудувати графік інтегральної теоретичної функції нормального розподілу ?
4. Який експериментальний розподіл відповідає інтегральній функції?
5. Як обчислити значення і побудувати графік диференціальної теоретичної функції нормального розподілу засобами MS Excel?
6. Який експериментальний розподіл відповідає диференціальній функції?
7. Що є аргументами функції **НОРМРАСП**?
8. Про що свідчить подібність графіків теоретичного і експериментального розподілів випадкових величин?



Диференціальні функції нормального розподілу



1.5.Порівняння параметрів нормального розподілу

15.1.Поняття про статистичні гіпотези і критерії

Задачі порівняльного аналізу застосовуються у багатьох сферах наукової і професійної діяльності. Наприклад, при оцінці якості нової технології - показники, одержані при застосуванні нової технології, порівнюються з показниками, одержаними за традиційної технології. При оцінці ефективності очисних заходів - показники, одержані в результаті очисних заходів, порівнюються з нормативними тощо.

До задач порівняльного аналізу відносять: порівняння емпіричних законів розподілу, або емпіричного з теоретичним, а також параметрів цих розподілів.

При цьому висувається гіпотеза щодо результату, що передбачається. Наприклад, що показник нової технології перевищує показник класичної, або що в результаті проведення очисних заходів вміст шкідливих речовин не перевищує граничнодопустимого.

Статистичною гіпотезою називається припущення відносно виду невідомого розподілу або відносно значень параметрів емпіричного розподілу.

Нульовою (основною) гіпотезою називається висунута гіпотеза, яка позначається H_0. *Альтернативною (конкуруючою)* називається гіпотеза, яка суперечить основній (позначається H_1).

Якщо проводиться порівняння однієї вибірки, генеральний параметр якої z_1, з іншою вибіркою, генеральний параметр якої z_2, то основна гіпотеза формулюється так: генеральні параметри вибірок, що порівнюються, рівні, тобто різниця між вибірковими параметрами носить випадковий характер. У цьому разі основну гіпотезу записують у вигляді: $H_0: z_1 = z_2$.

Альтернативні гіпотези при цьому можуть мати один із наступних видів:

а) $H_1: z_1 > z_2$; *б)* $H_1: z_1 < z_2$; *в)* $H_1: z_1 \neq z_2$.

Гіпотези *"а)"* і *"б)"*називаються направленими, а гіпотеза *"в) "* - ненаправленою.

Перевірка гіпотези дозволяє зробити висновок щодо прийняття або протиріччя висунутої гіпотези емпіричним даним.

Статистичним критерієм називається спеціально напрацьована випадкова величина з відомою функцією розподілу, яка служить для перевірки основної гіпотези. Значення критерію, обчисленого за вибіркою, називається *"значенням критерію, що спостерігається"* (застосовується також назва *"розрахункове значення критерію")*. Значення критерію, визначене за спеціальними формулами для вибраного рівня надійності і розрахованого числа степенів свободи, називається *критичним значенням критерію.*

Критичною областю називається множина значень критерію, при яких відхиляється основна гіпотеза, тобто множина критичних значень критерію.

1.5.2.Порівняння двох дисперсій

Порівняння дисперсій використовують для оцінки степені розсіювання двох випадкових величин, оцінки точності визначення певних показників тощо. Наприклад, при порівнянні двох технологій ремедиації нафтозабруднених середовищ кращою буде та, яка забезпечує, окрім мінімальних середніх значень показників забруднення, мінімальні відхилення окремих вимірювань цих показників від своїх середніх значень. Середнє квадратичне відхилення (корінь квадратний з дисперсії) використовується для оцінки точності визначення середніх значень показників, що є необхідною умовою при визначенні значущості різниці між ними. Порівняння дисперсій передує порівнянню середніх, оскільки від його результату залежить вибір інструменту аналізу для порівняння середніх значень.

Критерій Фішера (F- тест) для порівняння двох дисперсій

Для оцінки значущості різниці виправлених вибіркових дисперсій (оцінок дисперсій генеральних сукупностей) S^2_x та S^2_y (нехай $S^2_x>S^2_y$), розрахованих за двома вибірками із генеральних сукупностей *X* і *У*, що мають розподіл, близький до нормального, використовується критерій Фішера (*F*- критерій).

Вимагається перевірити нульову гіпотезу H_0: $z_1 = z_2$.

Значення критерію Фішера, що спостерігається (розрахункове), обчислюють за формулою

$$F_{\text{розр}} = \frac{S_x^2}{S_y^2}. \tag{31}$$

<u>У чисельнику завжди має бути більша дисперсія</u>.!!! Розрахункове значення критерію порівнюють з критичним, обчисленим з прийнятим рівнем значущості. Якщо розрахункове значення критерію перевищує критичне, то нульова гіпотеза про рівність двох виправлених вибіркових дисперсій відхиляється. Тобто різниця між ними не є випадковою, отже дисперсії двох генеральних сукупностей неоднорідні. Якщо розрахункове значення критерію Фішера менше критичного, то нульова гіпотеза приймається, тобто дисперсії однорідні.

Порівняння дисперсій двох вибірок засобами MS Excel

Для порівняння дисперсій в MS Excel використовується засіб під назвою **Двухвыборочный F-тест для дисперсии.** Для його використання виконують таку послідовність дій: **Сервис=>Анализ данных=> Двухвыборочный F-тест для дисперсии.**

В діалоговому вікні **Двухвыборочный F-тест для дисперсии** вводять такі дані:

- У групі Входные данные у полі **Интервал переменной 1** вводять адресу інтервалу комірок, що містять дані першої вибірки (<u>дисперсія якої має бути більша</u>), а в полі **Интервал переменной 2** вводять адресу інтервалу комірок, що містять дані другої вибірки;
- у полі Альфа встановлюють рівень значущості (за замовчуванням

встановлено a =0,05);

- У групі **Параметры вывода** для виведення результатів обчислень на поточному робочому аркуші активізують перемикач Выходной **интервал** і вказують у полі справа від перемикача адресу комірки для виведення даних (верхню ліву);
- для виведення результатів обчислень на новий аркуш активізують перемикач **Новый рабочий лист;**
- для виведення результатів обчислень у новий файл активізують перемикач **Новая рабочая книга;**
- після встановлення всіх необхідних параметрів натискують кнопку ОК.

У результаті виконаних дій з'явиться таблиця, що містить обчислені середні значення, дисперсії, число степенів свободи для кожної вибірки (у рядку ***df),*** значення критерію Фішера, що спостерігається, (у рядку **F**), та інші. Якщо дисперсія першої змінної виявиться меншою за дисперсію другої змінної, то обчислення повторюють і в якості першої змінної використовують ту, дисперсія якої більше.

Для прийняття рішення порівнюють розрахункове значення критерію Фішера у рядку **F** даної таблиці, з критичним значенням розподілу Фішера $F_{крит}$ із останнього рядка таблиці. Якщо $F>F_{крит}$, то дисперсії, що порівнюються, неоднорідні (нульова гіпотеза про їх однорідність відхиляється). Якщо $F<F_{крит}$, то дисперсії, що порівнюються, однорідні (нульова гіпотеза про їх однорідність приймається).

Приклад. Досліджували вплив важких металів на приріст калюсних клітин польовиці. Результати у відсотках від контрольного варіанту наведені у таблиці 1.

Вимагається встановити з рівнем надійності α=0,05, чи однорідні дисперсії двох вибіркових сукупностей. Результати розрахунків, виконаних у Ms Excel наведено в табл. 2.

Оскільки $F=3,549>F_{крит}=2,484$, то дисперсії мають статистично значущу відмінність, тобто вони неоднорідні. Нульова гіпотеза про рівність дисперсій відхиляється.

Таблиця 1

Приріст калюсних клітин польовиці

Вплив важких металів на приріст калюсних клітин польовиці, % від контролю		
№ вимірювань	Кадмій	Свинець
1	54	60
2	58	57
3	70	63
4	66	59
5	63	57
6	69	57
7	73	58
8	71	62
9	69	59
10	65	60
11	67	65
12	66	57
13	68	60
14	74	64
15	70	64

Таблиця 2

Результати перевірки однорідності дисперсій за критерієм Фішера

Двухвыборочный F-тест для дисперсии		
	Переменная 1	*Переменная 2*
Среднее	66,9136	60,2414
Дисперсия	27,32672583	7,698765971
Наблюдения	15	15
df	14	14
F	3,549494286	
P(F<=f) одностороннее	0,011977	
F критическое одностороннее	2,483723449	

Практична робота №5. Порівняння параметрів нормального розподілу

Мета роботи - отримання практичних навичок у використанні статистичних критеріїв для перевірки статистичних гіпотез, зокрема, критерію Фішера для перевірки однорідності дисперсій.

Програма виконання

1. Завантажити табличний процесор MS Excel.
2. Вибрати один варіант даних із завдання табл.
3. Перевірити однорідність дисперсій двох вибірок за критерієм Фішера.
4. Проаналізувати одержані результати.
5. Зберегти файл у власній папці. Надіслати на перевірку викладачу

Завдання

Таблиця

Вплив важких металів на схожість рослин польовиці, %

Схожість рослин польовиці під дією важких металів, % від контролю									
1 Варіант		2 Варіант		3 Варіант		4 Варіант		5 Варіант	
Кадмій	Свинець	Кадмій	Свинець	Кадмій	Свинець	Кадмій	Свинець	Кадмій	Свинець
99	95	85	84	91	85	80	75	79	81
98	96	87	82	85	86	77	75	79	80
99	96	85	82	89	86	76	74	79	82
98	96	86	82	85	86	76	75	79	79
99	93	89	85	85	85	80	75	80	85
97	90	88	83	89	82	76	74	81	76
97	99	88	87	83	85	75	76	79	83
104	98	84	81	88	84	79	76	80	85
97	92	84	85	89	82	76	76	80	83
95	95	84	85	92	89	79	76	81	83
100	100	86	88	85	81	79	76	81	79
97	94	83	83	87	80	79	75	76	78
96	89	78	85	89	85	78	75	80	82
96	91	91	87	88	81	78	76	78	84

1.6.Перевірка гіпотези про рівність середніх

1.6.1.Критерій Ст'юдента (t-тест) для порівняння вибіркових середшх двох незалежних вибірок

Нехай із двох генеральних сукупностей *X* і *У*, що мають розподіл близький до нормального, взято по одній незалежній вибірці. Обчислені для цих вибірок середні значення $\bar{x}_в$ і $\bar{y}_в$, як правило, будуть відрізнятися. Оскільки вибірки є випадковими, то ця різниця може бути випадковою і генеральні середні можуть співпадати.

Потрібно перевірити нульову гіпотезу про рівність генеральних середніх: $H_o : \bar{x}_г = \bar{y}_г$. Гіпотеза про рівність генеральних середніх перевіряється шляхом порівняння вибіркових середніх значень. Значущість різниці між двома вибірковими середніми $\bar{x}_в$ і $\bar{y}_в$ визначається за допомогою критерію *Ст'юдента* (або *t*-критерію).

Значення критерію Ст'юдента, яке спостерігається, (розрахункове значення) $t_{розр}$ обчислюється за формулою

$$t_{\text{розр}} = \frac{\left|\bar{x}_в - \bar{y}_в\right|}{\sigma_{\bar{x}-\bar{y}}} \qquad (32)$$

де величина $\sigma_{\bar{x}_в-\bar{y}_в}$ називається *похибкою різниці двох середніх.*

Вигляд для обчислення $\sigma_{\bar{x}_в-\bar{y}_в}$ залежить від обсягів вибірок і від того, чи припускаються рівними невідомі дисперсії генеральних сукупностей:

- якщо обсяги вибірок n_x і n_y приблизно одинакові і достатньо великі, тобто, якщо n_x>30 і n_y >30, то похибка різниці двох середніх визначається за формулою:

$$\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}} \qquad (33)$$

де σ_x^2 і σ_y^2 - дисперсії вибірок із двох генеральних сукупностей *X* і *У*;

- якщо обсяги вибірок n_x і n_y малі, тобто n_x<30 і n_y<30, а дисперсії генеральних сукупностей невідомі, або припускаються рівними, то:

$$\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{\frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{n_x + n_y - 2} \times \frac{n_x + n_y}{n_x n_y}}\ , \qquad (34)$$

де s_x^2 і s_y^2 - виправлені дисперсії двох генеральних сукупностей X і Y.

Тобто, вибір формули для визначення розрахункового значення критерію Ст'юдента залежить від результату перевірки однорідності дисперсії вибірок, що порівнюються. Тому застосуванню критерію Ст'юдента завжди передує перевірка однорідності дисперсій за критерієм Фішера.

Порівняння середніх двох незалежних вибірок засовами MS Excel

Для перевірки статистичної гіпотези про рівність середніх використовують **Пакет анализа.** Оскільки правила застосування критерію Ст'юдента залежать від результатів перевірки однорідності дисперсій генеральних сукупностей, із яких утворені дві незалежні вибірки, то для порівняння середніх цих вибірок, відповідно є два інструменти аналізу: **Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями** та **Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями.**

Для виклику будь-якого з цих інструментів аналізу виконують команду **Сервис=> Анализ данных,** а потім у діалоговому вікні, що відкриється, вибирають потрібне.

Вибір t-тесту здійснюють лише після того, як буде виконана перевірка гіпотези про рівність генеральних дисперсій двох вибірок і буде встановлено за допомогою критерію Фішера (F-тесту) значущість різниці вибіркових дисперсій. Якщо дисперсії вибірок виявилися рівними, тобто не мають статистично значущої різниці, то вибирають **Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями** і натискують кнопку ОК. Відкриється діалогове вікно з назвою вибраного інструменту аналізу. Порядок введення даних у цьому вікні такий же, як і у діалоговому вікні F- тесту. Після введення необхідних даних і натискання кнопки ОК з'явиться таблиця з аналогічною назвою.

У таблиці будуть міститися обчислені середні значення і дисперсії для кожної вибірки; обсяги цих вибірок (у рядку: **Наблюдения);** теоретичні генеральні дисперсії обох вибірок (у рядку: **Объединенная дисперсия);** число степенів свободи розподілу Ст'юдента (у рядку: ***df);*** значення критерію Ст'юдента, яке спостерігається (у рядку: **t-статистика);** критична точка розподілу Ст'юдента двосторонньої критичної області (у рядку: **t критическое двусторонее)** та інше.

Якщо після виконання F-тесту дисперсії вибірок виявляються різними, то вибирають **Двухвыборочный t-тест с различными дисперсиями.** Після натискання кнопки ОК відкриється діалогове вікно з аналогічною назвою. Порядок заповнення полів у даному діалоговому вікні такий же, як і в попередньому випадку. Таблиця в t-тесті з різними дисперсіями практично співпадає з таблицею у t- тесті з однаковими дисперсіями за винятком того, що в останньому випадку відсутній рядок **Объединенная дисперсия.**

Порівнюють *за абсолютною величиною* значення критерію Ст'юдента, що знаходиться в рядку **t-статистика,** з критичною точкою розподілу Ст'юдента двосторонньої критичної області **t критическое двухстороннее.**

Приклад. За даними табл. 4 перевірялася однорідність дисперсій за критерієм Фішера. Виявилося, що дисперсії однорідні. Для перевірки середніх значень був застосований критерій Ст'юдента для вибірок з однорідними дисперсіями. Результати розрахунків наведені у табл.

Таблиця

Результати перевірки середніх значень за критерієм Ст'юдента

Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями		
	Переменная 1	*Переменная 2*
Среднее	10,35	8,45
Дисперсия	1,5536	0,9754
Наблюдения	12	12
Объединенная дисперсия	1,26454	
Гипотетическая разность средних	0	
df	22	

t-статистика	4,1386	
P(T<=t) одностороннее	0,0002	
t критическое одностороннее	1,7171	
P(T<=t) двухстороннее	0,0004	
t критическое двухстороннее	2,0738	

Оскільки $t_{статистика}=4,1386>t_{Крит.двухст.}=2,0738$, то між середніми, що порівнюються, є статистично значуща різниця, тобто середні двох вибірок відрізняються. Значення t-статистики завжди береться за модулем (за абсолютною величиною!).

Практична робота №6. ***Перевірка гіпотези про рівність середніх***

Мета роботи - отримання практичних навичок у використанні статистичних критеріїв для перевірки статистичних гіпотез, зокрема, критерію Ст'юдента для перевірки рівності середніх значень.

Програма виконання

1. Завантажити табличний процесор MS Excel.
2. Вибрати один варіант даних із таблиці завдання до практичної 5.
3. Перевірити гіпотезу про рівність середніх значень двох незалежних вибірок і проаналізувати одержані результати.
4. Зберегти документ у власній папці і надіслати не перевірку викладачу.

Запитання для самоперевірки

1. Що називається статистичною гіпотезою?
2. Які бувають статистичні гіпотези?
3. Що називається статистичним критерієм?
4. Для чого використовується порівняння двох дисперсій?
5. За яких умов дисперсії вважають однорідними і за яких - ні?
6. Про що свідчить неоднорідність дисперсій?
7. За яким критерієм порівнюють дві дисперсії і який порядок його застосування?
8. Які засоби MS Excel використовують для порівняння дисперсій?

9. За якими показниками, виведеними у таблиці F-тесту MS Excel, визначають однорідність дисперсій?

10. За яким критерієм перевіряють гіпотезу про рівність середніх значень?

11. Від чого залежить вибір виду критерію Ст'юдента для порівняння середніх?

12. Які правила прийняття рішення при застосуванні t-тесту?

13. Як задати рівень надійності, за яким треба перевірити гіпотезу?

14. Який рівень надійності встановлений за замовчуванням у F- та t-тестах?

15. Як впливає значення рівня надійності на результати порівняння?

1.7. Однофакторний дисперсійний аналіз

Метод досліджень, заснований на порівнянні дисперсій, називається *дисперсійним аналізом.*

Основна ідея дисперсійного аналізу полягає у порівнянні *«факторної дисперсії»* обумовленої впливом факторної ознаки, і *«залишкової дисперсії»* обумовленої впливом випадкових чинників. Якщо різниця між цими дисперсіями статистично значуща, то вплив факторної ознаки, що вивчається, на результативну ознаку також є статистично значущим.

Дисперсійний аналіз застосовують для оцінки впливу *кількісних* або *якісних* факторних ознак (факторів). *Кількісний фактор* - факторна ознака, яку можна виразити кількісно (можна виміряти), наприклад, кількість внесених добрив, температура і відносна вологість повітря тощо. Рівні варіювання кількісного фактора - конкретні значення, які цікавлять дослідника, наприклад, певна кількість внесених добрив, конкретні значення температури, або вологості повітря тощо.

Якісний фактор - факторна ознака, яку не можна виміряти, тобто яка приймає тільки якісні значення, наприклад, вид добрива, вид механічного засобу для обробки ґрунту тощо. Рівні варіювання якісного фактору - певні види добрив, певні види засобів тощо. Рівні варіювання якісного фактору не можуть приймати проміжних значень.

У MS Excel є засіб для проведення однофакторного дисперсійного аналізу. Для його використання виконують дії:
дослідні дані розміщують у таблиці, де: назви стовпчиків – рівні факторної ознаки; рядки - результати повторних вимірювань;
виконують дії: Анализ данных => Однофакторный дисперсионый анализ;
у поля однойменного діалогового вікна, що відкриється, вводять потрібне:

- у поле **Входной интервал** вводять прямокутний діапазон комірок з вихідними даними;
- серед трупи перемикачів **Группирование** відмічають по **столбцам**, оскільки дані, що обумовлені рівнями факторної ознаки, розміщені у стовпчиках;
- якщо у введений діапазон даних увійшли назви стовпчиків, то відмічають пункт **Метки в первой строке**;
- залишають рівень надійності **Альфа** без змін, якщо значення 0,05 задовольняє, або вводять інше значення у відповідне поле;
- у групі перемикачів **Параметры вывода** відмічають **Выходной интервал** і вводять адресу верхньої лівої комірки для виведення результатів, або вибирають інше;
- натискують кнопку **ОК**.

Приклад. Вивчали вплив якісного фактора на трьох рівнях варіювання (вилив трьох видів добрив) на кількість зерен в колосі ярої пшениці. Результати досліджень наведено в табл.

Таблиця - Результати досліджень впливу видів добрив на кількість зерен у колосі ярої пшениці

Номер досліду (повторності)	Вид. добрив		
	A	B	C
	Кількість зерен у колосі, шт.		
1	51	52	42
2	52	54	44
3	56	56	50
4	57	58	52

Після заповнення полів однойменного діалогового вікна виводяться дві таблиці. В табл. 9 представлені підсумкові розрахунки для рівнів факторної ознаки - для кожного із видів добрив, які трактуються як групові результати. Визначаються середні значення і дисперсії всередині груп (серед повторних вимірювань), обумовлені впливом випадкових чинників.

Таблиця 9 - Проміжні результати дисперсійного аналізу

Одно факторный дисперсионный анализ				
ИТОГИ				
Группы	Счет	Сумма	Среднее	Дисперсия
Столбец 1	4	216	54	8,6666
Столбец 2	4	220	55	6,6666
Столбец 3	4	188	47	22,6666

- **Столбец 1**, **Столбец 2**, **Столбец 3** - рівні варіювання якісної факторної ознаки - виду добрив;
- **Счет** - кількість повторностей для кожного рівня факторної ознаки;
- **Сумма** - загальна сума одержаних результатів;
- **Среднее** - середнє значення результативної ознаки для кожного рівня факторної ознаки;
- **Дисперсия** - дисперсія, обумовлена впливом випадкових чинників, тобто відмінностями між повторними вимірюваннями

.У табл. наведені підсумкові результати дисперсійного аналізу.

Таблиця - Підсумкові результати дисперсійного аналізу

Дисперсионный анализ						
Источник вариации	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-Значение*	*F критическое*
Между группами	152	2	76	6	0,0220	4,2564
Внутри групп	114	9	12,6666			
Итого	266	11				

- **SS** - сума квадратів:
  - **Между группами** - міжгрупова сума квадратів (обумовлена впливом рівнів факторної ознаки, що вивчається): $\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X}_i - \overline{X}\right)^2$,

  де $\overline{X}$ - загальне середнє значення результативної ознаки; $\overline{X}_i$ - середнє значення результативної ознаки, обумовлене впливом *i*- го рівня факторної ознаки; i =1…n, де n- кількість рівнів факторної ознаки;

  - **Внутри групп** - у середині груп (випадковий вплив): $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{X}_i - \overline{X}\right)^2$, де X_{ij} - поточне значення результативної ознаки, вплив на яку вивчається; j = 1..m - поточне значення повторності; m - кількість повторних дослідів;

  - **Итого** - загальна $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{X}_i - \overline{X}\right)^2$, де m=4 - кількість дослідів;

n-3 - кількість рівнів факторної ознаки;

- **df** - число степенів свободи;
- **MS** - дисперсії (середнє квадратів: MS=SS/df);
- **F** розрахункове значення критерію Фішера;
- **P-Значение** - розрахункове значення мінімальної значущості;
- **F-критическое** - критичне значення критерію Фішера.

Оскільки $F>F_{крит}$, то між факторною дисперсією, обумовленою впливом рівнів факторної ознаки - виду добрив, і залишковою дисперсією, обумовленою впливом випадкових чинників, існує статистично значуща різниця. Отже, з рівнем надійності 0,05 можна стверджувати, що вплив видів добрив на кількість зерен у колосі ярої пшениці є статистично значущим.

Практична робота №7. Однофакторний дисперсійний аналіз

Мета роботи: набуття навичок проведення однофакторного дисперсійного аналізу засобами Excel

Порядок виконання

1. Завантажити табличний процесор MS Excel.
2. Ввести дані із завдання (один із варіантів табл.).
3. Визначити значущість впливу рівнів факторної ознаки, що досліджується, на результативну ознаку.
4. Провести аналіз одержаних результатів.
5. Зберегти документ в особистій папці.
6. Завершити роботу з Excel.

Завдання

Таблиця - Результати досліджень впливу виду технології вирощування на показники врожаю озимої пшениці

№ досліду (повторності)	Вид технології вирощування пшениці		
	1a	2b	3c
3 варіант	Густота стояння, шт./м^2		
1	397	410	437
2	399	412	432
3	401	415	436
4	389	409	429
2 варіант	Висота рослин, см		
1	90	98	110
2	91	99	108
3	93	97	109

4	92	100	115
3 варіант	Загальне кущення, шт.		
1	2,4	2,7	3,2
2	2,2	2,8	3,1
3	2,3	2,5	3,3
4	2,3	2,7	3,4
4 варіант	Продуктивне кущення, шт.		
1	2,0	2,5	3.1
2	2,1	2,6	3,0
3	2,2	2,4	3,2
4	2,1	2,4	3,0
5 варіант	Довжина колоса, см		
1	7,0	7,6	8,2
2	7,1	7,5	8,4
3	7,2	7,4	8,3
4	7,1	7,5	8,6
6 варіант	Кількість колосків, шт.		
1	15	19	22
2	16	Г __ І?	23
3	15	20	22
7 варіант	Кількість зерен в колосі, шт.		
1	35	39	42
2	37	38	43
3	34	41	45
4	36	40	44
8 варіант	Маса зерен з 10 рослин, г		
1	25	31	33
2	26	32	34
3	28	30	37
4	25	32	35
9 варіант	Маса соломи, г		
1	35	41	54
2	36	42	57
3	37	44	53
4	36	43	58
10 варіант	Маса 1000 зерен, г		
1	32	37	42
2	33	38	43
3	31	36	42
4	32	38	44

Запитання для самоперевірки

1. Які відмінності між якісними і кількісними факторними ознаками?

2. У чому полягає сутність дисперсійного аналізу?
3. Для чого застосовують дисперсійний аналіз?
4. Які особливості використання засобу MS Excel Однофакторный дисперсионный анализ?
5. Які результати виводяться при використанні засобу Однофакторный дисперсионный анализ?
6. На основі яких даних робиться висновок щодо статистичної значущості впливу рівнів факторної ознаки, що вивчається?
7. Чи залежать одержані результати від прийнятого рівня значущості?
8. Як задати потрібний рівень значущості при проведенні дисперсійного аналізу?
9. Як перевірити, чи існує статистично значуща різниця між впливом двох рівнів факторної ознаки?

1.8. Двофакторний дисперсійний аналіз

Двофакторний дисперсійний аналіз застосовують для оцінки впливу як видів факторних ознак, так і їх рівнів. Причому оцінюють також, що із них має більший вплив: вид факторних ознак, чи рівні їх варіювання. Для проведення двофакторного дисперсійного аналізу застосовують засіб MS Excel з аналогічною назвою: **Анализ данных → Двухфакторный дисперсионный анализ без повторений**. Поля діалогового вікна заповнюються як і у випадку однофакторного дисперсійного аналізу.

Приклад. Досліджували вплив різних технологій вирощуваная (якісний фактор) і різних концентрацій добрив (кількісний фактор) и а показники врожаю ярої пшениці. Вимагається оцінити значущість виливу зазначених факторних ознак на результативну ознаку. Результати експерименту наведено у табл.

Таблиця - Результати експериментальних досліджень впливу концентрації добрив і виду технологій вирощування на густоту стояння ярої пшениці

Густота стояння ярої пшениці, шт./$м^2$			
Варіант досліду	Технологія 1	Технологія 2	Технологія 3
$N_{30}P_{40}K_{15}$	407	412	395
$N_6OP_8OK_3O$	437	442	405
$N_{90}P_{120}K_{45}$	455	469	425

Результати розрахунків виводяться у вигляді таблиць.

Таблиця - Результати проміжних розрахунків двофакторного дисперсійного аналізу

Двухфакторный дисперсионный анализ без повторений				
ИТОГИ	Счет	Сумма	Среднее	Дисперсія
Строка 1	3	1214	404,6666	76,3333
Строка 2	3	1284	428	403
Строка 3	3	1349	449,6666	505,3333
Столбец 1	3	1299	433	588
Столбец 2	3	1323	441	813
Столбец 3	3	1225	408,3333	233,3333

Таблиця - Підсумкові результати двофакторного дисперсійного аналізу

Дисперсионный анализ						
Источник вариации	SS	*df*	MS	F	P-значение	F критич.
Строки	3038,88	2	1519,44	26,4506	0,0049	6,9442
Столбцы	1739,55	2	869,77	15,1411	0,0136	6,9442
Погрешность	229,77	4	57,44			
Итого	5008,22	8				

- **SS строки** - сума квадратів, обумовлена виливом рівнів факторної ознаки результати вимірювань якої розташовані у рядках (концентрації добрив);
- **SS столбцы** - сума квадратів, обумовлена впливом рівнів факторної ознаки результати вимірювань якої розташовані у стовпчиках (технології вирощування пшениці).
- **Погрешность** - залишкова сума квадратів, обумовлена випадковою похибкою;
- **df** - число степенів свободи;

- **MS** - середній квадрат (фактична дисперсія результативної ознаки);
- **F** - розрахункове значення критерію Фішера (значення критерію, що спостерігається),

P -значение - розрахункове значення мінімальної значущості;

F критическое - критичне значення критерію Фішера.

Згідно з даними, наведеними у таблийях, у рядках розміщуються рівні кількісного фактора - концентрації добрив, у стовпчиках - рівні якісного фактора - технології вирощування. Порівнюється F значення з $F_{крит}$. Оскільки у першому випадку F=26,45 > $F_{крит}$=6,94, то концентрація добрив має статистично значущий вплив на вихідний параметр - густоту стояння ярої пшениці. У другому випадку F=15,14> $F_{крит}$=6,94, отже, вид технології вирощування також має статистично значущий вплив на вихідний параметр. Причому концентрація добрив (F=26,45) має більший вплив порівняно з видом технології вирощування (F=15,14).

Практична робота №8. Двофакторний дисперсійний аналіз

Мета роботи: набуття навичок проведення двофакторного дисперсійного аналізу засобами Excel

Порядок виконання

1. Завантажити табличний процесор MS Excel.
2. Ввести дані із завдання один із варіантів табл. .
3. Визначити статистичну значущість впливу факторних ознак, що досліджуються, на результативну ознаку.
4. Встановити, яка із факторних ознак має більш сильний вилив?
5. Яку факторну ознаку можна віднести до якісної, а яку - до кількісної?
6. Оцінити вплив випадкових чинників на результативну ознаку.
7. Провести аналіз одержаних результатів.
8. Зберегти документ в особистій папці.
9. Завершити роботу з Excel .

Завдання

Таблиця - Результати досліджень виливу технології вирощування і сорту цибулі на якісні показники продукції

Вид технології вирощування	Сорт цибулі		
	Балстора	Сквирська	Полтавська
1 варіант	Вміст сухої речовини, %		
А	12,1	13,2	16,1
В	12,6	13,7	16,0
С	12,4	14,1	15,9
2 варіант	Загальний цукор, %		
А	6,9	8,4	7,7
В	7,0	8,6	7,6
С	7,1	8,9	7,8
3 варіант	Сахароза, %		
А	3,9	4,4	4,8
В	4,0	4,8	4,7
С	3,8	5,3	4,9
4 варіант	Вітамін С, %		
А	8,5	6,8	8,8
В	9,0	7,0	8,9
С	8,1	6,9	9,1
5 варіант	Нітрат, мг/кг		
А	40,7	44,3	38,4
В	40,8	43,7	38,9
С	40.6	45,0	37,9
6 варіант	Ефірні масла, мг/кг		
А	76,1	67,5	81,3
В	73,7	67,9	82,6
С	75,7	69,9	81,0
7 варіант	ВМІСТ сухої речовини, %		
А	9,8	12,1	11,7
В	10,2	12,5	9,8
С	9,9	12,9	10,7
8 варіант	Загальний цукор, %		
А	7,5	8,4	9,5
В	7,3	8,9	9,1
С	7.9	8,2	9,3
9 варіант	Сахароза, %		
А	5,7	4.9	6,2
В	5,9	4,6	6,3
С	5,4	4,0	6,7
10 варіант	Вітамін С, %		

A	8,4	9,2	7,5
B	8,1	9,3	7,9
C	8,3	9,5	1,0

***Запитання для самоперевірк*и**

1. У яких випадках використовують двофакторний дисперсійний аналіз?
2. Які результати виводяться при використанні засобу ***Двухфакторный дисперсионный анализ?***
3. На основі яких даних робиться висновок щодо статистичної значущості впливу факторних ознак, що вивчаються, на результативну ознаку?
4. Як оцінити, яка із факторних ознак має більш сильний вплив?
5. Якураховується рівень надійності при застосуванні інструменту аналізу ***Двухфакторный дисперсионный анализ без повторений?***
6. Чи можна засобами дисперсійного аналізу вивчати вплив тільки кількісних, або тільки якісних факторних ознак?
7. Як оцінити вплив випадкових чинників на результативну ознаку?
8. Що розуміють під "впливом випадкових чинників" ?

1.9.Побудова двовимірної лінійної математичної моделі за методом найменших квадратів

1.9.1.Оцінка наявності і тісноти лінійної залежності між двома змінними

Однією з найбільш розповсюджених задач наукових досліджень є задачі, пов’язані з вивченням статистичних залежностей між двома і більше випадковими величинами.

Залежність між двома змінними величинами, при якій значенню однієї змінної величини відповідає одне значення другої, називається функціональною. Функціональна залежність між двома величинами зустрічається дуже рідко. Найчастіше між величинами існує так звана статистична залежність, при якій кожному значенню однієї із випадкових величин відповідає закон розподілу другої.

Статистична залежність випадкових величин, при якій досліджується вплив зміни однієї із величин на середнє значення другої називається *кореляційною.*

Кореляційну залежність *У* від *Х* виражає рівняння регресії *У* на *Х,* що задається у вигляді $\overline{\mathrm{y}}(\mathrm{x}) = \varphi(\mathrm{x})$.

Першою задачею кореляційного аналізу є з'ясування форми кореляційної залежності, тобто вигляду функції регресії $\varphi(\mathrm{x})$. Якщо функція $\varphi(\mathrm{x})$ – лінійна, то кореляцію називають лінійною. Інакше кореляція називається нелінійною.

Вищезгадана задача розв'язується шляхом побудови за вибірковими даними емпіричної функції регресії, яку підбирають так, щоб вона якомога краще відображала характерні особливості статистичних даних. Практично ця задача збігається з задачею підбору емпіричних формул за експериментальними даними і найчастіше розв'язується методом найменших квадратів.

Друга задача кореляційного аналізу полягає в тому, щоб оцінити, наскільки тісною (сильною) є кореляційна залежність між випадковими величинами.

Сила кореляційного зв'язку *У* від *Х* оцінюється за величиною розсіювання значень *У* навколо умовного середнього $\overline{\mathrm{y}}(\mathrm{x})$. Значне розсіювання свідчить про слабку залежність *У* від *Х* або навіть про відсутність такої залежності. Мале розсіювання говорить про існування сильної залежності *У* від *Х.*

Основними характеристиками, що описують силу зв'язку між складовими *Х* і *У* двовимірної випадкової величини (*Х, У)* є кореляційний момент (або коваріація),

$$\mu_{xy} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}, \tag{1}$$

де $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{xy}$ - середні значення випадкових величин *x* та *y* та їх добутку;

і коефіцієнт кореляції

$$r_{x,y} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad (2)$$

де σ_x, σ_y – середні квадратичні відхилення величин *X* та *У*.

Коефіцієнт парної кореляції є безрозмірною величиною, не залежить від вибору одиниць вимірювання величин, що спостерігаються і має такі властивості:

1. Коефіцієнт парної кореляції за модулем менше або дорівнює одиниці, $|r| \le 1$. А саме $-1 \le r \le 1$.
2. Якщо коефіцієнт парної кореляції дорівнює одиниці, то вибіркові значення ознак *X* та *У* зв'язані лінійною функціональною залежністю.
3. Якщо коефіцієнт парної кореляції дорівнює нулю, то вибіркові значення ознак *X* та *У* не зв'язані лінійною кореляційною залежністю.
4. При зростанні абсолютної величини коефіцієнта парної кореляції, лінійна кореляційна залежність між *X* та *У* стає більш тісною, а при зменшенні – зв'язок слабкий.

	0	зв'язок відсутній
0,1	0,29	слабкий
0,3	0,49	помірний
0,5	0,69	значний
0,7	0,89	високий
0,9	0,99	дуже високий
	1	зв'язок функціональний

Якщо коефіцієнт кореляції статистично значущий, то між змінними існує лінійний зв'язок. Якщо коефіцієнт кореляції більше нуля, то зв'язок між змінними прямий, якщо менше нуля, то зв'язок обернений. Якщо коефіцієнт кореляції статистично незначущий, або дорівнює нулю, то дві випадкові величини Х і У не пов'язані лінійною залежністю. Але це не означає, що між випадковими величинами взагалі немає кореляційного зв'язку. Це означає, що між змінними може існувати нелінійний зв'язок.

Статистичну значущість коефіцієнта парної кореляції визначають за допомогою критерію Стьюдента. При цьому перевіряють нульову гіпотезу про рівність коефіцієнта кореляції нулю.

Розрахункове значення *t* – критерію, власне *t* - розрахункове $t_{розр}$ обчислюють за формулою:

$$t_{розр} = \frac{r\sqrt{(n-2)}}{\sqrt{1-r^2}} , \qquad (3)$$

де *r*- значення коефіцієнта парної кореляції;

n- кількість спостережень.

Розрахункове значення *t* критерію Стьюдента порівнюють з табличним (критичним) значенням, визначеним на деякому рівні значущості α (найчастіше α приймають рівним 0,05) та з *n*-2 степенями свободи. Якщо розрахункове значення *t* критерію більше табличного, то прийнята нульова гіпотеза про рівність коефіцієнта кореляції нулю відхиляється, у протилежному випадку приймається.

Коефіцієнт кореляції, обчислений за даними вибірки, називається вибірковим і позначається $r_в$. Вибірковий коефіцієнт кореляції є оцінкою коефіцієнта кореляції генеральної сукупності. Коефіцієнт кореляції генеральної сукупності знаходиться в межах довірчого інтервалу.

Половину ширини довірчого інтервалу для коефіцієнта кореляції визначають за формулою:

$$\delta = \frac{t_{розр}(1-r_в^{\,2})}{\sqrt{n}}, \qquad (4)$$

де n- число спостережень,

$r_в$ - вибірковий коефіцієнт кореляції;

$t_{розр}$ – розрахункове значення t- критерію Стьюдента.

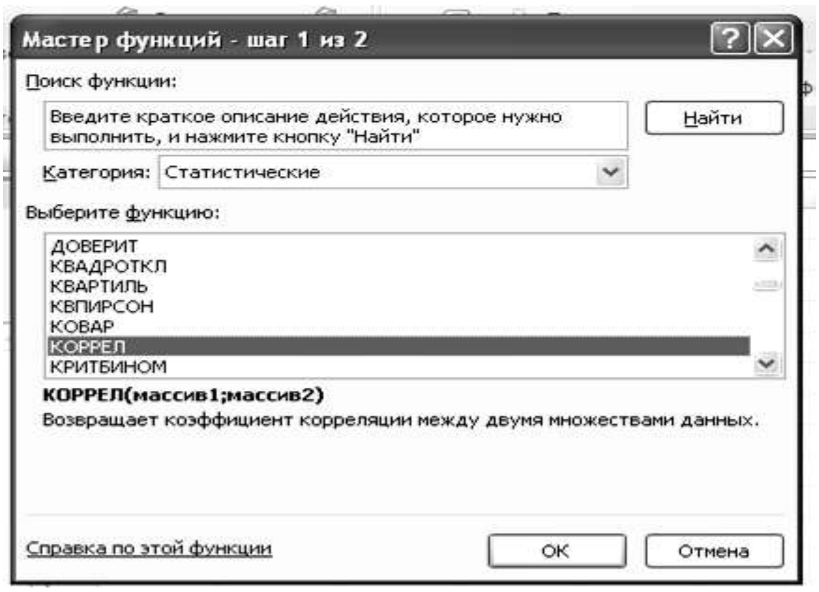
Межі коефіцієнту кореляції генеральної сукупності визначаються за допомогою подвійної нерівності

$$r_в - \delta \leq r_в \leq r_в + \delta \qquad (5)$$

Застосування засобів MS Excel для знаходження коефіцієнтів парної кореляції

Коефіцієнт кореляції знаходять за допомогою вбудованої функції **КОРРЕЛ.** Для цього виконують такі дії:

- виокремлюють комірку, в якій буде знаходитись результат обчислення $r_в$;
- на панелі інструментів в меню **Вставка→Функция** у полі **Категория** вибирають **Статистические**;
- у полі **Функция** обирають **КОРРЕЛ**;
- натискають кнопку **ОК** (див. рис.)**;**



- у діалоговому вікні, що з'явиться, у рядку **Массив 1** записують діапазон комірок однієї змінної, а у рядку **Массив 2** - діапазон комірок другої, або виокремлюють діапазон комірок зі змінними безпосередньо у таблиці;

- натискають кнопку **ОК.**

Для визначення значущості отриманого коефіцієнта кореляції обчислюють значення *t* критерію Стьюдента – розрахункове та критичне (табличне).

Табличне (критичне) значення критерію обчислюють за допомогою вбудованої функції MS Excel **СТЬЮДРАСПОБР** категорії **Статистические,** аргументами якої є рівень значущості (α=0,05) і число степенів свободи *n*-2.

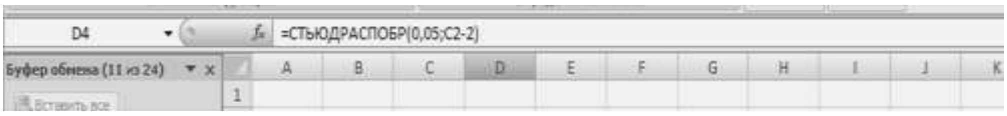
Число ступенів свободи визначають, попередньо визначивши число спостережень. З цією метою використовують функцію **СЧЕТ** категорії **Статистические**. Для цього виконують такі дії:

- активізують комірку, в якій буде знаходитись результат;
- на панелі інструментів в меню **Вставка→Функція** у полі **Категория** вибирають **Статистические**;
- у полі **Функция** обирають **СЧЕТ**;
- у діалоговому вікні, що з'явиться виокремлюють діапазон комірок з даними;
- натискають кнопку **ОК**;
- у відповідній комірці з'явиться значення, що відповідає числу спостережень *n*.

Для знаходження значення табличного (критичного) значення *t* критерію Стьюдента виконують наступне:

- активізують комірку, в якій буде знаходитись результат;
- на панелі інструментів в меню **Вставка→Функція** у полі **Категория** вибирають **Статистические**;
- у полі **Функция** обирають **СТЬЮДРАСПОБР**;
- у діалоговому вікні, що з'явиться у рядок **Вероятность** вводять число, що дорівнює рівню значущості 0,05;

- у рядок **Степень_свободы** вводять адресу комірки, в якій знаходиться значення числа спостережень і від нього віднімають 2;



- натискають кнопку **ОК**;
- у відповідній комірці з’явиться значення, що відповідає табличному (критичному) значенню *t* критерію Стьюдента.

Розрахункове значення *t* критерію Стьюдента обчислюють безпосередньо за формулою (3). Для цього виконують наступні дії:

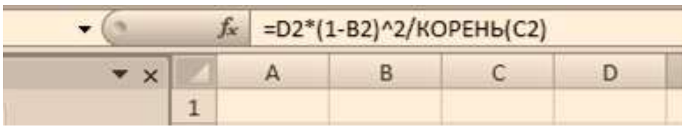
- виокремлюють комірку, в якій буде знаходитись результат;
- з клавіатури вводять знак =;
- перемикають клавіатуру на латинську розкладку;
- вводять необхідну формулу у вигляді

- натискують клавішу Enter;
- у відповідному вікні з’явиться результат.

Порівнюємо отримані розрахункове та критичне (табличне) значення *t* критерію Стьюдента. Робимо висновок про статистичну значущість отриманого коефіцієнту кореляції.

Якщо коефіцієнт кореляції виявився статистично значущим, то визначають величину довірчого інтервалу за формулою (4). Для цього виконують наступне:

- виокремлюють комірку, в якій буде знаходитись результат;
- з клавіатури вводять знак =;
- перемикають клавіатуру на латинську розкладку;
- вводять необхідну формулу у вигляді



- натискують клавішу Enter;
- у відповідному вікні з'явиться результат.

Визначають межі коефіцієнта кореляції за формулою (5). Для визначення нижньої межі: від значення коефіцієнту кореляції $r_в$ віднімають значення δ. Для визначення верхньої межі: до значення коефіцієнту кореляції $r_в$ додають значення δ.

1.9.2.Визначення параметрів і похибки моделі

Після встановлення наявності та оцінки тісноти лінійного зв'язку між змінними, переходять до побудови математичної моделі. Задача моделювання полягає в тому, щоб припускаючи лінійну залежність між змінними X і Y, одержати найкращу регресійну пряму у вигляді рівняння

$$Y = ax + b \qquad (1)$$

Для визначення параметрів a і b лінійної залежності досліджують вираз D:

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - Y_i)^2}{n} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{y_i - a \cdot x_i - b)^2}{n}, \qquad (2)$$

де Y_i і y_i - теоретичні (обчислені за формулою (1)) і дослідні значення. Вираз (2) являє собою дисперсію відхилень дослідних значень y відносно теоретичних значень Y. Коефіцієнти a і b потрібно підібрати таким чином, щоб вираз D (2) мав мінімальне значення. З математики відомо, що для цього потрібно прирівняти до нуля частинні похідні:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial b} = 0. \qquad (3)$$

Знайшовши похідні, одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими a і b:

$$\begin{cases} b + a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{y_i}{n} \\ b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{n} + a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{n} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \dfrac{y_i}{n} \end{cases} \qquad (4)$$

або

$$\begin{cases} b + a\overline{x} = \overline{y}, \\ b\overline{x} + a\overline{x^2} = \overline{xy}, \end{cases} \qquad (5)$$

де

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \ \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \ \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}, \ \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} \ . \qquad (6)$$

Система рівнянь (5) називається нормальною і у підручниках записується у вигляді

$$\begin{cases} b \cdot n + a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}, \qquad (7)$$

яка виводиться з умови мінімуму виразу

$$L = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - Y_i\right)^2 \qquad (8)$$

або множення системи (4) на n.

Знайдемо розв'язки системи (5) методом підстановки. З першого рівняння визначимо *b* і підставимо у друге, після чого визначимо *a*. В результаті одержимо:

$$b = \overline{y} - a\overline{x},$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} - a\overline{x}^2 + a\overline{x^2} = \overline{x} \cdot \overline{y},$$

$$a\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right) = \overline{xy} - \overline{xy},$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = R_{yx},$$

$$b = \overline{y} - \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \cdot \overline{x} = \overline{y} - R_{yx} \cdot \overline{x} .$$

1.9.3.Визначення параметрів двовимірної лінійної моделі за допомогою вбудованої функції ЛИНЕЙН

Функція **ЛИНЕЙН** категорії ***Статистические*** дозволяє за методом найменших квадратів визначити параметри лінійної моделі, яка найкращим чином апроксимує експериментальні дані. Функція повертає масив значень, який характеризує теоретичну прямолінійну залежність.

Синтаксис функції: ЛИНЕЙН (известные_значения_у; известные_значения_х; конст; статистика),

де ***известные_значения*_у** - діапазон комірок зі значеннями результативної ознаки;

известные_значения х - діапазон комірок зі значеннями факторної ознаки;

конст - логічне значення, яке вказує на наявність у лінійної моделі вільного члена. Якщо ***конст*** має значення ***ИСТИНА,*** або значення не вказується, то модель матиме вигляд: Y=a+bX, якщо ***конст*** має значення ***ЛОЖЬ,*** то модель матиме вигляд Y=bX.

статистика - логічне значення, яке вказує, чи треба виводити додаткові статистичні показники. Якщо аргумент статистика має значення ***ИСТИНА,*** то функція ***ЛИНЕЙН*** повертає додаткову регресійну статистику; якщо аргумент статистика має значення ***ЛОЖЬ,*** то виводяться лише коефіцієнти рівняння.

Додаткова регресійна статистика включає:

se_1 - стандартне значення похибки оцінки коефіцієнта *b*;

se_2 - стандартне значення похибки оцінки коефіцієнта *a* - вільного члена;

r^2 - коефіцієнт детермінації;

se_y - стандартна похибка оцінки Y;

F - *F-статистика* - розрахункове значення критерію Фішера;

df - число степенів свободи;

$ss_{регр}$ - регресійна сума квадратів;

$ss_{зал}$, - залишкова сума квадратів.

m_1	a
se_1	se_2
r^2	se_v
F	df

$SS_{регр}$	$SS_{зал}$

Для застосування функції **ЛИНЕЙН** виконують дії:

- на вільному місці аркуша виокремлюють прямокутний діапазон комірок, який складається із двох стовпчиків і п'яти рядків для виведення результатів розрахунку;
- вводять знак "=" (дорівнює);
- **виконують дії: Вставка=> Функция :=>Статистические ЛИНЕЙН**;
  - заповнюють поля діалогового вікна, що відкриється:

- у поле ***известные значения* у** вводять діапазон комірок зі значеннями результативної ознаки;
- у поле ***известные значения* х** - діапазон комірок зі значеннями факторної ознаки;
- у поле ***конст*** вводять логічне значення ***ИСТИНА*** (або ***1);***
- у поле ***статистика*** - логічне значення ***ИСТИНА*** (або ***1);***
- натискують клавішу F2, щоб вивести масив значень;
- натискують одночасно клавіші Ctrl + Shift + Enter;
- після цього діапазон комірок 2x5 буде заповнено значеннями згідно наведеної таблички;
- якщо, в результаті виконання зазначених дій, буде виведене одне число, треба впевнитися, що необхідний діапазон комірок виокремлено, якщо - ні, то виокремити його;
- ще раз натискають клавішу F2, щоб вивести масив значень;
- натискують одночасно клавіші Ctrl + Shift + Enter.

У результаті виконання зазначених дій буде виведено масив значень, який містить параметри моделі і оцінку їх точності.

1.9.4.Перевірка правильності визначення параметрів моделі і *побудова графічної залежності*

Для перевірки правильності визначення параметрів рівняння, яке б описувало дану залежність, засобами Excel виконують дії:

будують точковий графік на основі двох рядів спостережень (x_i, y_i), між якими планується визначити функціональну залежність:

- виокремлюють ряди спостережень;
- **виконують дії Вставка => Диаграмма**;
- у діалоговому вікні, що відкриється, на закладці ***Стандартная*** вибирають ***Точечная,*** у ***полі Вид*** вибирають ***Точечная диаграмма позволяет сравнивать пары значений,*** натискують кнопку Далее;
- продовжують побудову графічної залежності, як описано в попередніх лабораторних роботах;

виокремлюють побудований графік (один раз клацають лівою клавішею миші по одній з точок графіка);

клацають правою клавішею миші по графіку, викликаючи контекстне меню;

у контекстному меню вибирають пункт **Добавить линию тренда**;

або виконують дії: меню ***Диаграммам /Добавить линию тренда;***

у діалоговому вікні**,** що відкриється, на закладці ***Тип*** вибирають запропоновану лінійну залежність, якою планується апроксимувати експериментальні точки;

▪ на закладці **Параметри** відмічають пункт **показывать уравнение на диаграме і поместить на диаграмму величину достоверности апроксимации**;

натискують кнопку **ОК**;

▪ на графіку з'явиться апроксимуюча лінія з рівнянням, за яким вона побудована.

За величиною коефіцієнта детермінації R^2 (квадрат коефіцієнта кореляції) оцінюють якість одержаної моделі. Чим більше коефіцієнт R^2 наближається до одиниці, тим краще математична залежність описує експериментальні дані. Якщо, наприклад, R^z=0,9144, то, у випадку лінійної залежності, 91,44% дисперсії результативної ознаки обумовлено впливом факторної ознаки, що досліджується, а решта - впливом випадкових чинників.

Для обчислення похибки моделі використовують вбудовану функцію **СТОШУХ** категорії ***Статистические,*** аргументами якої є діапазон комірок зі значеннями результативної ознаки $y_{i:}$ і діапазон комірок зі значеннями факторної ознаки x_t.

