Завдання №1

з дисципліни «Теорія ймовірності і математична статистика»

для студентів спеціальності «Транспортні технології (автомобільний транспорт)», I курс (скорочений термін навчання), група 1906.

Варіант завдання відповідає номеру за списком студентської групи.

Завдання №1. В лотереї $n+m$ білетів, на m з них припадає виграш. Знайти ймовірність того, що з придбаних k білетів:

а) будуть s виграшних;

б) виграє хоч один.

№ варіанту	n	m	k	s
1	300	120	210	75
2	400	70	345	50
3	125	45	75	30
4	150	60	80	45
5	225	145	105	80
6	100	30	80	25
7	400	150	200	180
8	360	110	100	85
9	225	90	70	60
10	270	85	150	75
11	200	45	90	35
12	240	65	85	40
13	340	70	150	50
14	110	35	50	25
15	260	140	150	90
16	320	150	200	75
17	250	80	130	55
18	240	60	110	45
19	180	45	140	30
20	125	40	80	35
21	235	75	200	65
22	190	40	150	35
23	140	55	100	40
24	325	85	190	50
25	200	60	150	45
26	215	75	130	65

27	150	35	70	30
28	325	80	140	55
29	150	45	120	25
30	170	50	80	60

Теоретичні основи до завдання №1.

1.1. Випадкові події, їх класифікація

До базових понять теорії ймовірності відносять:
випробування − реальний або мислений експеримент, виконуваний за певним комплексом умов S, результати якого піддаються спостереженню;
подія − результат випробування;
випадкова подія − подія, яка в результаті випробування може відбутись або ж ні при умові виконання певного комплексу умов S;
достовірна подія − подія, яка в результаті випробування обов'язково відбудеться при умові виконання умов S;
неможлива подія − подія, яка ніколи свідомо не настане при умові виконання певного комплексу умов S.

Розглядають такі основні типи випадкових подій:
несумісні події − дві події, підпорядковані умові: поява однієї з них повністю виключає появу іншої в даному випробуванні;
попарно-несумісні події − кілька подій (більше двох), підпорядковані умові: поява однієї з них повністю виключає появу будь-якої іншої в даному випробуванні;
єдиноможливі події − події, підпорядковані умові: в даному випробуванні хоча б одна з них обов'язково відбувається;
рівноможливі події − події, підпорядковані умові: в даному випробуванні немає підстав вважати будь-яку одну з них більш або менш можливою, ніж якусь іншу.

Сукупність несумісних, єдиноможливих та рівноможливих подій називають сукупністю (простором) елементарних подій і позначають символом Ω.

Сукупність несумісних та єдиноможливих подій утворюють повну группу подій.

Протилежними називають дві єдиноможливі події, що утворюють повну групу. Протилежні події позначають так: A і $\overline{A}$.

1.2. Класичне означення ймовірності

Ймовірністю $P(A)$ випадкової події A називається відношення числа m елементарних результатів випробування, що сприяють події A. до загального числа n всіх рівноможливих елементарних подій, що утворюють повну групу:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1.1)$$

Ймовірність випадкової події − це додатне число, що знаходиться в проміжку між нулем та одиницею:

$$0 < P(A) < 1. \qquad (1.2)$$

Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці, а неможливої події − нулю.

1.3. Основні формули комбінаторики

Для обчислення n, m за формулою ймовірності (1.1) застосовують формули комбінаторики.

Основні типи комбінацій:

1. Переставлення − це комбінації, що складаються з одних і тих самих n різних елементів та відрізняються тільки порядком їх розташування.

Число всіх можливих переставлень з n предметів позначається символом P_n і обчислюється за формулою

$$P_n = n!, \qquad (1.3)$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$.

2. Сполучення − це комбінації, що утворені з n різних елементів по m елементів ($n > m$) та відрізняються хоча б одним елементом (тобто складом, а не порядком).

Число всіх можливих сполучень з n елементів по m позначається через C_n^m і обчислюється так:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\ (n-m)!}. \qquad (1.4)$$

3. Розміщення − це комбінації, які утворені з n різних елементів по m елементів ($n > m$), що відрізняються або складом або їх порядком.

Число всіх можливих розміщень з n елементів по m − A_n^m обчислюється за формулою

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1)). \qquad (1.5)$$

Правило суми. Якщо деякий об'єкт A можна вибрати із сукупності об'єктів m способами, а інший об'єкт B − n способами, то вибрати або A або B можна $(m+n)$ способами.

Правило добутку. Якщо об'єкт A можна вибрати із сукупності об'єктів m способами і після кожного такого вибору об'єкт B можна вибрати n способами, то пара об'єктів (A, B) у вказаному порядку може бути вибрана $m \cdot n$ способами.