Практична робота №9. Побудова двовимірної лінійної математичної моделі за методом найменших квадратів

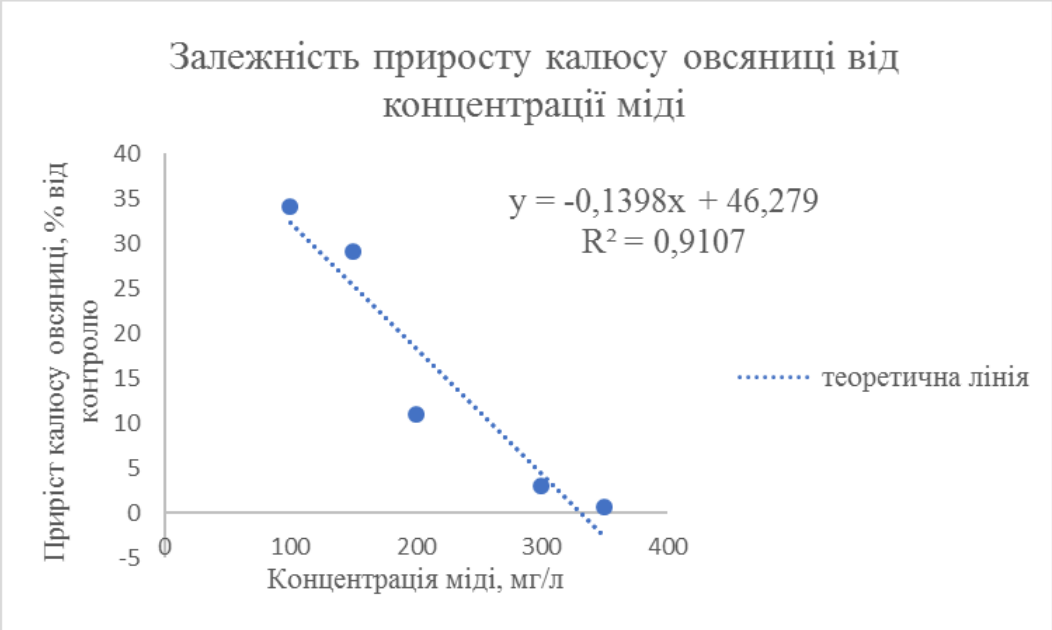
Мета роботи: отримання практичних навичок побудови двовимірної лінійної математичної моделі за методом найменших квадратів засобами MS Excel

Програма виконання роботи

1. Завантажити табличний процесор Excel.
2. Використати дані двох стовпчиків із табл. до завдання, причому в якості факторної ознаки взяти концентрацію міді, а в якості результативної – один з показників.
3. Установити наявність та оцінити тісноту лінійного зв'язку між вибраними показниками за допомогою коефіцієнта кореляції.
4. Перевірити статистичну значущість одержаного коефіцієнта кореляції.
5. Визначити параметри моделі і додаткову регресійну статистику за допомогою функції ЛИНЕЙН.
6. Перевірити правильність розрахунків за допомогою засобу Добавить линию тренда.
7. Знайти похибку моделі за допомогою функції **СТОШУХ.**
8. Порівняти одержані результати.
9. Зберегти документ в особистій папці.

№ з/п	Концентрація міді, мг/л	Приріст калюсу польовиці, % від контролю	Приріст калюсу овсяниці, % від контролю	Утворення ембріогенного калюсу польовиці, % від контролю	Утворення ембріогенного калюсу овсяниці, % від контролю

1	100	61	34	33	21
2	150	37	29	21	18
3	200	20	11	6	5
4	300	4	3	2,5	2,5
5	350	1,2	0,6	0,5	0,9



1.10.Виявлення наявності і оцінка тісноти статистичної залежності між змінними та робота з формулами масивів

Залежність випадкових величин, при якій кожному значенню однієї із них відповідає закон розподілу другої, тобто зміна однієї із величин спричиняє змінювання розподілу значення другої, називається *статистичною.* Статистична залежність випадкових величин, при якій досліджується вплив зміни однієї із величин на середнє значення другої називається *кореляційною.* Наприклад, кореляційною є залежність середніх значень гематологічних і біохімічних показників периферичної крові свиней від терміну, який пройшов від часу введення препарату, що на ці показники впливає.

Одним із показників, що дозволяє встановити наявність лінійної залежності між двома змінними і оцінити її тісноту, є *коефіцієнт парної кореляції*.

Коефіцієнт парної кореляції $r_{x,y}$ двох величин X і Y визначається за формулою:

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}\ ) \cdot (Y_i - \overline{Y}\ )}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}}, \qquad (1)$$

де X_i, Y_i – змінні, зв'язок між якими вивчається;
$\overline{X}, \overline{Y}$ – середні значення змінних, що вивчаються;
n – кількість спостережень.

Модуль коефіцієнта парної кореляції не перевищує одиниці, тобто $\left|r_{x,y}\right| \le 1$, що еквівалентне подвійній нерівності: $-1 \le r_{x,y} \le 1$. Якщо коефіцієнт кореляції статистично значущий, то між змінними існує лінійний зв'язок. Якщо $r_{x,y}$ >0, то зв'язок між змінними прямий, якщо – $r_{x,y}$ <0, то зв'язок обернений. Якщо коефіцієнт кореляції статистично незначущий, або дорівнює нулю, то дві випадкові величини X і Y не мають лінійної залежні, але можуть мати нелінійну.

Статистичну значущість коефіцієнта парної кореляції визначають за допомогою критерію Стьюдента.

Розрахункове значення критерію $t_{розр}$ обчислюють за формулою:

$$t_{розр} = \frac{r_{x,y}\sqrt{(n-2)}}{\sqrt{1 - r_{x,y}{}^2}}, \qquad (2)$$

де $r_{x,y}$ – значення коефіцієнта парної кореляції;
n – кількість спостережень.

Розрахункове абсолютне значення критерію Стьюдента порівнюють з табличним (критичним) значенням. Якщо розрахункове значення критерію більше табличного, то прийнята нульова гіпотеза про рівність коефіцієнта кореляції нулю відхиляється, тобто величина коефіцієнта кореляції є статистично значущою.

Табличне (критичне) значення критерію обчислюється за допомогою вбудованої функції MS Excel **СТЬЮДРАСПОБР** категорії **Статистические,** аргументами якої є рівень значущості ($\alpha = 0{,}05$) і число ступенів свободи (f=(n-2)).

Вбудовані формули масивів MS Excel для роботи з даними

Для спрощення складних розрахунків використовують вбудовані формули масивів MS Excel, виконуючи дії: **Вставка ⇒Функція⇒ Математические**. За формулою масиву одночасно може виконуватися декілька видів обчислень, результатом яких може бути одне значення, або масив значень. Формула масиву обробляє декілька наборів значень, які називаються аргументами масиву. Кожний аргумент масиву повинен включати однакове число стовпчиків і рядків. Аргументи відділяються “;”.

Д о формул масиву відносяться:

СУММКВРАЗН(массив_x;массив_y) **– сума квадратів різниці відповідних значень двох масивів.**

СУММПРОИЗВ(массив_x;массив_y) – **сума добутків відповідних елементів двох масивів.**

Вбудовані функції MS Excel для визначення кореляційних характеристик

Вбудовані функції MS Excel для визначення кореляційних характеристик згруповані в категорії **Статистические**.

Коефіцієнт кореляції обчислюється однією із двох вбудованих функції: **КОРРЕЛ** або **ПИРСОН** аргументами яких є діапазони комірок з вхідними даними.

Практична робота №10. Виявлення наявності і оцінка тісноти статистичної залежності між змінними та робота з формулами масивів

Мета роботи: отримання практичних навичок побудови двовимірної лінійної математичної моделі за методом найменших квадратів засобами MS Excel

Програма виконання

1. Завантажити табличний процесор MS Excel.
2. Ввести дані із завдання табл. значення одного із показників (Y) і стовпчика “Доба спостережень”(X).
3. Обчислити середнє значення рядів спостережень за допомогою відповідної вбудованої функції.
4. Доповнити таблицю такими стовпчиками:

Загальний білок, г/л (Y_i)	Доба спостережень (X_i)	Y_c	Y_i - Y_c	X_c	X_i-X_c

де Y_c, X_c – середні значення показників.

5. Заповнити таблицю значеннями, використовуючи відносні і абсолютні посилання на адреси комірок з даними.
6. За допомогою формул масивів **СУММПРОИЗВ** і **СУММКВРАЗН** обчислити складові формули (1).
7. Обчислити коефіцієнт парної кореляції за формулою (1), використовуючи обчислені значення складових.
8. Перевірити правильність розрахунків, використовуючи вбудовану функцію **КОРРЕЛ** або **ПИРСОН**.
9. Обчислити розрахункове значення критерію Стьюдента за формулою (2).
10. Обчислити критичне (табличне) значення критерію Стьюдента за допомогою вбудованої функції **СТЬЮДРАСПОБР**.

11. У вільну комірку ввести формулу для порівняння розрахункового і критичного значень критерію за допомогою вбудованої логічної функції **ЕСЛИ** так, щоб у випадку підтвердження значущості коефіцієнта кореляції було виведено надпис “Значущий!”, а в протилежному разі – ”Не значущий”.
12. Зробити висновки щодо наявності і тісноти лінійного зв’язку між змінними.

<u>Завдання</u>

Залежність показників крові свиней від часу

Динаміка біохімічних показників сироватки крові свиней після застосування модифікованого ізотонічного розчину							
№ п.п.	Доба спостережень (X_i)	Назва показників (Y_i)					
		загальний білок, г/л	альбумін, %	глобулін, %	α-глобулін, %	β-глобулін, %	γ- глобулін, %
1	5	52,9	48,4	51,58	24,21	15,12	12,25
2	14	53,7	47,6	52,4	24,86	15,2	12,34
3	30	56,9	47,4	52,6	21,56	16,4	14,64
4	60	63,4	48,5	51,48	19,88	16,8	14,8
5	90	69,1	41,55	58,45	21,16	16,1	21,19
6	150	72,1	41,51	58,49	20,9	16,2	21,3
7	270	76	41,18	58,82	19,85	16,82	22,16

<u>Запитання для самоперевірки</u>

1. Який зв’язок між змінними називають кореляційним?
2. Які характеристики застосовують для встановлення наявності кореляційного зв'язку між двома випадковими величинами?
3. Про що свідчать величина і знак коефіцієнта парної кореляції?
4. Як перевіряється статистична значущість коефіцієнта парної кореляції?

5. Які вбудовані функції застосовуються для визначення коефіцієнта кореляції?
6. Для чого застосовують формули масивів?
7. Що використовують в якості аргументів формул масивів?

*1.11.*Використання формул масивів в MS Excel

Одна з найбільш цікавих та потужних можливостей в Excel – використання масивів у формулах.

Масив – це набір елементів, що може оброблятися як єдина група або кожен окремо. В Excel масиви можуть бути *одно*- або *двовимірними*. Виміри масивів безпосередньо відповідають рядкам та стовпчикам таблиці Excel. Наприклад, одновимірний масив може бути групою комірок, розміщених у одному рядку (горизонтальний масив) або у одному стовпчику (вертикальний масив). Двовимірний масив розміщується у декількох рядках та стовпчиках. Тривимірні масиви Excel не підтримує.

Робота з формулами масивів

Введення формули масиву

Для введення формули масиву у комірку або у діапазон комірок виконують певну процедуру, яка дозволяє програмним засобам Excel ідентифікувати введений вираз, як формулу масиву, на відміну від звичайної формули. А саме, закінчення набору формули обов'язково супроводжується одночасним натисканням комбінації клавіш **Ctrl+Shift+Enter**, після чого система автоматично розміщує формулу у фігурних дужках.

Виокремлення масиву

Виокремлення діапазону комірок, в якому розміщено масив, виконують одним із способів:

розміщують курсор в одній із комірок масиву;

виконують дії: **Правка⇒Перейти**, або натискають клавішу **F5**;

у діалоговому вікні **Переход**, що відкриється, натискають кнопку **Выделить**;

у наступному діалоговому вікні **Выделение группы ячеек** вибирають перемикач **Текущий массив**;

натискають кнопку **ОК**, щоб закрити діалогове вікно;

або:

розміщують курсор в одній із комірок масиву;

натискають комбінацію клавіш **Ctrl+/**.

Редагування формули масиву

Якщо формула масиву знаходиться у декількох комірках, редагування здійснюють в усіх комірках діапазону як в одній.

При редагуванні формул масивів дотримуються таких правил:

не можна змінювати вміст жодної з комірок, значення яких одержано шляхом розрахунків за формулою масиву – при спробі це зробити, Excel видасть повідомлення "**Нельзя изменить часть массива"**;

не можна переміщувати значення окремих комірок, на які розповсюджується формула масиву (переміщують всі комірки з формулою масиву разом);

не можна вилучати окремі комірки, на які розповсюджується формула масиву (вилучають лише весь масив повністю);

не можна вставляти нові комірки у масив (це правило відноситься також до вставки нових рядків та стовпчиків).

Щоб відредагувати формулу масиву:

виокремлюють всі комірки масиву;

переводять курсор у рядок формул, або натискають кнопку **F2**;

фігурні дужки при цьому вилучаються;

вносять потрібні зміни у формулу масиву;

після закінчення редагування формули натискають **Ctrl+Shift+Enter**, щоб підтвердити внесення змін.

Після виконання зазначених дій вміст всіх комірок масиву зміниться у відповідності з внесеними змінами.

Використання формули масивів для діапазону комірок

На рис. представлено робочий аркуш документа Excel з розрахунками обсягів продажу добрив. Щоб обчислити вартість продажу кожного виду добрива (значення у стовпчику **D**) зазвичай використовують формулу множення кількості товару (стовпчик **B**) на ціну товару (стовпчик **C**). Наприклад, значення комірки **D2** може бути обчислене за формулою: =**B2*C2**, яка потім розповсюджується на діапазон комірок, що відповідає коміркам зі значеннями аргументів. В даному випадку отримаємо п’ять окремих формул у стовпчику **D**.

Другий спосіб обчислення п’яти значень у стовпчику **D** – використання однієї формули масиву. Ця формула буде розміщена в діапазоні комірок **D2:D6**, результатом розрахунку за якою буде п’ять шуканих значень.

Для створення формули масиву для діапазону комірок виконують дії:

виокремлюють діапазон комірок, в якому повинен знаходитись результат розрахунків за формулою масиву (в даному випадку це – **D2:D6**);

вводять формулу **=B2:B6*C2:C6**;

натискають комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter**.

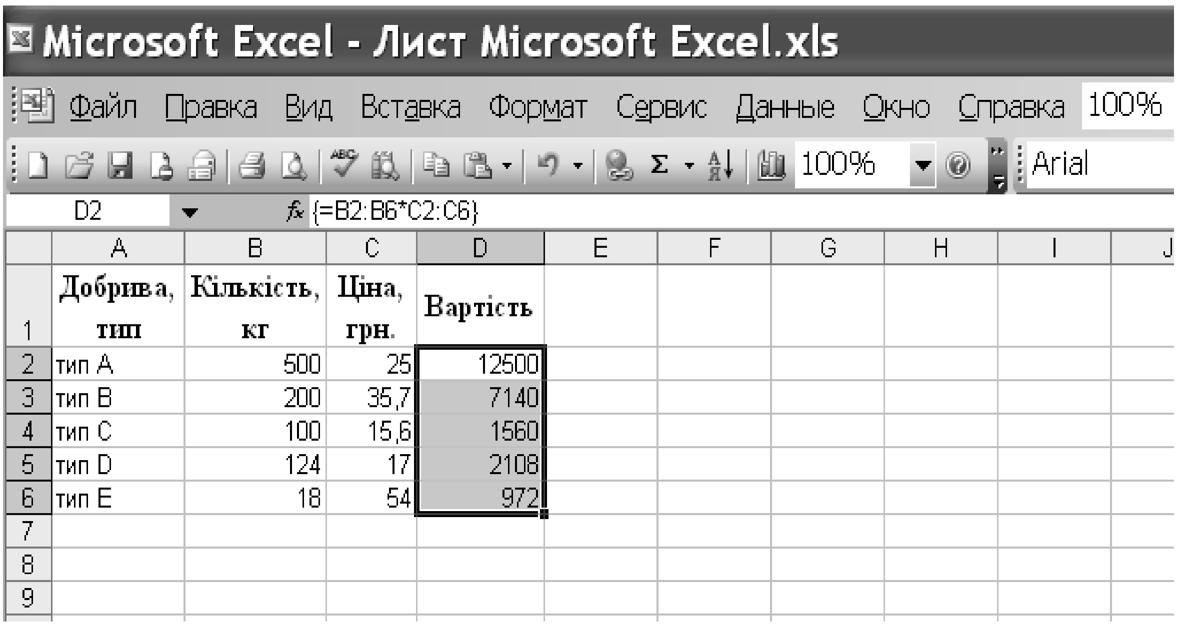


Рис.2. Приклад застосування формули масиву для діапазону комірок

Використання формули масиву у одній комірці

Формули масивів також можуть повертати результат у одну комірку. На рис. у комірку **D8** введено формулу масиву **{=СУММ(B2:B6*C2:C6)}**. Ця формула обчислює загальну суму продажу і дозволяє визначити суму добутків чисел, розташованих у комірках **B2** і **C2**, **B3** і **C3**, ... **B6** і **C6**. Тобто, спочатку знаходяться добутки відповідних пар чисел масиву, а потім ці результати додаються.

Для введення формули масиву у одну комірку виконують дії:

вибирають комірку, в яку буде вводитися формула (клацають по ній мишею);

Вставка⇒Функция;

у діалоговому вікні, що відкриється, у списку **Категория** вибирають **Математические**;

у полі **Выберите функцию** вибирають із списку **СУММ;**

у відповідному діалоговому вікні, що відкриється у рядку **масив** 1 вводять формулу **=B2:B6*C2:C6**;

натискають комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter**.

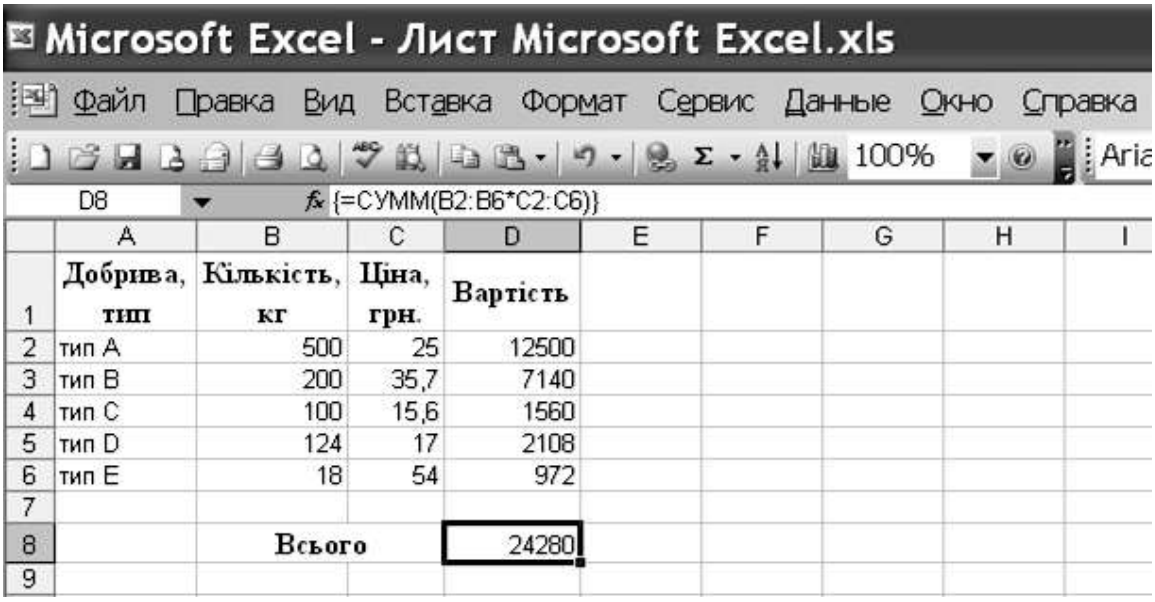


Рис.3. Приклад введення формули масиву у одну комірку

Види формул масивів

Окрім наведених прикладів для роботи з масивами використовують вбудовані функції масивів, що належать до категорії **Математические**:

СУММСУММКВ(массив_x; массив_y) – сума сум квадратів відповідних елементів двох масивів.

Массив_x – діапазон комірок зі значеннями першої змінної, наприклад **A1:A10**;

Массив_y – діапазон комірок зі значеннями другої змінної, наприклад **B1:B10**.

Алгоритм обчислення за даною формулою масиву відбувається у такому порядку:

спочатку обчислюються квадрати значень, що знаходяться у комірках масивів, наприклад, =(A1)^2; =(B1)^2; =(A2)^2; =(B2)^2 ; ...=(A10)^2; =(B10)^2;

визначається сума квадратів пар значень: =(A2)^2 +(B2)^2 ; ... =(A12)^2+(B10)^2;

визначається сума пар сум квадратів: =((A2)^2 +(B2)^2)+... +((A12)^2+(B10)^2).

За формулою масиву **СУММСУММКВ(массив_x; массив_y)** зазначена послідовність розрахунків реалізується одночасно.

Для введення даної формули масиву виконують дії:

вибирають комірку для введення формули (клацають по ній мишею);

Вставка⇒Функция;

у діалоговому вікні, що відкриється, вибирають категорію функцій **Математические**;

із списку вибирають функцію **СУММСУММКВ;**

у діалоговому вікні, що відкриється, у полі **масив x** вказують діапазон комірок зі значеннями першого аргументу, наприклад **A1:A10;**

у рядку **масив y** – діапазон комірок зі значеннями другого аргументу, наприклад **B1:B10**;

натискують комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter**.

СУММКВРАЗН(массив_x;массив_y) – сума квадратів різниці відповідних значень двох масивів.

Алгоритм обчислень за наведеною формулою масиву відбувається у такому порядку:

спершу віднімають відповідні значення, що знаходяться у комірках масивів, наприклад, =A1−B1; =A2−B2; ...=A10−B10;

визначають квадрат різниці відповідних пар значень: =(A2−B2)^2; ... =(A10−B10)^2;

визначають суму квадратів різниці відповідних пар значень: =(A2−B2)^2 +... +(A10−B10)^2).

Окрім розглянутих формул масивів в Excel є ще такі вбудовані функції (формули) масивів:

СУММКВ(массив_x; массив_y) – сума квадратів відповідних елементів двох масивів.

СУММПРОИЗВ(массив_x; массив_y) – сума добутків відповідних елементів двох масивів.

СУММРАЗНКВ(массив_x;массив_y) – сума різниць квадратів відповідних елементів двох масивів.

Введення формул масивів, алгоритм обчислення за ними і виведення результатів розрахунків відбуваються аналогічно наведеним прикладам.

Практична робота №11 Використання формул масивів в MS Excel

Мета роботи: Ознайомитися з особливостями роботи з формулами масивів в Excel, їх призначенням та використанням

Програма виконання

1. Завантажити табличний процесор Excel.
2. Ввести значення двох масивів із завдання.
3. За допомогою формул масивів обчислити добуток двох масивів та знайти їх суму (див. приклади, що відносяться до рис.2, 3).
4. Обчислити суму сум квадратів відповідних елементів наведених масивів.

5. Обчислити суму квадратів різниці відповідних значень двох масивів.
6. Обчислити суму квадратів відповідних елементів двох масивів.
7. Обчислити суму добутків відповідних елементів двох масивів.
8. Обчислити суму різниць квадратів відповідних елементів двох масивів.
9. Зберегти створений документ у власній папці.
10. Завершити роботу з Excel.

Завдання

№ п.п.	**Масив X**	***Масив У***
1	5,4	*21,9*
2	7,3	*20,2*
3	9,8	*19,8*
4	11,4	*18,7*
5	13,5	*17,8*
6	14,2	*17,1*

Запитання для самоперевірки

1. Що називається масивом в Excel?
2. Які види масивів підтримує Excel?
3. Які особливості створення формул масивів?
4. Як відредагувати формулу масиву?
5. Які дії недопустимі при роботі з формулами масивів?
6. Як ввести формулу масиву для виведення результату у одну комірку?
7. Як ввести формулу масиву у діапазон комірок?
8. Які види обчислень замінює формула масиву **СУММСУММКВ**?
9. Які види обчислень замінює введення формули масиву **СУММКВРАЗН**?
10. Які обчислення замінює введення формули масиву **СУММКВ**?

1.12. Застосування формул масивів для виконання дій над матрицями в MS Excel

Основні поняття та визначення

Як відомо з математики, *матрицею називається прямокутна таблиця чисел* (або елементів одного типу), розташованих у рядках і стовпчиках. Числа, що утворюють матрицю, називаються її *елементами*. Елементи матриці позначаються a_{ij}, де індекс i – номер рядка, j – номер стовпчика. Якщо матриця має m рядків та n стовпчиків, то говорять, що вона вимірності $(m\times n)$. Матриця не має числової величини. Це умовний спосіб позначення таблиць з числами. Приклади матриць:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}.$$

Матриця A вимірності (2×2), B – вимірності (3×1).

Матриця, яка складається з *одного* рядка і n стовпчиків або з *одного* стовпчика і n рядків, називається відповідно *матрицею-рядком* або *матрицею-стовпчиком*.

Матриця, число рядків якої дорівнює числу стовпчиків, називається *квадратною матрицею*. Вона має вимірність $(n\times n)$.

З кожною квадратною матрицею A пов’язане число – визначник цієї матриці, який позначається $|A|$ або $\det A$ – детермінант матриці A.

Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо відмінні від нуля лише елементи її головної діагоналі. Діагональна матриця називається *одиничною матрицею E*, якщо всі елементи її головної діагоналі дорівнюють одиниці (інші елементи – нулі), а саме:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ . & . & . & .. & .\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix},\ |E|=1.$$

Дії над матрицями

Сумою двох матриць A та B однакової вимірності називається матриця $C=A+B$ тієї ж вимірності, де кожен елемент c_{ij} матриці C визначається: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Добутком скаляра λ на матрицю A є матриця $C= \lambda A$ тієї ж вимірності, кожен елемент якої є добутком λ на відповідний елемент матриці A.

Добутком матриці A вимірності $(m\times n)$ на матрицю B вимірності $(n\times r)$ називається матриця $C=A\cdot B=(c_{ij})_{m\times r}$ кожен елемент c_{ij} якої є добутком i-ого рядка матриці A на j-ий стовпець матриці B.

Квадратна матриця B називається *оберненою* до деякої матриці A, якщо $AB=BA=E$. Позначення квадратної матриці: $B=A^{-1}$, причому $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Введення матриць за допомогою формул масивів

Як зазначено у попередній лабораторній роботі, масив – це набір елементів, що може оброблятися як єдина група. Саме ця властивість масивів надає можливість їх застосування для виконання дій над матрицями, вважаючи, що введений масив відповідає деякій матриці.

При створенні *матриці-стовпчика* (одновимірного вертикального масиву) дотримуються таких правил:

елементи у одновимірних вертикальних масивах розділяють двокрапкою, наприклад {=10:20:30:40:50:60};

для розміщення вертикального масиву виокремлюють вертикальний діапазон комірок, що відповідає кількості рядків матриці (у нашому прикладі шість суміжних комірок у одному стовпчику);

вводять формулу ={10:20:30:40:50:60};

натискають комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter**.

Приклад введення матриці-стовпчика в середовищі Excel подано на рис.4.

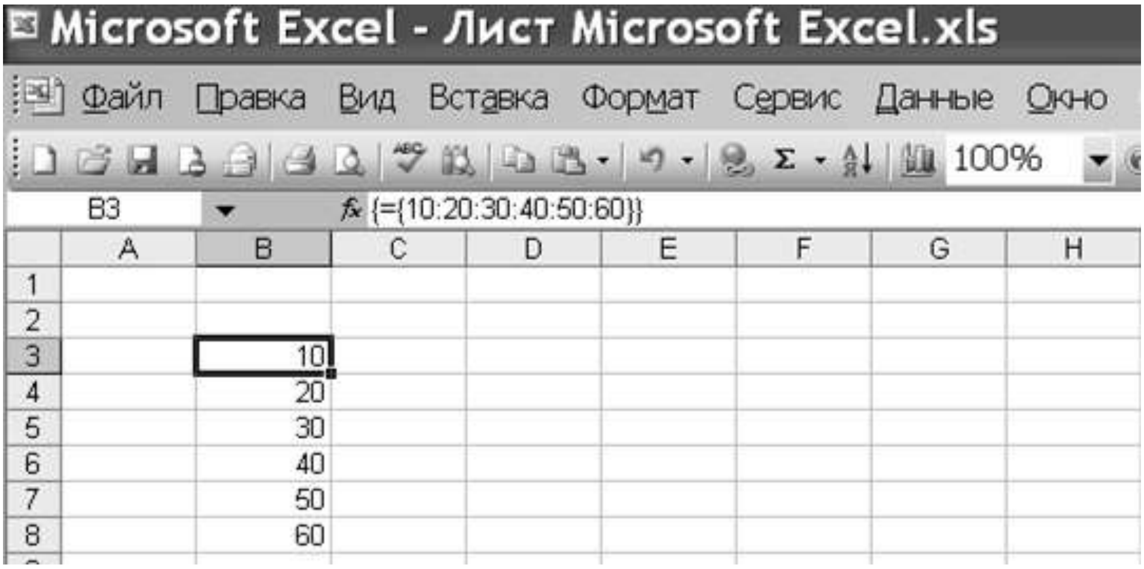


Рис.4. Приклад застосування формули масиву для введення матриці-стовпчика

При створенні *матриці-рядка* (одновимірного горизонтального масиву) виконують дії:

елементи у горизонтальних масивах розділяють крапкою з комою, наприклад: {1;2;3;4;5};

для розміщення горизонтального масиву виокремлюють діапазон горизонтальних комірок, що відповідає кількості стовпчиків матриці (у нашому прикладі п’ять суміжних комірок у одному рядку);

вводять формулу ={1;2;3;4;5};

натискають комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter**.

Приклад введення матриці-рядка за допомогою формули масиву подано на рис. 5.

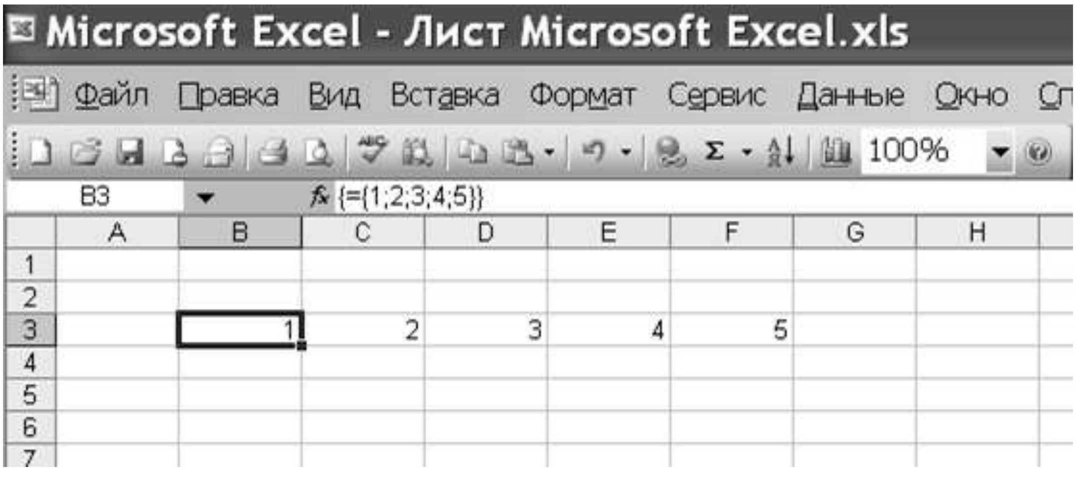


Рис. 5. Приклад введення матриці-рядка за допомогою формули масиву

При створенні <u>*матриці вимірності m×n*</u> (двовимірний масив) крапка з комою застосовується для відокремлення горизонтальних елементів, а двокрапка – для вертикальних. Наприклад, масив, заданий у вигляді {1;2;3;4:5;6;7;8:9;10;11;12}, визначає матрицю вимірністю 3×4. Для введення наведеного масиву виконують такі дії:

виокремлюють діапазон суміжних комірок, розміщений у трьох рядках та чотирьох стовпчиках;

вводять формулу ={1;2;3;4:5;6;7;8:9;10;11;12};

натискають комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter**.

Приклад введення матриці вимірності 3×4 за допомогою формули масиву, наведений на рис. 6.

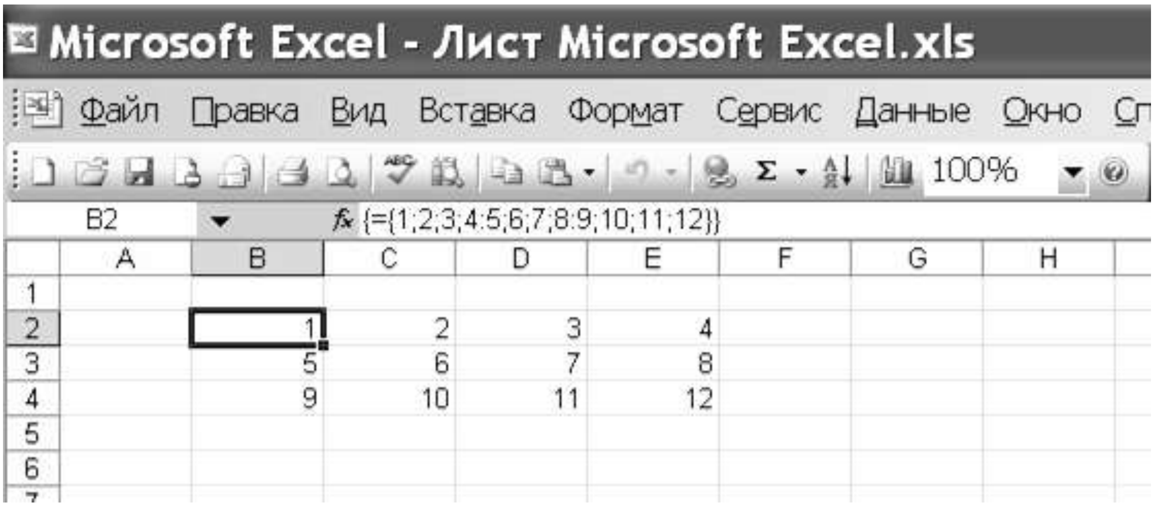


Рис. 6. Приклад введення матриці вимірності 3×4 за допомогою формули масиву

Якщо для введення масиву виокремлюють більше комірок, ніж елементів у масиві, то у незаповнених комірках з'явиться значення помилки **#Н/Д**.

Застосування формул масивів для виконання дій над матрицями

Знаходження суми матриць

Щоб додати матриці однакової вимірності, виконують дії:

вводять матриці однакової вимірності у вигляді масивів або у вигляді діапазонів комірок;

виокремлюють діапазон комірок такої вимірності що і матриці-доданки;

вводять формулу суми відповідних масивів;

натискають комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter**.

На рис. 7 наведено приклад додавання матриць вимірністю 2×2 заданих діапазоном комірок за допомогою формул масивів.

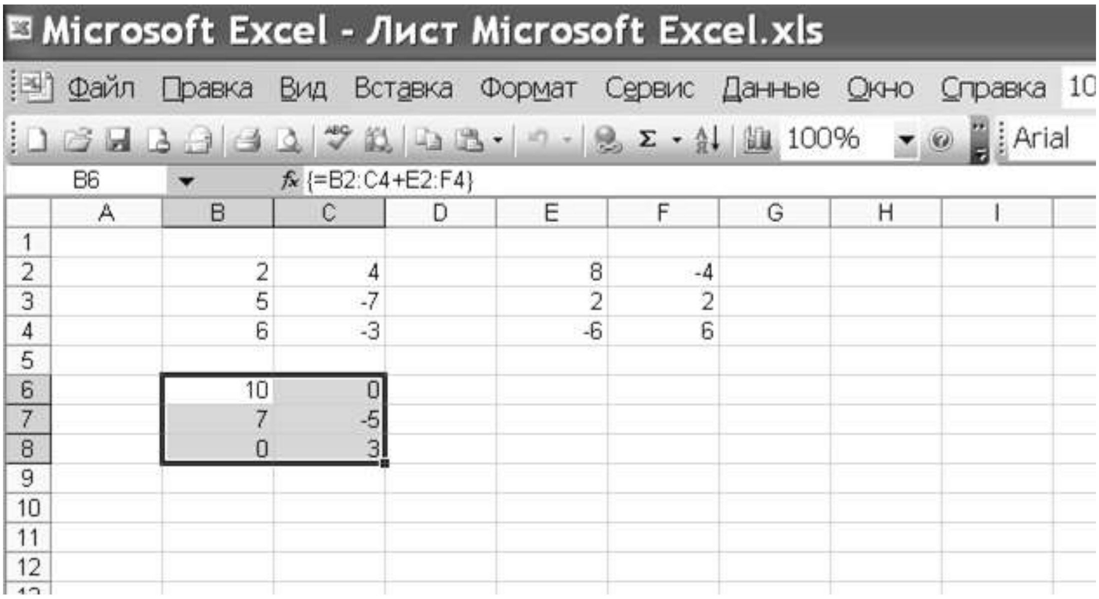


Рис. 7. Приклад додавання матриць (двовимірних масивів)

Знаходження добутку матриць

Для знаходження добутку матриць в Excel застосовують вбудовану функцію **МУМНОЖ** категорії **Математические**. Результатом використання функції є масив (матриця) з такою самою кількістю рядків, як масив (матриця) 1 і з такою ж кількістю стовпчиків, як масив (матриця) 2.

При знаходженні добутку матриць дотримуються таких обмежень:

кількість стовпчиків масиву (матриці) 1 повинна бути такою самою як кількість рядків масиву (матриці) 2;

матриці вводять як формули масивів.

Алгоритм знаходження добутку матриць з використанням вбудованої функції **МУМНОЖ** розглянемо на прикладі:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. A \times D - ?$$

Для знаходження добутку матриць виконують дії:

вводять матрицю (масив) 1, для цього:

виокремлюють діапазон комірок, що відповідає розмірам матриці *A*, наприклад B2:D4 (див. введення двовимірного масиву);

у рядку формул вводять **={1;2;4:3;2;0:−1;4;2}**;

натискають комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter**;

Вводять матрицю (масив) 2:

виокремлюють діапазон комірок, що відповідає розмірам матриці *D*, наприклад F2:F4 (див. введення одновимірного вертикального масиву);

у рядку формул вводять: **={1:2:3}**;

натискають комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter**.

Для знаходження результату добутку двох матриць відповідну формулу вводять як формулу масиву. З цією метою:

виокремлюють діапазон комірок, що відповідає кількості рядків масиву 1 і кількості стовпчиків масиву 2;

переходять у рядок формул;

виконують дії: **Вставка⇒Функция**;

у діалоговому вікні, що відкриється, вибирають категорію функцій **Математические**;

у даній категорії вибирають із списку функцію **МУМНОЖ;**

у відповідному діалоговому вікні, що відкриється, у поле **масив х** вводять діапазон комірок з елементами першої матриці (наприклад, B2:D4)**;**

у поле **масив у** вводять діапазон комірок з елементами другої матриці (наприклад, F2:F4**)**;

натискають комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter**.

або:

вводять =**МУМНОЖ(B2:D4; F2:F4)**;

натискають комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter**.

Результат добутку матриць буде виведений у вигляді масиву (рис. 8).

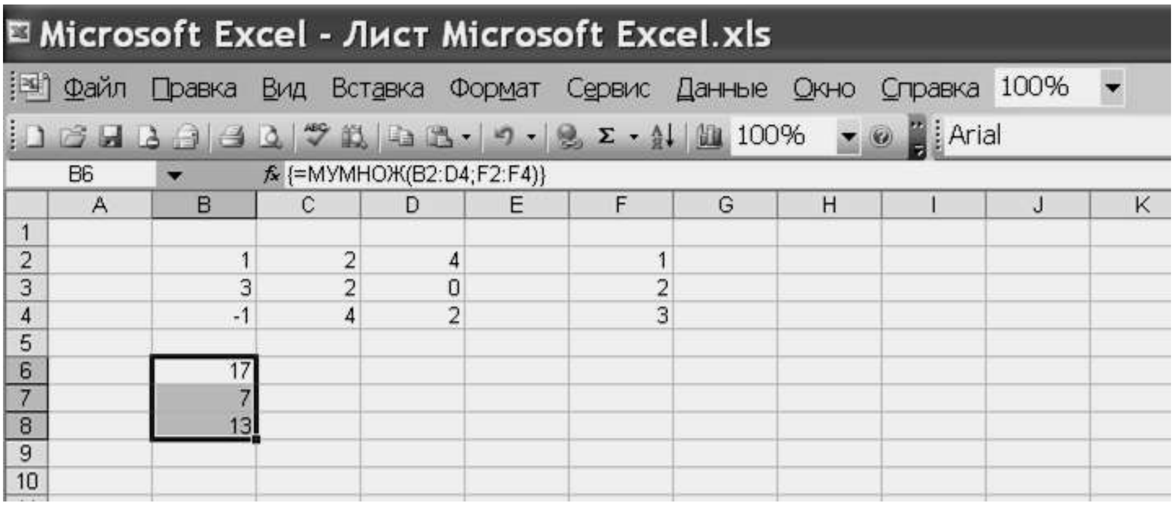


Рис. 8. Приклад знаходження добуту матриць за допомогою формул масиву

Результат множення матриць, наведених у прикладі, відповідає математичному виразу:

$$A \times D = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Знаходження визначника матриці

Для знаходження визначників матриць в Excel існує функція **МОПРЕД** категорії **Математические**. Визначник матриці зазвичай використовується для розв’язання систем рівнянь з кількома невідомими. Для обчислення визначника матриця повинна містити однакову кількість рядків та стовпчиків.

Матриця (масив) може бути задана як інтервал комірок, наприклад A1:C3, або як масив констант, наприклад {1;2;3:4;5;6:7;8;9}.

Функція **МОПРЕД** також повертає значення помилки **#ЗНАЧ!**, якщо масив має неоднакову кількість рядків та стовпчиків.

Для знаходження визначника матриці, що задана діапазоном значень, виконують дії:

активізують комірку для виведення результату обчислень;

виконують дії: **Вставка⇒Функция**;

у діалоговому вікні, що відкриється, вибирають категорію функцій **Математические**;

в даній категорії вибирають із списку функцію **МОПРЕД;**

у відповідному діалоговому вікні, що відкриється, у рядку **масив** вводять відповідну матрицю у вигляді діапазону значень**;**

натискають клавішу **Enter**;

або:

активізують комірку для виведення результату обчислень;

у рядок формул вводять =**МОПРЕД(A1:D4)**;

натискають клавішу **Enter**.

Щоб знайти визначник матриці, що задана як масив, наприклад розміром 3×3 у вигляді ={2;-1;3:1;-2;4:3;-3;0}, виконують такі дії:

активізують комірку для виведення результату обчислень;

виконують дії: **Вставка⇒Функция**;

у діалоговому вікні, що відкриється, вибирають категорію функцій **Математические**;

в даній категорії вибирають із списку функцію **МОПРЕД;**

у відповідному діалоговому вікні, що відкриється, у рядку **масив** вводять відповідну матрицю у вигляді діапазону комірок B2:D4**;**

натискають клавішу **Enter**.

Приклад обчислення визначника матриці за допомогою вбудованої функції **МОПРЕД**, поданий на рис. 9.

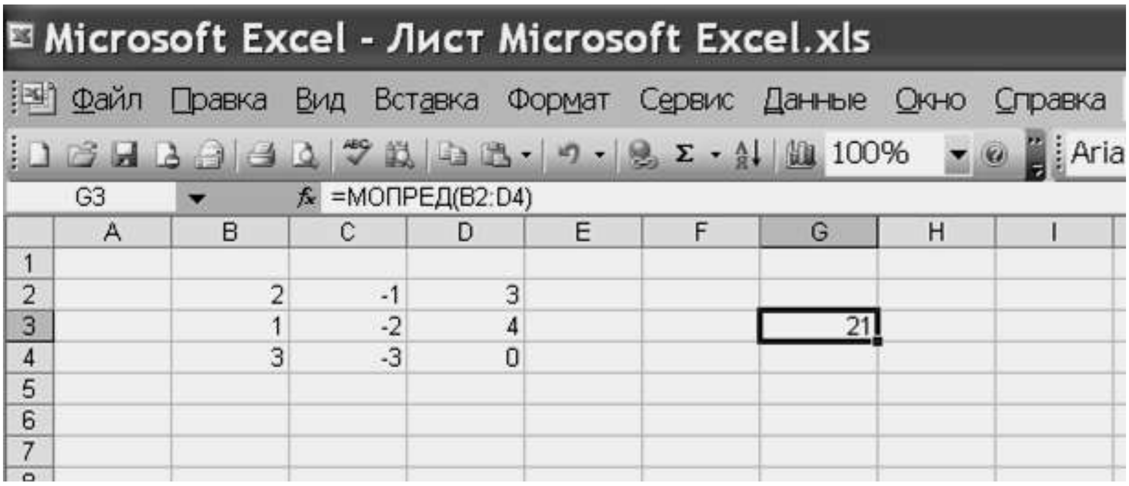


Рис. 9. Приклад застосування функції **МОПРЕД**

Знаходження матриці, оберненої до даної

Для знаходження матриці, оберненої до даної, в Excel існує функція **МОБР** категорії **Математические**. Обернені матриці, як і визначники, зазвичай використовуються для розв'язання систем рівнянь з кількома невідомими.

Матриця (масив) повинна бути задана як числовий масив з однаковою кількістю рядків та стовпчиків. Окрім того, масив може бути заданий як діапазон комірок (наприклад А2:С4) або як масив констант, наприклад {1;2;3:4;5;6:7;8;9}.

Для знаходження матриці, оберненої до даної:

активізують діапазон комірок, що відповідає розмірам вихідної матриці;

виконують дії: **Вставка⇒Функция**;

у діалоговому вікні, що відкриється, вибирають категорію функцій **Математические**;

в даній категорії вибирають з списку функцію **МОБР;**

у відповідному діалоговому вікні, що відкриється, у рядку **масив** вводять відповідну матрицю у вигляді діапазону комірок **В2:D4;**

натискають комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter**;

або:

активізують діапазон комірок, що відповідає розмірам вихідної матриці;

у рядок формул вводять =**МОБР(А2:С4)**;

натискають комбінацію клавіш **Ctrl+Shift+Enter**.

Приклад знаходження матриці, оберненої до даної, за допомогою функції **МОБР** поданий на рис. 10.

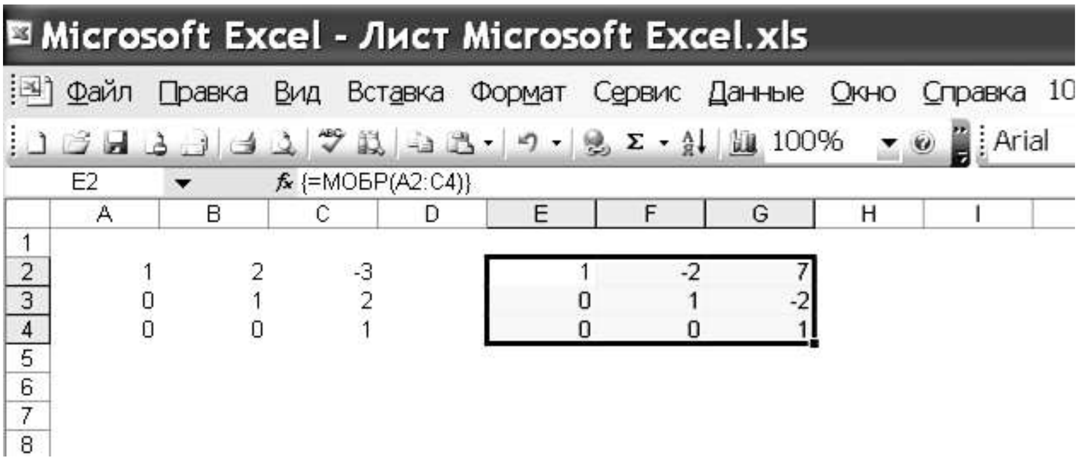


Рис. 10. Приклад застосування функції **МОБР**

Практична робота №12

Застосування формул масивів для виконання дій над матрицями в MS Excel

<u>**Мета роботи:**</u> Ознайомитися з можливостями застосування формул масивів для виконання дій над матрицями

<u>Програма виконання роботи</u>

1. Завантажити табличний процесор Excel.
2. Ввести матриці у вигляді числового масиву. Знайти суму матриць, використовуючи формули масивів.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 4 & 6\\ 4 & -2 & 8 & 2\end{pmatrix}.\ \text{Знайти суму матриць } A \text{ і } B.$$

3. Задати матриці а), як діапазон комірок; б) – у вигляді числового масиву (масиву констант). Знайти добуток матриць, використовуючи функцію **МУМНОЖ**.

$$\text{а)}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix};\quad \text{б)}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

4. Знайти матрицю, обернену до даної, використовуючи функцію **МОБР**. Задати матрицю а), як діапазон комірок; б) – у вигляді числового масиву.

$$\text{а)}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \text{б)}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти визначники матриць, використовуючи функцію **МОПРЕД**. Задати матриці а), як діапазон комірок; б) – у вигляді числового масиву.

$$\text{а)}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \text{б)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Зберегти створений документ у власній папці.
7. Завершити роботу з Excel.

Контрольні запитання

1. Які існують способи введення матриць у Excel?
2. Як знайти суму матриць, заданих у вигляді числового масиву?
3. Які особливості застосування функції **МУМНОЖ** категорії **Математические**?
4. Які особливості застосування функції **МОБР** категорії **Математические**?
5. У якому вигляді виводиться результат застосування функції **МОБР?**

Розділ 2. Основи роботи в середовищі математичних розрахунків Wolfram Alfa

2.1. Основні відомості про Wolfram Alpha

У даному розділі практикуму розглянуто роботу з базою знань і набором обчислювальних алгоритмів WolframAlpha.

WolframAlpha не є пошуковою системою і не видає перелік посилань, що ґрунтуються на результатах запиту, а обчислює відповідь, ґрунтуючись на власній базі знань, яка містить дані з математики, фізики, астрономії, хімії, біології, медицини, історії, географії, політики, музики, кінематографії, а також інформацію про відомих людей та інтернет-сайти.

WolframAlpha здатна переводити дані між різними одиницями вимірювання, системами числення, підбирати загальну формулу послідовності, знаходити можливі замкнуті форми для наближених дробових чисел, обчислювати суми, границі, інтеграли, розв'язувати рівняння і системи рівнянь, проводити операції з матрицями, визначати властивості чисел і геометричних фігур. Однак, розрахунок на підставі власної бази має і свої недоліки, в тому числі – вразливість до помилок даних [1].

Ядро WolframAlpha грунтується на обробці природної мови (в даний час – тільки англійської), великій бібліотеці алгоритмів і NKS-підході для відповідей на запити. Він написаний на мові Mathematica, становить близько 5 мільйонів рядків і виконується приблизно на 10000 [2].

WolframAlpha надає новий тип обчислень, які можна назвати обчисленнями, заснованими на знаннях. Їх початковою точкою є не просто обчислення, а колосальний обсяг вбудованих знань. І коли це відбувається, змінюється сама економіка доставки обчислень будь то в інтернеті або десь ще. За допомогою цього сервісу кожен може здійснювати відкриття - причому як в точних науках, так і в творчому середовищі.

Wolfram Alpha знаходиться у відкритому доступі з середини 2009-го року і постійно вдосконалюється. Цілком можливо, в найближчому десятилітті про допомогою цієї системи дійсно будуть здійснені чудові відкриття або принаймні значно поповниться багаж знань мільйонів допитливих людей [3].

З метою ознайомлення з базою знань у даному розділі розглянуто математичний розділ WolframAlpha. Для отримання практичних навичок для роботи поставлені і вирішені наступні задачі:

– ознайомитися з інтерфейсом WolframAlpha;

– набути навичок із програмування на мові Mathematica;

– виконати математичні розрахунки по знаходженню коренів рівнянь, диференціалів, інтегралів, побудові графіків, виконанню матричних розрахунків;

– проаналізувати отримані результати.

WolframAlfa – це онлайн–служба для проведення розрахунків, а також пошукова система. Система для отримання різноманітної наукової та технічної інформації. Робота в системі досить легка і не передбачає наявність вузькоспеціальних знань. Вираження для розрахунків можуть задаватися як за допомогою синтаксису CAS Mathematica, так і з допомогою мови, близької до природньої. У вільному доступі представлена лише частина функціоналу, для отримання повного доступу необхідно оформлювати підписку. Головна сторінка WolframAlfa за адресою http://www.wolframalpha.com наведена на рис. 2.1.

Рис. 2.1. Головна сторінка Wolfram Alfa

Розглянемо на прикладах основні підрозділи математичного розділу [4].

2.2. Рішення рівнянь, систем рівнянь

Для вирішення рівняння досить ввести його з командою solve:

Приклад 1. Вирішити рівняння x5 – 4· x 2 + 6· x– 24 = 0

Рішення здійснюється за допомогою команди **solve**:

Звертаємо увагу на те, що Wolfram Alpha сприймає вирази без знака множення між коефіцієнтом і змінною. Висновок системи є дуже інформативним. Кожен блок оформлений у вигляді окремого фрейма.

Спочатку система інформує про інтерпретацію виразу, що корисно, якщо Ви не впевнені в правильності введення (рис. 2.2):

Input interpretation:

solve	$x^5 - 4x^2 + 6x - 24 = 0$

Рис. 2.2. Інтерпретація введеного виразу

Далі представлено рішення задачі і додатковий висновок, який його ілюструє (рис. 2.3):

Results: More digits

$x \approx 1.93894$

$x \approx -1.53808 - 1.46712\,i$

$x \approx -1.53808 + 1.46712\,i$

$x \approx 0.56861 - 1.55444\,i$

$x \approx 0.56861 + 1.55444\,i$

Рис. 2.3. Результат обчислень

Рівняння має один дійсний і чотири комплексних кореня. Якщо бажана більша точність результатів – клацніть на кнопку More digits в правому верхньому куті фрейму (рис. 2.4):

Results: Fewer digits More digits

$x \approx 1.9389369800489486234028930$

$x \approx -1.5380777613653825157907920 - 1.4671195141084462739007617\,i$

$x \approx -1.5380777613653825157907920 + 1.4671195141084462739007617\,i$

$x \approx 0.5686092713409082040893455 - 1.5544447050585138608559663\,i$

$x \approx 0.5686092713409082040893455 + 1.5544447050585138608559663\,i$

Рис. 2.4. Збільшення точності результатів

Додаткове виведення – графічна ілюстрація до знайденого рішення (точка перетину осі абсцис і графіка функції, корені в комплексній площині), а також сума і добуток коренів (рис. 2.5–2.7):

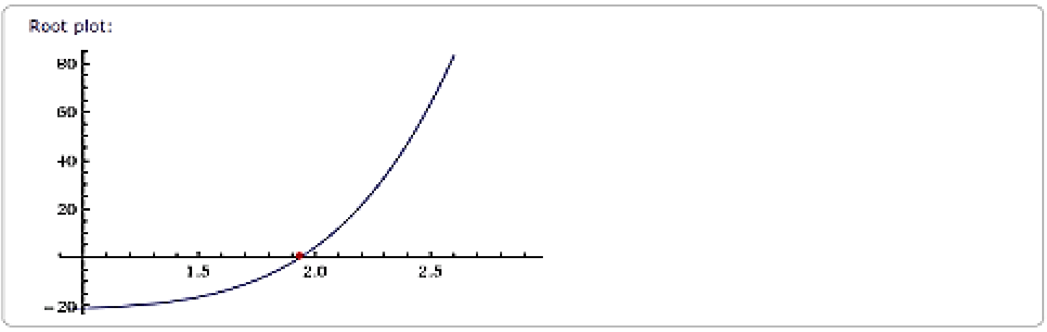


Рис. 2.5. Точка перетину осі абсцис і графіка функції

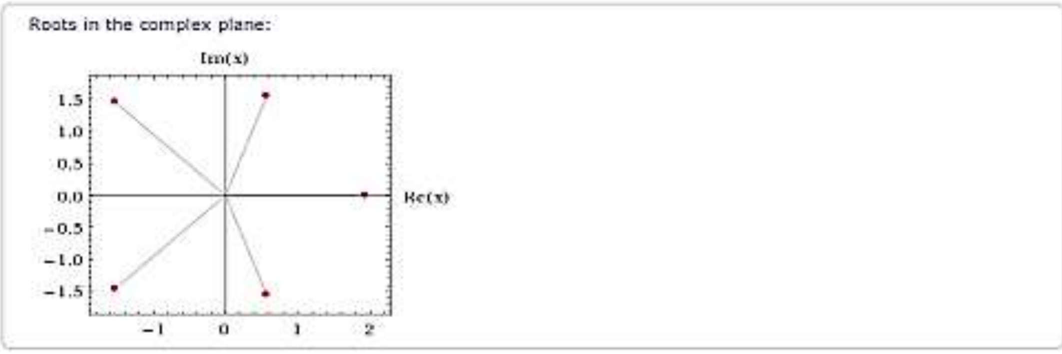


Рис. 2.6. Корені в комплексній площині

Product of roots:

24

Sum of roots:

0

Рис. 2.7. Сума і добуток коренів

Кожен фрейм забезпечений власним меню, що дозволяє завантажити вміст фрейма, додати інтерактивність до графічного висновку і багато іншого. На жаль, для цього необхідно оформити підписку [5].

Рішення систем рівнянь знаходять так само.

Приклад 2. Вирішити систему рівнянь

$$\begin{cases} 5\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 2 \\ 2\cdot x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 - 4.5\cdot x_3 = 5 \end{cases}$$

Пошук рішення також виконується за допомогою функції **solve**:

```
solve 5x1-2x2+3x3 = 2, 2x1-x2-x3 = -1, x2-4.5x3 = 5
```

Рівняння розділяються комою, знаки множення між коефіцієнтами і змінними можуть не використовуватися.

Результат розрахунків наведено на рис. 2.8:

Input interpretation:

solve	$5\,x1 - 2\,x2 + 3\,x3 = 2$
	$2\,x1 - x2 - x3 = -1$
	$x2 - 4.5\,x3 = 5$

Result: More digits | Step-by-step solution

$$x1 = \frac{84}{31} \approx 2.7097 \text{ and } x2 = \frac{191}{31} \approx 6.1613 \text{ and } x3 = \frac{8}{31} \approx 0.25806$$

Рис. 2.8. Результати роботи функції solve для системи алгебраїчних рівнянь

Натискання на кнопку Step–by–step solution дає покроковий алгоритм вирішення. Отримання покрокового рішення є для зареєстрованого користувача, в безкоштовному акаунті тільки для трьох прикладів.

Приклад 3. Вирішити систему рівнянь

$$\begin{cases} 2\cdot\sin(x_1) - \sin(x_2) = -0.5 \\ \sin(x_2) - 2\cdot\cos(x_1) = -1 \end{cases}$$

Аналогічно попереднім прикладам застосуємо функцію solve і введемо рівняння:

solve 2sin(x1)-cos(x2) = -0.5, sin(x2)-2cos(x1) = -1

Результат розрахунків наведені на рис. 2.9:

Input interpretation:

solve	$2\sin(x1) - \cos(x2) = -0.5$
	$\sin(x2) - 2\cos(x1) = -1$

Results:

$$x1 = 2\left(\pi c_2 + \tan^{-1}\left(\frac{1}{33}\left(-8 - \sqrt{31}\right)\right)\right) \text{ and } x2 = 2\left(\pi c_1 + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\left(8 + \sqrt{31}\right)\right)\right) \text{ and } c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$$

$$x1 = 2\left(\pi c_2 + \tan^{-1}\left(\frac{1}{33}\left(\sqrt{31} - 8\right)\right)\right) \text{ and } x2 = 2\left(\pi c_1 + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\left(8 - \sqrt{31}\right)\right)\right) \text{ and } c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$$

$\tan^{-1}(x)$ is the inverse tangent function »

$\mathbb{Z}$ is the set of integers »

Рис. 2.9. Результати роботи функції solve для тригонометричних рівнянь

Побудова графіків функцій

Побудова графіків функцій проводиться за допомогою ключового слова **plot**. Після функції (або функцій, розділених комою) наводиться діапазон зміни незалежної змінної (змінних). Діапазон зміни вказується після знаку дорівнює через двокрапку. Втім, можливо задавати діапазон зміни і за допомогою слів from і to, діапазон можна і не вказувати [6].

Приклад 4. Побудувати графіки функцій:

$$y=x^2\cdot\sin(x)-x^3\cdot\cos(x),$$
$$y=x^2\cdot\cos(x)-x^3\cdot\sin(x)$$

Рішення без діапазону зміни x проводиться за допомогою команди **plot**:

```
plot y=x^2*sin(x)-x^3*cos(x), y=x^2*cos(x)-x^3*sin(x)
```

Результат побудови графіків показаний на рис. 2.10.

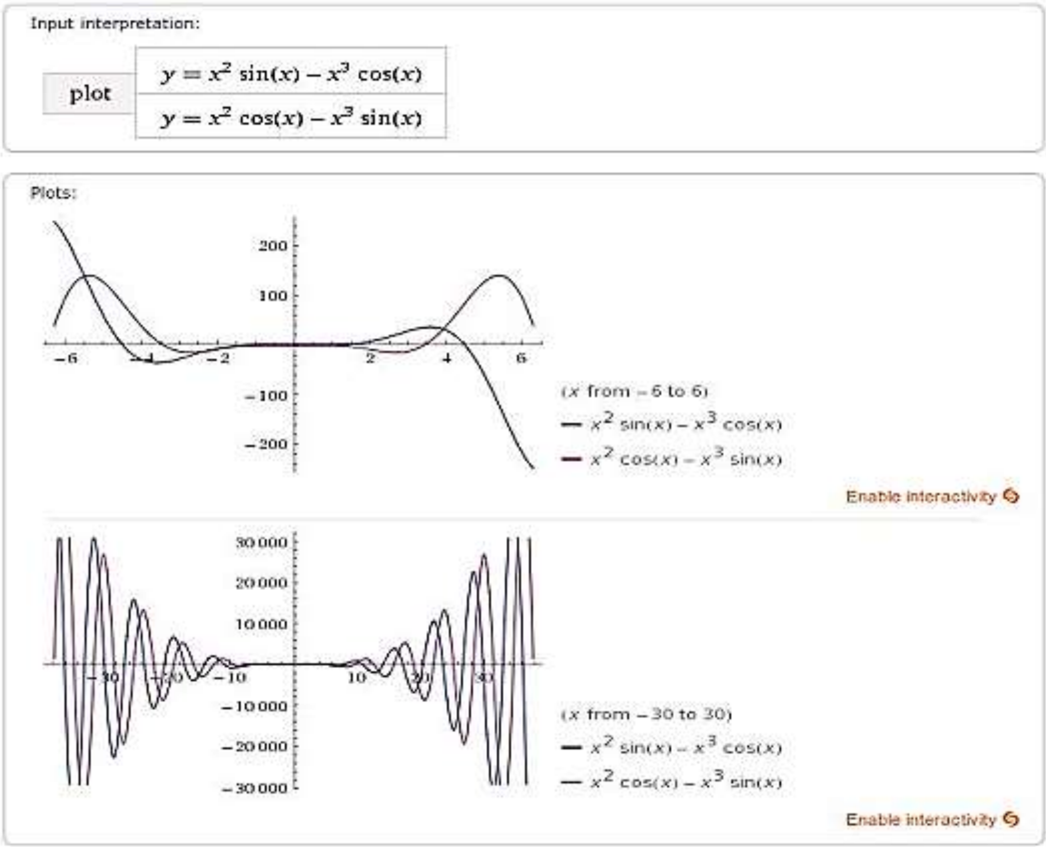


Рис. 2.10. Побудова графіків за допомогою функції plot

Змінити діапазон в інтерактивному режимі неможливо в безкоштовній версії, тому, для отримання інформації про поведінку функції поблизу нуля побудуємо графік функцій від –2 до 2.

```
plot y=x^2*sin(x)-x^3*cos(x), y=x^2*cos(x)-x^3*sin(x), x=-2..2
```

Результат побудови графіків показаний на рис. 2.11.

Input interpretation:

plot	$x^2\sin(x) - x^3\cos(x)$ $x^2\cos(x) - x^3\sin(x)$	$x = -2$ to 2

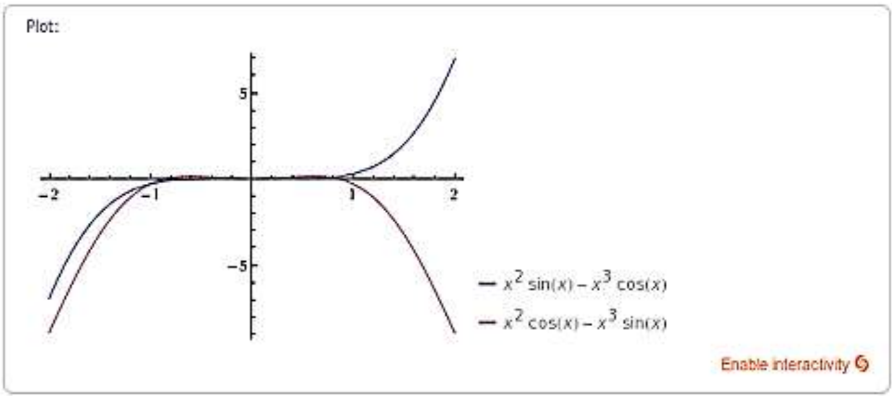


Рис. 2.11. Побудова графіків за допомогою функції plot із зазначенням границь незалежної змінної

Приклад 5. Побудувати поверхню $z = x^4y - x^2 y^3 + xy - 2$.
У цьому випадку також застосовується команда для побудови **plot**:

```
plot x ^ 4 y - x ^ 2 y ^ 3 + xy - 2
```

Поверхня має вид показаний на рис. 2.12.

Input interpretation:

plot	$x^4\, y - x^2\, y^3 + x\, y - 2$

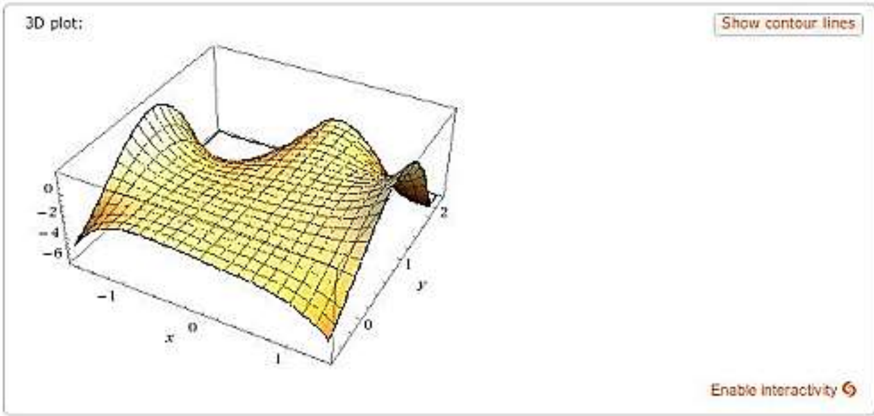


Рис. 2.12. Побудова поверхні за допомогою функції plot

Обмеження діапазонів незалежних змінних проводиться аналогічним для двовимірних графіків способом.

Графіки функцій в полярних координатах можна отримати використавши ключові слова **polar plot**.

Приклад 6. Побудувати графік в полярних координатах для функції $\rho=2\cdot|sin(3\cdot\phi)|\cdot\cos(4\cdot\phi)$

Використаємо команду **polar plot** для побудови:

Результат побудови графіку показаний на рис. 2.13.

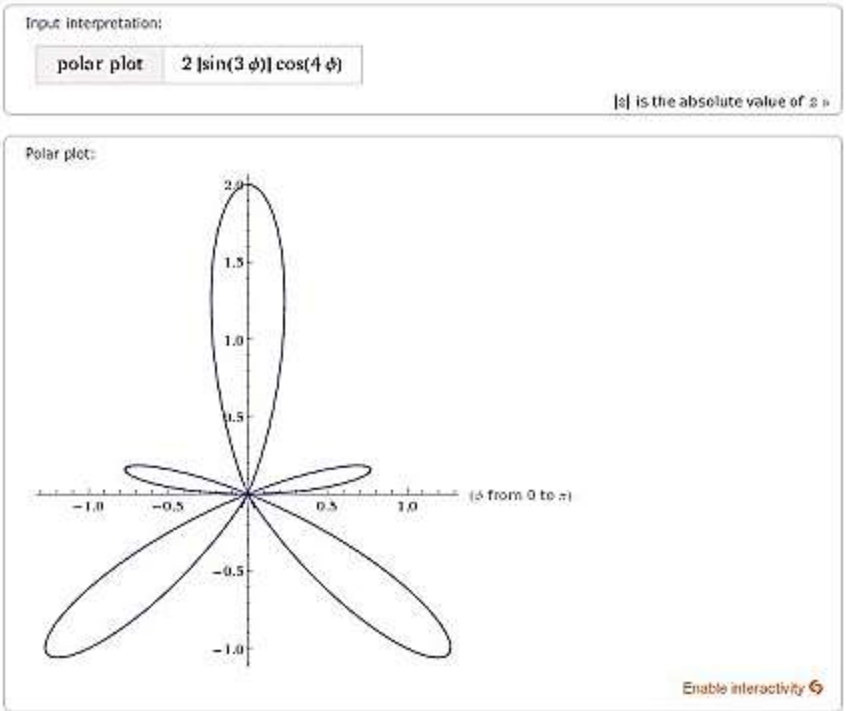


Рис. 2.13. Побудова графіку в полярних координатах з використанням функції polar plot

2.3. Дослідження функцій

Самий простий спосіб досліджувати функцію–просто набрати її. У детальному висновку може бути наведений досить повний аналіз функції. Але є обмеження безкоштовної версії – якщо розрахунки займають час, більше ніж виділено системою для такого акаунта, обчислення обриваються [7].

Приклад 7. Дослідити функцію: y = x·sin (x) –5·|x cos (2· x)|,

В поле введення просто набираємо функцію. Не забуваємо в дужках вказати незалежну змінну.

y(x)=x*sin(x)-5*|x*cos(2*x)|

Результат розрахунків у даному випадку обмежений. Графіки функції мають вид приведений на рис. 2.14:

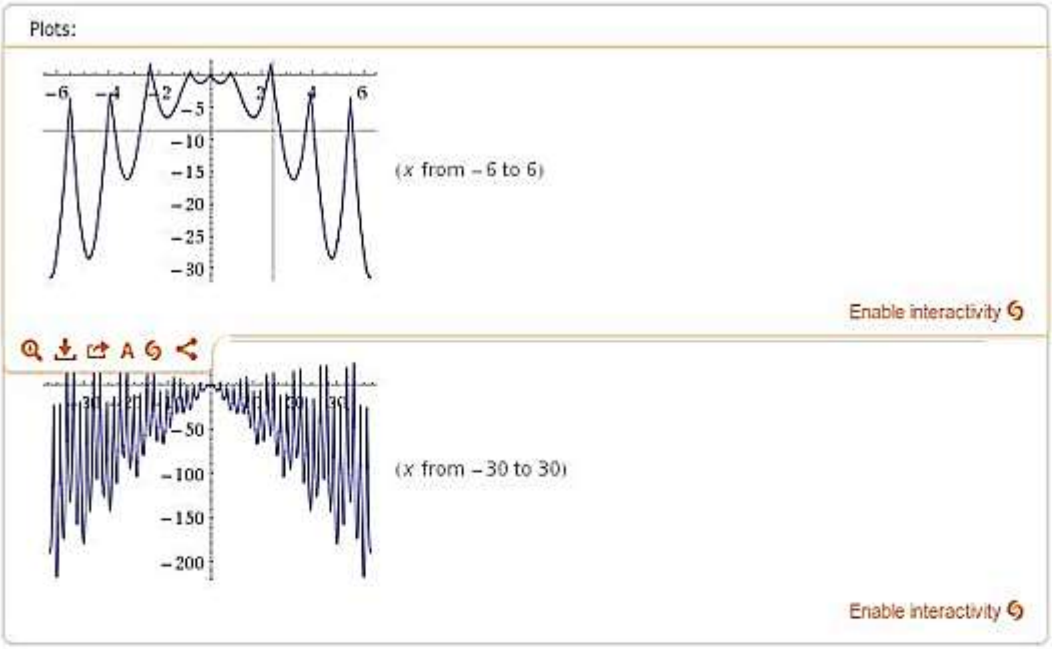


Рис. 2.14. Результати дослідження функцій при прямому введенні

Альтернативні форми запису наведені на рис. 2.15.

Alternate forms:

$$y(x) = x\sin(x) - 5\,|x|\,|\cos(2x)|$$

$$5\,|x\cos(2x)| + y(x) = x\sin(x)$$

$$y(x) = -\frac{5}{2}\left|\left(e^{-2ix} + e^{2ix}\right)x\right| + \frac{1}{2}\,i\,e^{-ix}\,x - \frac{1}{2}\,i\,e^{ix}\,x$$

Рис. 2.15. Альтернативний запис дослідження функції

Область визначення і парність наведені на рис. 2.16.

Properties as a real function:

Domain:

$\mathbb{R}$ (all real numbers)

Parity:

even

Рис. 2.16. Результат досліджень на парність і визначеність

У даному випадку – функція парна, область визначення – все дійсні числа.

У разі, коли часу мало – будуть виведені похідні, мінімуми і максимуми. Для отримання похідної досить скористатися записом, відомим з курсу вищої математики: d/dx, природно замість x вказується змінна, по якій йде диференціювання.

Приклад 8. Знайти похідну функції y (x) = cos (2·sin (x) – 3) – 0.5.
Команда для обчислення d/dx має вид [8]:

```
d/dx cos(2*sin(x)-3)-0.5
```

Результат розрахунків похідної представлені на рис. 17.

Derivative: Step-by-step solution

$$\frac{d}{dx}(\cos(2\sin(x)-3)-0.5)=2\sin(3-2\sin(x))\cos(x)$$

Рис. 17. Обчислення похідної

Графік похідної наведено на рис. 2.18.

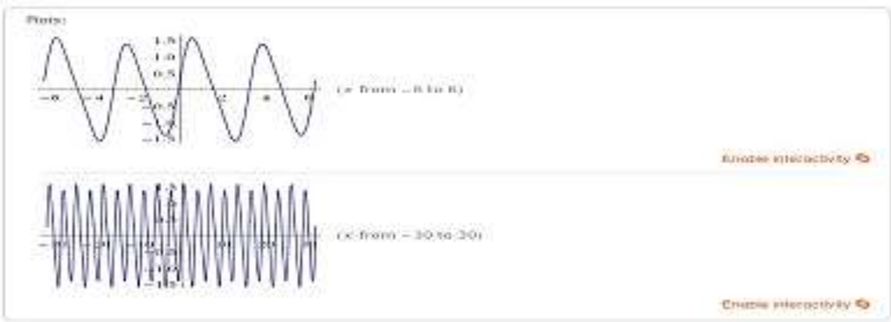


Рис. 2.18. Графік похідної

Корні похідної приведені на рис. 19.

Roots: Approximate forms Step-by-step solution

$$x=\pi n_1-\frac{\pi}{2},\quad n_1\in\mathbb{Z}$$

$$x=2\pi n_2-\sin^{-1}\left(\frac{3}{2}-\frac{\pi n_1}{2}\right)+\pi,\quad n_1\in\mathbb{Z},\quad n_2\in\mathbb{Z}$$

$$x=2\pi n_2+\sin^{-1}\left(\frac{3}{2}-\frac{\pi n_1}{2}\right),\quad n_1\in\mathbb{Z},\quad n_2\in\mathbb{Z}$$

$\mathbb{Z}$ is the set of integers »
$\sin^{-1}(x)$ is the inverse sine function »

Рис. 2.19. Корні графіку похідної

Область визначення, область значень і періодичність наведені на рис. 2.20.

Properties as a real function:

Exact forms

Domain:

$\mathbb{R}$ (all real numbers)

Range:

$\{y \in \mathbb{R} : -1.58186 \le y \le 1.58186\}$

Periodicity:

periodic in x with period 6.28319

Рис. 2.20. Результати розрахунків області визначення, області значень і періодичності

Аналогічно обчислюються похідні вищих порядків: друга – d^2/dx^2, третя – d^3/dx^3. Для отримання мінімумів і максимумів використовуються ключові слова **minimum** і **maximum**.

Приклад 9. Знайти мінімуми і максимуми функції y (x) = cos (2·sin (x) – 3) – 0.5.

Для пошуку мінімуму застосуємо функцію **minimum**:

```
minimum cos(2*sin(x)-3)-0.5
```

Результат розрахунків приведений на рис. 2.21.

Global minima:

Approximate form

$\min\{\cos(2\sin(x)-3)-0.5\} = -\frac{3}{2}$ at $x = \pi + 2n\pi - \sin^{-1}\left(\frac{3-\pi}{2}\right)$ for integer n

$\min\{\cos(2\sin(x)-3)-0.5\} = -\frac{3}{2}$ at $x = 2n\pi + \sin^{-1}\left(\frac{3-\pi}{2}\right)$ for integer n

$\sin^{-1}(x)$ is the inverse sine function »

Plot:

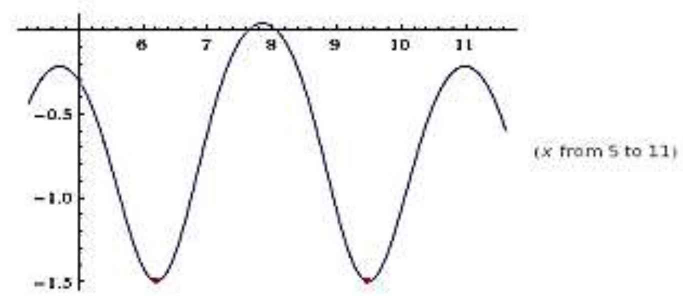


Рис. 2.21. Пошук мінімумів функції

Для пошуку максимуму застосуємо функцію **maximum** (рис. 2.22):

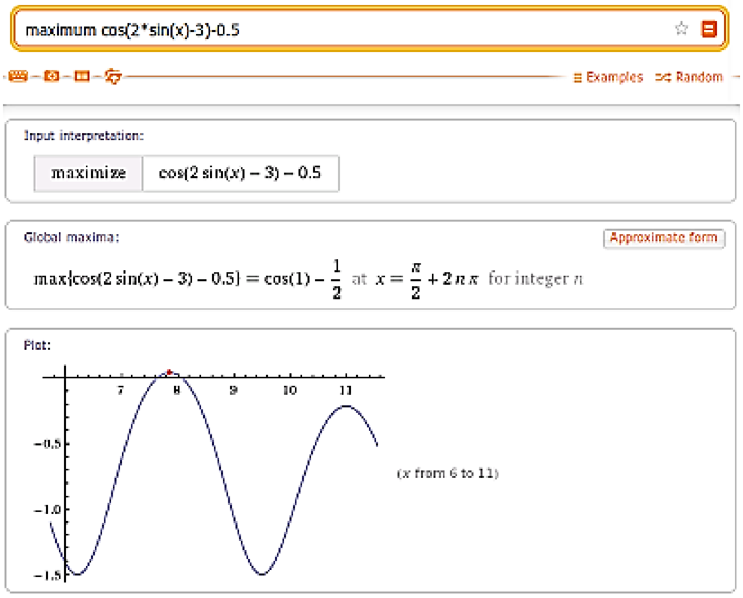


Рис. 2.22. Пошук максимумів функції

Інтегрування функції здійснюється за ключовим словом **integrate**. У випадку визначеного інтеграла вказуються межі з ключовими словами **from**, **to**, або за допомогою конструкції x = a..b.

Приклад 10. Обчислити інтеграли:

$$\int x^2 \cdot \sin(x) - x^3 \cdot \cos(x)\, dx,$$

$$\int_2^5 x^2 \cdot \cos(x) - x^3 \cdot \sin(x)\, dx$$

Використаємо функцію **integrate** для першого інтеграла:

Розрахунок інтегралу і його графіки наведені на рис. 2.23.

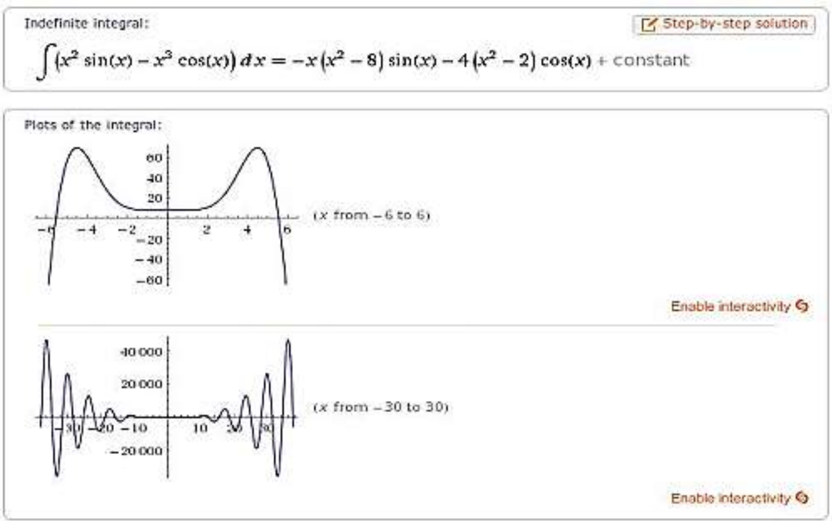


Рис. 2.23. Використання функції integrate

Альтернативні форми запису наведені на рис. 2.24.

Alternate forms of the integral:

$$x^3(-\sin(x)) - 4x^2\cos(x) + 8x\sin(x) + 8\cos(x) + \text{constant}$$

$$(8x - x^3)\sin(x) + (8 - 4x^2)\cos(x) + \text{constant}$$

$$-\frac{1}{2}i\left(e^{-ix} - e^{ix}\right)x\left(x^2 - 8\right) - 2\left(e^{-ix} + e^{ix}\right)\left(x^2 - 2\right) + \text{constant}$$

Рис. 2.24. Альтернативні форми запису результатів при розрахунку інтегралу

Аналогічно використаємо функцію **integrate** для другого інтеграла:

```
integrate (x^2*cos(x) - x^3*sin(x))dx, x=2..5
```

Значення інтеграла і графічне представлення наведені на рис. 2.25.

Definite integral: More digits

$$\int_2^5 \left(x^2\cos(x) - x^3\sin(x)\right)dx = 4\sin(2) - 46\sin(5) + 105\cos(5) \approx 77.5322$$

Visual representation of the integral:

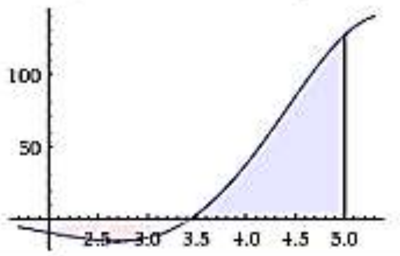


Рис. 2.25. Результат розрахунку інтегралу і його графічне представлення

Невизначений інтеграл розраховується таким чином, як наведено на рис. 2.26.

Indefinite integral: Step-by-step solution

$$\int \left(x^2\cos(x) - x^3\sin(x)\right)dx = -2\left(x^2 - 2\right)\sin(x) + x\left(x^2 - 6\right)\cos(x) + 2x\cos(x) + \text{constant}$$

Рис. 2.26. Розрахунок невизначеного інтегралу

2.4. Матричні операції

Матриці для роботи в системі необхідно вводити в фігурних дужках, розділяючи елементи рядка запитом, а рядки – фігурними дужками.

Наприклад, матриця $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ записується як {{1,2}, {3,4}}. Для нас цікаві арифметичні операції: +, –,. (Множення – крапка!), /, ^, і операції **det** – визначник, **inv** – зворотна матриця, **eigenvalues** – власні числа, **eigenvectors** – власні вектора.

Приклад 12. Розрахувати визначник, квадрат матриці $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, матрицю, зворотну до неї, її власні числа.

Визначник матриці розраховується функцією **det** (рис. 2.27).

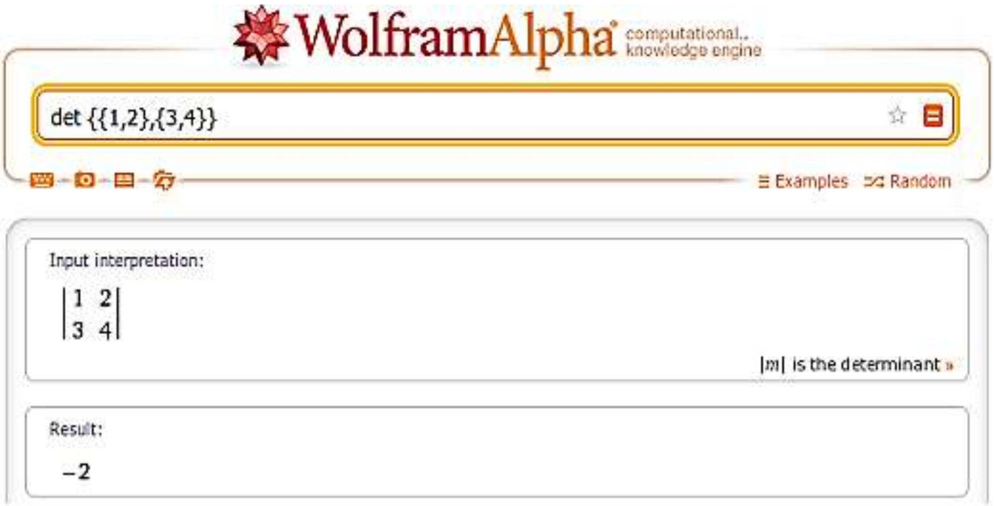


Рис. 2.27. Результат роботи функції det

Квадрат матриці отримаємо за допомогою стандартного значка ступеню (рис. 2.28).

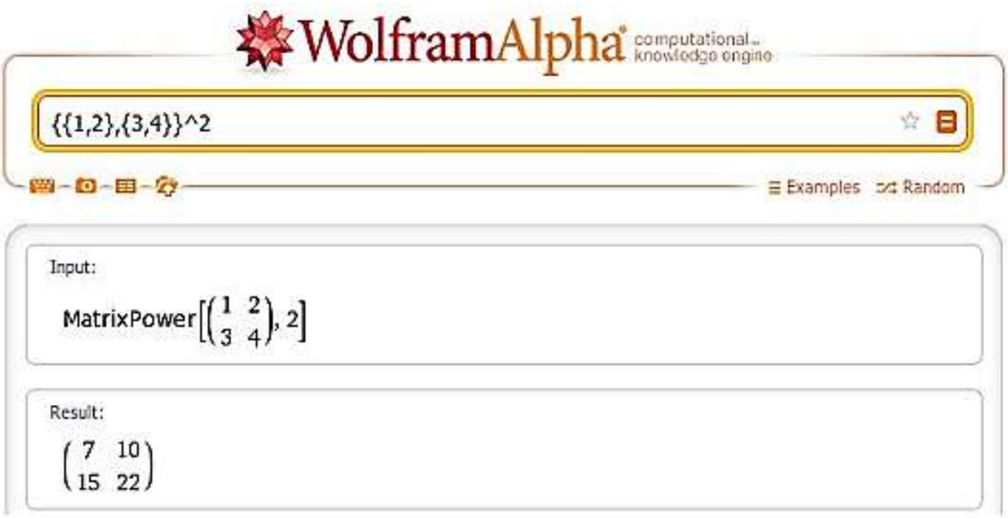


Рис. 2.28. Визначення квадрату матриці

Зворотна матриця визначається функцією **inv** (рис. 2.29).

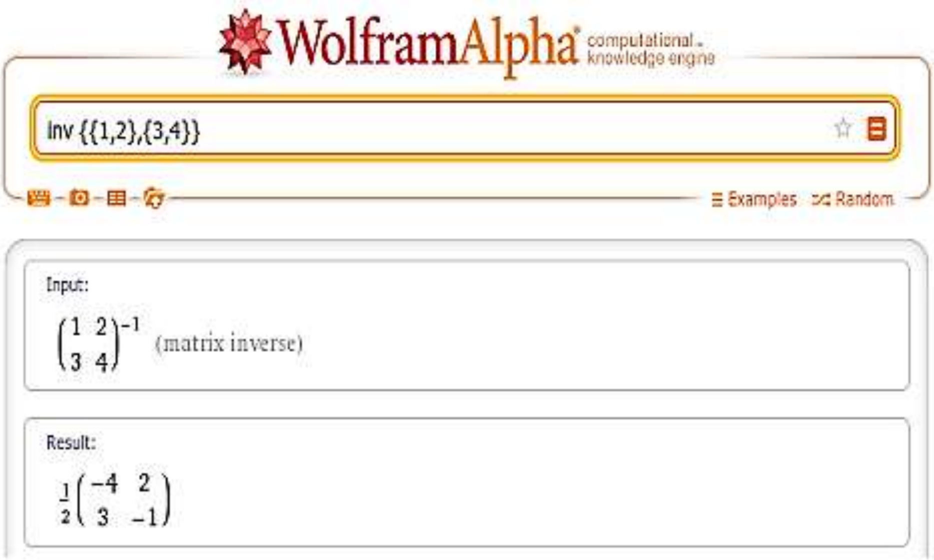


Рис. 2.29. Визначення зворотної матриці

Для знаходження власних значень застосуємо функцію eigenvalues (рис. 2.30).

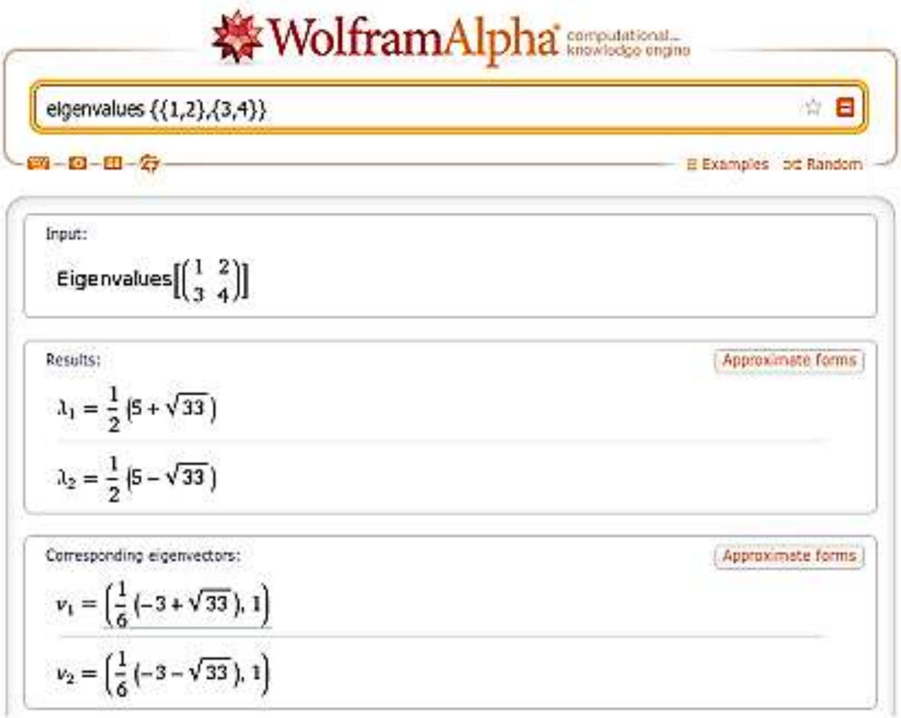


Рис. 2.30. Визначення власних значень матриці

Як можна помітити, до власних значень обчислюються і власні вектора.

2.5. Практичні завдання та висновки

Після виконання практичних задач із розділу «Математика» можна зробити висновок, що WolframAlpha є зручним інструментом, з поставленими задачами справляється швидко, і має інтуїтивно зрозумілий інтерфейс.

Вихідні дані вводяться в спеціальний рядок, а, оскільки, він лише один, то помилитися неможливо.

Новий підхід, що використовується в базі знань, дозволяє отримати досить повну і точну інформацію із запиту. Однак, формулювання вимагає точних вказівок на природній мові.

Інтерфейс WolframAlpha представлений тільки на англійській мові, тож це чудова можливість поліпшити свої мовні знання. Однак, у бази знань є і суттєвий недолік у виді обмеження при безкоштовному користуванні. Накладаються обмеження як за часом для обчислень, так і за їх кількістю.

1. Побудувати графіки функцій за варіантами:

№	Функція	№	Функція
1	$y = 3x - x^3$	16	$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$
2	$y = x^2 \cdot (x-2)^2$	17	$y = 12x^2 - 8x^3 - 2$
3	$y = \dfrac{x^3 - 9x^2}{4} + 6x - 9$	18	$y = (2x-1)^2 \cdot (2x-3)^2$
4	$y = 2 - 3x^2 - x^3$	19	$y = \dfrac{27(x^3 - x^2)}{4} - 4$
5	$y = (x+1)^2 \cdot (x-1)^2$	20	$y = \dfrac{x(12 - x^2)}{8}$
6	$y = 2x^3 - 3x^2 - 4$	21	$y = \dfrac{x^2(x-4)^2}{16}$
7	$y = 3x^2 - 2 - x^3$	22	$y = \dfrac{27(x^3 + x^2)}{4} - 5$
8	$y = (x-1)^2 \cdot (x-3)^2$	23	$y = \dfrac{16 - 6x^2 - x^3}{8}$
9	$y = \dfrac{x^3 + 3x^2}{4} - 5$	24	$y = -\dfrac{(x^2-4)^2}{16}$
10	$y = 6x - 8x^3$	25	$y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$
11	$y = 16x^2 (x-1)^2$	26	$y = \dfrac{6x^2 - x^3 - 16}{8}$
12	$y = 2x^3 + 3x^2 - 5$	27	$y = -\dfrac{(x-2)^2 \cdot (x-6)^2}{16}$
13	$y = 2 - 12x^2 - 8x^3$	28	$y = 16x^3 - 12x^2 - 4$
14	$y = (2x+1)^2 \cdot (2x-1)^2$	29	$y = \dfrac{11 + 9x - 3x^2 - x^3}{8}$
15	$y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$	30	$y = 16x^3 + 12x^2 - 5$

2. Обчислити ліміти функцій за варіантами:

№	Функція	№	Функція
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\operatorname{arctg}3x}$	16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 3x-\sin 5x}$
2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$	17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{\operatorname{tg}x+x^3}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$	18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2\operatorname{tg}x-\sin x}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$	19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-7^{x}}{\arcsin 3x-5x}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\operatorname{arctg}x+x^3}$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-\operatorname{tg}x}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\operatorname{arctg}x-x^2}$	21	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{5x}-9^{-2x}}{\sin x-\operatorname{tg}x^3}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{x}}{x-\sin 9x}$	22	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\operatorname{tg}2x}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2\operatorname{arctg}x-\sin x}$	23	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^{x}-5^{-3x}}{2\arcsin x-x}$	24	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{\sin 3x-\operatorname{tg}2x}$
10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$	25	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{x}-2^{3x}}{\operatorname{arctg}2x-7x}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$	26	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{x+\sin x^2}$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{x}}{\arcsin x+x^3}$	27	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-\operatorname{tg}x}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{x}-2^{7x}}{\operatorname{tg}3x-x}$	28	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 2x-\sin x}$
14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\operatorname{tg}2x-\sin x}$	29	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+\operatorname{tg}x^2}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2\operatorname{tg}x-\operatorname{arctg}x}$	30	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}$

3. Знайти похідну за варіантами:

№	Функція	№	Функція
1	$y=\sin\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$	16	$y=\dfrac{\sin\left(\operatorname{tg}\frac{1}{7}\right)\cdot\cos^2 16x}{32\sin 32x}$
2	$y=\cos\ln 2-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$	17	$y=\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\sin\frac{1}{3}\right)\cdot\sin^2 17x}{17\cos 34x}$
3	$y=\operatorname{tg}\lg\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$	18	$y=\dfrac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}2}\cdot\cos^2 18x}{36\sin 36x}$

4 $$y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$$

5 $$y = \frac{\cos(\sin 5) \cdot \sin^2 2x}{2 \cos 4x}$$

6 $$y = \frac{\sin(\cos 3) \cdot \cos^2 2x}{4 \sin 4x}$$

7 $$y = \frac{\cos \ln 7 \cdot \sin^2 7x}{7 \cos 14x}$$

8 $$y = \cos(\operatorname{ctg} 2) - \frac{1}{16} \cdot \frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$$

9 $$y = \operatorname{ctg}(\cos 2) + \frac{1}{6} \cdot \frac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$$

10 $$y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \frac{1}{20} \cdot \frac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$$

11 $$y = \frac{1}{3} \cdot \cos\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{10} \cdot \frac{\sin^2 10}{\cos 20}$$

12 $$y = \ln \sin \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \cdot \frac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$$

13 $$y = 8 \sin(\operatorname{ctg} 3) + \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$$

14 $$y = \frac{\cos(\operatorname{ctg} 3) \cdot \cos^2 14x}{28 \sin 28x}$$

15 $$y = \frac{\cos\left(\operatorname{tg} \frac{1}{3}\right) \cdot \sin^2 15x}{15 \cos 30x}$$

19 $$y = \frac{\operatorname{tg}(\ln 2) \cdot \sin^2 19x}{19 \cos 38x}$$

20 $$y = \operatorname{ctg}(\cos 5) - \frac{1}{40} \cdot \frac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$$

21 $$y = \sqrt{\operatorname{tg} 4} + \frac{\sin^2 21x}{21 \cos 42x}$$

22 $$y = \cos(\ln 13) - \frac{1}{44} \cdot \frac{\cos^2 22x}{\sin 44x}$$

23 $$y = \ln \cos \frac{1}{3} + \frac{\sin^2 23x}{23 \cos 46x}$$

24 $$y = \operatorname{ctg}\left(\sin \frac{1}{13}\right) - \frac{1}{48} \cdot \frac{\cos^2 24x}{\sin 48x}$$

25 $$y = \sqrt[3]{\cos \sqrt{2}} - \frac{1}{52} \cdot \frac{\cos^2 26x}{\sin 52x}$$

26 $$y = \sin \ln 2 + \frac{\sin^2 25x}{25 \cos 50x}$$

27 $$y = \sqrt[7]{\operatorname{tg}(\cos 2)} + \frac{\sin^2 27x}{27 \cos 54x}$$

28 $$y = \sin \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2} - \frac{\cos^2 28x}{56 \sin 56x}$$

29 $$y = \cos^2(\sin 3) + \frac{\sin^2 29x}{29 \cos 58x}$$

30 $$y = \sin^3(\cos 2) - \frac{\cos^2 30x}{60 \sin 60x}$$

Розділ 3. Математичний пакет ORIGIN

3.1. Інтерфейс ORIGIN

Origin – пакет програм від фірми OriginLab Corporation для чисельного аналізу даних і наукової графіки під керуванням операційної системи Microsoft Windows, і тому має інтерфейс, характерний для більшості Windows-додатків. Крім того, він сумісний з деякими програмними продуктами лінійки Microsoft Office, наприклад, з табличним процесором Microsoft Excel, що дозволяє, зокрема, легко здійснювати імпорт/експорт даних між цими програмами. На сьогодні останньою версією програми є Origin 2017 від листопада 2016.

Origin призначена для створення двовимірної, тривимірної наукової графіки за допомогою готових шаблонів, доступних для редагування користувачем і власних шаблонів. Після створення зображення воно може бути змінене за допомогою меню і діалогів, що викликаються подвійним клацанням миші на його елементах. Можна експортувати отримані графіки і таблиці в ряд форматів, таких як PDF, EPS, WMF, TIFF, JPEG, GIF і ін.

За допомогою Origin можна проводити чисельний аналіз даних, включаючи різні статистичні операції, обробку сигналів і т. п

Для виконання операцій можна як використовувати інструмент графічного інтерфейсу користувача (діалоги / меню), так і викликати їх в програмах. Для програмного виклику в Origin включений власний компілятор C/C++, що підтримує та оптимізує векторні і матричні обчислення.

Origin є комерційним програмним забезпеченням, проте демонстраційну версію продукту можна скачати на офіційному сайті виробника originlab.com. Демонстраційна версія дає можливість ознайомитися із системою, відчути переваги інтерфейсу, зрозуміти алгоритм роботи, протестувати функціонал. Ця версія програми цілком функціональна, проте існує декілька обмежень: термін використання становить 21 день, а також усі збережені та роздруковані документи позначено як сформовані в деморежимі, і їх неможливо використовувати для подачі в контрольні органи. Інтерфейс продукту представлений на англійській, німецькій або японській мові [1].

Опис програмного продукту Origin буде проводитися на основі версій 6 і 7, найбільш поширених на даний момент. Інтерфейс новіших версій трохи відрізняється, з'являються додаткові опції, але основні можливості та інструменти залишаються практично без змін [2].

Origin є потужним програмним засобом наукової і технічної графіки. У наведеному далі тексті розглянуто Origin версії 8.0.

Після завантаження програми з'являється вікно, наведене на рис. 1. На рисунку позначені наступні області – область меню, область швидкого запуску команд, робоча область, область змісту проекту, яка називається Project Explorer (менеджер проекту). З допомогою Project Explorer можна реорганізувати вміст поточного проекту.

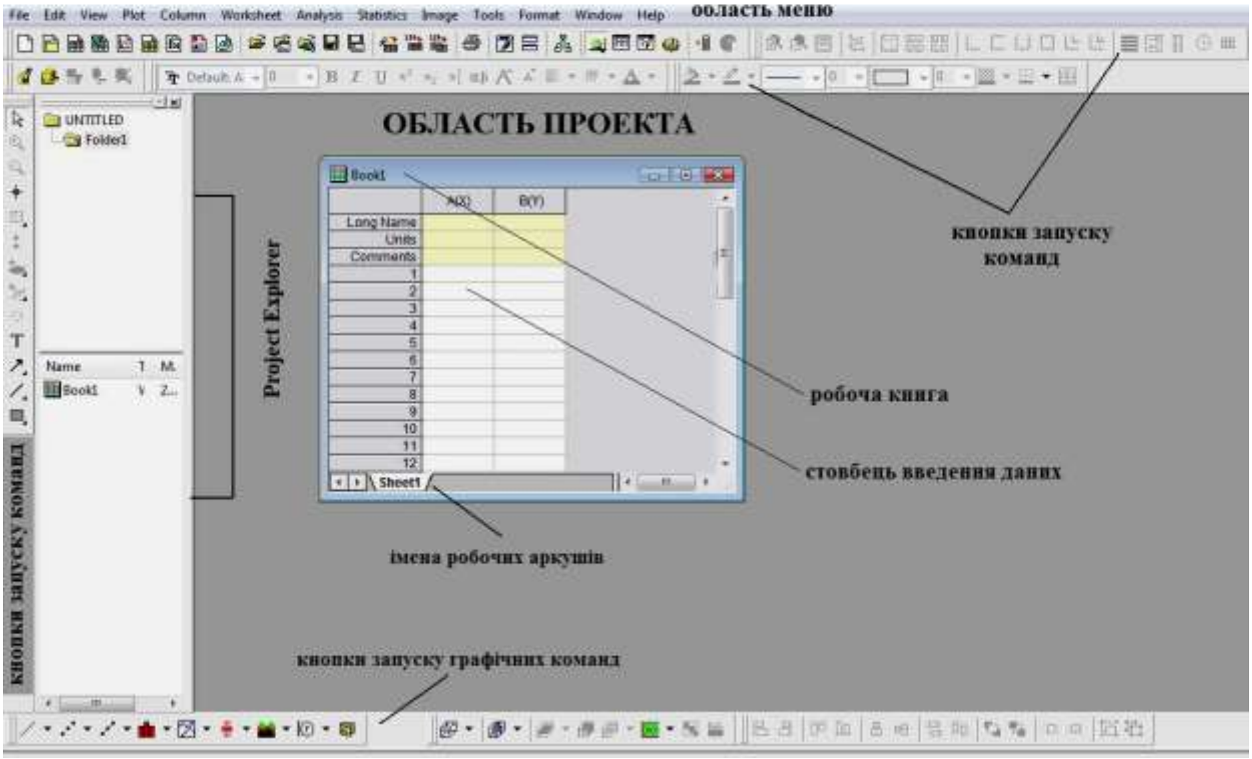


Рис. 3.1. Віконний інтерфейс Origin

В основному вікні Origin після завантаження з’являється окреме вікно даних із стандартним іменем Book1 (Книга1). Воно містить робочу таблицю або робочий лист (Worksheet) із стовбцями A (X) і b (Y), де X, Y вказують тип колонки – вхідні і вихідні дані відповідно. Крім цього, робочий аркуш містить три рядки пояснень – Long Name (Довге ім’я), Units (Одиниці виміру), Comments (Коментарі) [3].

При введенні даних слід звернути увагу на два моменти. По-перше, якщо після введення даних в комірку не була натиснута клавіша Enter (Введення), або не здійснено перехід в інший елемент таблиці даних (стрілками або натисканням лівої кнопки миші) дані з такої комірки не сприйматимуться Origin при побудові графіка. Більш того, після побудови графіка вони зникнуть з таблиці даних. Відповідно, це відноситься і до випадків, коли потрібно відредагувати дані в уже наявній таблиці – зміни будуть сприйняті тільки після натискання клавіші Enter (Введення) або переходу в іншу клітинку.

По-друге, слід уважно поставитися до введення нецілих числових даних. В Україні прийнято відокремлювати цілі і дробові частини чисел коми, тоді як в більшості західних країн (зокрема, США, країнах ЄС) це відділення роблять точкою, а коми використовуються для полегшення сприйняття розрядів числа. За замовчуванням Origin використовує як роздільник той роздільник, який встановлений при налаштуванні операційної системи. Тому при введенні числових даних перш за все слід переконатися, що ці дані сприймаються правильно [4].

В рядки таблиці робочого аркуша можна вносити дані в ручному режимі. Потрібна комірка вибирається курсором миші або клавішами зі стрілками. Число рядків таблиці спочатку становить 32, але автоматично збільшується при введенні даних.

Число стовпців можна додавати командами меню: Column, Add New Columns. Видалити зайвий стовпець можна командами меню Edit, Delete, попередньо виділивши заголовок стовпця. Редагування числа стовпців можливо за допомогою меню, що з'являється при натисканні правої клавіші миші. Рисунок 3.2.1 містить меню для роботи з робочим листом (необхідно навести вказівник миші на чисте місце робочого листа). Рисунок 3.2.2 містить меню для роботи з виділеною колонкою (необхідно навести вказівник миші на колонку).