1.4. Статистична та геометрична ймовірності

Відносна частота $W(A)$ події A − це відношення числа m елементарних результатів досліду, в яких подія A відбулась, до загального числа n фактично проведених дослідів:

$$W(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.6}$$

Ймовірність $P(A)$ обчислюють до проведення досліду, а відносну частоту $W(A)$ − після досліду.

Властивість стійкості: коли в однакових умовах проводити серії дослідів, збільшуючи їх кількість, відносна частота події дуже мало змінюється, коливаючись навколо деякого сталого числа − ймовірності цієї події. Тому

$$P(A)\approx W(A). \tag{1.7}$$

Статистична ймовірність − це число, біля якого групується значення відносної частоти даної події у різних серіях великого числа дослідів.

1.5. Геометричні ймовірності.

Геометрична ймовірність − це ймовірність попадання точки в область (відрізок, плоску область, просторову область).

Нехай, на площині є деяка область g, що міститься всередині області G. На фігуру кинуто навмання точку. Тоді ймовірність попадання точки в область g визначається рівністю

$$P=\frac{mes\ g}{mes\ G}. \tag{1.8}$$

Якщо позначити міру (довжину, площу, об'єм) області через mes, ймовірність попадання точки в область g − частину області G визначається так:

$$P=\frac{mes\ g}{mes\ G}. \tag{1.9}$$

Методичні вказівки до завдання №1.

При вивченні цієї теми слід опрацювати базові поняття, що стосуються класифікації випадкових подій (несумісні, попарно-несумісні події, єдиноможливі події, рівноможливі події, повна група подій), класичне означення ймовірності та схему формалізації текстової задачі на безпосереднє обчислення ймовірності. Для розв'язання більш складних задач необхідно засвоїти основні формули комбінаторики та їх відмінності. Зверніть увагу на властивість стійкості та різноманітність постановок задач, що охоплюються геометричним означенням ймовірності.

Запитання для самоперевірки

1. Що називають випадковою, елементарною подією? Навести приклади.
2. Які події називаються достовірними і неможливими? Які події називають несумісними, єдино можливими, рівно можливими? Навести приклади.
3. Яка множина подій називається повною групою подій? Простором елементарних подій? Навести приклади.
4. Які події називаються протилежними? Навести приклади.
5. У чому полягає класичне означення ймовірності і коли воно застосовується?
6. Які основні властивості ймовірності?
7. Дати означення таких комбінацій: переставлення, сполучення, розміщення. Навести необхідні формули. Як розрізняти сполучення і розміщення?
8. Сформулювати основні правила комбінаторики − правило добутку і суми.
9. Як означається відносна частота події? У чому полягає її зв'язок із класичним означенням ймовірності? Сформулювати властивість стійкості.
10. Як означається геометрична ймовірність? Сформулювати постановку задачі та навести необхідні формули.

Розв’язання типових прикладів.

Приклад 1.1. Монету підкидають двічі. Описати такі події:

а) подія A – принаймні один раз з’явиться герб;

б) подія B – герб з’явиться тільки один раз;

в) подія C – герб не з’явиться жодного разу.

Розв’язання. а) Позначимо появу герба символом Г, а появу цифри − символом Ц. Тут можливі такі випадки (елементарні події):

ω_1 − (ГГ) − першого і другого разу випадає герб,

ω_2 − (ГЦ) − першого разу випадає герб, другого − цифра,

ω_3 − (ЦГ) − першого разу випадає цифра, другого − герб,

ω_4 − (ЦЦ) − першого і другого разу випадає цифра.

Простір елементарних подій є множиною, що складається з чотирьох пар:

$$\Omega = \{(\text{ГГ}), (\text{ГЦ}), (\text{ЦГ}), (\text{ЦЦ})\}.$$

Подія A «принаймні один раз з’явиться герб» означає, що герб з’явиться або один, або два рази. Отже, $A = \{\text{ГЦ}, \text{ЦГ}, \text{ГГ}\}$.

б) Подія B відбувається, якщо першого разу випадає герб, другого − цифра і навпаки (елементарні події ω_2, ω_3). Тому $B = \{\text{ГЦ}, \text{ЦГ}\}$.

в) події C «герб не з’явиться жодного разу» відповідає одна елементарна подія ω_4. Таким чином, $C = \{\text{ЦЦ}\}$.

Приклад 1.2. За умовою прикладу 1.1 знайти ймовірності подій A, B, C.