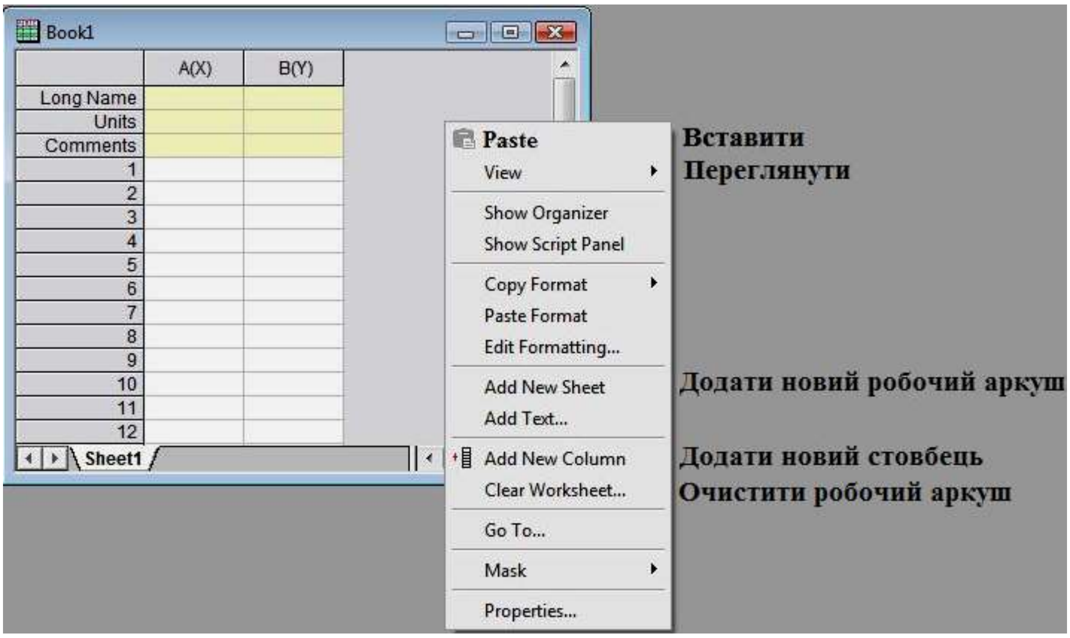


Рис. 3.2.1. Меню робочого аркушу

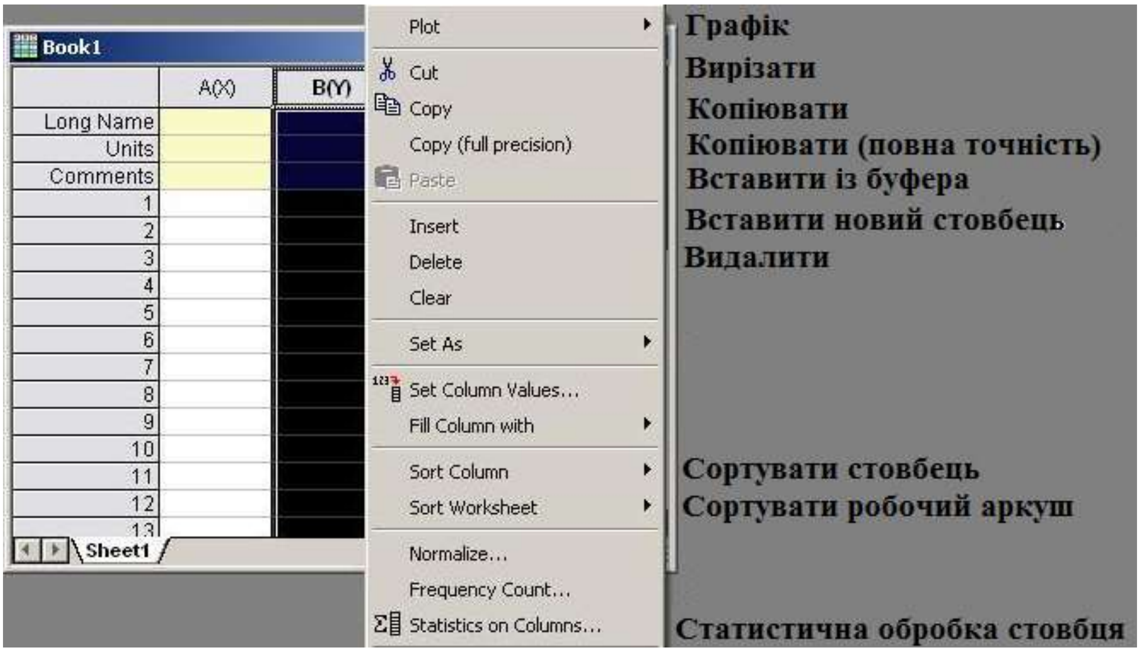


Рис. 3.2.2. Меню робочого стовпця

Origin також дозволяє зчитувати і обробляти дані, попередньо записані в кодах ASCII в файл даних. Файл повинен мати розширення *.dat, *.txt або *.csv [1].

3.2. Побудова графіків

Доступ до основних інструментів для побудови графіків здійснюється через вкладку **Plot** головного меню. кількість стандартних варіантів побудови найрізноманітніша і наведена на рис. 3.3, але крім цього існує ще бібліотека шаблонів, доступ до якої здійснюється за допомогою опції **Template** (Шаблони) в даному меню.

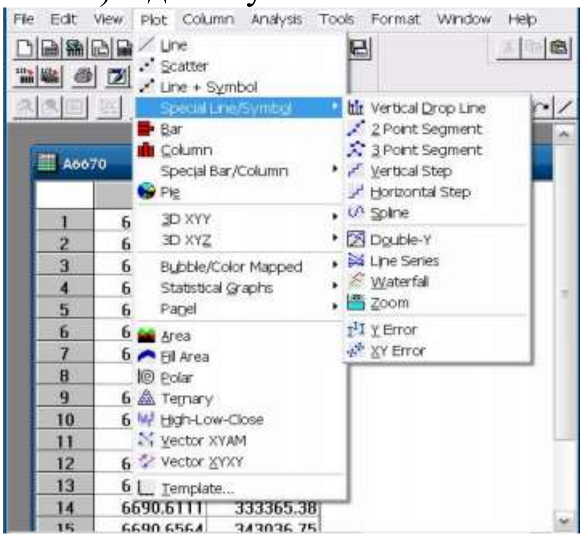


Рис. 3.3. Вибір виду графіка

Проте, найбільш часто використовуваними видами відображення результатів є три перші варіанти побудови графіків: Line (Лінія), Scatter (Розкид), Line + Symbol (Точки, з'єднані лінією). Тому саме ці варіанти і будуть розглядатися як приклад.

Після вибору виду графіка, якщо який-небудь з стовпців, позначений міткою Y в таблиці з даними, виявився виділеним, Origin автоматично побудує графік, використовуючи дані з виділеного стовпця, і стовпчика з міткою X (за замовчуванням це найперший стовпець). Якщо було виділено декілька стовпців, то Origin побудує декілька залежностей на одному малюнку. при цьому графік кожної залежностей матиме свій колір (рис. 3.4) [1, 2].

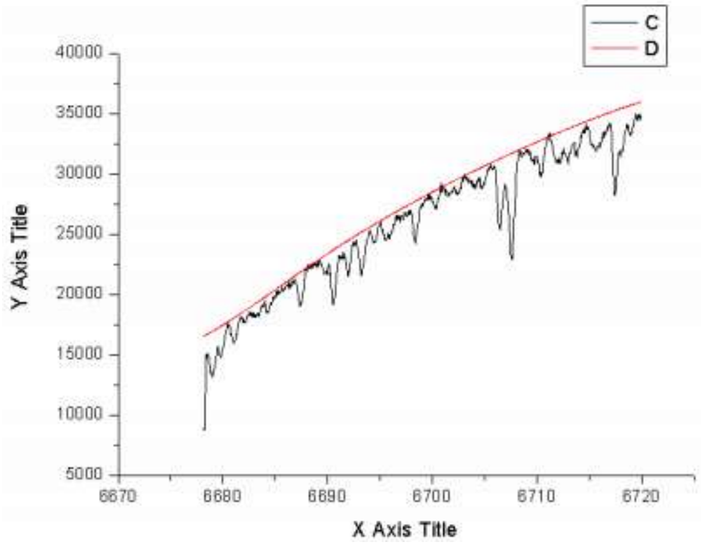


Рис. 3.4. Приклад побудови графіку

При побудові Origin автоматично вибирає масштаб, встановлює мінімальне і максимальне значення шкали уздовж кожної осі. Все це можна при необхідності змінити.

Побудувати графік можна і за допомогою аналогічної команди Plot з контекстного меню, що з'являється при натисканні правою кнопкою миші на назві колонки.

Однак далеко не завжди потрібно побудувати графік залежності колонки з міткою Y від колонки з міткою X. Може знадобитися зворотна залежність (правда, конкретно для такого випадку передбачений механізм зміни осей - **Graph -> Exchange X-Y Axis**), також може знадобитися побудувати графіки залежностей колонок з однаковими мітками. Тому для доступу до діалогового вікна з розширеними можливостями розташування даних на графіку слід зняти виділення з усіх стовпців активної таблиці. Для цього досить клацнути лівою кнопкою миші в будь-якому місці вікна таблиці (крім заголовків стовпців) [1].

У цьому випадку після вибору виду графіка з'явиться діалогове вікно з розширеними можливостями побудови графіка (рис. 3.5).

Вибираючи потрібну таблицю з даними на спадній вкладці **Worksheet** в лівому верхньому кутку вікна (за замовчуванням буде обрана та таблиця, яка була активною до моменту початку побудови графіка), а потім виберіть потрібний стовпець в таблиці, можна вказати цьому стовпцю з даними його роль при побудові даного графіка. Для цього обраний стовпець з допомогою кнопок управління виду <-> встановлюється на потрібну позицію: його можна розташувати уздовж осі X або осі Y, вибрати цей стовпець як покажчик помилок уздовж тієї чи іншої осі і навіть використовувати дані з стовбців у якості підписів [1].

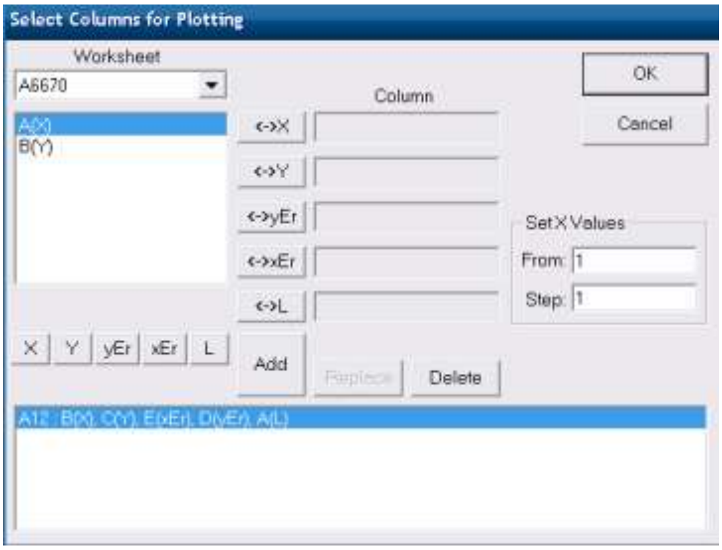


Рис. 3.5. Вікно вибору стовбців для побудови графіку

Якщо потрібно побудувати кілька залежностей на одному графіку, то після натискання кнопки **Add** і додавання обраної залежності в список побудови – в нижній частині вікна (рис. 3.5) – можна перейти до вибору даних для нової залежності і т.д.

У правій частині діалогового вікна побудови графіків є область **Set X Values**, призначена для завдання параметра X в випадку, коли жоден з стовпців таблиці не обраний в такій якості. Тут можна вибрати початкове значення параметра X і крок його зміни. Слід зазначити, що при обробці наукових даних така опція, швидше за все, навряд чи буде затребувана.

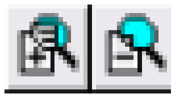
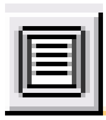
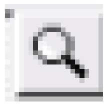
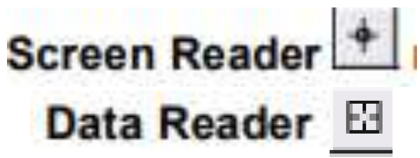
При необхідності на вже існуючий графік можна додати дані для побудови нової залежності. Для цього в пункті меню **Graph** потрібно вибрати опцію **Add Plot to Layer**, після чого відкриється діалогове вікно вибору стовпців даних для побудови графіка. Ця опція аналогічна використанню опції **Add** при первісній побудові графіка.

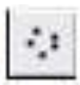
Слід зазначити, що при додаванні нових даних на малюнок Origin автоматично перебудовує масштаб і розміри шкал для відображення всіх даних на малюнку. Тому оформлення графіка (наприклад, для підготовки його до публікації), слід починати тільки після винесення на графік всіх необхідних результатів [1,4].

Після побудови графіка може виникнути необхідність уточнити які-небудь дані для подальшого виправлення, отримати нові значення для подальшого використання. для цього можна використовувати стандартні інструменти Origin, розташовані у вигляді піктограм під рядком головного меню. Точне розташування піктограм на панелі меню залежить від налаштувань і версії програми, тому вони можуть розташовуватися в будь-якому місці (над або під рисунком, збоку на додатковій панелі тощо). Тому при описі в таблиці 3.1 буде даватися назва опції, якій відповідає піктограма (ця назва "спливає" при наведенні на піктограму вказівника миші), а там, де це можливо – вид самої піктограми [4].

Таблиця 3.1

Інструменти для роботи с даними на графіку

Опис функції	*Піктограма*
Збільшення або зменшення відображення рисунку, використовуючи опції **Zoom In** і **Zoom Out**	
Розгорнути малюнок на всю сторінку (тобто скинути все зміни, пов'язані зі збільшенням або зменшенням малюнка) – за допомогою опції Whole Page.	
Якщо є необхідність більш детально розглянути конкретну область малюнка, то зручніше користуватися інструментом **Enlarger** (Збільшення) Після вибору цієї піктограми слід натиснути ліву кнопку миші, і, не відпускаючи її, виділити потрібну область на графіку. подібне збільшення можна виробляти необмежено. Повернення до вихідного масштабу малюнка здійснюється подвійним кліком по тій же піктограмі.	
Два наступних інструменту **Screen Reader** і **Data Reader** призначені для зняття даних з графіка. Інструмент Screen Reader дає значення координат x і y тієї точки, на якій він знаходиться. Інструмент Data Reader призначений для визначення координат конкретної точки з числа точок, які були використані при побудові графіку.	
Інструмент **Data Selector** використовується для вибору діапазону з усієї області даних, представлених на графіку. Це може стати в нагоді, наприклад,	

при обчисленні певного інтеграла в заданому діапазоні або при пошуку аналітичної залежності серед даних в заданому діапазоні, що не розглядаючи всі інші точки. Для використання цього інструменту слід, після натискання піктограми, схопити вказівником миші стрілки, і, пересуваючи їх, вибрати необхідний діапазон даних.	
Інструмент **Draw Data** призначений для нанесення на графік даних вручну. З нанесеними на графік даними можна працювати, як з даними в таблиці, більш того, можливі навіть математичні операції між цими групами даних. Після нанесення додаткових точок на графіку у відкритому проекті Origin створюється таблиця, в якій зберігаються результати нанесення точок. При необхідності, ця таблиця може бути активована для подальшої роботи.	

3.3. Обробка вихідних даних в режимі графіка

Пакет Origin надає великі можливості для обробки вихідних даних. Обробляти дані можна в двох режимах: активна таблиця або активний графік. Спочатку розглянемо ряд прикладів обробки даних безпосередньо на графіку. Для обробки даних призначена команда меню **Analysis**.

Simple Math – найпростіша обробка даних, що складається в арифметичних перетвореннях вихідної кривої. Наприклад, якщо весь графік потрібно змістити вгору на 2 одиниці, вибираємо команди меню: **Analysis, Simple Math** – з'являється вікно відповідного діалогу.

У змінну Y1 поміщаємо заголовок стовпчика для змінної, відкладеної для осі Y. У вікні «оператор» набираємо знак арифметичної операції + (плюс).

У вікні Y2 набираємо число 2 і OK. Результат роботи програми буде безпосередньо відображений на екрані. Діючи аналогічно, можна зробити прості арифметичні перетворення для будь-якої осі.

Арифметичні дії можна робити не тільки з числами. Наприклад, якщо з однієї залежності (що знаходиться в стовпчику B) потрібно відняти іншу залежність (що знаходиться в стовпчику C), вибирають команди меню: **Analysis, Simple Math [1,4]**.

У змінну Y1 поміщають заголовок стовпчика для першої змінної (стовпчик B). У вікні «оператор» набирають знак арифметичної операції – мінус.

У вікно Y2 поміщають другу змінну (стовпчик C) і натискають OK. Описана процедура використовується, наприклад, для порівняння теорії з експериментом – отриманий в результаті віднімання графік являє собою залежність відхилення теорії від експерименту як функцію аргументу.

Smoothing – згладжування. Процедура згладжування застосовується, як правило, до результатів експерименту і складається в спеціальному усередненні, заснованому на апроксимації поліномом. А саме, для згладжування використовується N точок, причому N – непарне число. Процедура застосовується послідовно до кожної точки. Розглядається (N-1) / 2 точок зліва від аналізованої точки і (N-1) / 2 точок праворуч. Для розглянутих N точок знаходиться апроксимуючий поліном ступеня (N-1).

Нове значення точки виходить як значення полінома при тому ж самому значенні аргументу. Процедура згладжування поліномом доступна при виборі команд меню: **Analysis, Smoothing, Savitzky-Golay**. У вікні, що з'явиться, слід ввести число N – кількість точок, за якими проводиться згладжування.

При виборі команд меню: Analysis, Smoothing, Ajacent Averaging здійснюється простіше згладжування - нова точка являє собою середнє арифметичне N точок (по (N-1) / 2 точок ліворуч і праворуч і згладжувати точка). Слід враховувати, що для методів Savitzky-Golay і Ajacent Averaging інтервал по осі X повинен бути рівномірним.

Calculus, Differentiate – чисельне диференціювання (тобто пошук першої похідної) вихідних даних. Для графіка похідної відкривається нове вікно – Deriv.

Calculus, Integrate – чисельне інтегрування. Результати роботи представлені у вікні Script Window.

У тому випадку, коли активна таблиця, обробка даних може складатися як в зміні даних в існуючих таблицях, так і в створення нових даних в нових таблицях [3].

3.4. Взаємодія Origin з Microsoft Office

Вставляння графіків з Origin у документи Word або PowerPoint Для вставляння створеного графіка в документи Word або PowerPont слід передусім зробити активним потрібний графік, а потім у меню Edit вибрати Copy Page і можна вставляти графік у документ. Якщо після вставляння графіка потрібно внести до нього зміни, то досить двічі клікнути мишкою по графіку просто в документі Word. Якщо на комп’ютері встановлена програма Origin, то вона буде викликана автоматично, і графік можна буде редагувати прямо в документі [2]

3.5. Програмування в Origin

У цьому підрозділі наведені найпростіші правила програмування на мові LabTalk.

Згідно з ними знаки арифметичних дій, порівняння і логічних операторів, роздільники (),; {}, синтаксис операторів if, for, while, switch такі самі, як в мові програмування С.

В Origin відсутній розподіл на регістри символів. Отже, Eko1, eko1 і EKO1 він буде вважати однією змінною.

Підстановка колонки з активної таблиці в якості єдиного операнда в формулу робиться функцією **col (<ім’я_стовбця>)**.

Наприклад, col (circ) = 2 * pi * col (radius) ^ 2. Обидві колонки circ, radius повинні заздалегідь існувати.

Для активізації таблиці використовують оператор **edit <пробіл> <ім'я_таблиці>**.

Наприклад, **edit mydata2** робить таблицю mydata2 активною, після чого функція col () буде автоматично вживатись в її стовбцях.

Підстановка колонки з будь-якої існуючої таблиці в якості єдиного операнда в формулу виконується наступним чином: **<ім'я_таблиці> <знак_підкреслювання> <ім'я_стовпця>**. З цієї причини, на відміну від С, всередині імен простих змінних знак підкреслення тут заборонений [1].

Наведемо приклад складання однойменних стовпців з різних таблиць: **mydata3_arg1 = mydata1_arg1 + mydata2_arg1**.

Індексація масивів виконується аналогічно, як в мові С за допомогою квадратних дужок. Однак дій в циклах, де це можна, слід всіляко уникати через їх повільності, оскільки програма LabTalk обробляється не компілятором, а інтерпретується. З положення слід намагатися знаходити вихід шляхом пошуку таких функцій, які забезпечать необхідні дії за допомогою швидких операцій над цілими масивами даних.

Наведемо ще декілька корисних функцій, докладний опис яких можна переглянути в Help [4]:

b = sum (a) – в стовпці b будуть просумовані значення **a** і крім того буде створений поточний об'єкт **sum** з характеристиками стовпця **a**. Наприклад, **sum.mean** – це буде середнє значення по **a**. Об'єкт sum проіснує до того моменту, як буде знову змінений.

diff () – диференціювання стовпця.

limits () – пошук меж області значень даних.

create a N – створення (не відображається на екрані) вектора **a** довжиною **N**, а оператор **edit a** дозволить при необхідності його побачити (створить нову таблицю зі стовпцем **a**, який має статус "disregard"). Зауважимо, об'єкти, які не відображаються, займають значно менше місця і швидше обробляються, тому проміжні результати в обчисленнях (після налагодження програми) слід приховати.

del a – ліквідує об'єкт a (тобто вивільняє пам'ять комп'ютера)

min (); max () – створення поточних об'єктів, що містять екстремальні значення і їх індекси (положення в межах стовпчика).

wks – поточний об'єкт з параметрами активної таблиці. Наприклад, властивість **wks.maxrows** відображає число зайнятих даними рядків в активній таблиці, а **wks.nrows** – повне число рядків, в тому числі не заповнених даними.

Можливо "витягути" в текст програми процедур, що обробляють команди головного меню. Для цього треба при активному вікні **ScriptWindow**, тримаючи натиснутими **Shift + Ctrl**, "запустити пункт меню". При цьому замість негайного виконання команди відбудеться вставка імені її процедури (в форматі Run.Section (<ідентифікатор>)) в текст. Це якщо і не кращий стиль програмування, то принаймні непоганий спосіб дізнатися, де шукати довідку по цій процедурі в Help [3].

Розділ 4. Основи роботи із системою MAPLE

4.1 Основні властивості та можливості пакету MAPLE

MAPLE – середовище, основне призначення якого полягає у розв’язуванні математичних задач різного рівня та ступеня складності. У цьому середовищі є змога вирішувати широке коло проблем на зразок чисельного аналізу, символічної алгебри та графіки. За допомогою математичного середовища MAPLE є змога проводити розрахунки починаючи від елементарної арифметики, закінчуючи загальною теорією відносності. Все це сприяє широкій популярності цього математичного продукту в усьому світі. Велика бібліотека вбудованих спеціальних функцій та констант робить систему MAPLE надзвичайно корисною при розгляді задач із різних областей фізики, техніки та, зокрема, при математичному моделюванні в екології. За своєю потужністю та комфортністю у роботі MAPLE стоїть поряд з такими пакетами як MATHEMATICA, MathCad, MatLab та іншими.

З появою подібних математичних пакетів робота фахівців, які у своїй діяльності використовують математичні методи, значно змінилася. При громіздких обчисленнях (вручну) у аналітичному чи числовому вигляді, завжди є велика ймовірність отримання помилок, які зводять нанівець клопітку роботу. Виникала необхідність багаторазової незалежної перевірки обчислень на кожному кроці. З появою доступної комп’ютерної техніки та математичних пакетів, роль людини стає важливою на першому етапі - складанні математичних рівнянь, та на останньому – аналізі отриманих результатів. Проте, інколи виникає необхідність “підказати” комп’ютеру метод знаходження розв’язку диференціального чи інтегрального рівняння, або запропонувати йому використати те чи інше наближення.

У даному розділі висвітлені основні теми, які використовуються у практичній діяльності користувачів широкого кола: числові обчислення, алгебраїчне числення, побудова графічних залежностей, диференціальні рівняння, лінійна алгебра та статистика. Відображені також основні прийоми, які часто використовуються у процесі аналізу отриманих результатів. Сюди відноситься, зокрема, представлення функцій у вигляді рядів, у тому числі і асимптотичних, застосування різних маніпуляцій із математичними виразами: розкладання на множники, згортання виразів у більш прості форми запису, представлення тригонометричних виразів в експоненціальній формі, апроксимація статистичних залежностей аналітичними виразами, знаходження основних статистичних характеристик експериментальних даних, тощо.

Теоретичні відомості адаптовані до версії MAPLE – 6. Ця версія дозволяє працювати із результатами, отриманими у попередніх версіях, але не сприймається цими попередніми версіями.

Зазначимо, що MAPLE у своїй символьній частині складає основу популярного пакету MatLab, який використовується фахівцями у різних галузях. Ця обставина, також, у певній мірі обґрунтовує доцільність ознайомлення із цим пакетом.

Найбільша увага приділена прикладам, які будуть використовуватися у другому розділі посібника, який присвячений аналізу конкретних задач із курсу «Моделювання та прогнозування стану довкілля».

У додатку 1 представлені команди MAPLE, які найбільш широко використовуються як у текстовому так і у стандартному математичному варіантах.

4.2 Структура вікна пакету MAPLE

Інструментальна панель.

Інструментальна панель - область вікна MAPLE, в якому знаходяться кнопки для виконання загальних команд та задач.

Наведемо перелік кнопок на інструментальній панелі робочого вікна.

Утворення нового робочого вікна.

Відкрити існуюче робоче вікно.

Відкрити вказаний URL.

Зберегти активне робоче вікно.

Друк вмісту активного робочого вікна.

Вирізати виділену частину вікна і перенести в буфер.

Копіювати виділену частину вікна в буфер.

Вставити вміст буферу в активне вікно.

Відмінити останню операцію.

Відтворити анульовану операцію

Σ Вставити невиконуваний математичний вираз у текстову область.

T Вставити текст на місце курсора.

[> Вставити нову виконувану групу після курсора.

Видалення розділу, який містить виділену частину.

Включити виділену частину в розділ, чи підрозділ.

Перейти на крок назад в послідовності гіперзв’язків.

Перейти на крок вперед в послідовності гіперзв’язків.

Зупинити обчислення..

Система збільшення масштабу до 100%.

Система збільшення масштабу до 150%.

Система збільшення масштабу до 200%.

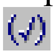
¶ Показати символи, які не друкуються

 Змінити розміри активного вікна

У випадку, якщо курсор знаходиться в командній стрічці (після знаку запрошення “[>”), доступними є такі кнопки:

 Переключення між зображенням стандартним для MAPLE та стандартним математичним.

 Переключення між виконавчою та не виконавчою формами запису виразу.

 Синтаксичне правлення виразу.

 Команда для виконання вказаних у командній стрічці математичних операцій.

4.3 Робочий документ математичної системи MAPLE та основні методи обчислень

1.3.1 Числові обчислення та текстове оформлення документу

Взаємодія із обчислювальною системою MAPLE відбувається за допомогою документів, які називаються робочими листами. Робочі листи складаються із клітинок, в яких може знаходитися текст, обчислення, або графіки. Робочі документи MAPLE виконують роль середовища для інтерактивного вирішення різних задач або для створення документації.

Фундаментальними елементами обчислень у робочих листах є *виконавчі групи* та *електронні таблиці*.

Виконавчі групи та *електронні таблиці* допомагають взаємодіяти із обчислювальними програмами MAPLE. Вони забезпечують основні засоби, за допомогою яких створюється запит до програм MAPLE та відображення відповідних результатів. Команди MAPLE можуть бути введені за допомогою одного із цих засобів.

Виконавчі групи

Виконавчі групи об’єднують одну або більшу кількість команд MAPLE та результати їх виконання в один виконавчий модуль. Групу виконання можна розпізнати по квадратній дужці “[“, яка передує запрошенню “[>” до введення команди. Наприклад:

[> **`solve(a*x^2 = 4,{x});`**

Ця команда робить запит до програми стосовно знаходження розв’язку (solve) рівняння $a*x^2=4$ відносно x. Коли курсор поміщується на будь – яку командну лінію у виконавчій групі і створюється введення (клавіша Enter), всі команди у даній групі виконуються послідовно, а результат розміщується у кінці виконавчої групи. Команди та результати їх виконання представляються у модулі різними кольорами. Після виконання команди курсор автоматично встановлюється на першу командну лінію у новій виконавчій групі.

На доповнення до команд MAPLE та результатів їх виконання виконавча група може містити описову частину, яка відокремлюється від частини, що потребує числових обчислень, або символьних, знаком “#”.

Наприклад, якщо виконавча група містить одну команду, то після розміщення курсору у командній лінії і наступного натискання клавіші “Enter” отримуємо результат виконання команди:

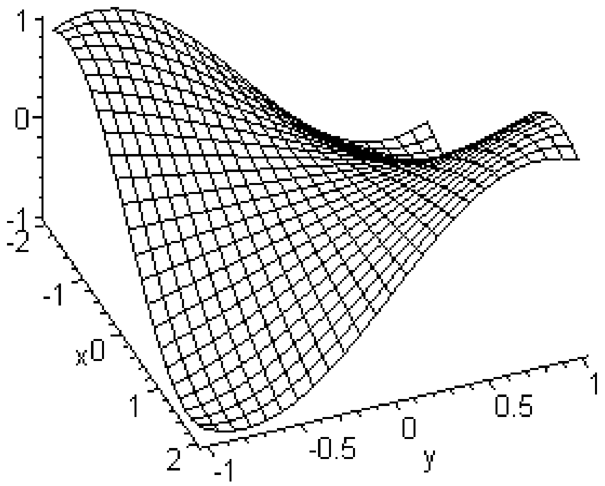
[> **expand((a+b)^3); #expand - команда для розкриття математичного виразу**

$$a^3+3\,a^2\,b+3\,a\,b^2+b^3$$

Кожний новий робочий документ MAPLE починається із виконавчої групи, яка містить запрошення “[>” до роботи.

Результати виконання команд можуть бути числовими, символічними, або графічними. Наступна команда генерує графік (plot) тривимірної (3d) поверхні, яка відповідає заданій функції:

[> **plot3d(sin(x*y),x=-2..2,y=-1..1);**



Електронні таблиці

MAPLE дозволяє вводити електронні таблиці, які можуть містити інформацію як числового, так і символьного характеру. Такі таблиці об’єднують математичні можливості MAPLE із форматом “колонка – рядок” звичайних електронних таблиць. Це дає можливість використати MAPLE для створення таблиць формул. Ілюстрацією є наведена нижче символічна таблиця, яка містить інтеграли від комбінації функції e^x з різними алгебраїчними виразами. Формули у колонках B та C залежать від формул у колонці A.

	A	B	C
	Загальний	Інтегрування	Значення інтеграла
	1	$\int e^x\,dx$	e^x

	x	$\int e^x x\,dx$	$e^x x - e^x$
	x^2	$\int e^x x^2\,dx$	$e^x x^2 - 2\,e^x x + 2\,e^x$
	$\sin(x)$	$\int e^x \sin(x)\,dx$	$-\frac{1}{2}\,e^x \cos(x) + \frac{1}{2}\,e^x \sin($
	$\cos(x)$	$\int e^x \cos(x)\,d$	$\frac{1}{2}\,e^x \cos(x) + \frac{1}{2}\,e^x \sin(x)$
	$\tan(x)$	$\int e^x \tan(x)\,d$	$-I\,e^x - I \int -2\,\frac{e^x}{(e^{(I\,x)})^2 +}$

Створення та виконання команд у MAPLE

Найбільш широко застосовується метод побудови команд та результатів, який полягає у представленні їх у *друкованому вигляді.*

Можна вводити команди слідуючи вказівкам MAPLE та наступного їх підтвердження шляхом натискання клавіші “Enter”. Можна відображати команди у вигляді запису MAPLE, або стандартного математичного запису з використанням кнопки . Для цього потрібно розмістити курсор у даній командній стрічці, а покажчиком миші клацнути по вказаній кнопці.

Для полегшення набору команд можна використовувати також палітри. Для виведення палітр необхідно у пункті меню **“View”** вибрати **“Palettes”**. Існує три види палітр. С*имвольна* палітра слугує для набору літер грецького алфавіту та деяких інших символів, матриць, різних математичних операцій арифметичного характеру та вищої математики).

Вираз, отриманий в результаті виконання команд MAPLE, може бути переміщений на графік, або із графіка. Результат виконання команди можна копіювати і розміщувати у наступних командах. Формула також може бути переміщена із робочого вікна в клітинку електронної таблиці і навпаки.

Анотування та структурування документів

Параграфи та розділи існують для допомоги в організації документа в цілому, враховуючи і результати.

Параграф у робочому документі MAPLE аналогічний параграфу звичайного текстового процесора. Він може містити текст, математичні формули і графіку, включаючи результати обчислень. Параграф може бути розміщений у виконавчій групі наступним чином: по центру, ліворуч, праворуч.

Текст може бути *прописним*, <u>підкресленим</u>, напівжирним. Допускається зміна розміру шрифта та його виду.

MAPLE підримує вбудовану математику так, щоб мати змогу розробляти складні документи, які містять рівняння та графіку у текстовій області. Наприклад, є можливість використання робочого вікна для набору тексту, заміни математичних команд їх текстовим варіантом та давати текстові пояснення і коментарі безпосередньо у командній стрічці Так, для обчислення інтеграла із визначеними границями $\int_0^{\beta} x^2 \sin(\alpha\, x)\, dx$ із зазначенням, що α та β - дійсні додатні числа, у командній стрічці необхідно надрукувати:

[> int(x^2*sin(alpha*x), x=0..beta); # alpha i beta – дійсні числа, alpha i beta [>0.

При цьому, при виконанні команди по обчисленню інтеграла, MAPLE ігнорує запис після символу # і "бачить" тільки те, що знаходиться зліва від цього символу.

Обчислення можна робити крок за кроком, натискаючи після кожної команди "Enter", або кнопку **!**. Інший метод – вибрати у пункті меню "Edit" команду "Exucute". Далі, вибираючи "Selection" або "Worksheet" будуть виконуватися операції у виділеній частині робочого листа або на всьому робочому листі.

Числові обчислення

Обчислення із цілими числами.

На базовому рівні можна використовувати MAPLE як калькулятор. Наприклад, для обчислення (32)(12^{13}), необхідно ввести наступне:

[> **32*12^13;**

3423782572130304

MAPLE розпізнає багато математичних операторів, включаючи факторіал, найбільший спільний дільник, найменший спільний множник, операції із абсолютними величинами. Наприклад операція факторіал має вигляд:

[> **200!;**

78865786736479050355236321393218506229513597768717326329474253324435
449963403342920304284011984623904177212138919638830257642790242637
105061926624952829931113462857270763317237396988943922445621451664
240254033291864131227428294853277524242407573903240321257405579568
660226031904170324062351700858796178922222789623703897374720000000

Оператор, який має вигляд знака процент (%), відноситься до останнього виразу, обчисленого MAPLE, а (%%) – до передостаннього і т.д. Наприклад, команда ifactor(%) розкладає на множники попередній результат.

[> **ifactor(%);**

$(2)^{197}\,(3)^{97}\,(5)^{49}\,(7)^{32}\,(11)^{19}\,(13)^{16}\,(17)^{11}\,(19)^{10}\,(23)^{8}\,(29)^{6}\,(31)^{6}\,(37)^{5}$
$(41)^{4}\,(43)^{4}\,(47)^{4}\,(53)^{3}\,(59)^{3}\,(61)^{3}\,(67)^{2}\,(71)^{2}\,(73)^{2}\,(79)^{2}\,(83)^{2}\,(89)^{2}$
$(97)^{2}\,(101)\,(103)\,(107)\,(109)\,(113)\,(127)\,(131)\,(137)\,(139)\,(149)\,(151)$
$(157)\,(163)\,(167)\,(173)\,(179)\,(181)\,(191)\,(193)\,(197)\,(199)$

Наступна команда обчислює добуток знову:

[> **expand(%);**

788657867364790503552363213932185062295135977687173263294742533244355
449963403342920304284011984623904177212138919638830257642790242637
105061926624952829931113462857270763317237396988943922445621451664
240254033291864131227428294853277524242407573903240321257405579566
660226031904170324062351700858796178922227896237038973747200000
000000000000000000000000000000000000000

З метою запобігання помилок при округленні, MAPLE не перетворює дробові вирази та радикали у десятковий дріб. Для апроксимації подібних виразів десятковими дробами, у MAPLE передбачена спеціальна команда, а саме *evalf*. Так, наприклад, для обчислення виразу $\frac{2^{30}\sqrt{3}}{3^{20}}$ і представлення його у вигляді десяткового дробу вводиться командна стрічка:

[> **(2^30/3^20)*sqrt(3);**

Після натискання клавіші "Enter" отримуємо результат.

$$\frac{1073741824}{3486784401}\sqrt{3}$$

Далі, щоб отримати результат обчислень у формі десяткового дробу необхідно використати команду:

[> **evalf(%);**

і після її введення за допомогою клавіші Enter отримаємо:

.5333783739

Обчислення кінечних та безкінечних сум та добутків

Кінечна сума $\sum_{i=1}^{10} \frac{1+i}{1+i^4}$ задається виразом:

[> **sum((1+i)/(1+i^4), i=1..10);**

$$\frac{51508056727594732913722}{40626648938819200088497}$$

Безкінечна сума $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ обчислюється так (infinity – безкінечність):

[> **sum(1/k^2, k=1..infinity);**

$$\frac{1}{6}\pi^2$$

Добуток (product) $\prod_{i=0}^{10} \frac{i^2+3\,i-11}{i+3}$ обчислюється за допомогою команди:

[> **product(((i^2+3*i-11)/(i+3)), i=0..10);**

$$\frac{-7781706512657}{40435200}$$

Обчислення у вигляді десяткових дробів можна робити у системі MAPLE з будь якою точністю. Фактично, обробляються числа з точністю до сотень тисяч цифр. Результати обчислень можна представляти із заданою точністю. Так, попередній результат точністю до 50 знаків має вигляд:

```
[> evalf( % , 50 );
```

-192448.8196585400838873061095283317505539727761950

Комплексні числа та спеціальні функції

MAPLE виконує обчислення із використанням комплексних чисел. Комплексна одиниця представляється у вигляді прописної букви `I`. Наприклад:

```
[> (3+5*I)/(7+4*I);
```

$$\frac{41}{65}+\frac{23}{65}I$$

Комплексне число за допомогою команди **convert** можна також представити у полярній формі polar(r, θ), де r є модуль, а θ аргумент комплексного числа. Так, для попереднього виразу маємо:

```
[> convert( % , polar );
```

$$\mathrm{polar}\left(\frac{1}{65}\sqrt{2210}, \arctan\left(\frac{23}{41}\right)\right)$$

За допомогою MAPLE можна знаходити числові значення багатьох спеціальних функцій та констант. Наприклад, обчислимо значення e - основу натурального логарифма з точністю до 40 знаків:

```
[> evalf( exp(1.0), 40 );
```

2.718281828459045235360287471352662497757

Значення Гама – функції при аргументі 2,5 :

```
[> evalf( GAMMA(2.5) );
```

1.329340388

Число π з точністю до 500 знаків:

```
[> evalf( Pi, 500 );
```

Алгебраїчні обчислення

MAPLE забезпечує можливість обробляти алгебраїчні вирази і представляти їх у зручній формі, шляхом спрощень та перетворень. Можна розкладати алгебраїчні вирази на множники, спрощувати тригонометричні вирази та надавати їм різні форми:

Розкладання та факторизація виразів.

Позначимо біном $(x+y)^{15}$ буквою A і задамо вираз за допомогою команди MAPLE:

```
[> A:= (x+y)^15;
```

$$expr := (x+y)^{15}$$

Цей вираз можна представити у розгорнутому вигляді за допомогою команди:

```
[> expand(A);
```

$$x^{15}+15\,y\,x^{14}+105\,y^2\,x^{13}+455\,y^3\,x^{12}+1365\,y^4\,x^{11}+3003\,y^5\,x^{10}+5005\,y^6\,x^9+6435\,y^7\,x^8$$
$$+6435\,y^8\,x^7+5005\,y^9\,x^6+3003\,y^{10}\,x^5+1365\,y^{11}\,x^4+455\,y^{12}\,x^3+105\,y^{13}\,x^2$$
$$+15\,y^{14}\,x+y^{15}$$

Для згортання такого вигляду можна використати команду **factor** і, таким чином, перевірити результат дії попередньої команди.

[> **factor(%);**

$$(x+y)^{15}$$

Спрощення виразів

Шляхом використання різних тотожностей, MAPLE може спрощувати громіздкі вирази. Для прикладу розглянемо тригонометричний вираз, який має вигляд:

$\cos(x)^5+\sin(x)^4+2\cos(x)^2-2\sin(x)^2-\cos(2\,x)$.

Для цієї мети використовується команда **simplify** – спростити:

[> **simplify(cos(x)^5 + sin(x)^4 + 2*cos(x)^2 - 2*sin(x)^2 - cos(2*x));**

В результаті, отримуємо:

$$\cos(x)^5+\cos(x)^4$$

Інший спосіб спрощення алгебраїчних виразів полягає у використанні команди **normal**, за допомогою якої проводиться скорочення на загальні множники у чисельнику та знаменнику, тобто вираз приймає “нормальний” вигляд. Наприклад:

[> **normal((x^3-y^3)/(x^2+x-y-y^2));**

$$\frac{x^2+y\,x+y^2}{x+1+y}$$

Введення позначень для змінних

Під час проведення різних математичних обчислень часто буває зручно вводити скорочену назву для математичного виразу, Особливо це корисно, коли такі вирази громіздкі і містять багато математичних операцій. Наприклад, запишемо вираз $(41\,x^2+x+1)^2\,(2\,x-1)$ і запам’ятаємо його під ім’ям *expr1*. Для позначення можна використовувати будь – яку літеру, або їх комбінацію, крім тих, які позначають вбудовані функції e, I та Pi, а також ln, log, sin і т.д. У подальшому MAPLE оперує із вказаним виразом під ім’ям саме *expr1*

[> **expr1 := (41*x^2+x+1)^2*(2*x-1);# expr – скорочення від англійського слова expression - вираз**

$$expr1 := (41\,x^2+x+1)^2\,(2\,x-1)$$

Використаємо команду **expand** по відношенню до *expr1* і запам’ятаємо результат її виконання під ім’ям *expr2*. :

expr2 := expand(expr1);

$$expr2 := 3362\,x^5-1517\,x^4+84\,x^3-79\,x^2-1$$

Обчислимо вираз *expr2* при x=1. (Особливістю є написання команди. У цьому випадку використовується eval (від evaluate – обчислити), а не evalf!):

```
[> eval(expr2 , x=1 );
```

$$1849$$

Наступний приклад ілюструє корисність використання позначень для математичних виразів:

```
[> top := expr2;# top – верхня частина
```

$$top := 3362\,x^5 - 1517\,x^4 + 84\,x^3 - 79\,x^2 - 1$$

```
[> bottom := expand((3*x+5)*(2*x-1));#bottom – нижня частина
```

$$bottom := 6\,x^2 + 7\,x - 5$$

```
[> answer := normal( top/bottom );
```

$$answer := \frac{1681\,x^4 + 82\,x^3 + 83\,x^2 + 2\,x + 1}{3\,x + 5}$$

```
[> convert(answer, parfrac, x);
```

$$\frac{1681}{3}\,x^3 - \frac{8159}{9}\,x^2 + \frac{41542}{27}\,x - \frac{207656}{81} + \frac{1038361}{243\,x + 405}$$

Остання команда виділяє цілу частину у алгебраїчному дробу.

Перетворення виразів до різних форм

Команда перетворення **convert** дозволяє переходити від однієї форми виразу до іншої Повний список можливих перетворень знаходиться на сторінці “Help”. Наприклад, потрібно перетворити раціональну функцію $\frac{a\,x^2 + b}{x\,(-3\,x^2 - x + 4)}$. Запишемо цей вираз у командній стрічці:

```
[> my_expr := (a*x^2+b)/(x*(-3*x^2-x+4));
```

$$my\_expr := \frac{a\,x^2 + b}{x\,(-3\,x^2 - x + 4)}$$

Для перетворення цього виразу у частковий дріб введемо команду

```
[> convert( my_expr, parfrac, x ); # parfrac – скорочення від
```

partial fraction – частковий дріб.

$$\frac{1}{4}\,\frac{b}{x} - \frac{1}{28}\,\frac{16\,a + 9\,b}{3\,x + 4} - \frac{1}{7}\,\frac{a + b}{x - 1}$$

У наступному прикладі приводиться представлення тригонометричної функції в експоненціальній формі:

```
[> convert( cot(x), exp );
```

$$\frac{I\,((\mathbf{e}^{(I\,x)})^2 + 1)}{(\mathbf{e}^{(I\,x)})^2 - 1}$$

Тут символ I означає уявну одиницю: $I = \sqrt{-1}$

Розв’язок алгебраїчних рівнянь та систем алгебраїчних рівнянь.

MAPLE дозволяє легко знаходити розв’язки різноманітних рівнянь та їх систем.

Розв’язок рівнянь.

Використаємо MAPLE для знаходження розв'язку рівняння $x^3-\frac{a\,x^2}{2}+\frac{13\,x^2}{3}=\frac{13\,a\,x}{6}+\frac{10\,x}{3}-\frac{5\,a}{3}$.

Заипишемо це рівняня (використавши позначення eqn , від equation (рівнячння))::

```
[> eqn := x^3-1/2*a*x^2+13/3*x^2 = 13/6*a*x+10/3*x-5/3*a;
```

$$eqn := x^3-\frac{1}{2}\,a\,x^2+\frac{13}{3}\,x^2=\frac{13}{6}\,a\,x+\frac{10}{3}\,x-\frac{5}{3}\,a$$

Записуємо команду для знаходження розв'язків цього кубічного рівняння:

```
[> solve( eqn, {x} );
```

$$\{x=\frac{2}{3}\},\ \{x=-5\},\ \{x=\frac{1}{2}\,a\}$$

Перевіримо правильність знайдених розв'язків на прикладі одного із коренів, а саме x=(1/2)a:

```
[> eval( eqn , x=1/2*a );
```

$$\frac{13}{12}\,a^2=\frac{13}{12}\,a^2$$

Розв'язок системи рівняннь.

Розглянемо набір чотирьох рівнянь з п'ятьма невідомими, позначивши їх скорочено eqn:

```
[> eqn1 := a+2*b+3*c+4*d+5*e=41;
```

$$eqn1 := a+2\,b+3\,c+4\,d+5\,e=41$$

```
[> eqn2 := 5*a+5*b+4*c+3*d+2*e=20;
```

$$eqn2 := 5\,a+5\,b+4\,c+3\,d+2\,e=20$$

```
[> eqn3 := 3*b+4*c-8*d+2*e=125;
```

$$eqn3 := 3\,b+4\,c-8\,d+2\,e=125$$

```
[> eqn4 := a+b+c+d+e=9;
```

$$eqn4 := a+b+c+d+e=9$$

Команда для знаходження розв'язків цієї системи, тобто знаходження величин *a*,*b*,*c* та *d* виглядає так (solve – розв'язати):

```
[> solve( {eqn1, eqn2, eqn3, eqn4}, {a, b, c, d} );
```

$$\{b=-\frac{313}{13}+\frac{22}{13}\,e,\ a=2,\ c=\frac{483}{13}-\frac{31}{13}\,e,\ d=-\frac{79}{13}-\frac{4}{13}\,e\}$$

Для перевірки правильності розв'язків обчислимо два із рівнянь при знайдених значеннях коренів:

```
[> eval( {eqn1, eqn2} , % );
```

$$\{41=41,\ 20=20\}$$

У наступних прикладах MAPLE використовується для знаходження розв'язків іншого виду рівняння, а саме яке містить тригонометричні функції: `arccos(x) - arctan(x)= 0`. Маємо:

```
[> solve( arccos(x) - arctan(x)= 0, {x} );
```

$$x=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}}$$

Розглянемо випадок рівняння, яке містить абсолютне значення (abs = absolute): $|(z+|z+2|)^2-1|^2=9$.

```
[> abs((z+abs(z+2))^2-1)^2 = 9;
```

$$|(z+|z+2|)^2-1|^2=9$$

```
[> solve(abs((z+abs(z+2))^2-1 )^2 = 9,{z});
```

$$\{z=0\}, \{z \le -2\}$$

Розв'язок нерівностей

Наступні приклади показують, наскільки просто знаходяться розв'язки нерівностей при застосуванні MAPLE. Нехай потрібно знайти значення x та y, які задовольняють нерівності: $x^2<1, y^2 \le 1, x+y<\frac{1}{2}$. Маємо:

```
[> solve( {x^2<1, y^2<=1, x+y<1/2}, {x,y} );
```

$$-1<x, x<1, -1 \le y, y \le 1, x+y<\frac{1}{2}$$

Інший приклад нерівності (inequality = ineq) $x+y+\frac{4}{x+y}<10$, Потрібно знайти значення x, виразивши його через y. Отримаємо:

```
[> ineq := x+y+4/(x+y) < 10;
```

$$ineq := x+y+\frac{4}{x+y}<10$$

```
[> solve( ineq, {x} );
```

$$\{x<-y\}, \{5-\sqrt{21}-y<x, x<5+\sqrt{21}-y\}$$

1.3.2 Графічні зображення функцій

За допомогою системи MAPLE можна будувати як двовимірні так і тривимірні графіки. Дуже цінним є те, що у даній системі є можливість будувати графіки функцій заданих неявним чином. *Слід зауважити, що більшість графічних команд потребує не менше* 8 МБ пам'яті.

Споріднені функції у MAPLE згруповані в пакети. Звертатися до цих функцій у бібліотечному пакеті можна за допомогою команди **with.** Наприклад:

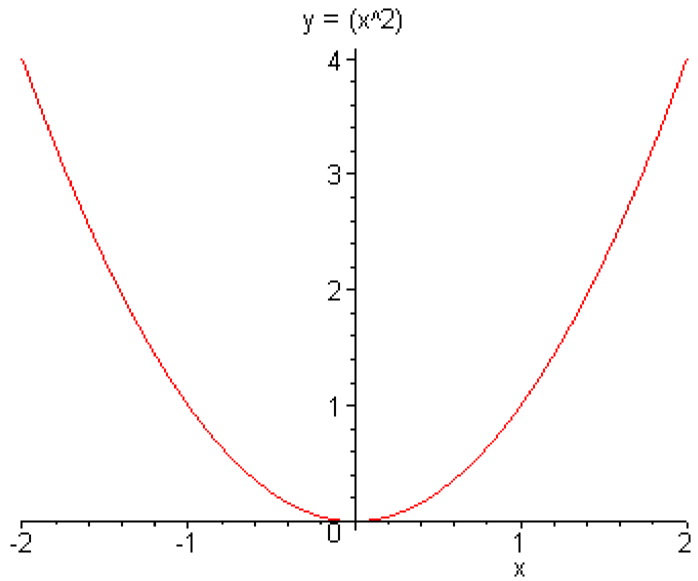
```
[> with(plots):
[> with(plottools):
```

Після такого звернення до відповідного бібліотечному пакету вводиться необхідна команда побудови графіка. Якщо після команди **with()** ставити не дві крапки, а крапку з комою, то в робочому вікні з'явиться список функцій, доступних у даному пакеті.

Двовимірні графіки

Двовимірні інструментальні засоби MAPLE дозволяють будувати графіки (plot) у різних системах координат (прямокутні, полярні) у різних масштабах по осях, у тому числі логарифмічні, напівлогарифмічні і т. ін. Крім того, є змога змінювати характер ліній на рисунках, їх колір, створювати назву рисунку.

[> plot(x^2,x=-2..2,discont=true, title=»y = (x^2)»);



На цьому прикладі видно як MAPLE опрацьовує найпростішу параболічну функцію.

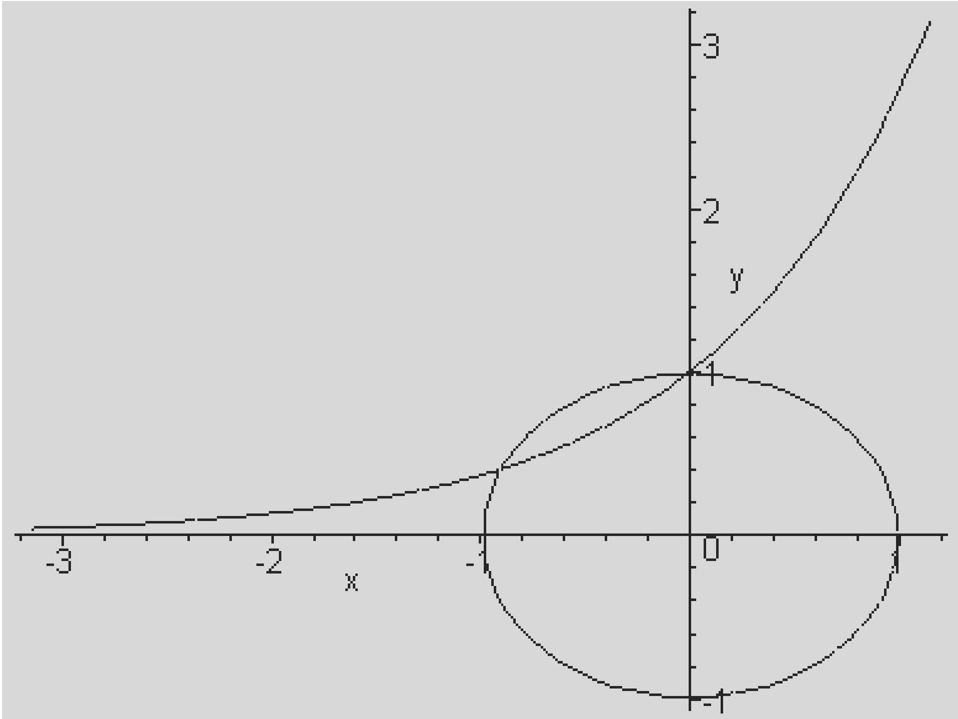
Для виконання графічних задач при функціях заданих у неявному вигляді потрібно звертатися до бібліотечного пакету with(plots). Графік функції без точного розв'язку відносно будь – якої змінної будується після команди **implicitplot** (implicit – неявний).

Наведемо приклад одночасної побудови графіків двох функцій заданих неявним чином: коло з одиничним радіусом $x^2+y^2=1$ та експоненціальної функції $y=\mathbf{e}^x$.