Розв’язання. Є чотири можливі елементарні результати, що утворюють повну групу: ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Події A сприяють три елементарні результати:

ω_1, ω_2, ω_3, Тому, $n = 4$, $m = 3$, $P(A) = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Події B сприяють два елементарні результати ω_2, ω_3, а події C − один: ω_4. Тому, $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$, $P(C) = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Приклад 1.3. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1,2,...,2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

Розв'язання. Парні числа можна розставити на місцях з парними номерами (таких місць n) $n!$ способами; кожному способу розташування парних чисел на місцях з парними номерами відповідає $n!$ способів розташування непарних чисел на місцях з непарними номерами. Тому загальне число переставлень вказаного типу за правилом добутку дорівнює

$$n! \cdot n! = [n!]^2 .$$

Приклад 1.4. Скількома способами можна розсадити 4 студентів на 25 місцях?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу розміщень з 25 елементів по 4, тобто

$$A_{25}^4 = P_4 \cdot C_{25}^4 = 4!\frac{25!}{4!\ 21!} = 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 = 303600 .$$

Приклад 1.5. В цеху працюють 6 чоловіків і 4 жінки. За табельними номерами навмання відбирають 7 осіб. Знайти ймовірність того, що серед відібраних осіб буде 3 жінки.

Розв'язання. Введемо позначення: подія A − «серед 7-ми відібраних осіб буде 3 жінки».

$P(A)$ знайдемо за формулою (1.1).

Загальне число елементарних подій експерименту дорівнює числу способів, якими можна вибрати 7 осіб із загальної кількості 10 осіб:

$$n = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!\ 3!} = 8 \cdot 3 \cdot 5 = 120 .$$

Обчислимо тепер число m елементарних результатів, що сприяють події A. Серед 7-ми випадково відібраних осіб мають бути тільки 3 жінки, а значить решта (4 особи) − чоловіки. 3 жінки із загальної кількості 4 можна вибрати за табельними номерами C_4^3 способами, а 4 чоловіка − C_6^4 способами. Тому за правилом добутку

$$m = C_4^3 \cdot C_6^4 = \frac{4!}{3!\ 1!} \cdot \frac{6!}{2!\ 4!} = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 ,$$

Таким чином, $P(A) = \frac{60}{120} = 0{,}5$.

Приклад 1.6. При перевірці сортаменту виробів відносна частота виробів I сорту виявилась рівною 0,75. Знайти число виробів I сорту, якщо всього було перевірено 400 виробів.

Розв'язання. Тут $W(A)=0{,}75$, а загальне число фактично проведених дослідів $n=400$. Шукане число m знайдемо, виходячи з формули (1.6):

$$m=0{,}75\cdot 400=300\,.$$

Приклад 1.7. У лінійному рівнянні $\alpha x=\beta$ коефіцієнт α вибирають навмання із замкненого проміжку $[0;8]$, а вільний коефіцієнт β − з проміжку $[0;10]$. Знайти ймовірність того, що корінь даного рівняння не менший одиниці.

Розв'язання. За умовою корінь рівняння має задовольняти нерівності $x=\dfrac{\beta}{\alpha}\geq 1$ або $\beta\geq\alpha$ (рис.1.1).

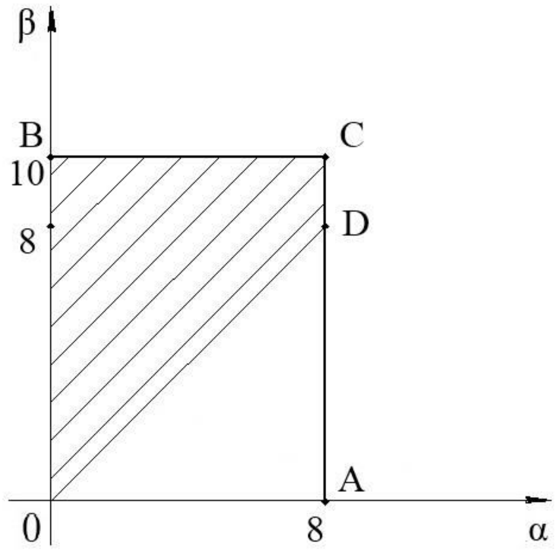

Рис.1.1.

Шукану ймовірність знаходимо за формулою

$$P=\frac{S_{OBCD}}{S_{OBCA}},$$

де $S_{OBCD}=2\cdot 8+\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=48$, $S_{OBCA}=8\cdot 10=80$.

Отже, $P=\dfrac{48}{80}=0{,}6$.

Список джерел до завдання №1:

1. Сулима І.М., Яковенко В.М. Вища математика. Теорія ймовірностей. Математична статистика. Навчальний посібник. К.: Вид. Центр НАУ, 2004. – 238 с.
2. Панталієнко Л.А. Методичні вказівки до виконання тестових завдань з дисципліни «Вища математика« за модулем «Теорія ймовірностей, математична статистика та основи кореляційного аналізу». – Видавничий центр НУБІП, 2011. – 71 с.
3. Панталієнко Л.А. Методичні вказівки до виконання тестових завдань з дисципліни «Теорія ймовірностей та випадкові процеси». – Видавничий центр НУБІП, 2009. – 64 с.
4. Конспект лекцій.

Викладач: доц. Панталієнко Л.А.
Термін виконання: до 19 березня 2020р.
Прошу надсилати виконані завдання за адресою: wnyrk15@gmail.com