Послідовність команд така:

[> **with(plots):**

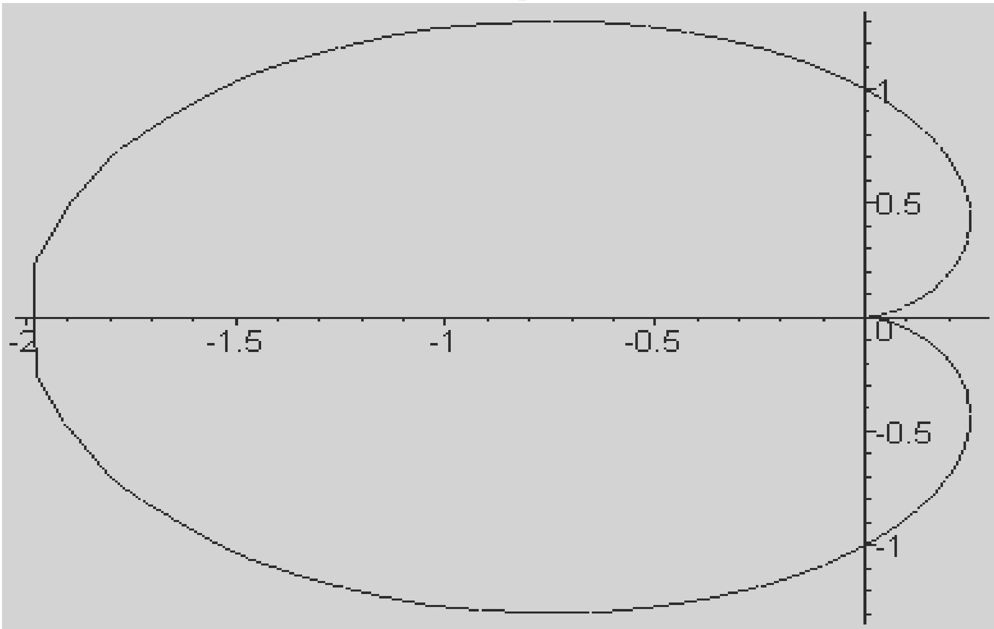
[> **implicitplot({ x^2+y^2=1, y=exp(x) }, x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi);**



Наступний приклад наведемо для випадку, коли графік будується у полярній системі координат:

[> **with(plots):**

implicitplot(r = 1 - cos(theta), r=0..2,theta=0..2*Pi,coords=polar);



Таким чином команда implicitplot вводиться у такій послідовності: implicitplot(f,a..b,c..d,<options[>) де параметри: f - рівняння, яке має бути зображено графічно, a,b,c,d – дійсні константи, а options – опції які вказують на деталі рисунка (див. сторінку для графіка [options] у “Help”.

Для побудови графіків, в яких значення по горизонтальній та вертикальній осях відкладені у логарифмічному масштабі, використовується команда loglogplot(f(x),x=a..b), де f – дійсна функція x а *a* та..*b* – область значень на горизонтальній осі, в якій будується графік f.

При цьому послідовність команд така:

```
[> with(plots):
loglogplot(10^x,x=1..10);
loglogplot(cos(x) + sin(x), x=1..Pi);
```

Коли необхідно будувати графіки з логарифмічним масштабом по одній із осей, то використовуються наступні команди:

В логарифмічному масштабі відкладені значення по вертикальній осі:

```
[> logplot(x-[>10^x,1..10);
logplot(cos + sin, 0..Pi);
```

З визначенням кольору ліній:

```
[> logplot([x,tan(x),x=1..10], color = green);
logplot([cos,sin,-Pi..Pi], color = yellow);
```

У випадку одночасного зображення декількох функцій на одному рисунку:

```
[> logplot({ x-[>2^(sin(x)), x-[>2^(cos(x))}, 1..10);
```

Випадок, коли функція задана точками:

```
[> logplot([1,2],[3,4],[5,6],[7,8]]);
```

У випадку, коли необхідно відобразити горизонтальну вісь у логарифмічному масштабі, використовується команда `semilogplot`.

Послідовність команд має вигляд:

```
[> with(plots):
[> semilogplot(cos(x) + sin(x), x=1..2*Pi);
```

При одночасному зображенні декількох функцій на одному графіку часто використовується послідовність команд:

```
[> with(plots):
F:=plot(cos(x),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi,style=line):
G:=plot(tan(x),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi,style=point):
display({F,G},axes=boxed, title='Cosine and Tangent');
```

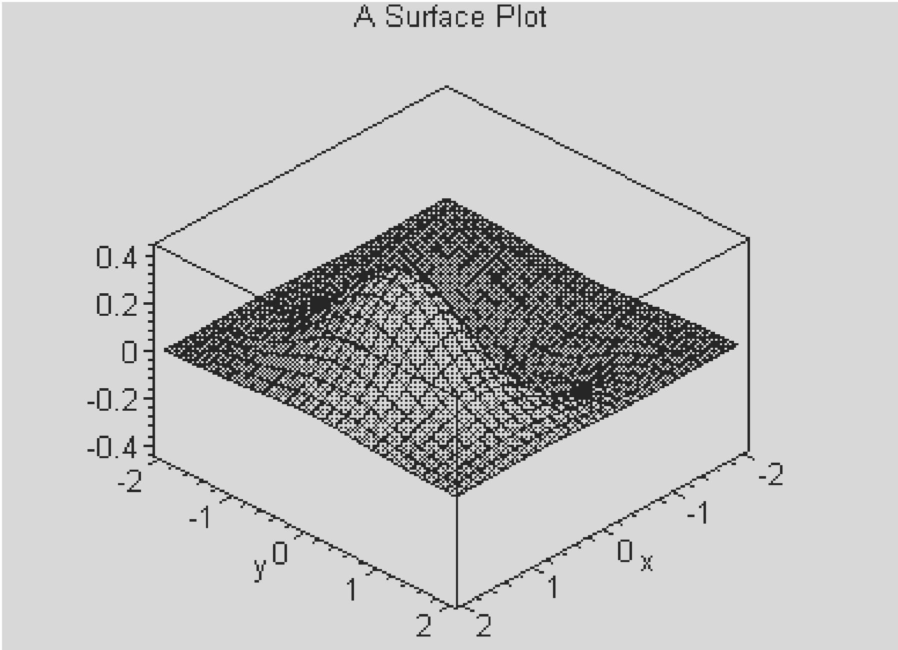
Тривимірні графіки

MAPLE дає змогу будувати графічні поверхні та криві в трьох вимірах. У такому графіку можна змінювати шрифт, колір та яскравість. Побудуємо графік функції $z = x\,\mathbf{e}^{(-x^2-y^2)}$

Послідовність команд наступна:

```
[>with(plots):
[> plot3d( x*exp(-x^2-y^2), x=-2..2, y=-2..2, axes=BOXED,
title=»A Surface Plot» );
```

Остання команда `title=»A Surface Plot»` у другій командній стрічці означає, що на графіку буде відображена назва графіку англійською мовою. Назва може бути написана будь – якою мовою.



Для здійснення повороту графіку, що буває інколи необхідно для кращого розуміння аналітичних залежностей, використовується курсор миші, який розміщується в зоні графіка, але не безпосередньо на поверхні. Поворот графіку здійснюється шляхом переміщення курсора при натиснутій лівій клавіші миші.

При одночасному зображенні декількох поверхонь на одному рисунку використовуються команди, подібні розглянутим у двовимірному випадку:

```
[> with(plots):
F:=plot3d(sin(x*y),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi):
G:=plot3d(x + y,x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi):
H:=plot3d([2*sin(t)*cos(s),2*cos(t)*cos(s),2*sin
(s)],s=0..Pi,t=-Pi..Pi):
display({F,G,H});
```

Мультиплікація

Для ілюстрації графічно зображених процесів у реальному часі, можна використати команду `animate`. Наприклад:

```
[> with(plots):
[>animate(  sin(x*t),x=-10..10,t=1..2,frames=50);
# анімація двовимірного графіка
[> animate3d(  cos(t*x)*sin(t*y),  x=-Pi..Pi,  y=-
Pi..Pi, t=1..2 );# анімація тривимірного графіка
```

Для початку мультиплікації спочатку потрібно активізувати графік, після чого у верхній частині інструментальної панелі з’являється меню Animation. У цьому меню вибирається команда Play. Для зупинки анімації із того ж меню вибирається команда Stop. Анімація може проводитись у режимі одного циклу (команда “Single cycle”), або неперервному режимі (команда “Continuous”). Вказані команди знаходяться в меню Animation. Цей вид графічного зображення корисний для аналізу впливу параметрів у математичному виразі на структуру графіка. У наведеному прикладі двовимірного графіка після функції `sin(x*t)` `вказується область зміни аргумента x, а потім область зміни параметра t.`

1.3.3 Елементи вищої математики

MAPLE дає можливість проводити обчислення у різних сферах вищої математики: диференціювання, інтегрування, знаходити границі, розкладення в ряди, суми та добутки, інтегральні перетворення (Лаплас, Фур’є, Меллін та ін.).

Диференціювання та інтегрування.

MAPLE дає змогу проводити обчислення похідних та інтегралів у символьному вигляді. Наприклад (diff від differentiate – диференціювати):

```
[> diff(sin(x),x);
```

$\cos(x)$

```
[> f:=x*sin(a*x)+b*x^2;
```

$f := x\sin(a\,x) + b\,x^2$

```
[> g:=diff(f, x);
```

$g := \sin(a\,x) + x\cos(a\,x)\,a + 2\,b\,x$

Визначимо невизначений інтеграл від функції g (int від integrate – інтегрувати):

```
[> f1:=int(g,x);
```

$$f1 := -\frac{\cos(a\,x)}{a} + \frac{\cos(a\,x) + a\,x\sin(a\,x)}{a} + b\,x^2$$

Спростимо цей вираз за допомогою команди `simplify` `(спростити)`

```
[> simplify(%);
```

$x\,(\sin(a\,x) + b\,x)$

Тобто, ми отримали вихідну функцію f.

Команда для обчислення визначеного інтеграла, наприклад $\int_1^5 g\,dx$, має вигляд:

```
[> int(g,x=1..5);
```

$5\sin(5\,a) + 24\,b - \sin(a)$

Знаходження границь

MAPLE може обчислювати границі функцій, при спрямуванні аргументу до кінечної або безкінечної величини. Програма розпізнає також невизначені границі.

Нехай задано вираз

```
[> expr := (2*x+3)/(7*x+5);
```

і необхідно знайти границю цієї функції при умові, що x прямує до безкінечності. Відповідна команда і відповідь мають вигляд:

[> **limit(expr, x=infinity);**

$\frac{2}{7}$

Ще один приклад:

[> **limit(sin(x)/x, x=0);**

1

Розкладання функцій в ряд поблизу заданої точки

MAPLE забезпечує можливість наближеного представлення функцій у вигляді рядів. Наприклад задано функцію (у позначеннях, прийнятих у системі MAPLE)

[> `expr := sin(4*x)*cos(x):`

можна наближено (approximately) представити поблизу точки x=0, у вигляді степеневого ряду. (Можна розглянути ряд розкладання поблизу будь – якої точки). Для цього використаємо команду і отримаємо представлення у вигляді ряду (series):

[> **approx1 := series(expr, x=0);**

$$approx1 := 4\,x - \frac{38}{3}\,x^3 + \frac{421}{30}\,x^5 + \mathrm{O}(x^6)$$

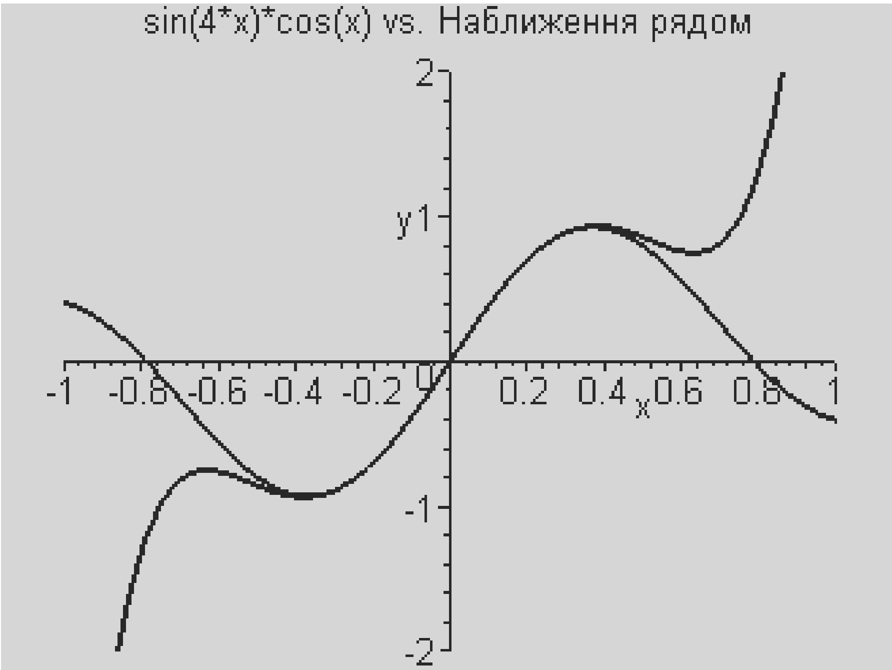
У цьому виразі $\mathrm{O}(x^6)$ означає нескінченно малу величину шостого порядку. Із цього ряду отримуємо поліном, який наближено співпадає із функцією `expr` поблизу точки x=0.

[> **poly1 := convert(approx1, polynom);**

$$poly1 := 4\,x - \frac{38}{3}\,x^3 + \frac{421}{30}\,x^5$$

Тепер порівняємо вихідну функцію та її наближення з поліномом, отриманим в результаті розкладання вихідної функції поблизу точки x=0, за допомогою графічного зображення:

[> **plot({expr, poly1}, x=-1..1, y=-2..2, title =» sin(4*x)*cos(x): vs. Наближення рядом»));**



Знаходження асимптотичного ряду

За допомогою MAPLE можна знаходити та аналізувати поведінку функцій при великих значеннях аргументу. Це досягається шляхом застосування команди asympt (f, x, n), де f - задана функція, x – аргумент, а n – додатнє ціле число, яке вказує порядок членів врахованих в асимптотичному ряді. Розглянемо асимптотичний (asymptotical) ряд функції `exp(x^2)*(1-erf(x))` при значеннях x, значно більших за одиницю. Іншими словами, коли x прямує до безкінечності. У цьому випадку використовується команда

```
[> asympt(exp(x^2)*(1-erf(x)),x,12);
```

Асимптотичний ряд має вигляд:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,x}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}\,x^3}+\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\pi}\,x^5}-\frac{15}{8}\frac{1}{\sqrt{\pi}\,x^7}+\frac{\frac{105}{16}}{\sqrt{\pi}\,x^9}-\frac{945}{32}\frac{1}{\sqrt{\pi}\,x^{11}}+O\left(\frac{1}{x^{13}}\right)$$

Тобто, функція `exp(x^2)*(1-erf(x))` при великих значеннях аргумента ($x \to \infty$) має залежність 1/x (головний член ряду).

4.4. Диференціальні рівняння

Система MAPLE дозволяє розв'язувати багато видів диференціальних рівнянь, як звичайних так і частинних похідних, включаючи задачу Коші та граничні задачі.

В MAPLE є два відповідні пакети DEtools та PDEtools для допомоги в маніпуляціях з диференціальними рівняннями звичайними та в частинних похідних, відповідно. Звернення до цих пакетів здійснюється за допомогою команд:

```
[> with(DEtools);
[> with(PDEtools);
```

Звичайні диференціальні рівняння

Основною командою для знаходження розв'язків диференціальних рівнянь є команда `dsolve`. Можна використовувати оператори диференціювання `D` та `diff` . При цьому MAPLE використовує багато спеціалізованих математичних функцій, типу дельта – функції Дірака.

При команді `diff` комп'ютер обчислює похідну від виразу відносно даної змінної. Оператор `D` знаходить похідну від функції. Наприклад, диференціальне рівняння другого порядку $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)+5\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)+6\,\mathrm{y}(x)=0$ у системі MAPLE можна записати наступним чином:

```
[> diff_eq1 := D(D(y))(x) + 5*D(y)(x) + 6*y(x) = 0;
```

У цьому виразі оператор `D` знаходить похідну від функції. Початкові умови, наприклад y(0) = 0 і $D(y)(0) = 1$, задаються так:

```
[> init_con := y(0)=0, D(y)(0)=1;
```

Тоді, запит на знаходження розв'язку рівняння, при заданих початкових умовах, можна представити у вигляді:

```
[> dsolve( {diff_eq1, init_con} , {y(x)} );
```

Відповідь:

$$y(x) = -e^{(-3x)} + e^{(-2x)}$$

Розглянемо ще один випадок диференціального рівняння, а саме рівняння четвертого порядку, з використанням функцій Дірака: $10^6 \left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} y(t) \right)$ = Dirac(t-2) - Dirac(*t*-4).

У запису MAPLE маємо:

```
[> diff_eq2 := 10^6*(D@@4)(y)(t) = Dirac(t-2) - Dirac(t-4);
```

Тут позначення `D@@4` означає, що оператор D застосовується чотири рази до функції y(t). Для однозначності розв'язку даного диференціального рівняння задаємо *граничні* умови (bound condition). Наприклад: $y(0) = 0$, $y(5) = 1$, $D(y)(0) = 0$, and $(D^{(2)})(y)(5) = 1$, або у системі MAPLE:

```
[> bound_con := y(0) = 0, y(5) = 1, D(y)(0) = 0, (D@@2)(y)(5) = 1;
```

Розв'язуємо граничну задачу і позначимо результат ім'ям solution.

```
[> solution := dsolve( {diff_eq2, bound_con}, {y(t)} );
```

$$solution := y(t) = \frac{1}{6000000} \text{Heaviside}(t-2)\, t^3 - \frac{1}{750000} \text{Heaviside}(t-2) + \frac{1}{500000} \text{Heaviside}(t-2)\, t - \frac{1}{1000000} \text{Heaviside}(t-2)\, t^2 - \frac{1}{6000000} \text{Heaviside}(t-4)\, t^3 + \frac{1}{93750} \text{Heaviside}(t-4) - \frac{1}{125000} \text{Heaviside}(t-4)\, t + \frac{1}{500000} \text{Heaviside}(t-4)\, t^2 + \frac{17249969}{375000000} t^3 - \frac{2374997}{12500000} t^2$$

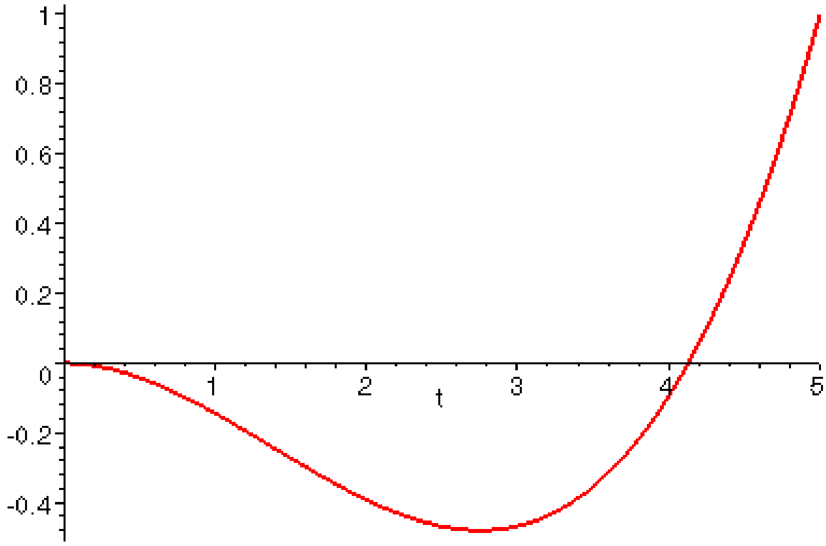
Наявність у рівнянні функцій Дірака обумовила появу у розв'язку ступінчатих функцій Хевісайда.

Для вибору розв'язку використовуємо команду `subs`.

```
[> expr := subs(solution, y(t));
```

Тепер, коли ми знаємо розв'язок даного рівняння з відповідними граничими умовами, можна його відобразити графічно. Для цього використовуємо команди:

```
[> plot( expr, t=0..5);
```



Розглянемо систему двох рівнянь другого порядку. $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathrm{y}(x) = \mathrm{z}(x), \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathrm{z}(x) = \mathrm{y}(x)$

або у записі, характерному для MAPLE:

sys := (D@@2)(y)(x) = z(x), (D@@2)(z)(x) = y(x);

При знаходженні розв'язку цієї системи не будемо конкретизувати початкові, або граничні умови. Таким чином у розв'язку будуть фігурувати постійні інтегрування:, $\_C1$, $\_C2$, $\_C3$, та $\_C4$.

[> **dsolve({sys}, {y(x), z(x)});**

Маємо результат розв'язку цієї системи:

$$\mathrm{z}(x) = \_C1\, \mathbf{e}^x + \_C2 \sin(x) + \_C3 \cos(x) + \_C4\, \mathbf{e}^{(-x)},$$

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\, \mathbf{e}^x - \_C2 \sin(x) - \_C3 \cos(x) + \_C4\, \mathbf{e}^{(-x)}$$

Постійні інтегрування $\_C1$, $\_C2$, $\_C3$, та $\_C4$ знаходяться шляхом накладання певних умов на y(x) та z(x) в заданих точках x.

Корисною для виконання лабораторних робіт є наступна система команд для розвязку (**ans1**) системи (**sys**) звичайних диференціальних рівнянь першого порядку із урахуванням початкових умов (**IC_1)**:

[> **sys := {diff(y(t),t)=-x(t),diff(x(t),t)=y(t)};**

$$sys := \{ \frac{d}{dt} \mathrm{y}(t) = -\mathrm{x}(t), \frac{d}{dt} \mathrm{x}(t) = \mathrm{y}(t) \}$$

[> **IC_1 := {x(a)=A,y(b)=B};**

$$IC\_1 := \{ \mathrm{x}(a) = A, \mathrm{y}(b) = B \}$$

[> **ans1 := combine(dsolve(sys union IC_1,{x(t),y(t)}));**

$$ans1 := \{ \mathrm{x}(t) = \frac{B \sin(t-a) + A \cos(t-b)}{\cos(a-b)}, \mathrm{y}(t) = \frac{B \cos(t-a) - A \sin(t-b)}{\cos(a-b)} \}$$

Диференціальні рівняння в частинних похідних

Для знаходження розв'язку диференціальних рівнянь в частинних (partial) похідних застосовується команда **pdsolve** . Як приклад розглянемо рівняння $\frac{\partial^5}{\partial y^3 \partial x^2} \mathrm{U}(x, y) = 0$.

На мові MAPLE маємо:

[> **pde := D[1, 1, 2, 2, 2](U)(x, y) = 0;**

Тут `D[1](U)` означає похідну від `U` відносно першої змінної, `D[1,1,2,2,2](U)` – двічі диференціювання по першій змінній і тричі по другій. `pde – позначення диференціального рівняння (скорочення від англійського partial differential equation).`

[> **pdsolve(pde, U(x, y));**

Остання команда дає розв'язок диференціального рівняння:

$$\mathrm{U}(x, y) = \_F5(x) + \_F4(x)\, y + \frac{1}{2}\_F3(x)\, y^2 + \_F2(y) + \_F1(y)\, x$$

Тут _F4(x) і _F5(x) – довільні функції x, а _F1(y) та F2(y) – довільні функції y.

1.3.4 Лінійна алгебра

Дуже часто на практиці використовується пакет лінійної алгебри: `LinearAlgebra`. Цей пакет забезпечує набір команд для роботи із матрицями та векторами.

Запуск цього пакету починається із команди `with(LinearAlgebra)` і, звичайно, послідуючого натискання на клавішу "Enter".

Детермінанти та обернені матриці.

Матриця A три на три, з конкретними елементами, визивається так:

[> A := Matrix(3, 3, [1/2, -1/3, 2], [-5, 14/3, 9], [0, 11, -5/6]]);

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{3} & 2 \\ -5 & \frac{14}{3} & 9 \\ 0 & 11 & \frac{-5}{6} \end{bmatrix}$$

Використовуючи команду `Determinant` знаходимо детермінант матриці A:

[> `Determinant(A);`

$$\frac{-2881}{18}$$

Обернена матриця знаходиться за допомогою команди

[> `MatrixInverse(A);`

$$\begin{bmatrix} \frac{1852}{2881} & \frac{-391}{2881} & \frac{222}{2881} \\ \frac{75}{2881} & \frac{15}{5762} & \frac{261}{2881} \\ \frac{990}{2881} & \frac{99}{2881} & \frac{-12}{2881} \end{bmatrix}$$

Задамо іншу матрицю B, яка містить невідомі змінні θ та ϕ.

```
[> B := Matrix( 3, 3, [phi, 0, 0], [0, 3, 2], [-1, 2/3, theta]] );
```

$$B := \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & \frac{2}{3} & \theta \end{bmatrix}$$

При множенні цих матриць одна на іншу, утворюється третя матриця:

```
[> C := A * B;
```

$$C := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\phi - 2 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} + 2\,\theta \\ -5\,\phi - 9 & 20 & \frac{28}{3} + 9\,\theta \\ \frac{5}{6} & \frac{292}{9} & 22 - \frac{5}{6}\theta \end{bmatrix}$$

Детермінант матриці B дорівнює:

```
[> Determinant(B);
```

$$\phi\left(3\,\theta - \frac{4}{3}\right)$$

4.5. *Статистика*

Доступ до статистичного пакету здійснюється за допомогою команди:

```
[> with(stats);
```

Статистичний пакет забезпечує програмами для спрощення аналізу статистичних даних.

Так для аналізу статистичних даних часто використовується метод найменших квадратів, особливо для наближеної аналітичної апроксимації різних чисельних даних. Цей метод починається з команди (звичайно в рамках пакету `with(stats);`)

```
[> with(fit):
```

Нехай маємо дві системи даних:

```
[> Xvalues := [1, 2, 3, 4];
[>Yvalues := [0, 6, 14, 24];
```

Нехай, залежність Y(X) потрібно описати у вигляді аналітичного виразу: y= $a\,x^2 + b\,x + c$ шляхом підгонки значень параметрів a, b, та c. Це досягається шляхом підбору пакетом MAPLE таких значень a, b, та c, які б забезпечували найменші квадрати відхилень знайдених у та х від заданих вище у системі даних. Для цього використовуються команди:

[> **leastsquare[[x, y], y=a*x^2+b*x+c, {a, b, c}]([Xvalues, Yvalues]);**

Відповідь:

$y = x^2 + 3\,x - 4$

Далі використовуючи пакет

[> **with(plots):**

можемо графічно відобразити на рисунку експериментальні дані (у вигляді точок за допомогою команди `scatterplot`):

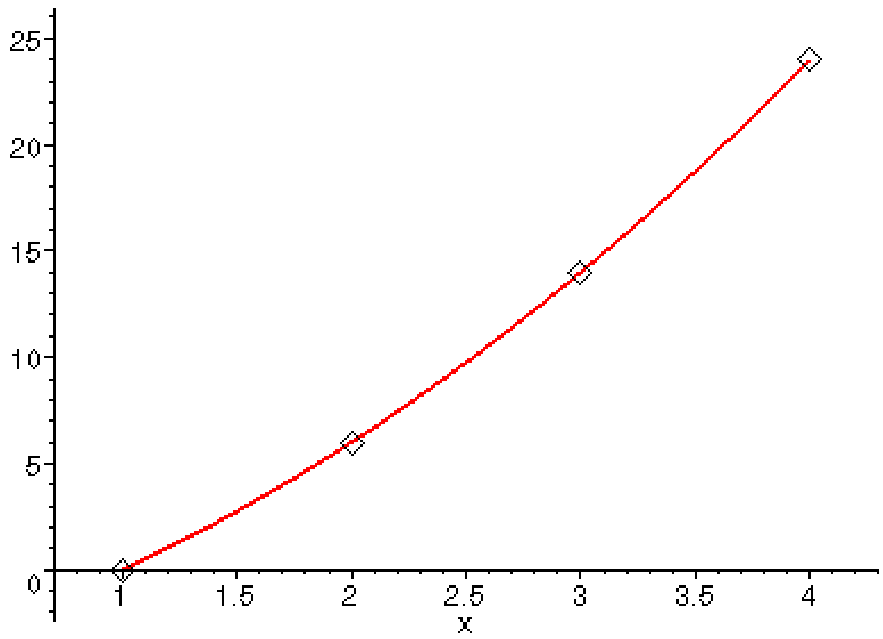
[> f1:=scatterplot(Xvalues, Yvalues, color=black);

`та отриману аналітичну залежність`

[> **f2:=plot(x^2+3*x-4,x=1..4);**

на одному і тому ж рисунку за допомогою команди:

display({f1,f2});



В середовищі MAPLE можна легко знаходити середні значення, медіану, дисперсію та стандартне відхилення для даної системи статистичних даних. Дані представляються у вигляді:

[> **data := [1.1, 5.8, 3.4, 4.2, 3.9, 5, 0.9, 6.2];**

Доступ до описової статистики здійснюється за допомогою запиту:

[>with(describe);

Вище перераховані статистичні характеристики обчислюються за допомогою команд:

[>my_mean := mean(data);

$my\_mean := 3.812500000$

[> **median(data);**

4.050000000

```
[> variance(data);
```

3.403593750

```
[> my_sdev := standarddeviation(data);
```

my_sdev := 1.844883126

Знаходження коефіцієнта лінійної кореляції між двома системами даних здійснюється за допомогою наступної послідовності команд.

По перше, необхідно викликати статистичний пакет:

```
[> with(stats):
```

Далі вводяться системи даних data1 та data2:

```
[> data1:=[1,2,3];
```

data1 := [1, 2, 3]

```
[> data2:=[3,5,7];
```

data2 := [3, 5, 7]

Після чого обчислюється коефіцієнт лінійної кореляції, за допомогою команди:

```
[> describe[linearcorrelation](data1,data2):
evalf(%);
```

1.3.5 Діалогова допомога

Відомості про команди у системі MAPLE можна отримати різними способами.

Допомога по контексту: курсор миші необхідно розмістити на невідомому слові, інформацію відносно якого потрібно отримати. Далі, при одночасному натисканні на клавіші Ctrl та F1 з'являється відповідна тема із допомоги MAPLE .

Броузерна допомога: у пункті меню Help вибрати команду Introduction і у верхній частині робочого вікна в першій колонці вибрати загальну тему, яка представляє інтерес. В інших колонках броузера переглянути інші підтеми, для пошуку відповіді на запитання.

Пошук теми: у пункті меню Help вибрати команду Topic Search. У верхній частині діалогового вікна, яке з'явиться, набрати латинськими літерами тему, яка цікавить. У цьому ж діалоговому вікні з'являться сторінки допомоги, на яких зустрічається шукана тема.

Назва теми: при відомому слові, набрати його англійською мовою у робочому вікні у командній стрічці за знаком запитання. У результаті у робочому вікні з'явиться відповідна сторінка допомоги.

Повний текстовий пошук: у пункті меню Help вибрати команду Full Text Search. У діалоговому вікні записати шукане слово, або слова (з використанням англійської мови). У діалоговому вікні з'явиться відповідна тема – сторінка допомоги.

Історія пошуку: у пункті меню Help можна вибрати команду History. При цьому створюється можливість повторного перегляду сторінок допомоги, які вже використовувалися при даному сеансі роботи із системою MAPLE.

Як правило, кожна сторінка допомоги містить приклади на використання шуканої команди. Виділивши за допомогою курсора миші приклад, можна скопіювати та занести його у робоче вікно. Після цього залишається лише внести правки у конкретні математичні вирази і проводити відповідні обчислення. Така практика корисна, на перших етапах роботи із MAPLE, коли користувач не має достатньої практики користування системою.

4.6. Основні математичні операції на мові MAPLE

(кожна командна стрічка закінчується символом “;”)

Зміст команди	Команда на мові MAPLE	Математичний символ
Відокремлення у командній стрічці не виконуваної частини запису у командній стрічці (наприклад текстове пояснення) Знак “;” після # не вживається.	#	
Число π	Pi;	π
Число e	`exp(1)`	e
Безкінечність	`infinity;`	∞
Уявна одиниця	`I;`	I
Абсолютне значення алгебраїчної величини a	`abs(a);`	$\lvert a \rvert$
Додавання a+b	a+b;	$a+b$
Множення a*b	a*b;	$a\,b$
Віднімання a-b	a-b;	$a-b$
Ділення a:b	a/b;	$\frac{a}{b}$
Корінь квадратний із a	`sqrt(a);`	$\sqrt{a}$
a в степені b	a^b;	a^b
Спрощення виразу expr	simplify(expr);	

Згрупувати члени у виразі expr за ознакою x	`collect(expr,x);`	
Похідна від функції f по аргументу x	diff (f,x);	$\frac{\partial}{\partial x} f$
Невизначений інтеграл від функції f по аргументу x	int(f, x);	$\int f\,dx$
Визначений інтеграл від функції f по аргументу x в межах від a до b	int(f, x=a..b);	$\int_a^b f\,dx$
Сума виразу $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ де κ пробігає значенн від 1 до безкінечності	`sum (1/k^2, k=1..infinity );`	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$
Границя виразу `sin(x)/x` при умові, що `x=0`	`limit(sin(x)/x, x=0);`	$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$
Двовимірний графік функції sin(x), аргумент x змінюється від 0 до 10	`plot(sin(x), x=0..10);`	$\mathrm{plot}(\sin(x), x = 0 .. 10)$
Графік заданої неявно функції y(x)(x^2 + y^2 = 1), при умові, що x змінюється в межах –1 ..1, а y в межах –1..1.	`implicitplot(x^2 + y^2 = 1,x=-1..1,y=-1..1);`	$\mathrm{implicitplot}(x^2 + y^2 = 1, x = -1 .. 1, y$
Тривимірний графік поверхні sin(x+y), x змінюється від -1 до	`plot3d(sin(x+y),x=-1..1,y=-1..1);`	$\mathrm{plot3d}(\sin(x + y), x = -1 .. 1, y = -$

1, а у змінюється від –1 до 1		
Розв'язок алгебраїчного рівняння $ax^2+bx+c=0$	solve (a*x^2+b*x +c=0,{x});	$\mathrm{solve}(a\,x^2+b\,x+c=0,\{x\})$
Розв'язок звичайного диференціального рівняння першого порядку $\frac{dy(x)}{dx}-y(x)-\sin(x)=0$	`dsolve(diff(y(x),x)-y(x)-sin(x)=0);`	$\mathrm{dsolve}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)-\mathrm{y}(x)-\cos(\right.$

4.7. Практичні роботи в MAPLE

Практична робота №1.
Розсіювання забруднювачів в атмосфері. Гаусова модель розсіювання

<u>*Мета роботи*</u>: вміти розраховувати величину забруднення на поверхні землі, обумовленого викидами із точкових джерел забруднення.

<u>*Теоретичні відомості.*</u>

Розсіювання в атмосфері викидів із труб та вентиляційних пристроїв залежить від багатьох факторів: фізичних та хімічних властивостей речовини, що викидається, метеорологічних умов в оточуючій атмосфері, розміщення труби відносно перепон руху повітря та характеру місцевості у напрямку вітру.

Для викиду із труби з ефективною висотою H із урахуванням ефекту віддзеркалення, вираз для концентрації забруднення у викиді при піднятого джерела можна отримати наступний вираз:

$$C(x,y,z)=\frac{Q}{2\pi u\sigma_y\sigma_z}exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\left\{exp\left[-\frac{(z-H)^2}{2\sigma_z^2}\right]+exp\left[-\frac{(z+H)^2}{2\sigma_z^2}\right]\right\},$$

де σ_y і σ_z – дисперсії розсіювання в напрямках y і z.

Для практичного використання приведених формул, окрім фізичних даних таких як координати x, y, z , потужність джерела Q та ефективна висота H, потрібно знати величини, що характеризують швидкість вітру u, а також σ_y та σ_z . Величина швидкості вітру є функцією висоти z. Типовою залежністю u(z) є вираз

$$u(z)=u_1\left(\frac{z}{z_1}\right)^p$$

де u_1 - швидкість вітру на висоті z_1. Практично за величину u_1 приймають значення швидкості вітру виміряне на висоті z_1 =10 м.

Профіль швидкості вітру, а отже і показник p, залежить від характеристик атмосфери.

Зокрема, для міської забудови можна взяти p=0.40, для районів густого лісу, міст та приміських зон p=0.28, а для плоскої відкритої сільської місцевості, озер та морів можна прийняти p=0.16. Значення σ_y та σ_z зв'язані з коефіцієнтами дифузії в напрямку осей y та z. Ці величини є функціями положення точки спостереження в напрямку вітру від джерела, а також функціями умов стійкості атмосфери. Для оцінки цих величин було проведено досить багато експериментальних досліджень, в результаті яких отримані діаграми (див. Додатки 1 -3). .

Перечислені нижче пункти відповідають класам пронумерованим в таблиці 4.1:

Лінійні джерела. У ряді випадків, коли ряд промислових підприємств, розташованих вздовж річки. порту, або пряма автомагістраль з інтенсивним рухом автотранспорту, забруднення може моделюватися неперервним безкінечним лінійним джерелом. Коли швидкість вітру перпендикулярна до такого джерела, концентрація забруднювача у напрямку вітру від джерела може бути записана у вигляді:

$$C(x,y,0) = \frac{2 \cdot q}{\sqrt{2 \cdot \pi}\sigma_z u} exp(-\frac{1}{2}(\frac{H}{\sigma_z})^2$$

де q – потужність джерела на одиницю довжини (наприклад вона може бути виражена в г/с м). У цей вираз не входить стандартне відхилення у горизонтальному напрямку σ_y, оскільки розсіювання газів поперек напрямку вітру від різних дільниць лінійного джерела випромінювання взаємно компенсується.

Якщо неперервне лінійне джерело має обмежену довжину, ми повинні враховувати крайові ефекти Тоді концентрація вздовж осі x на рівні землі буде визначатися виразом:

$$C(x,0,0) = \frac{2 \cdot q}{\sqrt{2 \cdot \pi}\sigma_z u} exp(-\frac{1}{2}(\frac{H}{\sigma_z})^2) \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} exp(-0{,}5 p^2) dp$$

тут $p_1=y_1/\sigma_y$ і $p_2=y_2/\sigma_y$. Якщо границі інтегрування відомі, то значення інтеграла можна знайти в стандартних таблицях.

Завдання для практичної роботи

Приклад 1. Двоокис сірки викидається у кількості 160 г/с із труби зі ефективною висотою 60 м. Швидкість вітру на рівні горловини труби рівна 6 м/с, а атмосферна стійкість відповідає класу D для хмарного дня. Визначити приземну концентрацію на центральній лінії на віддалі 500 м від труби в мікрограмах на кубічний метр.

Розв'язок. Із номограм Додатків 2 і 3 знаходимо, що σ_y і σ_z для віддалі 500 м рівні 36 і 18,5 м, відповідно Підставляючи ці значення та інші дані із умови задачі, знайдемо, що при y=0:

$$C500{,}0{,}0) = \frac{160 \cdot 10^6}{\pi \cdot 6 \cdot 36 \cdot 18{,}5} exp(-0{,}5 \cdot (\frac{60}{18{,}5})^2) = 12{,}7 \cdot 10^3 \cdot 5{,}25 \cdot 10^{-3} = 66{,}0 мкг/м^3 SO_2$$

Приклад 2. Для умов попередньогоприкладу визничити концентрацію у точці, віддаленій на 50 м у напрямку, перпендикулярному центральній лінії і що виходить з точки на цій лінії, віддаленої від труби на 500 м.

Розв'язок. Щоб розрахувати концентрацію на рівні землі у напрямку, перпендикулярному напрямку вітру, необхідно результат попереднього прикаду помножити на $exp(-0{,}5(y/\sigma_y)^2)$, Тоді отримаємо:

$$C500,5,0) = 66,0\,exp(-0,5 \cdot (\frac{50}{36})^2) = 66,0 \cdot 0,38 = 25\,мкг / м^3 SO_2$$

Отже, при віддаленні від центральної лінії на відстань, яка складає всього лише 10 % від віддалі до джерела у напрямку вітру, оцінювана концентрація зменшується майже на 60%.

Приклад 3. Оцінити концентрацію суми вуглеводів у точці, розташованій на віддалі 300 м по напрямку вітру від швидкісної автостради, у хмарний день в 5г 30 хв після полудня. Вітер перпендикулярний автостраді, а його швидкість дорівнює 4 м/с. Інтенсивність пруху автотранспорту вздовж автомагістралі дорівнює 8000 автомобілей за годину, середня швидкість дорівнює 80 км/год. Середня швидкість емісії вуглеводів для кожної автомашини складає 2 10^{-2} г/с.

Розв'язок. Приймемо автостраду за довгий прямолінійний відрізок шляху, будемо вважати, що вуглеводи викидаються в атмосферу із перервного лінійного джерела. Питома потужність джерела на одиницю шляху q визначається у такому випадку добутком швидкості викиду окремого автомобіля на число автомобілів, віднесених до одиниці шляху. Остання величина може бути знайдена діленням числа автомобілів, які проходять через дану точку за одиницю часу, на середню швидкість їх руху. Отже:

$$\frac{автомобілі}{м} = \frac{8000\,автомобілів / г}{40\,миль / г}\left(\frac{милі}{1600\,м}\right) = 0,125$$

Звідси

$$q = \frac{0,125\,авто}{м}\left(\frac{2 \cdot 10^{-2}\,г}{авто \cdot с}\right) = 2,5 \cdot 10^{-3}\,г \backslash (с \cdot м)$$

Для хмарного дня у післяполуденний час клас стійкості атмосфери відповідає індексу D. Тоді, згідно номограмі, для віддалі 300 м σ_z = 12 м. Приймаючи H=0 для приземного джерела, отримуємо:

$$C(300,0,0) = \frac{2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2 \cdot \pi}\,12 \cdot 4} = 42 \cdot 10^{-6}\,г / м^3 = 42\,мкг / м^3$$

Приклад 4. Довгий ряд сільськогосподарських відходів, які горять на полі можна прийняти за безкінечне лінійне джерело. Ясний день, ближче до вечора, швидкість вітру 4,5 м/с. Визначити концентрацію дрібних звішених частинок на віддалі 600 м по вітру, якщо питома потужність такого джерела дорівнює 0,23 г/(м с).

Практична робота №2
Випадання частинок, викинутих димовими трубами.

<u>*Мета роботи*</u>: вміти розраховувати величину забруднення на поверхні землі, обумовленого викидами із точкових джерел негазоподібного забруднення.

<u>*Теоретичні відомості.*</u>

У більшості індустріальних процесів аеральна речовина утворюється або безпосередньо у газовому потоці (наприклад у процесі згорання), або у процесі виробництва з послідуючим надходженням у систему викидів газу. Кількість аерозольної речовини, яка може бути викинута у навколишнє середовище, обмежується законом для ряду специфічних підприємств. Для обмеження рівня емісії у заданих границях використовується система регулювання. Але навіть при використанні такого роду систем деяка кількість частинок попадає в атмосферу із газами, що відходять в атмосферу. Для контролю систем очищення необхідно вміти передбачувати інтенсивність випадання аерозольної речовини на підстилаючи поверхню на різних віддалях від джерела.

Внаслідок дії сил тяжіння величина ефективної висоти труби H повинна бути скоригована відносно постійного осідання частинок. Довжина вільного падіння після вильоту із труби буде дорівнювати добутку швидкості осідання частинок V_t на час t за який основний потік забруднювачів досягне віддалі X по вітру. Цей час дорівнює x/u. Отже, довжина вільного падіння, на яку повинна бути зкоригована величина H, складає V_t x/u. Це еквівалентно пониженню осьової лінії гаусового розподілу по осі z на величину V_t x/u.

Таким чином, з урахуванням сили тяжіння, зміна концентрації частинок може бути описана наступним рівнянням:

$$C(x,y,z,H) = \frac{Q_p}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} exp[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}]\, exp\{-\frac{1}{2}\frac{[z-(H-V_t\frac{x}{u})]^2}{\sigma_z^2}\}$$

Тут Q_P- інтенсивність викиду аерозольних частинок. Ця величина може бути виражена в таких одиницях, як г/с, y_y та y_z – виражаються в м і u в м/с. Величини Q і V_t відносяться до певного виду частинок одного розміру.

Інтенсивність випадання частинок на підстилаючу поверхню вздовж осьової лінії шлейфа визначається так:

$$w = \frac{Q_p V_t}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} exp\{-\frac{1}{2}(\frac{H-\frac{x}{u}V_t}{\sigma_z})^2\}$$

Густина забруднення місцевості P(x,y,t) за час t отримується із цього виразу множенням на ефективну швидкість осідання продуктів викидів на поверхню грунтово - рослинного покрову v_g та на час дії джерела t.

$$P(x,y) = C(x,y,z)\cdot V_t\cdot t \equiv w\cdot t$$

Наведені формули дають придатні оцінки для простих і однорідних умов рельєфу та для середніх широт.

Завдання для практичної роботи

Пил густиною 1.54 г/см^3 викидається із труби, єфективна висота якої дорівнює 120 м. Інтенсивність викидів для частинок діаметром 40 мкм складає 4 г/с. Швидкість вітру дорівнює 3 м/с.Атмосфера характеризується класом стійкості D. Знайти: а)інтенсивність випадань в г/(м^{2}с) для віддалей по вітру 200 і 5000 м;

Практична робота №3
Визначення розмірів зони забруднення грунтів.

<u>Мета роботи</u>: вміти розраховувати розміри зони забруднення території поверхні землі, обумовленого викидами із точкових джерел забруднення та виробити уявлення про міграційну здатність забруднювачів

<u>Теоретичні відомості.</u>

Якщо розглядати термін “забруднення” як збільшення вмісту якого – небудь хімічного елемента, або їх сукупності, то поняття “забруднення грунтів даним полютантом” – це збільшення концентрації даного полютанта у шарі грунту. Обмежимося розглядом верхнього шару грунту, в якому розміщується коренева система рослин. Цей шар грунту може бути джерелом забруднення сільськогосподарської продукції, а також вторинним джерелом забруднення повітря. На поверхневий шар постійно надходять забруднювачі від різних джерел. Ці забруднювачі включаються у різні біогеохімічні процеси міграції, які визначаються природою полютанта, і виносяться із розглядуваного шару грунту. Вміст хімічного елемента у поверхневому шарі у будь – який момент часу t можна представити як функцію ряду параметрів, які характеризують міграцію елемента:

$$C_t = C(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

де α_I — параметр, який характеризує міграцію розглядуваного елемента на границі грунту із сусіднім середовищем.

У першому наближенні можна розглядати п’ять основних процесів, які визначають міграцію хімічних елементів: 1) надходження елемента на поверхню грунту, 2) винос із поверхневим водним стоком, 3) міграція у глибокі шари грунту, 4) відчуження із урожаєм і 5) випаровування.

Маючи ці процеси на увазі, можна представити зміну запасу елемента у грунтовому шарі на одиниці площі за проміжок часу dt у вигляді:

$$dU = dW - dV - dR - dF - dM$$

де dU — зміна запасу інгредієнта у шарі грунту за час dt на одиниці площі; dW — надходження інгредієнта на елементарну площу за час dt; dV — винос інгредієнта із шару грунту водним стоком; dR — винос в рослини і відчуження із урожаєм; dF — випаровування; dM — винос у більш глибокі шари грунту. Очевидно, що про забруднення можна говорити коли надходження елемента буде більшим за його винос:

$$dW > dV + dR + dF + dM$$

Зручно оперувати не з абсолютними величинами компонентів міграції, а з їх відношенням до регіонального фонового рівня $U_Ф$ забруднення кореневого шару грунту даним елементом:

$$v = \frac{dV}{U_Ф}, \quad r = \frac{dR}{U_Ф}, \quad f = \frac{dF}{U_Ф}, \quad d = \frac{dM}{dW}$$

v, r, f и d — параметри, які характеризуть частину запасу елемента, що виноситься, відповідно, водним стоком, урожаєм, вировуванням та ґрунтовими процесами міграції.

Отже умову забрудненості грунту можна записати у вигляді:

$$v + r + f < (1-d)\frac{dW}{U_Ф}$$

Вказані тут основні елементи балансу речовини визначаються грунтово – кліматичними умовами і тільки їх експериментальне визначення дозволить правильно оцінити зону техногенного забруднення.

Розглянемо впадок забруднення грунту атмосферними викидами промислових підприємства. У цьому випадку можна використати наступну апроксимацію, запропоновану Бліновим, залежності густини потоку забруднення на підстилаючи поверхню від віддалі x до джерела:

$$dW = P_0 e^{-kx} dt + P_Ф dt$$

(де k — коефіцієнт, залежний від напрямку та швидкості вітру; P_0 — максимальне значення густини потоку елемента в районі джерела; $P_Ф$ — фоновый рівень потоку. Таким чином, для віддалі від джерела на якій буде відбуватися абруднення отримуємо: $x < \frac{1}{k} ln \frac{P_0 dt}{hC_Ф \rho(r+v+f) - P_Ф t(1-d)}$

де h — товщина кореневого шару грунту, $C_ф$ — регіональна фонова концентрація елемента у грунті, ρ — об’ємна густина грунту.

У першому наближенні, в рамках одного і того ж грунтово – кліматичного регіону параметри $C_ф$, r, v, f і d можна вважати постійними. Тоді розміри зони забруднення будуть залежати лише від максимальної густини потоку елементу на поверхню, тобто від атмосферних викидів.

Приклад 1 Для оцінки розмірів зони забруднення використати параметри, визначені для випадку орних дерново – підзолистих середньо – суглинистих грунтів, приведені у таблиці.

Таблиця. Значення параметрів міграції

Елемент	$C_Ф$, млн$^{-1}$	Параметр			
		v	r	f	d
Ртуть	0,05	0,040	0,005	0,60	0,06
Кадмій	0,50	0,035	0,004	-	0,35
Свинець	22	0,010	0,004	-	0,20

Приклад 2. Порівняти суми компонентів міграції вказаних важких металів. Яка компонента міграції вносить найбільший вклад у міграційну датність вказаних елементів?

Приклад 3 Згідно проведеного аналізу можна бачити, що параметром, який характеризує небезпеку забруднення є відношення $P_0/U_Ф$. Це відношення показує у скільки разів потік елемента на одиницю поверхні грунту перевищує запас цього елемента у грунті. Побудувати графічну залежність розмірів зон забруднення грунтів ртуттю, свинцем та кадмієм від параметра $P_o/U_Ф$ (використати пакет програм MAPLE).

Приклад 4 Розрахувати площу зони забруднення грунту при параметрах міграції наведених у таблиці, використовуючи значення максимальної густини потоку елементів P_0=0,45-10^{-3} кг/($м^2$ час), товщину кореневого шару h=0,1 м, ρ=0,85-10^3 кг/$м^3$ та, припускаючи круговий характер рози вітрів, k=0,2 1/ км.

Приклад 5 Розрахувати площу зони забруднення грунту враховуючи залежність густини потоку забруднення, отриману у попередньому розділі, при значеннях решти параметрів, вказаних у попередньому завданні.

Практична робота №4
Поняття про автономні диференціальні системи

Мета роботи: вміти працювати із автономною системою диференціальних рівнянь, аналізувати її та будувати фазові портрети, використовуючи математичний пакет MAPLE

Теоретичні відомості.

Система звичайних диференціальних рівнянь в які незалежна змінна не входить явним чином називається автономною системою: $d\mathbf{y}/dt = f(\mathbf{y})$. Наприклад рівняння $d\mathbf{x}/dt = x$ є автономним, а рівняння $dx/dt = t$ не автономне. Звичайне диференціальне рівняння другого порядку може бути приведене до рівнянь першого порядку шляхом заміни: du/dt = p, (d^2u/dt^2 = pdp/du, розглядаючи *u* як незалежну змінну. Тут *u* є залежна змінна а *t* незалежна змінна даного рівняння.

Фазовий портрет є рисунок, який показує траєкторії у фазовому просторі. Зокрема, для автономної системи звичайних диференціальних рівнянь в двох змінних, фазовим простором є площина, а фазовий портрет складається із кривих рорзвязків в цій площині.

Приклад 1. Побудувати фазовий портрет системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t) - z(t), \frac{dy(t)}{dt} = z(t) - x(t), \frac{dz(t)}{dt} = x(t) - 2y(t)$$

Розглядаємо інтервал зміни аргумента t=-2..2. Приймаємо початкові умови x(0)=1,y(0)=0,z(0)=2. Оскільки маємо тризалежні змінні x(t),y(t),z(t), то можна розглядати попарні взаємовідношення між ними. Відповідна команда на мові MAPLE має вигляд: scene=[z(t),x(t)], scene=[y(t),x(t)],або scene=[z(t),y(t)]. Команда linecolour=sin(t*Pi/2)говорить проте, що колір вздовж кривої змінюється по закону синуса. Решта команд конкретизує крок розрахунків по незалежній змінній та використовуванийй при цьому метод численних обчислень (напр. **classical[foreuler])**.

Відповідна система команд у форматі MAPLE має вигляд:

[> **with(DEtools):**

[> **phaseportrait([D(x)(t)=y(t)-z(t),D(y)(t)=z(t)-x(t),D(z)(t)=x(t)-y(t)*2], [x(t),y(t),z(t)],t=-2..2,[[x(0)=1,y(0)=0,z(0)=2]],stepsize=.05, scene=[z(t),x(t)],linecolour=sin(t*Pi/2),method=classical[foreuler]);**

Приклад 2. Побудувати фазовий портрет звичайного диференціального рівняння **D(y)(x)=-y(x)-x^2 при трьох різних початкових умовах, а саме:** y(0)=0,y(0)=1,[y(0)=-1]

Можна використати наступну систему команд MAPLE:

[> **phaseportrait(D(y)(x)=-y(x)-x^2,y(x),x=-1..2.5,[[y(0)=0],[y(0)=1],[y(0)=-1]],title=`Asymptotic solution`,colour=magenta,linecolor=[gold,yellow,wheat]);**

Практична робота №5
Математична теорія епідемії.

<u>Мета роботи</u>: вміти аналізувати поширення інфекційних захворювань

<u>Теоретичні відомості.</u>

Розглянемо задачу поширення епідемії, або вірусних захворювань. Нехай деяка популяція складається із N організмів, які можна розділити на три групи. До першої групи включимо організми, які сприйнятливі до деякої хвороби, але здорові. Число таких організмів позначимо через S(t). В другу групу включимо організми, які є інфікованим – вони хворі і є джерелом розповсюдження хвороби. Число таких організмів в момент часу t дорівнює I(t). Нарешті третя група це організми які здорові і мають імунітет до даної хвороби. В даний момент часу t число таких організмів є R(t). Таким чином маємо закон збереження числа осіб, або як інколи говорять – інтеграл системи, S(t)+I(t)+R(t)=N В лінійному наближенні вважається, що зміна числа сприйнятливих до хвороби організсмів пропорційна числу цих організмів. Швидкість зміни числа інфекованих організмів, але виздоровлюючих, також будемо вважати пропорційними числу інфекованих організмів.

Кожний організм, сприйнятливий до захворенння, при захворюванні сам стає інфекційним, тому швидкість зміни числа інфекованих організмів є різниця між захворівшими та тими, що виздоровіли. Отже, вважаючи, що епідемія поширюється без будь яких обмежень на число захворівших організмів, та при відсутності зовнішніх впливів, типу карантину, маємо:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha \cdot (N - R(t) - I(t)) - \beta \cdot I,$$

Рівняння зміни з часом числа організмів, які виздоровлюють, має вигляд:

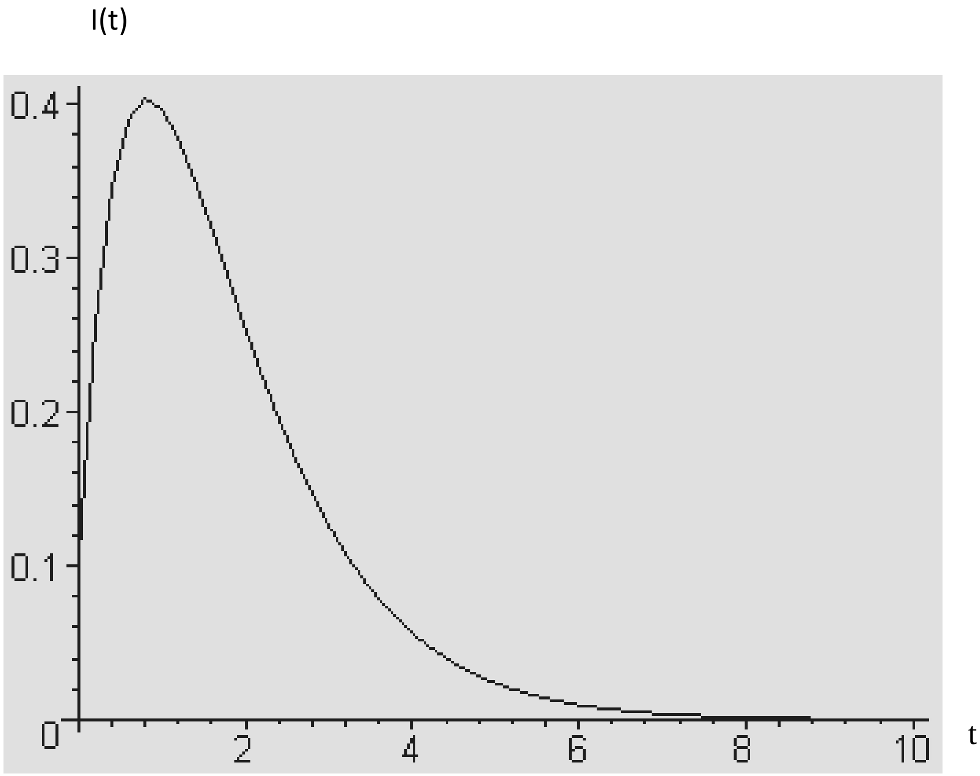
$$\frac{dR}{dt} = \beta \cdot I$$

Коефіцієнти α і β називаються коефіцієнтами захворюваності та виздоровлення, відповідно.

Що стосується початкових умов, то припустимо, що маємо ситуацію, коли в момент часу t=0 у популяції нема організмів із імунітетом (R(0)=0) і маємо число інфекованих організмів I(0). Очевидно, що доля популяції в сильній мірі залежить від типу зепідемії, та характеристик організмів – складових популяції. Ці характеристики описуються параметрами α та β. Розв'язавши вказану систему рівнянь, знайдемо динаміку, наприклад числа інфікованих організмів

Зміна з часом числі інфекованих організмів представлена на рисунку.

Зокрема, із рішення цієї задачі видно, що існує такий момент часу, при якому число інфекованих організмів досягає максимуму.



Практична робота №6

Моделі типу "хижак - жертва".

<u>Мета роботи</u>: вміти аналізувати маханізми міжпопуляційної взаємодії

<u>Теоретичні відомості.</u>

Коли говорять про екологію, то часто під цим словом розуміють взаємовідносини живих організмів, в тому числі і людини, із навколишнім, оточуючим, середовищем. Основне питання, яке виникає при цьому пов'язане із зміною у часі популяції розглядуваних живих організмів. Найбільш простими моделями популяцій, які зв'язані із розмноженням або вимиранням живих організмів , а також із існуванням різних видів живих організмів в ситуації коли є хижак та жертва.

Нехай x(t) – число організмів у популяції в моент часу t. Тоді якщо припустити, що число організмів у популяції, які народжуються за одиницю часу пропорційне числу наявних в цей же момент часу – ах, а число організмів, які вмирають за одиницю часу також пропорційне загальному числу організмів - bх, то швидкість зміни організмів з часом буде визначатися формулою

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x - b \cdot x = (a - b) \cdot x$$

Звідси видно, що при a>b похідна по часу від x(t) буде позитивною, тобто x(t) є зростаючою із часом функцією, а при співвідношенні b>a, похідна – від'ємна і популяція з часом зменшується, тобто вимирає. Більш точно, якщо позначити число живих організмів в початковий момент часу t_0 через x_0, то розв'язок рівняння матиме вигляд:

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)\cdot(t-t_0)}$$

Хоч наведена модель і відповідає деяким реальним випадкам, вона занадто спрощена. Більш реальними моделями є ті які описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Вольтерра аналізуючи рибні улови у Адріатичному морі, відімітив коливання величини улову різних видів риб. Ці коливання мали приблизно один і той же період, але були зсунутими по фазі Для пояснення цього факту Вольтерра запропонував дуже просту модель. Нехай x(t) – число великих риб – хижаків, для яких продуктом харчування виступають менші риби – жертви. Число жертв в момент часу t – y(t).

Динаміка популяції риб у моделі Вольтерра описується рівняннями:

$$\frac{dx}{dt} = -a \cdot x + b \cdot x \cdot y$$

$$\frac{dy}{dt} = cy - d \cdot x \cdot y$$

Вважається, що швидкість приросту риб – хижаків пропорційна наявному числу малих риб жертв – описується членом bxy, Відповідно член, подібного типу – dxy описує зменшення чилса малих риб за рахунок дій хижаків. Ці рівняння можна за допомогою введення нових позначень

$$\tau = c \cdot t,\ u(\tau) = \frac{d}{c} x,\ v(\tau) = \frac{b}{a} y,\ \ \alpha = \frac{a}{c}$$

звести до виду

$$\frac{du}{d\tau} = \alpha u(v-1),\ \frac{dv}{d\tau} = v(1-u)$$

Зауважимо, що введені у цю модель постійні є додатніми. В початковий момент часу $\tau = \tau_0$ числа великих і малих риб відомі і дорівнюють відповідно: $u(\tau_0) = u_0,\ v(\tau_0) = v_0$

Приклад 1. Проаналізувати модель Лоттки – Вольтерри.

Яка із змінних y(t) і (x(t)відповідає жертвам і хижакам?

with(DEtools):

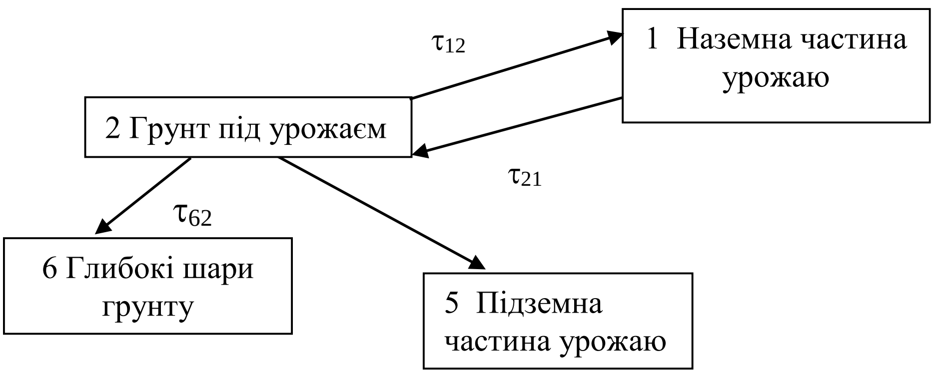
```
DEplot([diff(x(t),t)=x(t)*(1-y(t)),diff(y(t),t)=.3*y(t)*(x(t)-1)],[x(t),y(t)],t=-7..7,[[x(0)=1.2,y(0)=1.2],[x(0)=1,y(0)=.7]],stepsize=.2,title=`Lotka-Volterra model`,color=[.3*y(t)*(x(t)-1),x(t)*(1-y(t)),.1],linecolor=t/2,arrows=MEDIUM,method=rkf45);
```

Практична робота №7.
Модель міграції елементів для сільськогосподарських рослин

Мета роботи: Обчислення вмісту забруднювачів в рослинах при заданному забрудненні грунту

Теоретичні відомості.

Одна із найпростіших концептуальних схем міграції хімічних елементів в агро екосистемі, що широко використовується, представлена на рисунку. Ланка 2 представляє собою орний шар ґрунту із рівномірно розподіленим у ньому елементом.



Очевидно, що така ситуація зустрічається, коли внаслідок обробітку ґрунту верхній шар його перемішується, 1 — наземні частини рослин, 5— підземна частина урожаю, 6— шари ґрунту, що розміщені нижче кореневмісного шару.

Аналогічна схема використовується при моделюванні міграції забруднення у випадку пасовищ, за виключенням компартменту 5.

Представленій концептуальній схемі відповідає система диференціальних рівнянь:

$$\frac{dX_1}{dt} = \tau_{12} X_2 - (\lambda_R + \tau_{12} + \frac{V_h}{A_e D_e}) X_1$$

$$\frac{dX_2}{dt} = \tau_{21} X_2 - (\lambda_R + \tau_{12} + \tau_{52} + \tau_{62}) X_2$$

$$\frac{dX_5}{dt} = \tau_{52} - (\lambda_R + \frac{V_h}{A_e D_e}) X_5$$

де Ae - середня площа, необхідна для виробництва рослинної продукції, що споживається однією людиною (м2), De - запас біомаси посіву продовольчої культури (кг/м2), Vh - добове споживання рослинності людиною, Xi - концентрація забруднення, λR - постійна радіоактивного розпаду (у випадку радіоактивного забруднення) (1/день).

Приклад 1. Обчислити вміст радіонуклідів у наземній частині урожаю із використанням значень параметрів міграції, представлених у таблиці.

Зауваження. Корисною для виконання даної практичної роботи є наступна система команд для розвязку (**ans1)** системи (**sys)** звичайних диференціальних рівнянь першого порядку із урахуванням початкових умов **(IC_1)**:

[> **sys := {diff(y(t),t)=-x(t),diff(x(t),t)=y(t)};**

[> **IC_1 := {x(a)=A,y(b)=B};**

[> **ans1 := combine(dsolve(sys union IC_1,{x(t),y(t)}));**

Вважати, що в початковий час $X_2(0)=1$ кБк/м^2. Всі інші величини $X_i(0)=0$.

Практична робота №8.
Модель міграції радіонуклідів у лісовій екосистемі

Мета роботи: Провести аналіз міграції радіонуклідів у лісовій екосистемі

Теоретичні відомості.

Розподіл, перерозподіл та кругообіг радіонуклідів у лісових ценозах мають свою специфіку у порівнянні із міграцією радіоактивних речовин у інших типах природних ценозів. Лісові екосистеми можуть бути забруднені внаслідок випадання із атмосфери різних забруднювачів на поверхню дерев та на підстилку. Після осідання забруднювачів починається неперервний процес перерозподілу забруднювачів між компонентами лісової екосистеми внаслідок змиву, вилуговування, ресуспензії і т.д. Інтенсивність цих процесів визначається, зокрема, типом лісу (листяний, хвойний).

Швидкість видалення радіонуклідів з лісової підстилки, яка є важливим компонентом лісового покриву, залежить від багатьох факторів, включаючи температуру, вологу та тип листя. Підстилка, поряд лишайниками та мохом, є важливий резервуар в якому радіонукліди можуть акумулюватися на протязі багатьох років. Органічна речовина із листопаду, лишайників, моху, грибів, віток і т.д. є речовиною живлення для багатьох тварин, які є частиною харчових шляхів у напрямку до людини. Гідрологічний цикл та поглинання рослинами і визначають, головним чином, долю радіонуклідів у лісових ґрунтах.

Початкова радіоактивність вбудовується у лабільний пул, далі вилуговується, надходить у кореневу систему різного типу рослин та абсорбується не лабільним пулом.

Вимивання у глибокі ґрунтові горизонти а потім у ґрунтові води є дуже повільні процеси у незбурених лісових ґрунтах. Час напіввидалення радіонуклідів у водорозділах може бути порядку тисячі років. Таким чином компартменти глибоких шарів ґрунту можуть розглядатися як стоки в часовому масштабі декількох сотень років.

В умовах вертикального переносу на поверхню землі в результаті турбулентної дифузії, або випадання під дією сили тяжіння, на шляху частинок також знаходиться фільтр – наземні органи деревної рослинності з розгалуженою поверхнею, на якій відбувається сорбція радіонуклідів. Цей процес захоплення радіоактивних частинок, що випадають із атмосфери на рослинний покрив, називається первинним затриманням радіоактивних речовин на рослинності. Із кількісної точки зору цей процес характеризується коефіцієнтом первинного захоплення $К_{п.з.}=А_1/А_0$. Де $А_0$ – кількість радіонуклідів, що випала на одиницю поверхні, кюрі/км^2, а $А_1$ – кількість радіонуклідів, що перехоплення рослинним покривом, кюрі/км^2.

Щоб інкорпоруватися у рослини, радіонукліди повинні пройти через органічний шар в кореневу зону. При обчисленні надходження радіонуклідів у рослини звичайно використовується фактор переносу (інша назва коефіцієнт накопичення), TF, який визначається як відношення концентрації радіоізотопів у рослинах (Бк/кг, суха або волога маса) до їх концентрації у ґрунті (Бк/кг, суха або волога маса). Часто використовується інший коефіцієнт переходу (Tg), а саме відношення концентрації радіоізотопів у рослинах (Бк/кг) до поверхневого забруднення ґрунту (Бк/м^2). Застосування як TF так і T_g виправдане тільки у випадку досягнення динамічної рівноваги у лісовій екосистемі. Для досягнення урівноваженості потоків радіонуклідів необхідно декілька десятиліть. У табл.6.3.1 представлені Tg для компонент лісової екосистеми, а в табл.6.3.2 – їх значення для ряду грибів

Структура лісової екосистеми

Компартменти лісової екосистеми	Компоненти компартменту
Дерево	Листя, Вітки; Стовбур; корені
Підлісок	Трава; Ягоди; Кущі; Гриби
Органічний шар	підстилка; лишайник; мох
Лабільний ґрунт	Депо для радіонуклідів, із якого вони можуть надходити у кореневу систему, вимиватися

	та поглинатися не лабільним резервуаром (0.1-80 см)
Фіксований ґрунт	Резервуар у якому радіонукліди хімічно зв'язані (0.1-80 см)
Глибокі шари ґрунту	Геофізичний стік для радіонуклідів

Розглянемо просту модель лісової екосистеми, яка є певним аналогом моделі запропонованої Шеллом, Лінковим та ін. Вмісти Q_i радіонуклідів у перелічених компартментах задовольняють наступну систему рівнянь:

$$\frac{dQ_1(t)}{dt} = -a_{21}Q_1(t) + a_{14}Q_4(t) - \lambda Q_1(t) + F_1(t);$$

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = a_{21}Q_1(t) - a_{22}Q_2(t) + a_{23}Q_3(t) - \lambda Q_2(t) + F_2(t);$$

$$\frac{dQ_3^1(t)}{dt} = -a_{23}^1 Q_3^1(t) + a_{34}^1 Q_4(t) - \lambda Q_3^1(t) + F_3^1(t);$$

$$\frac{dQ_3^2(t)}{dt} = -a_{23}^2 Q_3^2(t) + a_{34}^2 Q_4(t) - \lambda Q_3^2(t) + F_3^2(t);$$

$$\frac{dQ_3^3(t)}{dt} = -a_{23}^3 Q_3^3(t) + a_{34}^3 Q_4(t) - \lambda Q_3^3(t) + F_3^3(t)$$

$$\frac{dQ_4(t)}{dt} = a_{42}Q_2(t) - (a_{14} + a_{34}^1 + a_{34}^2 + a_{34}^3 + a_{54} + a_{64})Q_4(t) + a_{45}Q_5(t) - \lambda Q_4(t);$$

$$\frac{dQ_5(t)}{dt} = a_{54}Q_4(t) - a_{45}Q_5(t) - \lambda Q_5(t);$$

$$\frac{dQ_6(t)}{dt} = a_{64}Q_4(t) - \lambda Q_6(t)$$

де $Q_1(t)$ –активність нуклідів у деревині (Бкм$^{-2}$); $Q_2(t)$ - активність нуклідів в органічному шарі (Бкм$^{-2}$); $Q_3^1(t)$ - активність нуклідів у траві (Бкм$^{-2}$); $Q_3^2(t)$ - активність нуклідів у ягодах (Bqm^{-2}); $Q_3^3(t)$ - активність нуклідів у грибах (Бкм$^{-2}$); $Q_4(t)$ - активність нуклідів у лабільному ґрунті (Бкм$^{-2}$); $Q_5(t)$ - активність нуклідів у фіксованому ґрунті (Бкм$^{-2}$); $Q_6(t)$ - активність нуклідів у глибокому шарі ґрунту (Бкм$^{-2}$), Fi – джерело надходження радіонуклідів із зовні у даний компартмент (Бкм$^{-2}$t^{-1}), a_{ij} – швидкість міжкомпартментного переходу (t^{-1}).

Біомаси дерев, підліску і органічного шару приймаються рівними 14, 0.2 і 6 кг/м^2, відповідно, що типово для хвойних лісів Українського Полісся.

У подальшому будемо використовувати час напівжиття у даному компартменті. Час напівжиття, t_{ij}, визначається як час необхідний для половини кількості радіонуклідів, що надійшли в i-й компартмент перейти в j-й компартмент (вважається що інші процеси у системі не впливають на перехід між i-им і j-им компартментами). Час напівжиття зв'язаний із швидкістю переходу простим співвідношенням

$T_{ij}=\ln(2)/a_{ij}$;

Швидкості міжкомпартментного переходу визначаються наступним чином:

$a_{11}=a_{21}=\ln(2)/T_{tr}$; $a_{14}=\ln(2)/T_{tu}$; $a_{22}=a_{44}=\ln(2)/T_{or}$; $a_{23}=a_{33}=\ln(2)/T_{ur}$; $a_{34}=\ln(2)/T_{uu}$; $a_{45}=a_{55}=\ln(2)/T_{ds}$; $a_{44}=\ln(2)/T_{uu}+\ln(2)/T_{tu}+\ln(2)/T_{ab}+\ln(2)/T_{lc}$; $a_{54}=\ln(2)/T_{ab}$; $a_{64}=\ln(2)/T_{lc}$;

Значення параметрів моделі представлені у Додатку 5, а концептуальна модель міграції радіонуклідів у лісовій екосистемі – у Додатку 6.

Рівень забруднення лабільного і фіксованого ґрунту досягає максимуму на четвертий рік після випадання, в той час як глибокі шари ґрунту акумулюють забруднення неперервно.

У хвойних лісах спостерігається аналогічна поведінка, але характерні часи значно більші.

Кількість радіонуклідів у компартментах підліску і дерев значно більша у випадку хвойних лісів порівняно із листяними і досягають максимуму через десять років після випадання.

Як показують результати моделювання при постійній швидкості випадання на листяні та хвойні ліси радіоактивність в усіх компартментах збільшується із часом і набагато більша ніж кількість щорічного випадання (дерева мають вміст радіонуклідів приблизно в шість разів більше за річне випадання). Це вказує на те , що ліси акумулюють радіонукліди.

Більше цього, більш ніж половина радіонуклідів Cs-137 акумулюється у підліску, деревах та підстилці, що призводить до безпосереднього опромінення людини. Тільки незначна частина Cs-137 досягає глибоких шарів ґрунту.

Вхідні дані для моделювання обігу радіонуклідів у листяних та хвойних лісах представлені у табл. 6.3 і 6.4.

where

Ad crowns = dry deposition to tree crowns (Bq m-2)

Ad trunks = dry deposition to tree trunks (Bq m-2)

Ad understorey = dry deposition to understorey (Bq m-2)

Ad soil = dry deposition to soil (Bq m-2)

Vg crowns max = dry deposition velocity for tree crowns (m s-1)

Vg trunks = dry deposition velocity for tree trunks (m s-1)

Vg understorey max = dry deposition velocity for understorey (m s-1)

Vg soil = dry deposition velocity for soil (m s-1)

LAIi / LAIi max = ratio between the leaf area index of tree crowns or of understorey
at time of deposition and the maximum leaf area index, respectively
Ca = time-integrated concentration of radionuclides in air (Bq s m-3)
The values for Vg, i and LAIi are given in Appendix B.

```
 Tij=ln(2.0)/aij;
> Tds:=1.1;
> Tab:=0.64;
> Bt:=60;
> Bu:=20;
> f:=0.8;
> Tlc:=400;
> Tor:=8;
> lambda:=ln(2.0)/30.14;
> Ttu:=2;
> Ttr:=80/365;
> Tur:=32/365;
> Tuu:=8;
> a11:=ln(2.0)/Ttr;
> a21:=ln(2.0)/Ttr;
> a45:=ln(2.0)/Tds;
> a23:=ln(2.0)/Tur;
> a33:=ln(2.0)/Tur;
> a14:=ln(2.0)/Ttu;
> a22:=ln(2.0)/Tor;
> a44:=ln(2.0)/Tor;
> a54:=ln(2.0)/Tab;
> a42:=ln(2.0)/Tor;
> a64:=ln(2.0)/Tlc;
> a34:=ln(2.0)/Tuu;
> Io:=0;
> F1:=Io*f*Bt/(Bt+Bu);
> F3:=Io*f*Bu/(Bt+Bu);
> F2:=Io-F1-F3;
> Q0:=1;
> Q10:=Q0*f*Bt/(Bt+Bu);
> Q30:=Q0*f*Bu/(Bt+Bu);
> Q20:=Q0-Q10-Q30;
> with(plots):
> sys:=diff(Q1(t),t)=-a21*Q1(t)+a14*Q4(t)-
lambda*Q1(t),diff(Q2(t),t)=a21*Q1(t)-a22*Q2(t)+a33*Q3(t)-
```

```
lambda*Q2(t),diff(Q3(t),t)=-a23*Q3(t)+a34*Q4(t)-
lambda*Q3(t),diff(Q4(t),t)=a42*Q2(t)-(a14+a34+a54+a64)*Q4(t)+a45*Q5(t)-
lambda*Q4(t),diff(Q5(t),t)=a54*Q4(t)-a45*Q5(t)-
lambda*Q5(t),diff(Q6(t),t)=a64*Q4(t)-lambda*Q6(t):
fcns:={Q1(t),Q2(t),Q3(t),Q4(t),Q5(t),Q6(t)}:

>
p:=dsolve({sys,Q1(0)=Q10,Q3(0)=Q30,Q2(0)=Q20,Q4(0)=0,Q5(0)=0,Q6(0)=0},fc
ns,type=numeric):
> odeplot(p, [t,Q1(t)], 5..40, numpoints=50,title="Питома активність
деревини");
> odeplot(p, [t,Q2(t)], 0..10, numpoints=50,title="Питома активність
органічного шару");
> odeplot(p, [t,Q3(t)], 5..20, numpoints=50,title="Питома активність
нижнього ярусу");
> odeplot(p, [t,Q4(t)], 5..40, numpoints=50,title="Питома активність лабільної
фракції");
> odeplot(p, [t,Q5(t)], 5..40, numpoints=50,title="Питома активність
фіксованої фракції");
> odeplot(p, [t,Q6(t)], 5..20, numpoints=50,title="Питома активність глибоких
шарів грунту");
>
>
```

РОЗДІЛ 5. ОСНОВИ РОБОТИ З MATHCAD

5.1. Призначення та можливості системи MATHCAD

Mathcad — система комп'ютерної алгебри з класу систем автоматизованого проектування, орієнтована на підготовку інтерактивних документів з обчисленнями і візуальним супроводженням, відрізняється легкістю використання і застосування для колективної роботи.

Незважаючи на те, що ця програма здебільшого орієнтована на користувачів-непрограмістів, Mathcad також використовується в складніших проектах, щоб візуалізувати результати математичного моделювання, шляхом використання найбільш поширених обчислень і традиційних мов програмування.

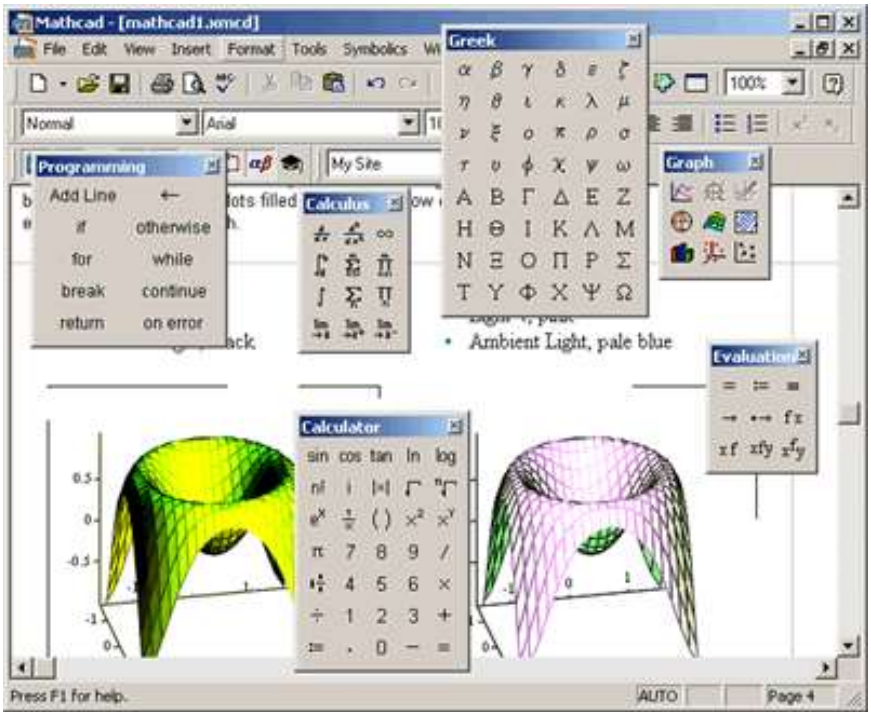


Рис. 5.1 - Головне вікно системи MATHCAD

Основна відмінність Mathcad від аналогічних програм — це графічний, а не текстовий режим вводу виразів. Для набору команд, функцій, формул можна використовувати як клавіатуру, так і кнопки на численних спеціальних панелях інструментів. В будь якому разі — формули будуть мати звичний, аналогічний книжковому, вигляд. Тобто особливої підготовки для набору формул, власне, й не потрібно. Обчислення із введеними формулами здійснюються за бажанням користувача або миттєво, одночасно із набором, або за командою. Звичайні формули обчислюються зліва-направо і зверху вниз (подібно читанню тексту). Будь-які змінні, формули, параметри можна змінювати, спостерігаючи наочно відповідні зміни результату. Це дає можливість організації справді інтерактивних обчислювальних документів.

Mathcad містить сотні операторів і вбудованих функцій для вирішення різних технічних завдань. Програма дозволяє виконувати чисельні і символьні обчислення, проводити операції з скалярними величинами, векторами і матрицями, автоматично переводити одні одиниці вимірювання в інші.

Серед можливостей Mathcad є:

- ✓ Розв'язання диференціальних рівнянь, в тому числі і чисельними методами.
- ✓ Побудова двовимірних і тривимірних графіків (в різних системах координат, контурні, векторні тощо).
- ✓ Використання грецького алфавіту (верхній і нижній регістр) як в тексті, так і у рівняннях.
- ✓ Символьні обчислення.
- ✓ Операції з векторами і матрицями.
- ✓ Символьне розв'язання систем рівнянь.
- ✓ Згладжування кривих.
- ✓ Виконання підпрограм.
- ✓ Знаходження коренів функцій і поліномів.
- ✓ Статистичні функції і розподіли ймовірностей.
- ✓ Пошук власних значень і власних векторів.
- ✓ Обчислення з розмірностями.

За допомогою Mathcad інженери можуть документувати всі обчислення в процесі їх проведення.

5.2. Математичні вирази і типи даних в MathCAD

MathCAD працює з *документами*. З погляду користувача, документ - це чистий аркуш паперу, на якому можна розміщати блоки трьох основних типів: математичні вирази, текстові фрагменти і графічні області.

Розташування нетекстових блоків у документі має принципове значення – *зліва направо і зверху вниз.*

До основних елементів математичних виразів MathCAD відносяться *типи даних, оператори, функції* і *керуючі структури.*

Оператори - елементи MathCAD, за допомогою яких можна створювати математичні вирази. До них, наприклад, відносяться символи арифметичних операцій, знаки обчислення сум, добутків, похідної, інтегралу і т.д. Оператор визначає:

1. дію, що повинна виконуватися при наявності тих чи інших значень операндів;
2. скільки, де і які операнди повинні бути введені в оператор.

Операнд – число чи вираз, на яке діє оператор. Наприклад, у виразі **5! + 3** число **3** і вираз **5!** – операнди оператору **+** (плюс), а число **5** операнд оператору факторіал (!). Після вказівки *операндів* оператори стають блоками, що виконуються у документі. У Додатку 2 даного посібника наведено список операторів, що найбільш часто використовуються.

До *типів даних* відносяться числові константи, звичайні і системні змінні, масиви (вектори і матриці) і дані файлового типу.

Константами називають пойменовані об'єкти, що зберігають деякі значення, що не можуть бути змінені. ***Змінні*** є пойменованими об'єктами, що мають деяке значення, що може змінюватися по ходу виконання програми. Тип змінної визначається її значенням; змінні можуть бути числовими, рядковими, символьними і т.д. Імена констант, змінних і інших об'єктів називають *ідентифікаторами*. Ідентифікатори в MathCAD являють собою набір латинських чи грецьких букв і цифр.

У MathCAD міститься невелика група особливих об'єктів, які не можна віднести ні до класу констант, ні до класу змінних, значення яких визначені одразу після запуску програми. Їх вірніше вважати ***системними змінними***, що мають визначені системою початкові значення. Зміну значень системних змінних роблять у вкладці **Вбудовані змінні** діалогового вікна **Math Options** команди **Математика ⇒ Опції.**

Звичайні змінні відрізняються від системних тим, що вони повинні бути попередньо *визначені* користувачем, тобто їм необхідно хоча б один раз *присвоїти значення*. У якості *оператора присвоєння* використовується знак **:=**, тоді як знак = відведений для *виводу значення* чи константи змінної.

Якщо змінній присвоюється початкове значення за допомогою оператора **:=** викликається натисканням клавіші **:** (двокрапка) на клавіатурі, таке присвоєння називається *локальним*. До цього присвоєння змінна не визначена і її не можна використовувати. Однак за допомогою знака **≡** (клавіша ~ на клавіатурі) можна забезпечити *глобальне* присвоєння. MathCAD прочитує весь документ двічі зліва направо і зверху вниз. При першому проході виконуються всі дії, запропоновані глобальним оператором присвоєння (**≡**), а при другому – виробляються дії, запропоновані локальним оператором присвоєння (**:=**), і відображаються всі необхідні результати обчислень (=).

Існують також жирний знак рівності **=** (комбінація клавіш **Ctrl** + =), що використовується, наприклад, як оператор наближеної рівності при розв'язку систем рівнянь, і символьний знак рівності → (комбінація клавіш **Ctrl + .**).

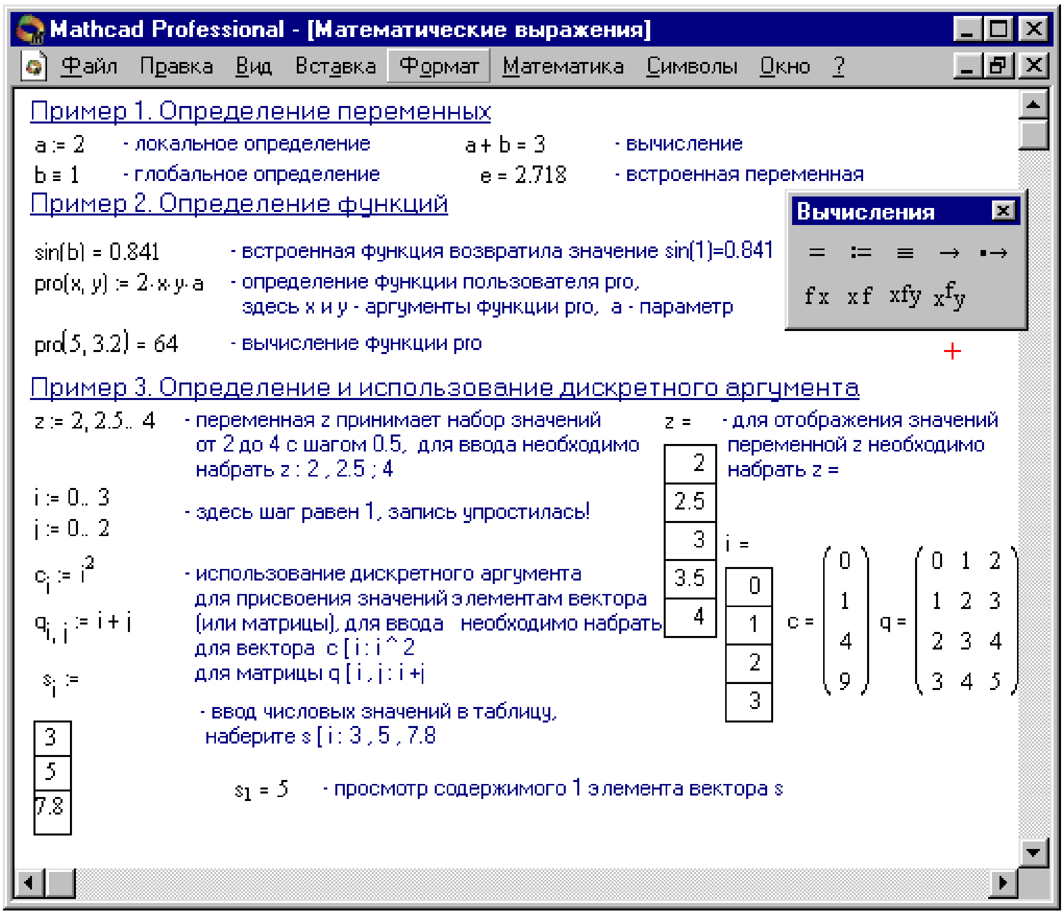


Рис 5.2 - Відображення математичних та текстових виразів в MathCAD

Дискретні аргументи - особливий клас змінних, який у пакеті MathCAD найчастіше заміняє ***керуючі структури***, називані циклами (однак повноцінною така змінна не є). Ці змінні мають ряд фіксованих значень, або цілочисельних (1 спосіб), або у вигляді чисел з визначеним кроком, що міняються від початкового значення до кінцевого (2 спосіб).

1. *Name* := *Nbegin* .. *Nend*,

де *Name* – ім'я змінної, *Nbegin* – її початкове значення, *Nend* – кінцеве значення, **..** – символ, що вказує на зміну змінної в заданих межах (вводиться клавішею **;**). Якщо *Nbegin* < *Nend*, то крок змінної буде дорівнює +1, інакше –1.

2. *Name* := *Nbegin*, (*Nbegin* + *Step*) .. *Nend*

Тут *Step* – заданий крок зміни змінної (він повинний бути додатнім, якщо *Nbegin* < *Nend*, чи від’ємним в іншому випадку).

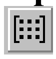
Дискретні аргументи значно розширюють можливості MathCAD, дозволяючи виконувати багаторазові обчислення чи цикли з повторними обчисленнями, формувати вектори і матриці.

Масив - сукупність, що має унікальне ім'я, кінцевого числа числових чи символьних елементів, впорядкованих деяким чином і що мають визначені адреси. У пакеті MathCAD використовуються масиви двох найбільш розповсюджених типів:

- одновимірні (вектори);
- двовимірні (матриці).

Порядковий номер елемента, що є його адресою, називається *індексом*. Індекси можуть мати тільки цілочисельні значення. Вони можуть починатися з нуля чи одиниці, у відповідності зі значенням системної змінний **ORIGIN**.

Вектори і матриці можна задавати різними способами:

- за допомогою команди **Вставка ⇒ Матриця**, чи комбінації клавіш **Ctrl + M**, чи щигликом на кнопці  панелі **Матриця,** заповнивши масив порожніх полів для не занадто великих масивів;
- з використанням дискретного аргументу, коли має місце деяка явна залежність для обчислення елементів через їхні індекси.

Вставка текстових фрагментів на лист MathCAD

Текстові фрагменти являють собою куски тексту, що користувач хотів би бачити у своєму документі. Існують два види текстових фрагментів:

- *текстова область* призначена для невеликих шматків тексту - підписів, коментарів і т.п. Вставляється за допомогою команди **Вставка ⇒ Текстова** або комбінації клавіш **Shift + "** (подвійні лапки);
- *текстовий абзац* застосовується в тому випадку, якщо необхідно працювати з абзацами чи сторінками. Вставляється за допомогою комбінації клавіш **Shift + Enter**.

5.3. Обчислення функцій та побудова графічних областей в MathCAD

Функція – вираз, відповідно до якого проводяться деякі обчислення з *аргументами* і визначається його числове значення.

Слід особливо зазначити різницю між *аргументами* і *параметрами* функції. Змінні, зазначені в дужках після імені функції, є її *аргументами* і замінюються при обчисленні функції значеннями з дужок. Змінні в правій частині визначення функції, не зазначені дужках у лівій частині, є *параметрами* і повинні задаватися *до* визначення функції.

Головною ознакою функції є *повернення значення*, тобто функція у відповідь на звернення до неї по імені з вказівкою її аргументів повинна повернути своє значення.

Функції в пакеті MathCAD можуть бути *вбудовані*, тобто завчасно введені розроблювачами, і *визначені користувачем*.

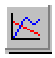
Способи вставки вбудованої функції:

1. Вибрати пункт меню **Вставка ⇒ Функція**.
2. Натиснути комбінацію клавіш **Ctrl + E**.
3. Клацнути на кнопці .

В середовищі Mathcad фактично немає графіків функцій в математичному розумінні терміну, а є візуалізація даних, що знаходяться у векторах та матрицях (тобто здійснюється побудова як ліній, так і поверхонь по точках з інтерполяцією), хоча користувач може про це й не знати, оскільки у нього є можливість використання безпосередньо функцій однієї або двох змінних для побудови графіків чи поверхонь відповідно.

Графічні області поділяються на три основних типи - двовимірні графіки, тривимірні графіки й імпортовані графічні образи. Двовимірні і тривимірні графіки будуються самим MathCAD на підставі оброблених даних.

Для створення ***декартового графіка***:

1. Встановити візир у порожньому місці робочого документа.
2. Вибрати команду **Вставка ⇒ Графік ⇒ X-У графік,** чи натиснути комбінацію клавіш **Shift + @,** чи клацнути кнопку  панелі **Графіки**. З'явиться шаблон декартового графіка.
3. Введіть у середній мітці під віссю *X* першу незалежну змінну, через кому – другу і так до 10, наприклад $x1$, $x2$, …
4. Введіть у середній мітці ліворуч від вертикальної осі *Y* першу незалежну змінну, через кому – другу і т.д., наприклад $y1(x1)$, $y2(x2)$, …, чи відповідні вирази.
5. Клацніть за межами області графіка, щоб почати його побудову.

Тривимірні, чи ***3D-графіки***, відображають функції двох змінних виду $Z(X, Y)$. При побудові тривимірних графіків у ранніх версіях MathCAD поверхню потрібно було визначити математично (Рис. 7.3., спосіб 2). Тепер застосовують функцію MathCAD *CreateMesh.*

CreateMesh(*F* (чи *G*, чи *f*1, *f*2, *f*3), *x*0, *x*1, *y*0, *y*1, *xgrid*, *ygrid*, *fmap*)

Створює сітку на поверхні, визначеною функцією *F*. *x*0, *x*1, *y*0, *y*1 – діапазон зміни змінних, *xgrid, ygrid* – розміри сітки змінних, *fmap* – функція відображення. Усі параметри, за винятком *F*, - факультативні. Функція *CreateMesh* за замовчуванням створює сітку на поверхні з діапазоном зміни змінних від –5 до 5 і із сіткою 20×20 точок.

Приклад використання функції *CreateMesh* для побудови 3D-графіків наведений на рисунку 7.3., спосіб 1. На рисунку 7.3. побудована та сама поверхня різними способами, з різним форматуванням, причому зображені поверхні і під ними ті ж поверхні у вигляді контурного графіка. Така побудова здатна додати малюнку велику наочність.

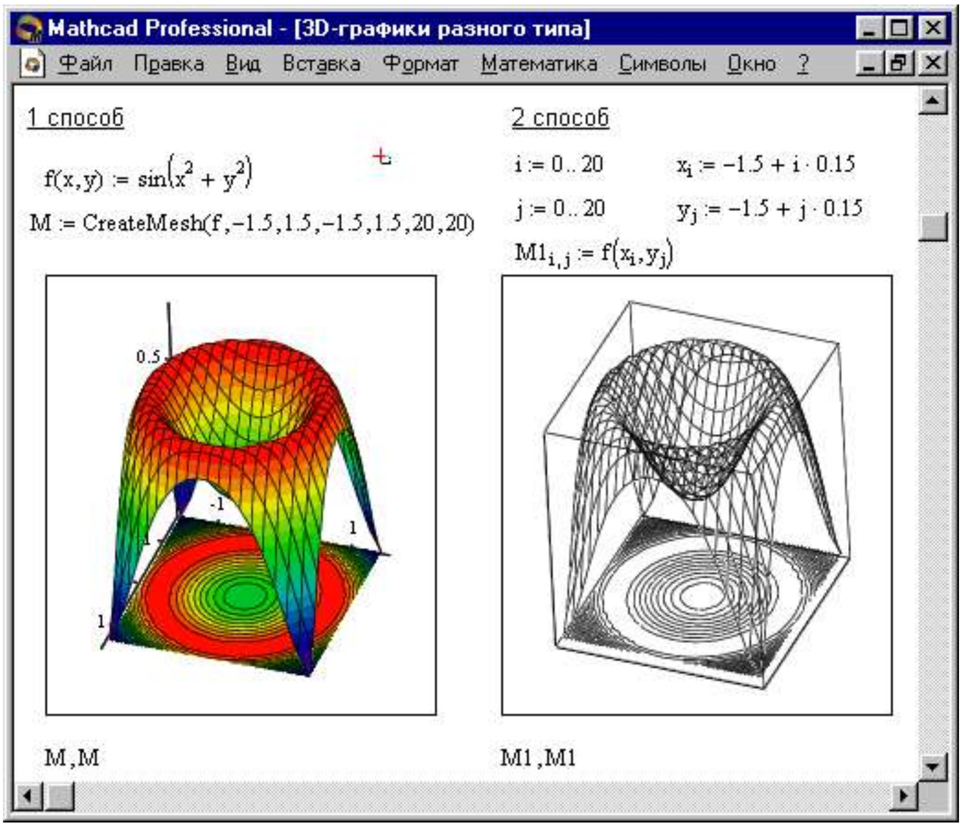


Рис. 5.3 - Приклад побудови на одному малюнку двох 3D-графіків різного типу в MathCAD

Нерідко поверхні і просторові криві представляють у вигляді крапок, чи кружечків або інших фігур. Такий графік створюється операцією **Вставка ⇒ Графік ⇒ 3D Точковий**.

Причому поверхня задається параметрично – за допомогою трьох матриць (*X, Y, Z*) (див. рисунок 5.4., спосіб 2), а не однієї, як у прикладі на рисунку 7.3. Для визначення вихідних даних для такого виду графіків використовується функція *CreateSpace* (див. рисунок 5.4., спосіб 1).

CreateSpace (*F* , *t*0, *t*1, *tgrid*, *fmap*)

Повертає вкладений масив трьох векторів, що представляють *x*-, *y*-, і *z*- координати просторової кривої, визначеною функцією *F*. *t*0 і *t*1 – діапазон зміни змінної, *tgrid* – розмір сітки змінної, *fmap* – функція відображення. Усі параметри, за винятком *F*, - факультативні.

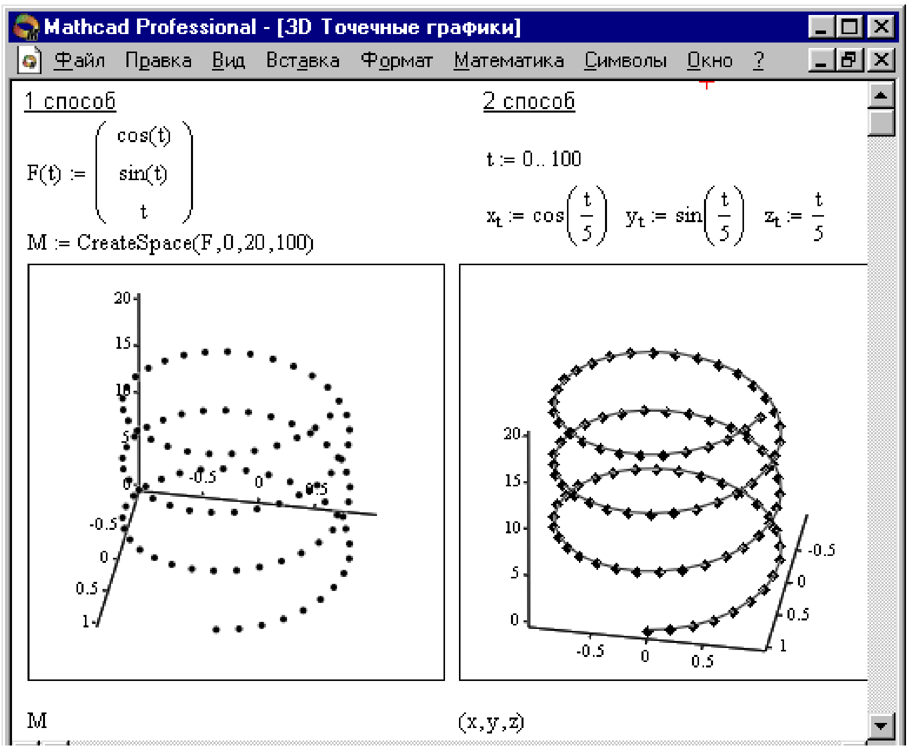


Рис. 5.4 - Побудова 3D Точкових графіків

Побудова фігур, що перетинаються

Особливий інтерес являє собою можливість побудови на одному графіку ряду різних фігур чи поверхонь з автоматичним обліком їхнього взаємного перетинання. Для цього треба роздільно задати матриці відповідних поверхонь і після виводу шаблона 3D-графіки перелічити ці матриці під ним з використанням як роздільник коми (див. рис. 5.5.).

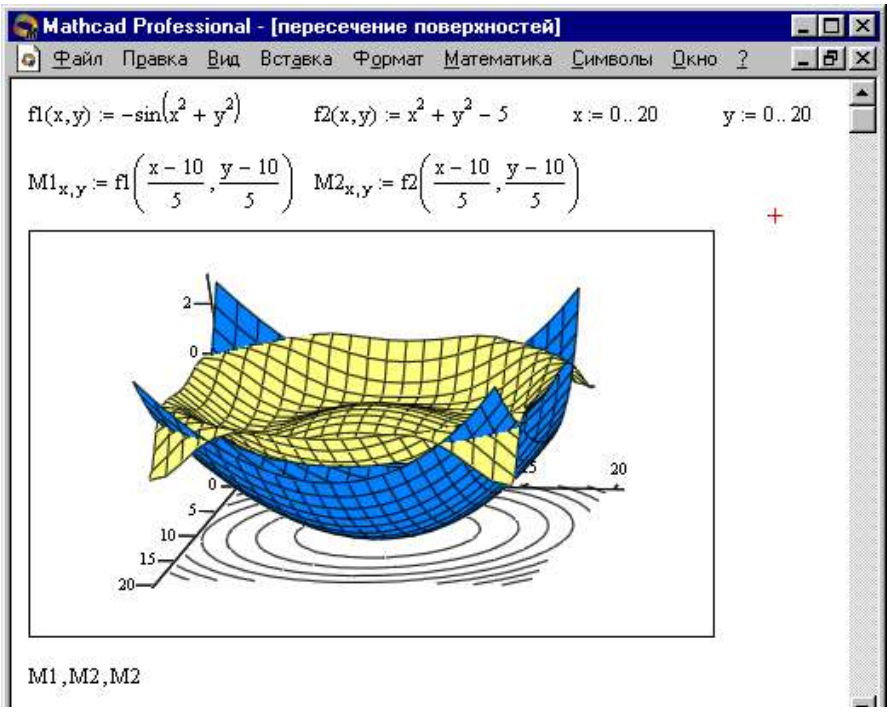


Рис. 5.5 - Побудова двох пересічних поверхонь і одночасно контурного графіка однієї з них

Створення анімаційного кліпу

MathCAD має вбудовану змінну FRAME, чиє єдине призначення - керування *анімаціями*:

- Створіть об'єкт, чий вид залежить від FRAME.
- Переконаєтеся, що встановлено режим автоматичного розрахунку (**Математика ⇒ Автоматичне Обчислення**).
- Виберіть **Вид ⇒ Анімація** для виклику однойменного діалогового вікна.
- Вкладіть в пунктирний прямокутник, що виділяє, частину робочого документа, яку потрібно анімувати.
- Встановіть нижні і верхні границі FRAME (**Від:** і **До:**).
- У поле **Швидкість** введіть значення швидкості відтворення (кадрів/сек).
- Виберіть **Анімація**. Зараз анімація тільки створюється.
- Збережіть анімацію як AVI файл (**Зберегти як**).
- Відтворіть збережену анімацію **Вид ⇒Відтворення.**

5.4. Практичні роботи та приклади обчислень в MathCAD

Цей приклад демонструє обробку виборки малого обсягу. Нехай

$x_0 := 10 \quad x_1 := 10 \quad x_2 := 10 \quad x_3 := 30 \quad x_4 := 20$

$x_5 := 12 \quad x_6 := 10 \quad x_7 := 12 \quad x_8 := 20 \quad x_9 := 10$

$N := \mathrm{length}(x) \qquad N = 10$,

де N - обсяг вибірки. За допомогою внутрішньої функції **sort** в масиві Y отримаємо варіаціний ряд для початкової вібірки.

$Y := \mathrm{sort}(x) \qquad Y^T =$

	0	1	2	3	4	5
0	10	10	10	10	10	12

Побудуємо статистичний ряд. Виберемо елементи, що не повторюються та запишемо їх в масив X:

$X_0 := 10 \quad X_1 := 12 \quad X_2 := 20 \quad X_3 := 30$

$n := \mathrm{length}(X) \qquad n = 4$

n – кількість елементів, що не повторюються.

Обчислимо абсолютні та відностні частоти для всіх елементів X:

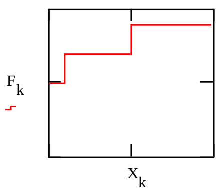
$j := 0..\, n-1 \qquad k := 0..\, N-1$

$$m_j := \sum_k \mathrm{if}\left(x_k = X_j, 1, 0\right) \qquad p := \frac{m}{N} \qquad \sum_j p_j = 1$$

Обчислимо статистичну функцію розподілу та побудуємо її графік:

$j := 1 .. n-1 \quad F_0 := p_0 \quad F_j := F_{j-1} + p_j$

$k := 0 .. n-1$



$F^T = (0.5 \;\; 0.7 \;\; 0.9 \;\; 1)$

$p^T = (0.5 \;\; 0.2 \;\; 0.2 \;\; 0.1)$

Практична робота №1. Варіаційні та кумулятивні ряди

Тема. Вибіркова сукупність. Варіаційні та кумулятивні ряди. Графіки варіаційних і кумулятивних рядів.

Мета роботи: розглянути, що таке генеральна сукупність, вибірка та варіаційний ряд, кумулятивний ряд. Навчитись складати варіаційні та кумулятивні ряди та будувати їх графіки.

Завдання для самостійної підготовки:

1. Вивчити, що таке математична статистика, статистична і генеральна сукупність, варіація та варіанта.
2. Розібратися для чого використовується вибірка та якого головного правила потрібно дотримуватись у цьому разі.
3. Вивчити методику складання безінтервальних та інтервальних варіаційних і кумулятивних рядів, чим вони відрізняються, коли застосовуються та як зображаються на графіках (варіаційна крива, гістограма, кумулята).

Теоретична частина

Математична статистика як розділ вищої математики, вивчає закономірності властивостей систем із багатьох тіл, об'єктів, суб'єктів, явищ тощо. Аналізує велику кількість дослідних даних, які призначені для даної спеціалізації - біоорганізми, особини, екосистеми тощо.

З метою зменшення матеріальних затрат і часу на дослідження (обстеження) генеральної сукупності (наприклад, фермерських господарств і т.п.) за відповідною ознакою x_i (x_i – екологічні показники, що досліджуються в АПК). З генеральної сукупності N особин вибирають частину n (n<N) репрезентовано, тобто у вибірку попадають особини з різним значенням ознаки.

Складають варіаційний ряд:

$$X_i: X_1, X_2, ..., X_K \qquad (1)$$
$$f_i: f_1, f_2, ..., f_K,$$

де f_i - частота повторюваності ознаки, тобто кількість особин, які мають однакове значення ознак x_i, складають класи. Причому ряд (1) рангують, тобто розміщують за зростаючим порядком

$$X_i: X_1 < X_2, ..., < X_K$$
$$f_i: f_1 < f_2, ..., < f_K \ .$$

Таким чином, за частотою f_i вибірка ділиться на класи, кількість K яких визначається за формулою Стерджерса (значення k заокруглюється):

$$k = 1 + 3{,}32 \cdot \lg(n) \qquad (2)$$

Інтервал $[x_{\min} - x_{\max}]$ значень ознаки ділять на K підінтервалів, довжина яких обчислюється за формулою:

$$\lambda = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} \ . \qquad (3)$$

Кількість класів збільшується на 1 зміщенням $x_{\min}$ і $x_{\max}$ відповідно вліво і вправо на $\lambda/2$, тобто початкове хп і кінцеве хк значення ознаки буде визначатися так:

$$x_n = x_{\min} - \frac{\lambda}{2} \qquad (4)$$

$$x_к = x_{\max} + \frac{\lambda}{2} \qquad (5)$$

Визначають початкові xn_i і кінцеві xk_i (i=1,2,…, k+1) значення інтервалів шляхом додавання λ, тобто:

$$xn_1 = xn, \quad xn_i = xn_{(i-1)} + \lambda \quad i = 2,3...k+1$$
$$xk_i = xn_i + (\lambda - 1). \qquad (6)$$

Тут кінцеве значення кожного інтервалу зменшують на 1, щоб воно не співпадало з початком кожного наступного інтервалу. Обчислюють середнє арифметичне значення xc_i ознаки кожного інтервалу:

$$xc_i = \frac{xn_i + xк_i}{2} \ . \qquad (7)$$

Відносні частини в долях одиниці або у відсотках обчислюють за формулами:

$$v_i = \frac{f_i}{n}, \qquad (8)$$

$$v_i = \frac{f_i}{n} \cdot 100\% . \qquad (9)$$

За варіаційним рядом (1) складають кумулятивний (накопичуючий) ряд $(i = 1,2, ..., k+1)$

$$Sf_1 = f_1 \qquad (10),$$

$$Sf_i = Sf_{(i-1)} + f_i, \ (i = 2, 3, \ldots, k+1), \qquad (11)$$

а також відносний кумулятивний ряд:

$$Sv_i = \frac{Sf_i}{n}, \qquad (12)$$

$$Sv_i = \frac{Sf_i}{n} \cdot 100\%. \qquad (13)$$

За даними розрахунків будують графіки варіаційного (полігон, гістограма) і кумулятивного рядів (кумулята) в декартовій системі координат, відкладаючи на осі абсцис значення x_i, а на осі ординат f_i або v_i - для варіаційного, і Sf_i або Sv_i - для кумулятивного рядів. З графіка кумулятивного ряду (кумуляти) визначають кількість особин Sv_i' у відсотках, значення ознаки яких не перевищує задане x', в межах інтервалу [x', x''] або декількох інтервалів.

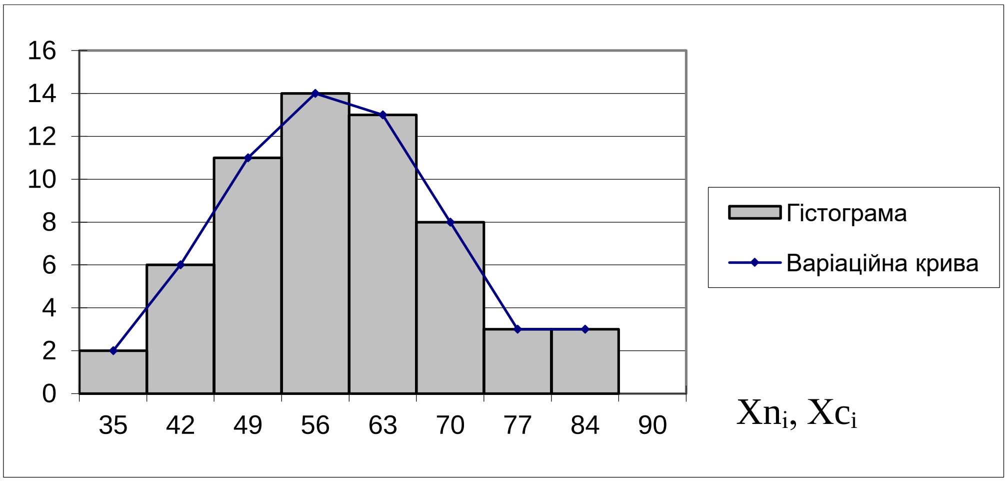


Рис.7.6 - Приклад побудови графічної функції в MathCAD

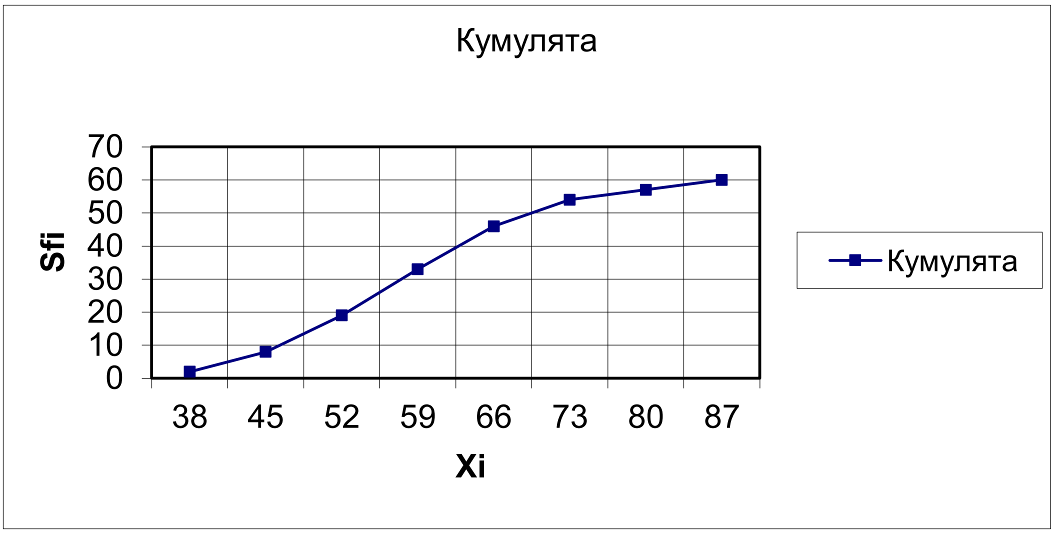


Рис.7.7 - Приклад побудови графічної функції в MathCAD

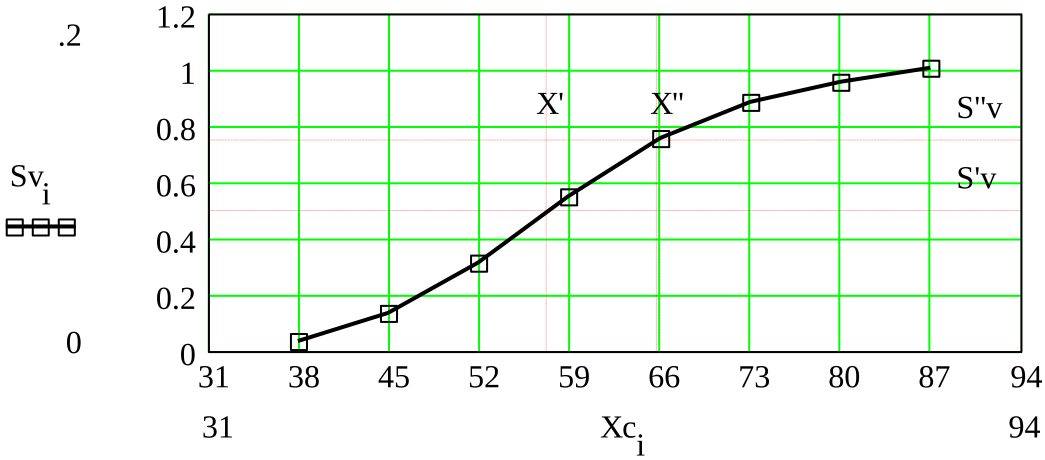


Рис. 7.8 - Приклад побудови графічної функції в MathCAD

Застосування математичного додатка Mathcad *для розв'язання задач математичної статистики.*

Згідно теоретичних відомостей наведених вище, задача складання варіаційного та кумулятивного рядів складається з декількох кроків, а саме:

1) ранжування варіаційного ряду;
2) визначення кількості класів та довжини класового інтервалу;
3) визначення початкових та кінцевих значень для кожного класу;
4) визначення середніх значень класових інтервалів;
5) знаходження частоти попадання значення ознаки;
6) знаходження відносної частоти;
7) знаходження накопиченої частоти;
8) знаходження відносної накопиченої частоти;

Розглянемо реалізацію наведених кроків з використанням математичного додатку Mathcad на конкретному прикладі.

Приклад

Задача. У 62 пробах підземних джерел води вміст хлору (мкг/л) становив: 84,53, 67, 66, 61, 64, 56, 59, 38, 63, 60, 55, 47, 57, 54, 55, 55, 62, 62,60, 60, 54, 61, 60, 68, 68, 44, 80, 82, 76, 71, 69, 69, 50, 86, 86, 76, 74, 72, 76, 53, 40, 43, 74, 64, 62, 49, 68, 78, 57, 49, 64, 69, 44, 87, 52, 56, 66, 63, 54, 71, 74.

Складати варіаційний та кумулятивний ряди. Побудувати їх графіки.

Розв'язання

Введення даних у середовищі Mathcad для їх статистичної обробки має деякі особливості. Відповідні дані потрібно ввести у вигляді вектора-стовпця або вектора-рядка, що транспонований. Для цього використовуємо меню **Вставка** на панелі інструментів Mathcad.

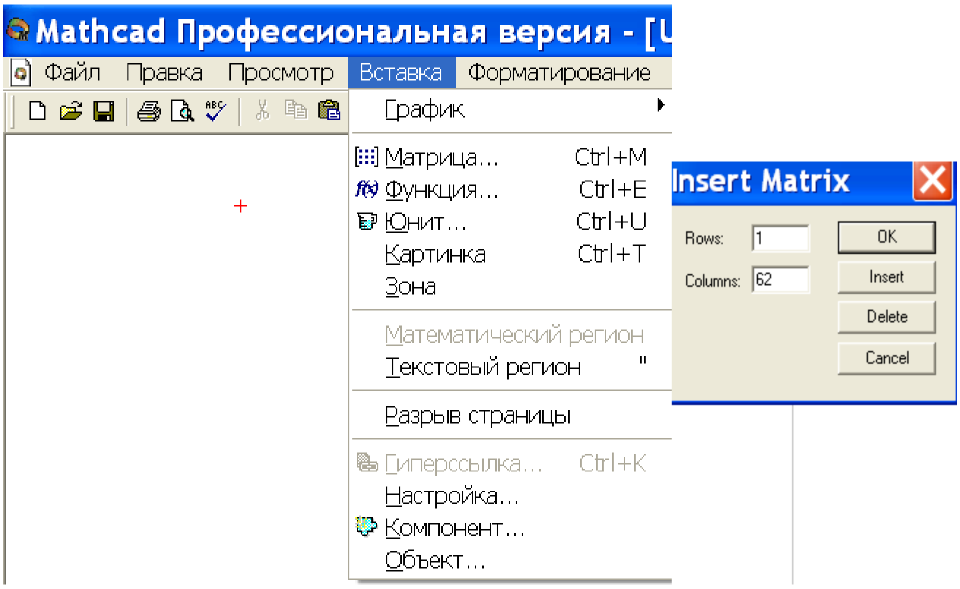


Рис. 7.9 - Меню Вставка на панелі інструментів Mathcad

Пророблюють наступні дії:

- обирають місце де буде введено відповідний вектор, наприклад *x*;
- записують символ x та знак присвоювання у вигляді x:=;
- на панелі інструментів у меню **Вставка** вибирають пункт **Матрица**;
- у меню **Матрица** (**Matrix**) обирають кількість рядків та стовпців;
- якщо обирають представлення даних у вигляді вектора-рядка, то кількість рядків дорівнює 1, а стовпців – кількості елементів вибірки;
- якщо обрано представлення у вигляді вектора-стовпця, навпаки;
- у кінці представлення вектора-рядка обов’язково ставлять символ $()^T$, що означає матриця (вектор) транспонована, який викликають натисканням відповідного символу $\mathbf{M^T}$ на панелі **Матрица** (**Matrix**);
- натискають кнопку ОК і отримують відповідний вектор-рядок або вектор-стовпець;
- у отримані комірки введенняять дані.

Ранжування даних виконують за допомогою вбудованих функцій Mathcad. Для того, щоб використати деяку вбудовану функцію виконують наступні дії:

- Обирають місце у документі, куди потрібно вставити функцію;
- Надають ім'я відповідному відсортованому вектору, наприклад X та набирають символ присвоїти (:=);
- Натискають кнопку з надписом ***f(x)*** на стандартній панелі інструментів або у меню **Вставка** знаходять меню **Функция**;

- У списку **Function Category** (Категория функции) обирають категорію вбудованої функції. В нашому випадку це сортування **Sorting**;
- У списку **Function Name** (Имя функции) обирають функцію **csort** (сортування за елементами стовпця);
- У відповідному діалоговому вікні вказуємо вектор, який потрібно відсортувати x і номер стовпця, що дорівнює 0.
- Даємо команду комп'ютеру застосувати функцію X=.
- Отримаємо відсортовані (записані у порядку зростання дані).

Наступним кроком буде визначення кількості значень.

Застосовують вбудовану функцію **length**. Кількість елементів вибірки позначають буквою ***n***. Виконують наступні дії:

- Обирають місце де буде знаходитись вираз, введенняять *n* присвоїти (*n*:=)
- Натискають кнопку з надписом ***f(x)*** на стандартній панелі інструментів або у меню **Вставка** знаходять меню **Функция;**
- У списку **Function Name** (**Имя функции**) обирають ім'я вбудованої функції **length**;
- У відповідному діалоговому вікні вказуємо вектор, у якому необхідно визначити кількість значень – X;
- Даємо команду комп'ютеру застосувати функцію *n*=.
- Отримаємо кількість значень.

Визначаємо кількість класів за формулою (2).

Пам'ятка Перед тим як обчислити значення деякої величини за формулою у Mathcad, необхідно спочатку присвоїти заданій величині значення у вигляді формули для обчислення, а потім вже обчислити.

Для обчислення кількості класів виконують наступні дії:

- Обирають місце, де буде знаходитись вираз;
- Присвоюють величині k значення за формулою;
- Обчислюють значення k (див. рис.).

$$k := 1 + 3.32 \cdot \log(n)$$

$$k = 6.951$$

Аналогічно за формулою (3) обчислюємо значення довжини класового інтервалу λ.

Збільшуємо кількість класів на 1 і позначаємо остаточну кількість класів символом K.

Округлюємо отриману величину, використовуючи вбудовану функцію **round,** аргументами якої є число, яке потрібно округлити, та кількість знаків після коми для округлення.

$$K := k + 1$$

$$K = 7.951$$

$$\mathrm{round}(K, 0) = 8$$

Визначаємо початкове значення першого класу (xn1)за формулою (4).

Визначаємо кінцеве значення першого класу, враховуючи правило (6).

Отримані значення округлюємо до цілих.

Аналогічно розраховуємо початкові та кінцеві значення наступних семи класів.

$$xn1 := xn, \quad xk1 := xn + (\lambda - 1)$$
$$xn2 := xn1 + \lambda \;\; xk2 := xn2 + (\lambda - 1)$$
$$xn3 := xn2 + \lambda \;\; xk3 := xn3 + (\lambda - 1)$$
$$xn4 := xn3 + \lambda \;\; xk4 := xn4 + (\lambda - 1)$$
$$xn5 := xn4 + \lambda \;\; xk5 := xn5 + (\lambda - 1)$$
$$xn6 := xn5 + \lambda \;\; xk6 := xn6 + (\lambda - 1)$$
$$xn7 := xn6 + \lambda \;\; xk7 := xn7 + (\lambda - 1)$$
$$xn8 := xn7 + \lambda \;\; xk8 := xn8 + \lambda$$

Розраховуємо середні значення класових інтервалів за формулою (7).

$$xc1 := \frac{xn1 + xn2}{2} \quad xc5 := \frac{xn5 + xn6}{2}$$
$$xc2 := \frac{xn2 + xn3}{2} \quad xc6 := \frac{xn6 + xn7}{2}$$
$$xc3 := \frac{xn3 + xn4}{2} \quad xc7 := \frac{xn7 + xn8}{2}$$
$$xc4 := \frac{xn4 + xn5}{2} \quad xc8 := \frac{xn8 + xk8}{2}$$

Значення частот знаходимо використовуючи відсортовані дані X, визначаючи кількість ознак, що попадають у відповідний класовий інтервал.

За формулами (8), (10), (11), (12) обчислюємо величини відносних частот, накопичених та відносних накопичених частот.

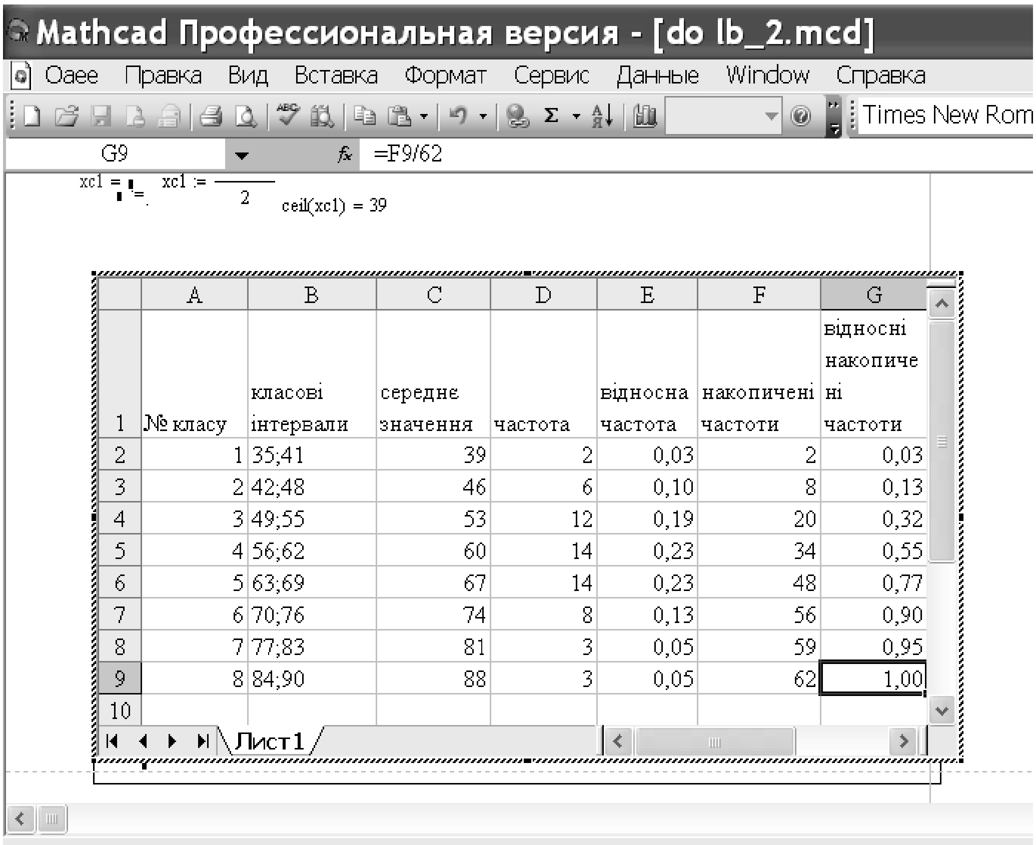
За результатами розрахунків складаємо таблицю, подібну до представленої у лабораторній роботі.

Для того, щоб вставити таблицю у документ Mathcad, необхідно пробити наступні дії.

Обирають місце де буде знаходитись таблиця.

- У меню **Вставка** на панелі інструментів Mathcad обирають меню **Компонент;**
- У відповідному діалоговому вікні вказують тип таблиці - **Excel**.
- Натискають ОК і отримують таблицю.

В одержаній таблиці робимо наступні стовпці: № класу, класові інтервали, середнє значення класового інтервалу, частоти, відносні частоти, накопичені частоти, відносні накопичені частоти. Стовпці заповнюємо отриманими даними (див. рис. 7.10.)



	A	B	C	D	E	F	G
1	№ класу	класові інтервали	середнє значення	частота	відносна частота	накопичені частоти	відносні накопичені частоти
2	1	35;41	39	2	0,03	2	0,03
3	2	42;48	46	6	0,10	8	0,13
4	3	49;55	53	12	0,19	20	0,32
5	4	56;62	60	14	0,23	34	0,55
6	5	63;69	67	14	0,23	48	0,77
7	6	70;76	74	8	0,13	56	0,90
8	7	77;83	81	3	0,05	59	0,95
9	8	84;90	88	3	0,05	62	1,00
10							

Рис.7.10 - Приклад побудови таблиці в Mathcad

За отриманими даними середнього значення класового інтервалу та частоти будуємо полігон та варіаційну криву.

Перед побудовою графіка введенняимо кількість значень (i), що відповідає кількості класів. Значення цієї величини змінюється в межах від 1 до 8. Введенняимо значення частот та середні значення класових інтервалів.

Для побудови гістограми потрібно:

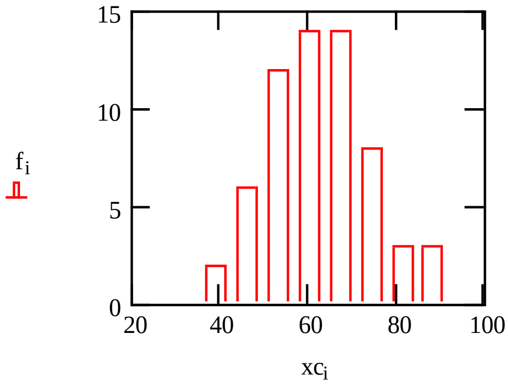
- побудувати графік залежності середнього значення від частоти;

- змінити формат лінії, двічі клацнувши лівою клавішею миші у будь-якій точці графіка;
- відкрити меню форматування графіка;
- на закладці **След**, у стовпчику **Тип** обирають **bar**;
- натискають ОК і отримують гістограму.

Для побудови кумуляти будуємо залежність середнього значення класового інтервалу від накопиченої частоти (див. рис. 7.11.)

$i := 1..8$

$f_i := \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \\ 14 \\ 14 \\ 8 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad xc_i := \begin{pmatrix} 39 \\ 46 \\ 53 \\ 60 \\ 67 \\ 74 \\ 81 \\ 88 \end{pmatrix}$



7.11. Приклад побудови графіку залежності в Mathcad

<u>Програма виконання на комп'ютері.</u>

1. Завантажити математичний додаток Mathcad.
2. Виконати наведене нижче завдання згідно зразка.
3. Зберегти створений документ у власній папці.
4. Завершити роботу у Mathcad.

<u>Завдання.</u>

Скласти варіаційний та кумулятивний ряди. Побудувати варіаційну криву, гістограму, кумулятивну криву.

Варіанти завдань.

<u>1 варіант:</u> 58, 55, 56, 56, 63, 63, 61, 61, 55, 62, 61, 69, 69, 45, 81, 83, 85, 54, 68, 67, 62, 57, 70, 70, 51, 87, 77, 75, 73, 77, 54, 54, 41, 44, 75, 65, 63, 44, 69, 79, 58, 50, 60, 39, 64, 61, 56, 48, 65, 65, 70, 45, 88, 53, 57, 67, 64, 55, 72, 48, 77, 72.

<u>2 варіант:</u> 59, 56, 57, 57, 64, 64, 62, 62, 56, 63, 62, 70, 70, 46, 82, 84, 86, 55, 69, 68, 63, 58, 71, 71, 52, 88, 78, 76, 74, 78, 55, 55, 42, 45, 76, 66, 64, 45, 70, 80, 59, 51, 61, 40, 65, 62, 57, 49, 66, 66, 71, 46, 89, 54, 58, 68, 65, 56, 73, 49, 78, 73.

3 варіант: 54, 54, 61, 61, 59, 59, 63, 60, 59, 67, 67, 43, 79, 81, 83, 52, 66, 65, 60, 55,68, 49, 85, 75, 52, 52, 39, 42, 73, 63, 61, 42, 67, 77, 56, 48, 58, 37, 62, 59, 54, 46, 56, 53, 63, 68, 43, 86, 51, 55, 65, 62, 53, 70, 46, 75, 70, 53, 64, 70, 71, 72.

Завдання для самостійної роботи.

Формування знань та вмінь використання математичного програмного середовища "MathCAD" у біометрії і статистичних розрахунках

Теоретична частина

Пакет програм "MathCAD" дає можливість обчислювати числові вирази і значення функцій, які включають дії додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення в степінь, логарифмування, диференціювання, інтегрування, знаходження розв'язків алгебраїчних і диференціальних рівнянь та їх систем в аналітичному або числовому вигляді. Такого типу задачі виникають при математичному моделюванні будь-яких процесів, включаючи аграрні взагалі та зооінженерні зокрема.

В основу "MathCAD" покладена традиційна послідовність запису і проведення обчислень за числовими виразами чи формулами.

У середовищі MathCAD є ряд особливостей, які необхідно враховувати при проведенні обчислень:

- робочий документ читається згори вниз, зліва направо.
- символи, які використовуються в розрахунках, крім текстових зон, повинні бути записані при англійській розкладці клавіатури.
- десяткові значення чисел відокремлюються крапкою.
- сувора послідовності розміщення на робочому полі символів та операцій:
  - символи та відповідні їм числові значення, які входять до виразу;
  - область або конкретні значення змінних;
  - вираз у загальному вигляді;
  - результат обчислень;
  - графічна залежність на основі записаного виразу.

При порушенні зазначеного порядку розміщення даних або операцій, червоним кольором виділяються ті символи у виразах, значення яких не визначено і виводиться повідомлення про помилку в тому місці де вона допущена.

Запуск програми MathCAD

- завантажити операційну систему **Windows**;
- клацнути на кнопці "**Пуск**"**;**

- у пункті меню “**Программы”** вибрати підпункт “**MathSoft Apps”**, перейти на каскадне підменю і вибрати пункт “**Mathcad 14**”;
- на екрані з’явиться заставка **MathCAD**, потім вікно **MathCAD.**

Перед початком проведення будь-яких розрахунків необхідно налаштувати в робочому вікні панель "АРИФМЕТИКА**", яка дає можливість виведення на робоче поле знаків математичних дій, символів, операторів, шаблонів графіків тощо. Порядок кодування основних математичних операцій за допомогою клавіатури наведено в додатку 1 Налаштування панелі "Математика"**

- у пункті меню **"Вид"** вибрати підпункт **"Панели инструментов"**;
- перейти на каскадне підменю і відмітити пункт **"Математика"**;
- розкрити необхідні палітри панелі **"Математика"** шляхом одноразового натискання лівої клавіші миші по кнопці відповідної палітри.

Математичне середовище MathCAD використовується для складних математичних обчислень, але і як простий калькулятор, при розрахунках числових виразів.

Обчислення виразу в числовому вигляді

- встановити курсор у будь-яке місце робочого документа;
- з клавіатури або палітри **"Калькулятор"** вивести: число, над яким буде проводитися математична дія, знак дії, число, знак дії і т.д.;
- для отримання результату вивести знак дорівнює.

Приклад:

$$\frac{648+(24.6\cdot 2.73)-\left(\frac{245}{69}\right)\cdot\sqrt{367}}{|174-440|}=2.4333$$

Як правило, в даному математичному середовищі проводять обчислення, використовуючи запис математичних дій не в числових, а в аналітичних виразах, що значно розширює можливості обчислень та скорочує час при розрахунках значень функцій при заданих значеннях аргументу. Для обчислення в такій формі необхідно витримати наведену вище послідовність.

Наприклад, необхідно отримати значення лінійної (y=a+bx) та квадратичної ($z=a+bx+cx^2$) функцій для значень змінної x від 1 до 5, та побудувати в одних координатних осях графіки цих функцій. У цьому разі, функції позначають різними символами. Запис даних та порядок виконання такої побудови в MCAD матиме вигляд:

$x := 1..5 \quad a := 3 \quad b := 5 \quad c := -1$

$y(x) := a + b \cdot x$

$z(x) := a + b \cdot x + c \cdot x^2$

$y(x) =$	$z(x) =$
8	7
13	9
18	9
23	7
28	3

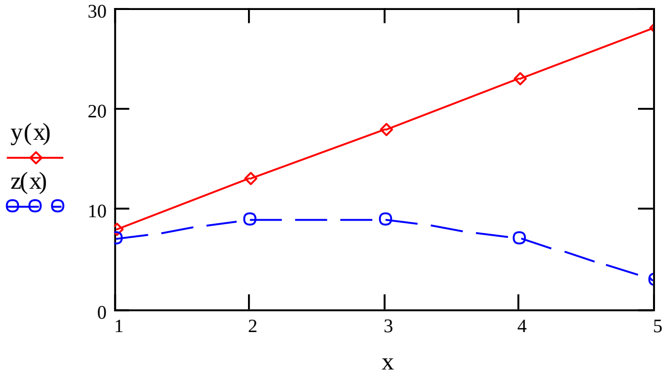


Рис. 7.12 - Графік лінійної та квадратичної функцій в Mathcad

Запис символів та числових значень

- з клавіатури або палітри вивести символ, який входить до виразу і має числове значення;
- поєднанням клавіш “**Shift + :**” або з палітри **Калькулятор** вивести символ “надати значення”, який має вигляд (**:=**);
- з клавіатури набрати відповідне числове значення.

Значення змінної, яке входить до формули, може набувати значень у певному діапазоні із зазначеним кроком, або ці значення являють собою набір конкретних чисел.

Задання області змінних

- з клавіатури або палітри вивести символ змінної;
- вивести символ **“надати значення”** (**:=**);
- клавішею “**:**” або з палітри **Калькулятор** вивести шаблон “**диапазон дискретной величины**” **(m ..n)** та записати у вільні зони початкове та кінцеве значення інтервалу;
- для задання кроку змінної, відмінної від одиниці записати, через кому після початкового значення інтервалу наступне значення змінної (наприклад x := 0, 0.5 ..5). В даному випадку крок змінної буде становити 0,5.

Задання конкретних значень змінної

У випадку, коли значення змінної неможливо представити і вигляді діапазону (1...8), а необхідно вказати їх конкретні значення, форма їх запису набуває іншого вигляду. Для цього необхідно:

- з клавіатури вивести літеру “**i**”, з палітри **"Матриця"** вивести символ **“надати значення”**, вивести шаблон “**диапазон дискретной величины**” **(m ..n)** ;

- записати замість початкового значення інтервалу 1, замість кінцевого – число, яке відповідає кількості змінних;
- записати символ змінної, клавішею “[” або з палітри **Калькулятор** створити нижній індекс біля змінної, записати у вільне місце індексу літеру “**i**”;
- вивести символ “**надати значення**”(:=);
- з клавіатури через кому набрати конкретні числові значення змінної (вони будуть оформлені як таблиця).

Запис виразу в загальному вигляді

- записати з клавіатури символ функції;
- у дужках біля символу функції записати символ змінної, якщо вона задана через інтервал значень;
- біля символу функції вивести значок нижнього індексу і записати в індекс літеру “**i**”, якщо змінна задана конкретними значеннями;
- вивести символ “надати значення”;
- записати вираз із символами сталих і змінних у тому вигляді, в якому вони були записані раніше, та встановити між ними знаки відповідних математичних дій**.**

Отримання результату обчислень

- записати символ функції в тому вигляді, як вона була задана;
- вивести знак (=) з клавіатури або з палітри;
- результат обчислень буде оформлений як таблиця.

Побудова графіків двовимірних залежностей

- поєднанням клавіш **“Shift + 2”** або мишкою з палітри “**Графики”** вивести шаблон двомірної системи координат **X-Y График**;
- у вільну зону під віссю абсцис записати символ аргументу;
- у вільну зліва від осі ординат записати символ функції;
- для побудови графіків двох або більше функцій в одній системі координат необхідно записати через кому по осі ординат символи всіх функцій;
- для побудови графіка натиснути клавішу **“Enter”** або клацнути мишкою на вільному місці поза полем графіка.

Форматування графіків двовимірних залежностей

- двічі клацнути мишкою у полі графіка;

- у діалоговому вікні, що з'явиться, в закладці **X-Y Оси (X–Y Axes)** задається тип координатних осей, наявність та щільність координатної сітки тощо;
- у закладці **След (Traces)** задається тип накреслення, колір, товщина будь-якої з ліній графіків функцій, використовуючи списки системи.

Копіювання об'єктів (формул, графіків)

Для зменшення часу запису обчислювального блоку, який містить однотипні формули, графіки чи тексти, доцільно проводити їх копіювання з подальшим незначним форматуванням.

- встановити курсор біля об'єкта, який планується скопіювати;
- виділити об'єкт за допомогою протягування курсору по його діагоналі при натиснутій лівій клавіші миші. Виділений об'єкт обрамляється штриховою лінією;
- скопіювати виділений об'єкт у буфер обміну, клацнувши по кнопці **"Копировать"** на панелі інструментів ();
- перемістити курсор у місце копіювання об'єкта;
- вставити об'єкт з буферу обміну, клацнувши по кнопці **"Вставить"** на панелі інструментів ().

Переміщення об'єктів

Іноді, для забезпечення визначеної послідовності розміщення операцій та символів на робочому полі, або для впорядкування структури записів необхідно перемістити вже створений об'єкт. Для цього:

- виділити об'єкт, клацнувши по ньому. Він буде обрамлений в чорну рамку;
- встановити курсор на лінію рамки, щоб він набув вигляду руки;
- при натиснутій лівій клавіші миші перемістити об'єкт у потрібне місце.

Збереження файлу

- у пункті меню **"Файл" (File)** вибрати підпункт **"Сохранить как" (Save as)** - при первинному збереженні документа або **"Сохранить" (Save)** - при повторному збереженні;
- у діалоговому вікні, що з'явиться, у стрічці **"Сохранить в"** вказати ім'я папки або диску, де буде зберігатися файл, у стрічці **"Имя файла"** записати назву файлу.

Завантаження збереженого файлу

- у пункті меню **"Файл" (File)** вибрати підпункт **"Открыть" (Open)**;
- у діалоговому вікні, що з'явиться, знайти і відкрити потрібну папку, та виділити потрібний файл;

- натиснути кнопку **“Открыть”** в межах діалогового вікна.

Завершення роботи з "MathCAD"

- закрити **"MathCAD"**, клацнувши на відповідній кнопці у правому куті стрічки меню  ;

Вимикання комп’ютера:

- клацнути лівою клавішею на кнопці **"Пуск"**;
- вибрати пункт **"Завершення роботи"**, натиснувши лівою клавішею мишки;
- з’явиться вікно, вибрати **"Вимкнутий комп’ютер"**, натиснути на кнопку **ОК**.

<u>Програма виконання на комп’ютері.</u>

1. Завантажити математичний додаток Mathcad.
2. Виконати наведені нижче завдання.
3. Зберегти створений документ у власній папці.
4. Завершити роботу у Mathcad.

<u>Завдання.</u>

I. Обчислити значення виразу. Номери виразів визначаємо за останньою цифрою власного варіанту. Наприклад, якщо остання цифра вашого варіанту 15, значить, ви обираєте завдання №5 і наступне за ним з непарним номером, а саме №7. Якщо ваш номер 8, то ви обираєте наступне за ним з парним номером - №8 та №0 тощо.

Памятка. А. Проводячи обчислення у середовищі MATHCAD з мішаними дробами (дроби, що мають цілу та дробову частину), необхідно перевести мішаний дріб у неправильний.

Для цього необхідно:

1) знаменник мішаного дробу помножити на його цілу частину і додати до чисельника;

2) отриманий результат записати у чисельнику неправильного дробу;

3) знаменник залишити без зміни.

Наприклад, дріб $2\frac{1}{6}=\frac{2\cdot 6+1}{6}=\frac{13}{6}$.

Б. Дію ділення (:) введенняимо у вигляді (÷) за допомогою сполучення клавіш <Ctrl>+</>, що означає ділення в один рядок.

1. $$\frac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{\left(1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\frac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\frac{2}{5}}\cdot 90.$$

2. $$\frac{\left(5\frac{4}{45}-4\frac{1}{6}\right):5\frac{8}{15}}{\left(4\frac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot 3\frac{9}{13}}\cdot 34\frac{2}{7}+\frac{0{,}3:0{,}01}{70}+\frac{2}{7}.$$

3. $$\frac{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{3}{16}}{0{,}625-\frac{13}{18}:\frac{26}{9}}+\frac{\left(\frac{0{,}216}{0{,}15}+0{,}56\right):0{,}5}{\left(7{,}7:24\frac{3}{4}+\frac{2}{15}\right)\cdot 4{,}5}.$$

4. $$\left(2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}+\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}\right)\cdot\frac{1}{3}.$$

II. Побудувати графіки функцій лінійної $y=ax+b$, квадратичної $y=ax^2+bx+c$, гіперболічної $y=\frac{a+x}{b+x}$:

1) для непарних номерів варіантів на проміжку [-1;1] з кроком 0,1;

2) для парних - на проміжку [-2;2] з кроком 0,2.

Коефіцієнти a, b, c отримати з наступної таблиці:

Таблиця 7.1.

	Непарні варіанти	Парні варіанти
a	Номер варіанту	Число, протилежне номеру варіанту
b	Число, протилежне номеру варіанту	Число, обернене номеру варіанту
c	Число, обернене номеру варіанту	Номер варіанту

Відформатувати отримані графіки за наступними вимогами.

<u>Для лінійної залежності:</u>

- Символ – ромби;
- Лінія – пунктирна;
- Колір – синій;
- Тип – лінія:
- Розмір – 2.

<u>Для квадратичної залежності:</u>

- Символ – кружечки;
- Лінія – штрихова;
- Колір – зелений;
- Тип – лінія;

- Розмір – 3.

Для гіперболічної залежності:

- Символ – квадратики;
- Лінія – штрих-пунктирна;
- Колір – коричневий;
- Тип – стовбур;
- Розмір – 4.

III. Побудувати графік функції $y = a\cos bx + c$ для заданих значень змінної:

X	−1	−0,7	−0,6	−0,2	0	2,3	3,4	4,8	5

Відформатувати графік згідно наступних вимог:

– Символ – плюси;
– Лінія – пунктирна;
– Колір – чорний;
– Тип – малюнок
– Розмір – 3.

IV. Розв’язати одну систему лінійних алгебраїчних рівнянь двома способами: методом визначників та з застосуванням обчислювального блоку Given/Find.

1. $$\begin{cases} 2x-3y+z=7, \\ x+4y-2z=-5, \\ 3x-y+3z=2. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 7x+2y+3z=15, \\ 5x-3y+2z=15, \\ 10x-11y+5z=36. \end{cases}$$

Практична робота №2. Статистичні показники варіації.

<u>Мета роботи:</u> вивчити алгоритм розрахунку показників варіації.

<u>Завдання для самостійної підготовки</u>

Вивчити що таке:

- розмах варіації;
- дисперсія та середнє квадратичне відхилення;
- коефіцієнт варіації;
- нормовані відхилення;

<u>Теоретична частина</u>

З метою аналізу варіаційних рядів, крім середніх величин, введенняять наступні показники:

1) Границі (ліміти): це граничні значення ознаки Xmin (мінімальне) і Xmax (максимальне), які визначають межу зміни варіюючої величини (виробничі показники, параметри характеристики зооінженерії тощо).

2) Розмах варіації - це різниця між граничними значеннями ознаки:

$$R = X_{max} - X_{min} . \qquad (1)$$

3) Дисперсія D та середнє квадратичне відхилення σ:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}, \qquad (2)$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}}, \qquad (3)$$

де додавання по *i* в (2), (3) проводиться за номерами водних організмів вибірки і її класів відповідно, n - об'єм вибірки, к - кількість її класів, f_i - частота: кількість особин з однаковим значенням ознаки , $\bar{x}$ - середнє арифметичне значення.

Розкривши квадрат різниці двох чисел, отримаємо:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2 \cdot x_i \cdot \bar{x} + \bar{x}^2\right)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2 \cdot \bar{x} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n \cdot \bar{x}^2}{n} = \qquad (4)$$

$$= \overline{x^2} - 2 \cdot \bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2,$$

$$\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad , \qquad (5)$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \quad , \qquad (5')$$

де $\overline{x^2}$ – середнє арифметичне квадрата x_i^2 ознаки, $\bar{x}$ – середнє арифметичне (див. попередню практичну роботу).

Розрахунки за формулами (2), (3) і (4), (5) повинні співпадати, що служить перевіркою вірності цих обчислень.

4) Коефіцієнт варіації - це відносне значення середнього квадратичного відхилення:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \ . \qquad (6)$$

5) Парціальне або нормоване відхилення - це відношення відхилення і-того значення ознаки від його середнього $\left(x_i - \bar{x}\right)$ до середнього квадратичного відхилення σ:

$$t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \qquad (7)$$

Застосування математичного додатку Mathcad *для знаходження показників варіації*

<u>Визначення показників варіації за формулами.</u>

Знаходженню показників варіації передує створення відповідного варіаційного ряду за результатами дослідних.

Складемо варіаційний ряд, що складається з x_i та f_i.

✓ Для визначення розмаху варіації виконують наступне.

- Визначають межі зміни ознаки, що варіює.

xmax := ▮

xmin := ▮

- Введенняять формулу для обчислення розмаху варіації

R := xmax − xmin

- Дають команду комп'ютеру зробити розрахунок

R=

✓ Для знаходження дисперсії спочатку визначають середнє арифметичне хс (див. практичну роботу 3).

Після визначення середнього арифметичного визначають дисперсію D.

Формула для обчислення дисперсії та середнього квадратичного відхилення у Mathcad має вигляд

$$D := \frac{\sum_i f_i \cdot (x_i - xc)^2}{n}$$

$$D =$$

$$\sigma := \sqrt{D}$$

$$\sigma = \blacksquare$$

Аналогічно за формулами (6) та (7), адаптуючи формули для Mathcad, обчислюємо коефіцієнт варіації та значення парціальних відхилень.

Використання вбудованих функцій Mathcad для обчислення показників варіації

Розрахунок середнього арифметичного з використанням вбудованої функції **mean** описано у лабораторній роботі 3.

Примітка. Введення даних потрібно виконати у вигляді вектора-стовпця.

Для введення даних виконують наступні дії.

- обирають місце де буде введено відповідний вектор, наприклад x;
- записують символ x та знак присвоювання у вигляді x:=;
- на панелі інструментів у меню **Вставка** вибирають пункт **Матрица**;
- у меню **Матрица** (**Matrix**) обирають кількість рядків та стовпців;
- для представлення даних у вигляді вектора-стовпця, обирають кількість рядків, що дорівнює кількості елементів вибірки, а стовпців – 1;
- натискають кнопку ОК і отримують відповідний вектор-стовпець;
- у отримані комірки введенняять дані.

Для розрахунку вибіркової дисперсії використовують вбудовану функцію **var(x)**, для розрахунку середнього квадратичного відхилення – функцію **stdev(x)**, для знаходження максимального значення - **max(x)**, мінімального - **min(x)**.

Використання вбудованих функцій для розрахунку показників варіації аналогічно до використання вбудованих функцій у попередній лабораторній роботі.

Загальний план застосування вбудованих функцій у Mathcad.

1. Обирають місце у документі, куди потрібно вставити функцію;
2. Натискають кнопку з надписом ***f(x)*** на стандартній панелі інструментів або у меню **Вставк**а знаходять меню **Функция**;
3. У списку **Function Name** (Имя функции) обирають ім'я вбудованої функції, під яким вона фігурує у Mathcad.
4. У відповідному діалоговому вікні вказуємо відповідний вектор - x.

5. Даємо команду комп'ютеру застосувати функцію натискаємо =
6. Отримаємо необхідне значення.

Програма виконання на комп'ютері.

1. Завантажити математичний додаток Mathcad.

2. Обчислити значення показників варіації за формулами та з використанням вбудованих функцій Mathcad.

3. Завдання з використанням вбудованих функцій необхідно оформити на окремому листі.

4. Зберегти створений документ у власній папці.

5. Завершити роботу у Mathcad.

Варіанти завдань:

1 вар.	x_i	45	49	67	88	94	96
	f_i	2	3	6	7	5	2
2 вар.	x_i	48	52	70	91	97	99
	f_i	1	3	7	9	5	2
3 вар.	x_i	47	51	69	84	96	98
	f_i	3	5	9	7	4	2

Практична робота № 3. Перевірка H_0-гіпотези за допомогою критеріїв Ст'юдента і Фішера.

Тема: Нульова гіпотеза H_0. Перевірка H_0 за допомогою критеріїв Ст'юдента і Фішера

Мета роботи: вивчити, як перевірити нульову гіпотезу, використовуючи t–критерій Стьюдента та F–критерій Фішера

Завдання для самостійної підготовки

1. Розглянути, що таке нульова гіпотеза та в чому вона полягає.
2. Вивчити, як застосовується t-критерій Стьюдента для перевірки H_0.
3. Вивчити, як застосовується F-критерій Фішера для перевірки H_0.
4. Вивчити, що означає число степенів вільності, та як воно визначається для обох критеріїв.

Теоретична частина

За різницею показників вибірок роблять порівняльні оцінки генеральних показників.

Порівняння проводиться за породами водних організмів або в дослідах впливу будь-якого фактора (наприклад включення в підкормку мікроелементів, вітамінів і т. д..) на показники виробництва у порівнянні з контрольними вибірками, для яких вплив відсутній.

Порівняння базується на H_o-гіпотезі, згідно з якою, різниця між показниками генеральних сукупностей дорівнює 0, а можлива різниця між параметрами вибірок має випадковий характер.

Позначимо через $\tilde{x}_0, \tilde{\sigma}_0$ i $\tilde{x}_k, \tilde{\sigma}_k$ показники дослідної і контрольної генеральної сукупностей відповідно.

H_0-гіпотеза задовольняється, якщо $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_k, \tilde{\sigma}_0 = \tilde{\sigma}_k$ і для вибіркових показників допускається $\tilde{x}_0 \neq \tilde{x}_k, \tilde{\sigma}_0 \neq \tilde{\sigma}_k$. Коли ці нерівності мають системний характер, H_0-гіпотеза відхиляється.

Для перевірки H_0-гіпотези розроблено спеціальні статистичні критерії з рівнями значимості α=1-P:

α_1=5%, α_2=1%, α_3=0.1%.

Одним із таких критеріїв є t-критерій Стьюдента:

$$t_{ф} = \frac{|\overline{x_1} - \overline{x_2}|}{Sd}, \tag{1}$$

де
$$S_d = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\cdot\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\cdot\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \times \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}} \quad . \tag{2}$$

σ_1 i σ_2- середні квадратичні відхилення для дослідної і контрольної вибірок, n_1 і n_2 - їх об'єми.

Фактичне значення $t_ф$ порівнюють з стандартним (табличним) t_{st}. За відповідним рівнем значимості α і степенем вільності $m = m_1 + m_2 = n_1 - 1 + n_2 - 1 = n_1 + n_2 - 2$ з таблиці визначать t_{st}. При $t_ф < t_{st}$ H_0-гіпотеза задовольняється, а при $t_ф > t_{st}$ відхиляється. Але для достовірності H_0-гіпотезу провіряють на більшому рівні значимості α. t-критерій застосовується для генеральних сукупностей з нормальним законом розподілу із будь-яким об’ємом вибірки або з ненормальним при n>30.

Для перевірки H_0–гіпотези за значеннями середнього (стандартного) квадратичного відхилення використовують F–критерій Фішера:

$$F_ф = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1,$$

тому, що вибирають $\sigma_1 \geq \sigma_2$.

Значення F_{ϕ} порівнюють з табличними (стандартним) F_{st} за відомим рівнем значимості α і ступенями вільностей $m_1 = n_1 - 1$, $m_2 = n_2 - 1$ вибірок. Якщо $F_{\phi} < F_{st}$, то H_0 –гіпотеза задовольняється, а при $F_{\phi} > F_{st}$ - відхиляється.

Використання математичного додатку Mathcad *для перевірки статистичних гіпотез*

Перевірка нульової гіпотези за критерієм Стьюдента.

1. Знаходимо розрахункове значення t критерію Стьюдента за формулою (1), попередньо зробивши обрахунок величини Sd за формулою (2). Значення n1, n2, σ1, σ2 введенняимо на початку або обчислюємо за формулами.

2. Задаємо рівень значущості α:=0,01

3. Критичне (табличне) значення t критерію Стьюдента знаходимо з використанням вбудованих функцій (див.табл.7.2.)

Таблиця 7.2.

Вбудовані функції що використовуються для знаходження критичних значень за критеріями Стьюдента, Пірсона, Фішера.

Критерій	Категорія функції	Вбудована функція, ім'я функції	Аргументи функції		
Стьюдента	Функция распределения	**qt**	ймовірність $1-\frac{\alpha}{2}$, α – рівень надійності (значущості)	Число степенів свободи n-1	
Фішера	Функция распределения	**qF**	Ймовірність 1-α, α – рівень надійності (значущості)	Число степенів свободи I вибірки n1-1	Число степенів свободи II вибірки n2-1
Пірсона	Функция распределения	**qchisq**	Ймовірність 1-α, α – рівень надійності (значущості)	Число степенів свободи	

4. Алгоритм застосування вбудованої функції

- записують tкрит:=

- натискають кнопку з надписом ***f(x)*** на стандартній панелі інструментів або у меню **Вставк**а знаходять меню **Функция**;
- у меню **Категория Функции** обирають **Все;**
- у списку **Function Name** (Имя функции) обирають ім'я вбудованої функції, під яким вона фігурує у Mathcad. В нашому випадку це **qt** тощо;
- у відповідному діалоговому вікні вказуємо аргументи функції – імовірність $(1-\frac{\alpha}{2})$, число степенів свободи (n1+n2-2).
- даємо команду комп'ютеру застосувати функцію натискаємо =.
- отримаємо відповідне розрахункове значення критерію Стьюдента.

5. Порівнюємо критичне та розрахункове значення t критерію Стьюдента. Для цього введенняимо наступне

$$|t| < tкрит = 0\ (або\ 1)$$

6. Якщо в результаті порівняння отримаємо 0 (неправда), умова не виконується, значить нульова гіпотеза відхиляється.

7. Якщо в результаті порівняння отримаємо 1 (істина), умова виконується, значить нульова гіпотеза задовольняється.

Перевірка H_0 за допомогою критерію Фішера.

1. Знаходимо розрахункове значення F критерію Фішера за формулою

$$Fрозр := \frac{\sigma 1}{\sigma 2}$$

$$Fрозр =$$

Причому, в чисельнику дробу значення більшої дисперсії.

2. Знаходимо критичне (табличне) значення F критерію Фішера з використанням вбудованої функції **qF.**

Алгоритм застосування вбудованої функції

- записують Fкрит:=
- натискають кнопку з надписом ***f(x)*** на стандартній панелі інструментів або у меню **Вставк**а знаходять меню **Функция**;
- у меню **Категория Функции** обирають **Все;**
- у списку **Function Name** (Имя функции) обирають ім'я вбудованої функції, під яким вона фігурує у Mathcad. В нашому випадку **qF** тощо;
- у відповідному діалоговому вікні вказуємо аргументи функції – імовірність $(1-\alpha)$, число степенів свободи більшої вибірки (n1-1), число степенів свободи меншої вибірки (n2-1)
- даємо команду комп'ютеру застосувати функцію натискаємо =.

- отримаємо відповідне розрахункове значення критерію Фішера.

5. Порівнюємо критичне та розрахункове значення F критерію Фішера. Для цього введенняимо наступне

$$|Fрозр| < Fкрит = 0\ (або\ 1)$$

6. Якщо в результаті порівняння отримаємо 0 (неправда), умова не виконується, значить нульова гіпотеза відхиляється.

7. Якщо в результаті порівняння отримаємо 1 (істина), умова виконується, значить нульова гіпотеза задовольняється.

<u>Програма виконання на комп’ютері.</u>

1. Завантажити математичний додаток Mathcad.
2. Перевірити гіпотезу про рівність середніх значень двох незалежних вибірок за критерієм Стьюдента та зробити аналіз одержаних результатів.
3. Перевірити однорідність дисперсій двох вибірок за критерієм Фішера. Проаналізувати отримані результати.
4. Зберегти створений документ у власній папці.
5. Завершити роботу у Mathcad.

Контрольні запитання

1. Що таке нульова гіпотеза, її суть ?
2. Як розрахувати фактичне значення t-критерію Стьюдента ?
3. Які величини потрібно знати та як їх знайти, щоб визначити стандартне значення t-критерію Стьюдента ?
4. Як розрахувати фактичне значення F- критерію Фішера ?
5. Які величини потрібно знати та як їх знайти, щоб визначити стандартне значення F- критерію Фішера ?

Практична робота № 4. Перевірка H_0 за допомогою критерію Пірсона

Тема: Нульова гіпотеза (H_0). Перевірка H_0 за допомогою критерію Пірсона
Мета роботи: опрацювати методику перевірки нульової гіпотези використовуючи критерій Пірсона.

Завдання для самостійної підготовки

1. Розглянути яка різниця у використанні критерію Пірсона та критеріїв Стьюдента і Фішера.
2. Вивчити, як розраховується фактичне значення критерію .
3. Розібратися, які величини входять до формули фактичного значення критерію .
4. Розглянути, які обмеження має даний метод.

Теоретична частина

Критерій Пірсона застосовується при перевірці гіпотез стосовно законів розподілу. Цим критерієм з'ясовується узгодженість дослідних з теоретичними розподілами, наприклад нормальним, і являє собою степінь розбіжностей між ними відносно частот:

$$x_{\phi}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - \tilde{f}_i)^2}{\tilde{f}_i},$$

де f_i і $\tilde{f}_i$ - дослідні та теоретичні частоти ознаки X, сума ведеться за класами варіаційних рядів.

Значення x_{ϕ}^2 порівнюють з табличними x_{st}^2 при відповідному рівні значимості α і степеня вільності m=k-3.

Якщо $x_{\phi}^2 < x_{st}^2$, то розподіл є нормальним, а при $x_{\phi}^2 > x_{st}^2$ H_0 – гіпотеза не підтверджується (спростовується).

Критерій Пірсона використовують при n>50 і $f_k \geq 5$, у протилежному випадку сусідні класи об'єднують.

Використання математичного додатку Mathcad *для перевірки нульової гіпотези за критерієм Пірсона*

Критерій Пірсона дозволяє перевірити гіпотезу про відповідність розподілу частот нормальному розподілу, наприклад, якщо α=0,01 (1%).

Значення частот f_i, $f1_i$, які потрібно перевірити на відповідність нормальному розподілу візьмемо з попередніх практичних робіт.

Згідно вимог – критерій Пірсона можна застосувати для об’ємів вибірки n>50 і $f_k \geq 5$, у протилежному випадку сусідні класи потрібно об'єднати.

№ класу	класові інтервали	середнє значення	частота	відносна частота	накопичені частоти	відносні накопичені частоти
1	35;41	39	2	0,03	2	0,03
2	42;48	46	6	0,10	8	0,13
3	49;55	53	12	0,19	20	0,32
4	56;62	60	14	0,23	34	0,55
5	63;69	67	14	0,23	48	0,77
6	70;76	74	8	0,13	56	0,90
7	77;83	81	3	0,05	59	0,95
8	84;90	88	3	0,05	62	1,00

Рис. 7.13 - Таблиця рохрахунків для перевірки нульової гіпотези за критерієм Пірсона

Значення f_i і $\tilde{f}_i$ для перших двох і останніх трьох класів об’єднаємо. Складемо допоміжну таблицю.

Таблиця 7.4.

Допоміжна таблиця для розрахунку

Емпіричні частоти	Об‘єднані емпіричні частоти	Теоретичні частоти (округлені)	Об‘єднані теоретичні частоти
2	8	2	8
6		6	
12	12	11	11
14	14	15	15
14	14	14	14
8	14	9	14
3		4	
3		1	

У Mathcad введенню частот передує задання кількості класів утворених об’єднаних частот. В нашому випадку шляхом поєднання утворилось 5 класів. Але це не єдиний спосіб. Можливий варіант об’єднання першого з другим та двох (не трьох) останніх класів. Тоді б кількість класів дорівнювала не 5, а 6.

$k := 1..5$

$f_k :=$ $\quad f1_k :=$

f_k	$f1_k$
8	8
12	11
14	15
14	14
14	14

За формулою (1) обчислюємо фактичне значення критерію Пірсона.

$$\chi2_{\phi} := \sum_{k} \frac{\left(f_k - f1_k\right)^2}{f1_k}$$

$$\chi2_{\phi} =$$

Визначаємо число степенів свободи m=k-3. За значеннями m=2 на рівні значущості α=0,01 знаходимо стандартне (критичне, табличне) значення критерію узгодження Пірсона χ^2_{st} за допомогою вбудованої функції qchisq, аргументами якої є імовірність 1-α і число степенів свободи m.

$$\alpha := 0.01 \qquad K := 5 \qquad m := K - 3$$

$$\chi2_{st} := \text{qchisq}(1 - \alpha, m)$$

$$\chi2_{st} = 9.21$$

Порівняння стандартного та фактичного значень критерію Пірсона проводимо у вигляді

$$\chi2_{\phi} < \chi2_{st} = 1$$

Якщо в результаті порівняння отримаємо 1 (істина), значить гіпотеза на даному рівні значущості приймається: розподіл частот відповідає нормальному. Якщо ж отримаємо 0 (неправда) гіпотеза відхиляється: розподіл частот не відповідає нормальному.

Програма виконання на комп'ютері.

1. Завантажити математичний додаток Mathcad.
2. Скопіювати на окремий лист результати знаходження емпіричних частот з практичної роботи №2.
3. Скопіювати на цей самий робочий лист результати знаходження теоретичних частот з практичної роботи №6.
4. Округлити значення теоретичних частот $f1_i$ за допомогою функції **round**, аргументами якої є значення $f1_i$ та кількість знаків після коми – 0.
5. Об'єднати в класи емпіричні та теоретичні частоти згідно правила, описаного у попередньому розділі.
6. Перевірити гіпотезу про відповідність розподілу частот нормальному розподілу за методикою, описаною вище.
7. Проаналізувати отримані результати.
8. Зберегти створений документ у власній папці.
9. Завершити роботу у Mathcad.

Контрольні запитання

1. Для чого використовується критерій узгодження Пірсона?
2. Як розраховувати фактичне значення критерію χ^2?
3. Чому до формули фактичного значення критерію χ^2 входять лише частоти?
4. Які обмеження має даний метод та як їх уникнути?

Практична робота №5. Коефіцієнти кореляції лінійної регресії та їх зв'язок з параметрами лінійної залежності

Мета роботи: практично оволодіти поняттями коефіцієнтів кореляції лінійної регресії, через які визначаються параметри лінійної залежності між двома змінними ознаками

Завдання для самостійної підготовки

1.Два типи залежностей: кореляційна та функціональна. Навести приклади з області зооінженерії.

2.Коефіцієнт кореляції *r* та його властивості.

3.Коефіцієнти лінійної залежності R_{yx} і R_{xy} та їх властивості.

4.Виведення еквівалентних формул σ_x, σ_y, r, R_{yx} і R_{xy}.

5.Рівняння лінійної залежності.

6.Зв'язок параметрів *a* і *b* лінійної залежності з коефіцієнтами регресії R_{yx} (R_{xy}) і середніми значеннями $\bar{x}$ і $\bar{y}$

7.Побудова графіків дослідної та теоретичної лінійної залежності.

Теоретична частина

Як відомо, формули коефіцієнтів кореляції *r* та лінійної залежності R_{xy}, R_{yx} мають вигляд:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}, \tag{1}$$

$$R_{xy} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \tag{2}$$

$$R_{yx} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \tag{3}$$

де

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}, \tag{4}$$

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n} \tag{5}$$

- середні арифметичні значення ознак *x* і *y*,

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}}, \tag{6}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i - \bar{y})^2}{n}} \tag{7}$$

- їх середні квадратичні відхилення.

Підставивши вирази (6), (7) в (1)-(3), отримаємо:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}, \tag{8}$$

$$R_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}, \tag{9}$$

З формули (8) (9) і (10) випливає, що коефіцієнти r, R_{xy} і R_{yx} можуть приймати значення від -1 до +1 (знаки + і - вказують на зростання і спадання у від х чи х від у).

Лінійна залежність *Y* від *x* має вигляд:

$$Y = ax + b, \tag{11}$$

коефіцієнти *a* і *b* якого визначаються за формулами:

$$a = R_{yx}, \tag{12}$$

$$b = \overline{y} - R_{yx}\cdot\overline{x}. \tag{13}$$

Для зворотного зв'язку:

$$X = a'y + b', \tag{14}$$

де

$$a' = R_{xy}, \tag{15}$$

$$b' = \overline{x} - R_{xy}\cdot\overline{y}. \tag{16}$$

Формули (13) і (16) випливають із середніх значень виразів (11) і (14).

Вірогідність математичної моделі знаходиться за критерієм Фішера:

$$F_{\Phi} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > F_{st}. \tag{19}$$

Якщо виконується нерівність (24), то гіпотеза, що *a* = 0 відхиляється на довірчому рівні (1-*α*) (*α* – ймовірність похибки). Отже, математичну модель можна будувати у вигляді лінійної функції.

Використання математичного додатку Mathcad *для знаходження коефіцієнтів кореляції лінійної регресії*

I. Обчислення коефіцієнтів кореляції лінійної регресії за формулами

Початок обчислень у Mathcad, як відомо, передбачає попереднє присвоювання значень величинам, що будуть фігурувати у залежностях.

1. Присвоюють значення індексу і в межах діапазону від 1 до номера останнього елемента вибірки.

2. Задають (присвоюють) кількість елементів вибірки *n*.

3. Присвоюють значення ознак x_i та y_i.

4. Знаходять за формулами (попередньо їх адаптувавши до Mathcad) (4) і (5) значення середніх для х та у. Позначають ці величини хс та ус.

5. Визначають за формулами (6), (7) величини середніх квадратичних відхилень для х та у, враховуючи попередні позначення середніх. Позначають ці величини σх, σу.

6. Визначають коефіцієнт кореляції r за формулою (8).

7. Знаходять Rxy та Ryx за формулами (2), (3).

8. Присвоюють з наступним обчисленням значення:

коефіцієнтам a, b, використовуючи співвідношення (12), (13);

коефіцієнтам a1, b1, використовуючи співвідношення (15), (16).

9. Присвоюють лінійним залежностям відповідного вигляду

$$Y_i := a \cdot x_i + b$$

$$X_i := a1 \cdot x_i + b1$$

10. Будують графіки дослідних і теоретичних залежностей y_i і $У_i$ від x_i, а також графіки залежностей x_i і X_i від y_i.

11. Форматують графіки згідно наведених малюнків.

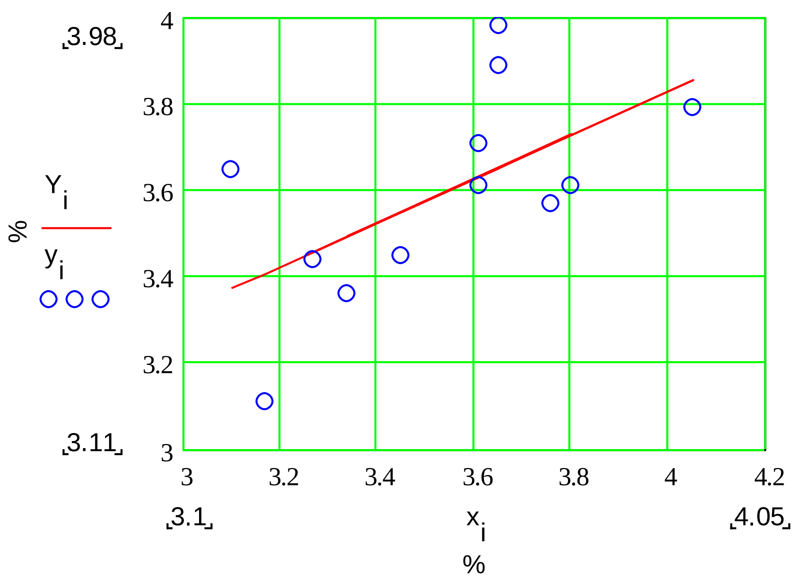


Рис. 5.14 - Графікпорівняння дослідних і теоретичних залежностей

II. Використання вбудованих функцій Mathcad для знаходження коефіцієнтів кореляції лінійної регресії.

1. Задають значення величин х та у в вигляді вектора-стовпця або транспонованого вектора-рядка.

Для цього проробляють наступні дії:

- обирають місце де буде введено відповідний вектор, наприклад *x*;
- записують символ х та знак присвоювання у вигляді х:=;
- на панелі інструментів у меню **Вставка** вибирають пункт **Матрица**;
- у меню **Матрица** (**Matrix**) обирають кількість рядків та стовпців;
- якщо обирають представлення даних у вигляді вектора-рядка, то кількість рядків дорівнює 1, а стовпців – кількості елементів вибірки;
- якщо обрано представлення у вигляді вектора-стовпця, навпаки;
- у кінці представлення вектора-рядка обов’язково ставлять символ $(\ )^T$, що означає матриця (вектор) транспонована, який викликають натисканням відповідного символу $\mathbf{M^T}$ на панелі **Матрица** (**Matrix**);
- натискають кнопку ОК і отримують відповідний вектор-рядок або вектор-стовпець;
- у отримані комірки введенняять дані.

2. Визначають за допомогою вбудованих функцій наступні величини, що представлені у таблиці.

Загальний план застосування вбудованих функцій у Mathcad.

- Обирають місце у документі, куди потрібно вставити функцію;
- Натискають кнопку з надписом ***f(x)*** на стандартній панелі інструментів або у меню **Вставк**а знаходять меню **Функция**;
- у меню **Категория Функции** обирають **Все;**
- У списку **Function Name** (Имя функции) обирають ім'я вбудованої функції, під яким вона фігурує у Mathcad.
- У відповідному діалоговому вікні вказуємо відповідний вектор - х .
- Даємо команду комп’ютеру застосувати функцію натискаємо =.
- Отримаємо необхідне значення.
-

Назва статистичної величини	Загально-прийняте позначення	Відповідна вбудована функція	Рекомендоване позначення у Mathcad
Середнє арифметичне ознаки x	$\bar{x}$	mean(x)	xc
Середнє арифметичне ознаки y	$\bar{y}$	mean(y)	yc
Середнє квадратичне відхилення ознаки x	σ_x	stdev(x)	σx
Середнє квадратичне відхилення ознаки y	σ_y	stdev(y)	σy
Коефіцієнт кореляції	r	corr(x,y)	r
Коефіцієнт лінійної регресії	b	intercept(x,y)	b
Коефіцієнт лінійної регресії	a	slope(x,y)	a
Вектор коефіцієнтів лінійної регресії	(a,b)	line(x,y)	

Програма виконання на комп’ютері.

1. Завантажити математичний додаток Mathcad.
2. Обчислити коефіцієнти кореляції лінійної регресії за формулами, попередньо адаптувавши їх до Mathcad.
3. Побудувати в одній системі координат графіки теоретичних та дослідних залежностей. Від форматувати графіки згідно малюнка.
4. Відкрити новий лист Mathcad. Обчислити коефіцієнти кореляції лінійної регресії, використовуючи вбудовані функції математичного додатка Mathcad.
5. Порівняти результати одержані у пункті 2 та 4.
6. Зберегти створений документ у власній папці.
7. Завершити роботу у Mathcad.

Завдання до практичної роботи

1 варіант.

x_i,%	3,30	3,37	3,96	3,81	3,47	3,81	4,00	3,85	3,65	4,25	3,54	3,85
y_i,%	3,85	3,31	3,77	3,81	3,44	3,91	3,81	4,18	3,65	3,99	3,50	4,09

2 варіант.

x_i, %	3,00	3,07	3,66	3,51	3,17	3,51	3,70	3,55	3,35	3,95	3,24	3,55
y_i,%	3,55	3,01	3,47	3,51	3,34	3,61	3,51	3,88	3,35	3,69	3,20	3,79

3 варіант.

x_i, %	2,90	2,97	3,56	3,41	3,07	3,41	3,60	3,45	3,25	3,85	3,14	3,45
y_i, %	3,45	2,91	3,37	3,41	3,24	3,51	3,41	3,78	3,25	3,59	3,10	3,69

Практична робота №6. Застосування методу найменших квадратів

Тема: Застосування методу найменших квадратів для обчислення параметрів лінійної залежності Y=ax+b

Мета роботи: опанувати навичками обчислення параметрів лінійної залежності методом найменших квадратів та співставлення із статистичним (дисперсійним) аналізом (див. практичну роботу №11)

Завдання для самостійної підготовки

1.Рівняння лінійної залежності.

2.Обчислення точок перетину графіка прямолінійної залежності з осями координат.

3.Зростаюча та спадна лінійні залежності.

4.Знаки коефіцієнтів *a* і *b* при зростаючій та спадній лінійних залежностях.

5.Сутність методу найменших квадратів.

6.Застосування методу найменших квадратів для моделювання лінійних залежностей між двома ознаками.

Теоретична частина

Для визначення параметрів *a* і *b* лінійної залежності

$$Y = ax + b \qquad (1)$$

досліджують вираз *D*:

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - Y_i)^2}{n} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{y_i - a \cdot x_i - b)^2}{n}, \qquad (2)$$

де Y_i і y_i - теоретичні (обчислені за формулою (1)) і дослідні значення. Вираз (2) являє собою дисперсію відхилень дослідних значень *y* відносно теоретичних значень *Y*. Коефіцієнти *a* і *b* потрібно підібрати таким чином, щоб вираз *D* (2) мав мінімальне значення. Рівняння прямої (1) отримано в [14] із подібності трикутників, що входить в шкільну програму і тим самим є більш доступним для студентів. З математики відомо, що для цього потрібно прирівняти до нуля частинні похідні:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial b} = 0. \qquad (3)$$

Знайшовши похідні, одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими *a* і *b*:

$$\begin{cases} b + a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{y_i}{n} \\ b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{n} + a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{n} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \dfrac{y_i}{n} \end{cases} \tag{4}$$

або

$$\begin{cases} b + a\bar{x} = \bar{y}, \\ b\bar{x} + a\overline{x^2} = \overline{xy}, \end{cases} \tag{5}$$

де

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n},\ \bar{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n},\ \overline{x^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n},\ \overline{xy} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}. \tag{6}$$

Система рівнянь (5) називається нормальною і у підручниках записується у вигляді

$$\begin{cases} b \cdot n + a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}, \tag{7}$$

яка виводиться з умови мінімуму виразу

$$L = \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2 \tag{8}$$

або множення системи (4) на n.

Використання системи нормальних рівнянь у вигляді (5), має наочний зміст, оскільки вона виражається через відповідні характеристики варіаційних рядів, а саме: середні арифметичні $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{x^2}$ та коефіцієнт коваріації $c = \overline{xy}$.

Розглянемо приклад, наведений в минулій практичній роботі.

Згідно з умовою задачі, n = 12.

Знайдемо розв'язки системи (5) методом підстановки. З першого рівняння визначимо b і підставимо у друге, після чого визначимо a. В результаті одержимо:

$$b = \bar{y} - a\bar{x}, \tag{7}$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} - a\bar{x}^2 + a\overline{x^2} = \bar{x} \cdot \bar{y}, \tag{8}$$

$$a\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right) = \overline{xy} - \overline{xy}, \tag{9}$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = R_{yx}, \tag{10}$$

$$b = \bar{y} - \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \cdot \bar{x} = \bar{y} - R_{yx} \cdot \bar{x}\,. \qquad (11)$$

Таким чином, формула коефіцієнта лінійної регресії R_{yx} (див. вирази (15) попередньої практичної роботи 11 і (10)) виводиться методом найменших квадратів.

<u>Використання математичного додатку</u> <u>Mathcad</u> *<u>для знаходження параметрів лінійної залежності методом найменших квадратів</u>*

I. Розв'язання системи рівнянь (7) для визначення параметрів a, b лінійної залежності методом визначників.

Початок обчислень у Mathcad, як відомо, передбачає попереднє присвоювання значень величинам, що будуть фігурувати у залежностях.

1. Присвоюють значення індексу i в межах діапазону від 1 до номера останнього елемента вибірки.

2. Задають (присвоюють) кількість елементів вибірки *n*.

3. Присвоюють значення ознак x_i та y_i.

4. Утворюють матрицю системи Δ, складену з коефіцієнтів біля невідомих a, b.

5. Для задання матриці розміром 2×2 проробляють наступні дії:

- записують символ Δ, яким буде позначено матриця;
- виводять знак "надати значення" або присвоїти, що має вигляд (:=);
- у палітрі **"Матрица"** клацнути по значку $\left[\begin{smallmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\end{smallmatrix}\right]$;
- або сполученням клавіш <**Ctrl**>+<**M**> викликати шаблон матриці;
- у діалоговому вікні, що з'явиться, задають кількість рядків 2 та стовпчиків матриці 2;
- заповнюють виведений шаблон матриці відповідними символами

$$\Delta := \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \end{pmatrix}$$

6. Аналогічно складають матриці Δa та Δb, замінюючи перший та другий стовпці головного визначника Δ стовпчиком вільних членів системи (7)

$$\Delta a := \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i & \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \end{pmatrix} \quad \Delta b := \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \end{pmatrix}$$

7. Визначають коефіцієнти a, b, попередньо присвоївши їм відповідні значення за формулами $a := \frac{|\Delta a|}{|\Delta|} \quad b := \frac{|\Delta b|}{|\Delta|}$

8. Підставляють значення коефіцієнтів a, b у рівняння прямої Y_i:=a+b·x_i та будують графіки емпіричних точок та лінійної залежності.

9. Визначають за допомогою вбудованих функцій наступні величини, що представлені у таблиці.

Загальний план застосування вбудованих функцій у Mathcad.

- Обирають місце у документі, куди потрібно вставити функцію;
- натискають кнопку з надписом f(x) на стандартній панелі інструментів або у меню Вставка знаходять меню Функция;
- у меню Категория Функции обирають Все;
- у списку Function Name (Имя функции) обирають ім'я вбудованої функції, під яким вона фігурує у Mathcad.
- у відповідному діалоговому вікні вказуємо вектор - x .
- надаємо команду комп'ютеру застосувати функцію натискаємо знак =.
- Отримаємо необхідне значення.

Назва статистичної величини	Загально-прийняте позначення	Відповідна вбудована функція	Рекомендоване позначення у Mathcad
Середнє арифметичне ознаки х	$\bar{x}$	mean(x)	xc
Середнє арифметичне ознаки у	$\bar{y}$	mean(y)	yc
Середнє квадратичне відхилення ознаки х	σ_x	stdev(x)	σx
Середнє квадратичне відхилення ознаки у	σ_y	stdev(y)	σy
Коефіцієнт кореляції	r	corr(x,y)	r
Коефіцієнт лінійної регресії	b	intercept(x,y)	b
Коефіцієнт лінійної регресії	a	slope(x,y)	a
Вектор коефіцієнтів лінійної регресії	(a,b)	line(x,y)	

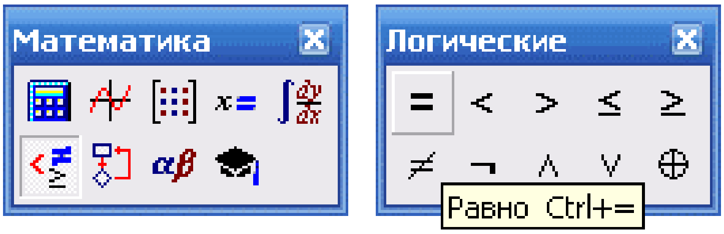
II. Розв'язання системи рівнянь (7) для визначення параметрів a, b лінійної залежності з застосуванням обчислювального блоку Given/Find.

1. Проводять підготовчу роботу аналогічно до пункту 1-3 попереднього пункту або копіюють введені у п.1-3 дані на новий лист Mathcad.

2. Потім проробляють наступне:

- невідомим змінним a, b надають (:=) довільного значення, зазвичай це 0 або 1;
- записують ключове слово початку обчислювального блоку **Given** (Дано);

- записують систему рівнянь, але без знака фігурної дужки;
- замість знака дорівнює (=) використовують знак "**булево равенство**", який знаходиться на "**Логические**" у палітрі "**Математика**";



- виводять шаблон матриці в *n* рядків і в один стовпчик, де *n* - число невідомих;
- заповнюють матрицю символами невідомих;
- надають матриці значення у вигляді слова **Find** (Знайти) і в дужках після слова перелічують, через кому, невідомі;
- для знаходження значень невідомих записують їх символи і пишуть знак дорівнює (=).

У **MathCAD** запис розв’язку матиме вигляд:

$$a := 1 \qquad b := 1$$

Given

$$b \cdot n + a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a \cdot \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(a, b)$$

$$a =$$

$$b =$$

<u>Програма виконання на комп’ютері.</u>

1. Завантажити математичний додаток Mathcad.

2. Обчислити параметри a, b лінійної залежності методом визначників, використовуючи завдання до практичної роботи №11.

3. Скопіювати дані i, n, x_i та y_i на новий лист Mathcad.

4. Обчислити параметри a, b лінійної залежності з застосуванням обчислювального блоку Given/Find.

5. Порівняти результати одержані у лабораторній роботі №11 та у пункті 2 та 4 практичної роботи №12.

6. Зберегти створений документ у власній папці.

7. Завершити роботу у Mathcad.

Контрольні запитання

1.Що таке лінійна залежність і якою формулою вона визначається?

2.Що означають коефіцієнти a і b лінійної залежності?

3.Які знаки мають a і b для зростаючої та спадаючої залежностей?

4.У чому полягає суть метода найменших квадратів?

5.З яких умов підбираються a і b методом найменших квадратів?

6.Вивести систему рівнянь відносно параметрів а і b лінії регресії.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ ТА ІНТЕРНЕТ-ДЖЕРЕЛ

1. Засуха В.А., Лисенко В.П., Голуб Б.Л. Прикладна математика, 3-видання, перероблене та доповнене. К.: Арістей, 2006. – 334 с.
2. Херхаргер М., Партолль Х. Mathcad 2000. Полное руководство. – К.: Издательская группа BHV, 2000. – 460с.
3. Меркурьева Е.К. Биометрия в селекции и генетике сельскохозяйственных животных. – М.: Колос, 1970, - 424 с.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука. 1964. – 576с.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1978. –360с.
6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1965. – 400с.
7. Гурский Е.М. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высшая школа, 1971, - 328 с.
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кошевника Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа. 1986. - 304с.
9. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. Київ.: КДЕУ. 1977.
10. Засуха В.А., Лисенко В.П., Голуб Б.Л. Прикладна математика. К.: 2003.
11. Засуха В.А. Характеристики множини варіаційних рядів /Науковий вісник НАУ. Т.63. – К.: НАУ, 2004. – с.151-156.
12. Засуха В.А. Рівняння прямої на площині /Аграрна наука та освіта. Т.63. – К.: НАУ, 2005. – с.73-79.
13. Інформатика: Комп’ютерна техніка. Комп’ютерні технології./За ред. О.І. Пушкаря. – К. Вид. центр Академія, 2001. – 696 с.
14. Мармоза А.Т. Практикум по математической статистике. –К.: Вища школа, 1990. –191с.
15. Петунин Ю.Н. Приложение теории случайных процессов в биологии и медицине. Киев: Наук. думка, 1981. – 320с.
16. Тарасенко Р.О., Лисенко В.П., Касаткін Д.Ю. Інформаційні технології в системах якості, стандартизації та сертифікації. Київ, НАУ, 2002. –82 с.
17. Хильми Г.Ф Основи физики биосферы.Гидрометиздат. Ленинград. 1966, 298 с.

1\. Сукачов В.Н. Введение в учение о растительных сообществах. Избр. труды т.3. Л. Наука, 1975. у

2. Амосов Н.М. Биологическая система (Енциклопедія кібернетики). Киев. Гл. ред. УСЭ, 1974.

3. Suppelt Ralf. Applications of optimum control theory to agroecosystem modeling. Ecological modeling, 1999, v/121. 161-183.

4. Гродзинський М.Д. Основи ландшафтної екології К.:Либідь, 1993.-224 с.

5. Моисеев Н.Н., Александров В.В., Тарко А.М. Человек и биосфера. М., Наука, 1985, 270 с.

6. Коваленко Г.Д, Рудя К.Г. Радиоэкология Украины. Киев, Київський університет, 2001, 167 с.

7. Хакен Г.Информация и самоорганизация. Москва, КомКнига, 2005.-248 с.

8. Смагин А.В. Почва как результат самоорганизации би огеценоза. Доклады АН СССР, 1989,т. 308, №4

9. Роде А.А. Почвообразовательный процесс и эволюция почв. М,: ОГИЗ, 1947. 141 с.

10. Мопертюи П. Законы движения и покоя, выведенные метафизического принципа. В кн. Вариационные принципы механики. М. ГИФМЛ,1959, стр. 41-55.

11. Бєляєв В.И. Управление природной средой., Киев, Наукова думка, 1973, 127 с.

12. Лекявичус Э. К. Инфомационный статус экосистемы. В кн. Экологический прогноз, Издательство МГУ, 1986, стр. 157 – 163.

13. Лархер В. Экология растений.– М.: Мир, 1978.–382 с.

14. Одум Ю. Экология: в 2 т. М., 1986. Т.1. 200 с.,Т.2. 220 с.

15. Эбелинг В.Образование структур при необратимых процессх. Москва – Ижевск. Институт кмпьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004, 256 с.

16. Шен нон К. Работы по теории информации и кибернетике. М. ИЛ, 1963.

17. Автомонов Ю.Г. Моделирование биологических систем. Киев, Наукова думка, 1977, 260 с.

18. Бриллюен Л. Научная неопределенность и информация. М., КомКнига, 2006, 272 с.

19. Хакен Г. Синергетика. М,, Мир, 1985, 423 с.

20. Пригожин И, Кандепуди Д. Современная термодинамика. М., Мир,2002, 461 с.

21. Пригожин И. От существующего к возникающему. М. Наука,1985, 326 с. ,

22. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М. Наука, 1982, 608 с.,
23. Торнли Дж. Г.М. Математическиео модели ф физиологии растений. Киев, Наукова Думка, 1982, 312 с.
24. Svirezhev Yuri M. Thermodynamics and ecology. Ecological Modelling ,2000, 132, 11–22.
25. Федоров В.Д., Гильманов Т.Г. Экология. М., Изд. МГУ, 1990, 461 с.
26. Дажо Р. Основы экологии. М. Прогресс. 1975, 415 с.
27. Амалькин В.В.. Дифференциальные уравнения в приложениях. М., Наука, 1987. - 158 с.
28. Мишкис А.Д. Математика для ВТУЗОВ. Специальные курсы. М. Наука, 1971, 632 с.
29. Понтрягін Л. Дифференциальные уравнении я. М. Наука, 1958, 350 с.
30. Кудрицкий Ю.К., Георгиевский А.Б., Карпов В.И. Адаптационная гипотеза биологической эффективности ионизирующего излучения. Атомная энергия. 1992, т. 73, вып.1. стр. 27 – 32.
31. Уорк К., Уорнер С.. Загрязнение воздуха. Источники и контроль.- М:. Мир, 1980. - 539 с.
32. Махонько К.П., Силантьев А.Н., Шкуратова И.Г. Контроль за радиационным загрязнением природной среды в окрестностях АЭС. Л., Гидрометеоиздат, 1985, 136 с.
33. Пути миграции искусственных радионуклидов в окружающей среде. Радиоэкология после Чернобыля. Под ред. Ф. Уорнера и Р. Харрисона.– М.: Мир, 1999.– 520 с.
34. Muller H., Prohl G. ECOSYS-87: A dynamic model for assessing radiological consequences of nuclear accidents //Health Physics.–1993.– V.64, № 3.– P.232–252.
35. Handbook of parameter values for the prediction of radionuclide transfer in temperate environments.–Tech. Reports.–Vienna: IAEA.– 1994.–№ 364.–73 p.
36. P. Henner, C. Colle and M. Morello. (Transfer and translocation of 241Am, 239Pu, 137Cs and 85Sr after partial foliar contamination of bean plants. Radioprotection, Suppl. 1, vol. 40 (2005), S379-S383)
37. Блинов Б.К. К оценке размеров зоны загрязнения почв тяжелыми металлами в районах техногенного влияния. Труды Института экспериментальной метеорологии. М. Гидрометиздат. 1983, вып.11 (97). Стр. 48 – 51.

38. Кабата–Пендиас А., Пендиас Х. Микроэлементы в почвах и растениях.–М.: Мир, 1989.–439 с.

39. Modelling the migration and accumulation of radionuclides in forest ecosystems:

final report on the BIOMASS Forest Working Group activities 1998 – 2000.

40. Кутлахмедов Ю.А., Корогодин В.І, Кольтовер В.К. Основи радиоэкології, К., ВИща школа, 2003, - 319 с.

41. Клечковский В.М., Гулякин И.В. Поведение в почвах и растениях микроколичеств стронция, цезия, рутения и циркония // Почвоведение.– 1958. –№3.–С.1–15.

42. Гродзинский Д.М., Гудков И.Н. Защита растений от лучевого поражения.– М.: Атомиздат, 1973. – 384 с.

43. Протас Н.М., Шпинар Л.И., Ясковец И.И. Механизмы, контролирующие миграцию радионуклидов в системе почва – растение // Агроекологічний журнал.– 2004.– №2.– С.67–72.

44. Abbott Michael L., Rood Arthur S. COMIDA: A radionuclide food chain model for acute fallout deposition // Health Physics.–1994.– V.66, №1.– P.17–29.

45. Koch J., Tadmor J. RADFOOD – A dynamic model for radioactivity transfer through the human food chain // Health Physics.–1986.– V.50, №6.–

P.721–737.

46. Simmonds J.R., Linsley G.S. A dynamic modeling system for the transfer of radioactivity in terrestrial food chains. Nuclear safety. –1981.–V.2, №6.– P.766–777.

47. Whicker F. Ward, Kirchner T.B. PATHWAY: A dynamic food – chain model to predict radionuclide ingestion after fallout deposition // Health Physics.– 1987.–V.52, №6.– P.717-737.

48. Zach Reto, Sheppard Steve C. Food-chain and dose model, CALDOS, for assessing Canada’s nuclear fuel waste management concept // Health Physics.– 1991.–V.60, № 5.–P.643–656.

49. Фесенко С.В., Спиридонов С.И., Санжарова Н.И., Анисимов В.С., Алексахин Р.А. Моделирование миграции 137Cs в системе почва – растения на торфяных почвах, подвергшихся загрязнению после аварии на Чернобыльской АЭС // Экология.– 2002.– №3.– С.185–192.

50. Коноплев А.В., Коноплева И.В. Параметризация перехода 137Cs из почвы в растения на основе ключевых почвенных характеристик // Радиационная биология.–1999.–Т.39, №4.–С.455-461.

51. Ефремова М.А., Дричко В.Ф., Поникарова Т.М., Скородумова Т.О. Исследование взаимодействия 134Cs и калия в системе торфяная почва–

растение в условиях возрастающих концентраций макроаналога в почве // Радиационная биология и радиоэкология. –2000. —.№1. –С. 113–117.

52. Протас Н.М., Ясковец И.И., Шпинар Л.И. Концентрационные соотношения для радионуклида 137Cs в системе почва–растение// Агроекологічний журнал. – 2003. –№4. –С. 74–78.

53. Прохоров В.М. Математическая модель поглощения элементов растениями из почвы // Агрохимия.–1970.– №7.–С.126-135.

54. Прохоров В.М. Миграция радиоактивных загрязнений в почвах. Физико-химические механизмы и моделирование / Под ред. Р.М.Алексахина.– М.: Энергоиздат, 1981. – 98 с.

55. Мусиенко Н.Н., Тернавский А.И. Корневое питание растений: Учеб. пособие.–К.:Выща школа, 1989.–203 с.

56. Casadesus J., Sauras T., Gonze M.A., Vallejo R., Brechignac F. A nutrient – based mechanistic model for predicting the root uptake of radionuclides// In Radioactive pollutants: Impact on the environment–2001.– P.209-239.

57. Ясковець І.І., Тарасенко Р.О., Протас Н.М. Модель міграції радіонуклідів в системі грунт–рослина // Науковий Вісник НАУ.–2004.– Вип.77.–С.80–93

58. Санжарова Н.И., Фесенко С.В., Лысянский К.Б., и др. Формы нахождения в почвах и динамика накопления 137Cs в сельскохозяйственных культурах после аварии на Чернобыльской АЭС // Почвоведение.– 1997.– №2.– С.159–164.

59. Фесенко С.В., Спиридонов С.И., Санжарова Н.И., Алексахин Р.А. Математическая модель биологической доступности 137Cs в почвах луговых систем // Почвоведение.– 1997.– №1.– С.42–48.

60. Knatko V.A., Ageets V.U., Shmigelskaya I.V., Ivashkevich I.I. Soil – to - potato transfer of 137Cs in an area of Belarus: regression analyses of the transfer factor against 137Cs deposition and soil characteristics// J.of Environmental Radioactivity. –2000.– V.48.– P.171 –181.

61. Zach Reto, Sheppard Steve C. Food-chain and dose model, CALDOS, for assessing Canada’s nuclear fuel waste management concept // Health Physics.– 1991.–V.60, № 5.–P.643–656.

62. Георгиевский В.Б.. Экологические и дозовые модели при радиационных авариях. К.: Наукова Думка. 1994. – 235 с.

63. Гусев Н.Г., Беляев В.А.. Радиоактивные выбросы в биосфере. Справочник. - М. Энергоатомиздат, 1991. – 248 с.

64. MYTTENAERE, C., SCHELL, W.R., THIRY, Y., SOMBRE, L., RONNEAU, C., VAN DER STEGEN DE SCHRIECK, J., Modelling of the Cs-137

cycling in forests: recent developments and research needed // Sci. Total Environ. 136.–1993.–P. 77–91.

65. Гірій В.А., Заїтов В.Р., Онищук В.А., Ясковець І.І. «ЕКОМОДЕЛЬ»: динамічна модель для радіоекологічної ситуації // Агроекологія і біотехнологія. – 1999.–Вип. 3.– С.25–34.

66. Страшкраба М., Гнаук А. Пресноводные экосистемы. Математическое моделирование. М. Мир., 1989, -376 с.

67. Пристер Б.С., Лощилов Н.А., Немец О.Ф., Поярков В.А. Основы сельскохозяйственной радиологии. - К. Урожай, 1991. – 246 с.

68. то відповідне значення r0 приймається за значення радіуса кореляції

69. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных М. Мир, 1989, 540 с.

70. Гущинский А. Г., Гальченко М. И., Чернышова М. А. Лабораторный практикум к курсу «Информационные технологии», Пушкин, 2013.

ІНТЕРНЕТ-ДЖЕРЕЛА

1. Wolfram Alpha или Вычислительная Теория https://netpeak.net/ru/ blog/wolfram_alpha/

2. Ted Dziuba. Mathematica man brews 'AI' Google Killer. A New Kind of Pseudo-Science. http://www.theregister.co.uk/2009/03/17/wolfram_alpha/

3. Jane Fae. Taking a first bite out of Wolfram Alpha. The knowledge engine that knows. http://www.theregister.co.uk/2009/05/18/wolfram_alpha/

4. Statistics & Data Analysis. A few examples of what you can ask Wolfram|Alpha about: https://www.wolframalpha.com/

5. Задачник Кузнецова. Графики https://pluspi.miraheze.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F:%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA_%D0%9A%D1%83%D0%B7%D0%BD%D0%B5%D1%86%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%93%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%B8%D0%BA%D0%B8_%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0_1

6. Задачник Кузнецова. Пределы https://pluspi.miraheze.org/wiki/Zadachnik_Kuznecova_Predely_Zadachi_13-16

7. Задачник Кузнецова. Дифференцирование https://pluspi.miraheze.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F:%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA_%D0%9A%D1%83%D0%B7%D0%BD%D0%B5%D1%86%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0_8

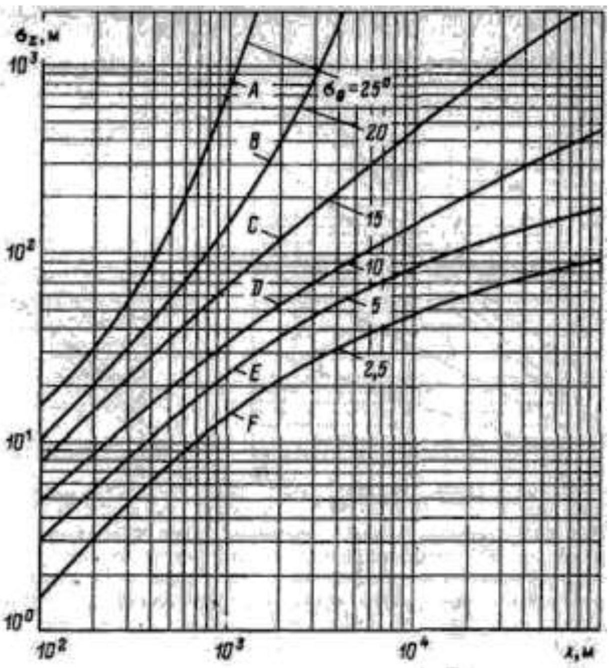
ДОДАТКИ

Додаток 1. Ключ до визначення категорій стійкості

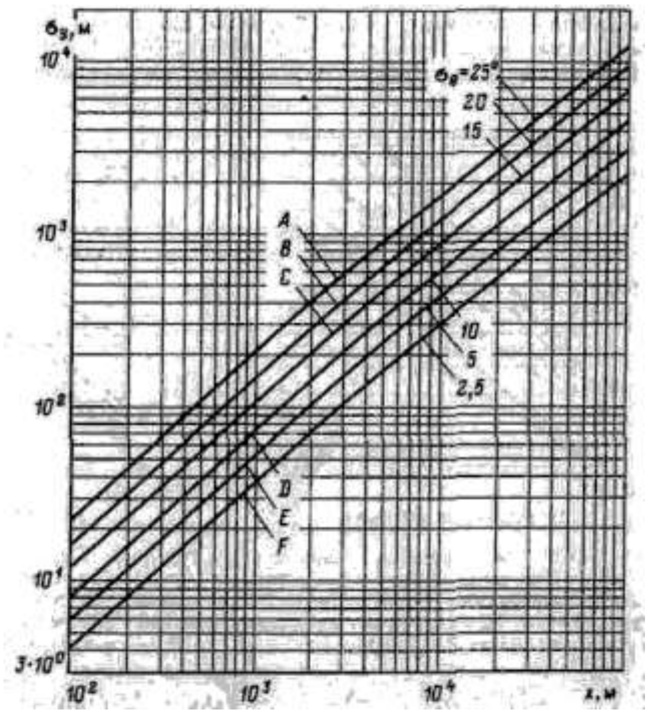
Погодні умови	Позначення класу стійкості по Пасквілу – Тернеру		σ_y (м)	σ_z (м)
	буква	цифра		
Дуже нестійкі	A	1	-	-
Помірно нестійкі	B	2	$0{,}14x^{0,92}$	$0{,}53x^{0,73}$
Слабко нестійкі	C	3	-	-
Нейтральні	D	4	$0{,}06x^{0,92}$	$0{,}15x^{0,70}$
Слабко стійкі	E	5	-	-
Помірно стійкі	F	6	-	-
Дуже стійкі	-	7	$0{,}02x^{0,92}$	$0{,}05x^{0,61}$

Примітка: Формули для σ_y та σ_z придатні для використання в області $100 \le x \le 400$ м

Додаток 2. Вертикальна дисперсія струменя по Пасквіллу – Гіффорду для рівнинної місцевості



Додаток 3. Горизонтальна дисперсія струменя по Пасквіллу – Гіффорду для рівнинної місцевості



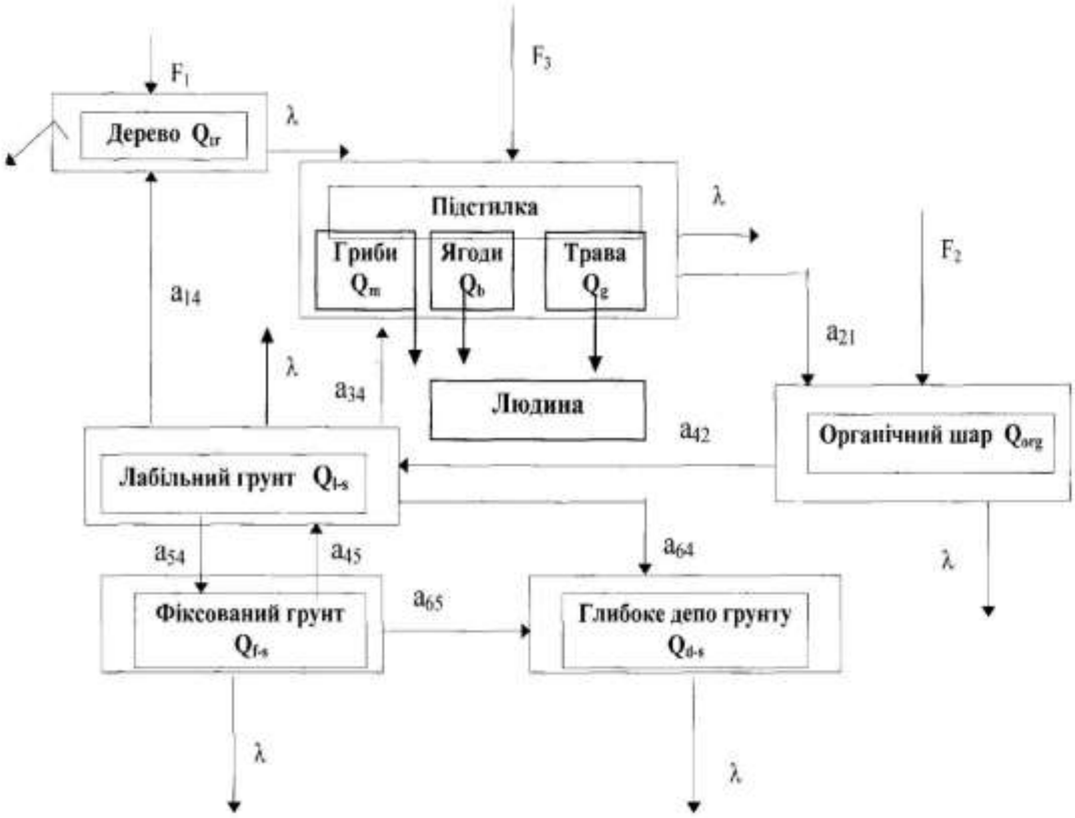
Додаток 4. Коефіцієнти переходу ^{137}Cs із ґрунту в кормові культури, КП (Бк/кг)/(кБк/м^2) (на природну вологість рослин) в різні роки

Культура	Тип ґрунту, pH сольової витяжки					
	Дерново-підзолисті, 4.5-5.5			Чорнозем, 6.6-7.5		
	1987	1990	1994	1987	1990	1994
Сіно природних трав	20.0	6.2	4.1	-	-	-
Сіно сіяних	4.8	4.0	2.9	0.40	0.20	0.10
Вика	3.2	3.0	2.1	0.20	0.15	0.10
Конюшина	2.7	2.0	0.6	0.21	0.17	0.10
Люпин	2.2	1.8	1.4	-	-	-
Люцерна	1.4	1.1	0.8	0.10	0.08	0.06
Кормовий буряк	0.80	0.41	0.28	0.28	0.13	0.04
Кукурудза на силос	0.50	0.30	0.15	0.06	0.03	0.01

Додаток 5. Параметри моделі лісової екосистеми

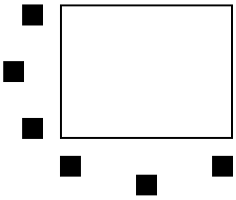
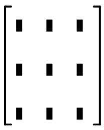
Параметр (Одиниці вимірювання)	Позначення	Хвойний ліс	Листяний ліс
		Узагальнене значення	Узагальнене значення
Час абсорбції (р)	T_{ab}	0.64	0.64
Біомаса дерев (%)	B_t	60	60
Біомаса підстилки (%)	B_u	20	20
Час десорбції (р)	T_{ds}	1.1	1.1
Доля перехоплення (%)	f	0.8	0.5
Час вимивання (р)	T_{lc}	400	400
Час видалення органічного шару (р)	T_{or}	8	3
Час розпаду ^{137}Cs (р)	$\ln 2/\lambda$	30.14	30.14
Час поглинання деревиною (р)	T_{tu}	2	1
Час видалення із деревини	T_{tr}	короткий 3.6 д проміжний .80 д довгий 3 р	3.6 д 25 д 0.72 р
Час видалення підстилки	T_{ur}	Корот-кий 12 д проміжний .32 д довгий 84 д	12 д 32 д 84 д
Час поглинання підстилкою (р)	T_{uu}	8	10

Додаток 6 Концептуальна модель міграції радіонуклідів у лісовій екосистемі



Додаток 7. Кодування математичних операцій в MathCAD

Математична дія	Сполучення клавіш, послідовність введення	Назва дії
$x+y$	x+y	Додавання **x** до **y**
$x-y$	x-y	Віднімання **x** від **y**
$x \cdot y$	x*y	Множення **x** на **y**
$\frac{x}{y}$	x/y	Ділення **x** на **y**
x^y	x <Shift+6> y	зведення **x** в ступінь **y**
$\sqrt{x}$	\ x	Корінь з **x**
$\lvert x \rvert$	<Shift+\> x	Модуль **x**
x_i	x [i	Запис змінної **x** з нижнім індексом **i**
(x)	<Shift+9> x <Shift+0>	Значення **x** в дужках
$y := x$	y <Shift+Ж> x	Надати значенню **y** значення **x**

i:=0,1..8	i <Shift+Ж> 0<,>1<Ж> 8	Надання змініій ряду чисел з фіксованим кроком
$y \approx x$	y <Alt+=> x	**y** наближено дорівнює **x** (умова)
$y \geq x$	y <Alt+0> x	**y** більше-рівне **x** (умова)
$y \leq x$	y <Alt+9> x	**y** меньше-рівне **x** (умова)
$y_i := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	y <[>I x <Shift+Ж> a <,> b <,> c	Надати змінній **y_i** ряду чисел **[a,b,c]**
$\frac{d}{dx}y(x)$	<Shift+/> f <x>	Диференціал функції **f(x)** по **x**
$\sum_i x_i$	<Shift+4> x	Сума змінних **x** кількістю **i**
$\int_a^b f(x)dx$	<Shift+7> f(x)	Інтеграл функції **f(x)** по **dx** в межах від **a** до **b**
$\lvert M \rvert$	<Shift+\>M	Визначник матриці M
	<Shift + 2>	Вивести шаблон графіка
	<Alt+M> a <Space*> b	Задати шаблон матриці, де **a** – кількість стовпчиків, **b** – кількість рядків

Додаток 8. Кодування команд меню та панелі інструментів за допомогою клавіатури

Меню	**Команда**	**Переклад**	**Сполучення клавіш**	**Опис**
File (Файл)	**New**	Створити	<Ctrl>+<N>	Створити новий документ
	Open	Відкрити	<Ctrl>+<O>	Відкрити існуючий документ
	Close	Закрити	<Ctrl>+<W>	Закрити активний документ
	Save	Зберегти	<Ctrl>+<S>	Зберегти активний документ
	Print	Друкувати	<Ctrl>+<P>	Друкувати активний документ
Edit (Правка)	**Undo**	Відмінити	<Ctrl>+<Z>	Відмінити останню дію
	Redo	Повторити	<Ctrl>+Y>	Повторити останню відмінену дію
	Cut	Вирізати	<Ctrl>+<X>	Вирізати виділений фрагмент
	Copy	Копіювати	<Ctrl>+<C>	Копіювати виділений фрагмент
	Paste	Вставити	<Ctrl>+<V>	Вставити вираз з буферу
	Delete	Видалити	<Ctrl>+<D>	Видалити обраний фрагмент
	Select All	Виокремити	<Ctrl>+<A>	Виокремити весь робочий лист
	Find	Знайти	<Ctrl>+<F>	Пошук тексту
	Replace	Замінити	<Ctrl>+<H>	Заміна деякого тексту іншим
View (Вид)	**Refresh**	Поновити	<Ctrl>+<R>	Поновити документ
Insert (Вставка)	**Matrix**	Матриця	<Ctrl>+<M>	Вставити матрицю або вектор
	Function	Функція	<Ctrl>+<E>	Вставити вбудовану функцію
	Unit	Одиниці	<Ctrl>+<U>	Вставити оди-ниці вимірю-вання величи-ни деякої розмірності
	Picture	Малюнок	<Ctrl>+<T>	Створити малюнок для відображення матриці
	Hyperlink	Гіперпосилання	<Ctrl>+<K>	Вставити гіперпосилання

Додаток 9. Таблиця основних функціональних клавіш

F1	Допомога
F2	Скопіювати вираз
F3	Вирізати вираз
F4	Вставити вираз
F5	Визвати файл
Ctrl+ F5	Глобальний пошук виразу
F6	Зберегти файл
Ctrl+ F6	Глобальна зміна одного виразу на інший
F7	Поділ екрана на два вікна
Ctrl+ F7	Закрити вікно
F8	Перемикання між вікнами
F9	Провести обчислення (працює, якщо автоматичний режим вимкнуто)
F10	Ввійти в системне меню