Дистанційне навчання

Графік навчальної роботи за модулем 2 на ЕНК
(Завдання на сайті кафедри вищої та прикладної математики)

Група	Дисципліна	завдання №4 (дата здачі)	завдання №5 (дата здачі)	завдання №6 (дата здачі)	Тест за модулем 2 (дата здачі)
ТрТ1906.	Теорія ймовірності і математична статистика	до 3квітня 2020	до 10квітня 2020	до 20 квітня 2020	23 квітня 2020

Завдання №5. Неперервна випадкова величина (НВВ) X задана інтегральною функцією розподілу (непарні варіанти) або диференціальною функцією розподілу (парні варіанти). Знайти: а) диференціальну функцію розподілу (непарні варіанти) або інтегральну функцію розподілу (парні варіанти) для X ; б) ймовірність того, що випадкова величина X потрапляє в заданий інтервал (α, β); в) математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення величини X ; 4) побудувати графіки інтегральної і диференціальної функцій розподілу величина X .

№ варіанта	Інтегральна або диференціальна функція розподілу	Інтервал (α, β)
1	2	3
1	$F(x)=\begin{cases}0 & x\le -1\\ \frac{1}{2}\left(x+1\right), & -1<x\le 1,\\ 1 & x>1\end{cases}$	(0;0,8)
2	$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 1\\ a(x-1), & 1<x\le 3,\\ 0, & x>3\end{cases}$	(2;2,5)
3	$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 1\\ \frac{1}{4}\left(x+1\right)^2, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3\end{cases}$	(1,8;2,3)
4	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-\frac{1}{2}), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2\end{cases}$	(1;3/2)

5	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2\end{cases}$	(1;1,8)
6	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{2}{\pi}, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$	$\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right)$
7	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{8}x^3, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2\end{cases}$	(1;1,7)
8	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ a(4x-x^3), & 0\le x\le 0{,}2\\ 0, & x>0{,}2\end{cases}$	(0; 0,1)
9	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{3}(x+1), & 0<x\le 3,\\ 1, & x>3\end{cases}$	(0,5;0,8)
10	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ a, & 2<x\le 4\\ 0, & x>4\end{cases}$	(2,5;3)
11	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}, & -1<x\le 3,\\ 1, & x>3\end{cases}$	(1;2)
12	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2x, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1\end{cases}$	(0,2;0,8)
13	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{1}{2}x-1, & 2<x\le 4,\\ 1, & x>4\end{cases}$	(2;3)
14	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ a(2x-x^2), & 0\le x\le 1/2\\ 0, & x>1/2\end{cases}$	(1/4;1/3)

15	$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ a(x-1), & 1\le x\le 3,\\ 1, & x>3,\end{cases}$	(2; 2,8)
16	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ ax^2, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x>1,\end{cases}$	(1/2;3/2)
17	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$	(0,5;0,8)
18	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1\end{cases}$	(0,2;0,6)
19	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2}, & -2<x\le 2,\\ 1, & x>2\end{cases}$	(-1;1)
20	$f(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ ax, & -3\le x\le 1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$	(-2;0)
21	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{1}{2}(x^2-x), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2\end{cases}$	(1,5;1,8)
22	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \frac{1}{4}, & -2<x\le 2,\\ 0, & x>2\end{cases}$	(-1,5;1)
23	$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ a\sqrt{x}, & 0\le x\le 4,\\ 1, & x>4,\end{cases}$	(1; 3)
24	$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a(x+1), & -1\le x\le 1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$	(0; 1/2)

25	$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ ax^{\frac{3}{2}}, & 0\le x\le 4,\\ 1, & x>4,\end{cases}$	(2; 3)
26	$f(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ a(x-2), & 2\le x\le 4,\\ 0, & x>4,\end{cases}$	(2; 3)
27	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ 0.5x-1, & 2<x\le 4,\\ 1, & x>4\end{cases}$	(2,5;3)
28	$f(x)=\begin{cases}0, & x<5,\\ a(x-5)^2, & 5\le x\le 8,\\ 0, & x>8,\end{cases}$	(6;7)
29	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{x-1}{2}, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3\end{cases}$	(1,5;2)
30	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{2}{9}(3x-x^2), & 0<x\le 3,\\ 0, & x>3\end{cases}$	(1;2)

Теоретичний матеріал до завдання №5.

13.1.3. Функція розподілу ймовірностей.

Означення. Інтегральною функцією розподілу (функцією розподілу) ймовірностей випадкової величини X називається функція

$$F(x) = P(X < x) \tag{13.2}$$

змінної x, яка визначає ймовірність того, що величина X в результаті випробування прийме значення менше, ніж число x.

Для дискретних величин:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$$

Отже, інтегральна функція розподілу є універсальним способом завдання закону розподілу ймовірностей (як ДВВ, так і НВВ).

Характеристичні властивості функції розподілу.

1. Значення інтегральної функції розподілу належать відрізку $[0;1]$:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. Інтегральна функція розподілу є неспадною функцією, тобто:

$$\text{при } x_1 < x_2 \quad F(x_1) \le F(x_2).$$

Наслідок 1. Ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення з проміжку $[a,b)$ дорівнює приросту інтегральної функції розподілу на цьому проміжку

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \tag{13.3}$$

Наслідок 2 (парадокс неперервності). Ймовірність того, що неперервна випадкова величина (НВВ) X прийме одне певне значення, дорівнює нулю:

$$P(X = x_1) = 0. \tag{13.4}$$

Рівність (13.4) не означає, що подія $X = x_1$ неможлива. В результаті досліду випадкова величина X прийме одне з можливих значень, зокрема, цим значенням може бути і x_1, але ймовірність події $X = x_1$ дуже мала.

3. Якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a,b), то $F(x) = 0$ при $x \le a$ та $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Наслідок. Якщо можливі значення НВВ розташовані на всій осі x, то

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Графік інтегральної функції розподілу називається інтегральною кривою розподілу. Для дискретної випадкової величини цей графік має ступінчастий вигляд; можливі значення ДВВ є точками розриву I роду функції розподілу $F(x)$, а їхні ймовірності дорівнюють стрибкам функції $F(x)$ у точках розриву. Для неперервної випадкової величини функція $F(x)$ є неперервною, тобто її графік − суцільна лінія (рис.8).

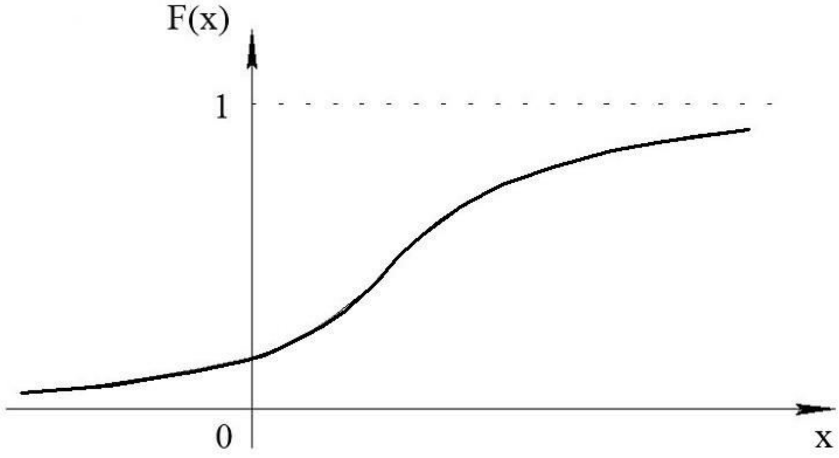

Рис.8.

Приклад 13.2. Випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^2, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті досліду випадкова величина X прийме значення з інтервалу $(0{,}25; 0{,}75)$.

Розв'язання. Враховуючи, що $P(X = 0{,}25) = 0$, $P(X = 0{,}75) = 0$, за наслідком 1 властивості 2 маємо:

$$P(0{,}25 < X < 0{,}75) = F(0{,}75) - F(0{,}25) = (0{,}75)^2 - (0{,}25)^2 = 0{,}5625 - 0{,}0625 = 0{,}5.$$

13.1.4. Щільність розподілу ймовірностей.

Якщо X − неперервна випадкова величина, то $F(x)$ − її інтегральна функція $F(x)$ − неперервної і диференційовна (крім, можливо, скінченного числа точок).

Означення. Щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$ (або диференціальною функцією розподілу) називають похідну від інтегральної функції розподілу

$$f(x) = F'(x) \tag{13.5}$$

Такий спосіб задання стосується лише неперервних випадкових величин.

Графік диференціальної функції $y = f(x)$ називається кривою ймовірності (або кривою розподілу випадкової величини X).

Властивості щільністю розподілу.

1. Диференціальна функція є невід'ємною в точках, де вона існує:

$$f(x) \geq 0.$$

Дійсно, оскільки $f(x) = F'(x)$, а $F(x)$ − неспадна функція, то її похідна $f(x)$ невід'ємна.

2. Ймовірність $P(a < X < b)$ того, що НВВ X прийме значення з інтервалу $(a;b)$ дорівнює визначеному інтегралу від диференціальної функції, взятому в межах від a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{13.6}$$

Геометрично рівність (13.6) означає, що ймовірність $P(a < X < b)$ дорівнює площі криволінійної трапеції, яка прилягає до осі OX та проектується у відрізок $(a;b)$ цієї осі (рис. 9.).

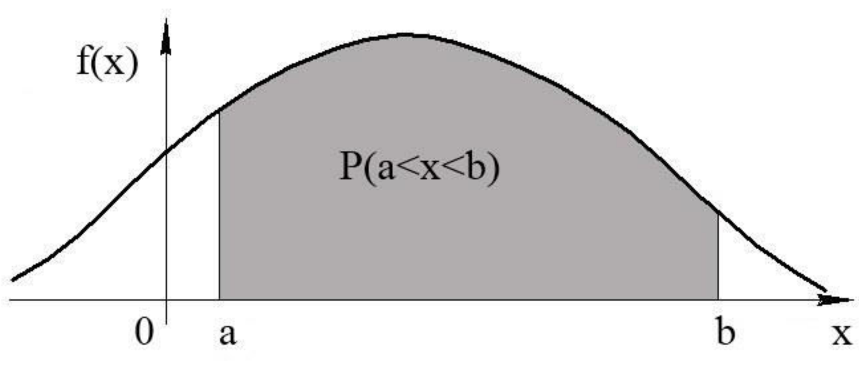

Рис.9.

3. Інтегральна функція розподілу $F(x)$ виражається через диференціальну за формулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{13.7}$$

Дійсно, за означенням $F(x)=P(X<x)$. Вочевидь, нерівність $X<x$ рівносильна подвійній $-\infty<X<x$, тобто $F(x)=P(-\infty<X<x)$. Поклавши в формулі (13.6) $a=-\infty$, $b=x$, приходимо до (13.7). Рис. 10 ілюструє властивість 3:

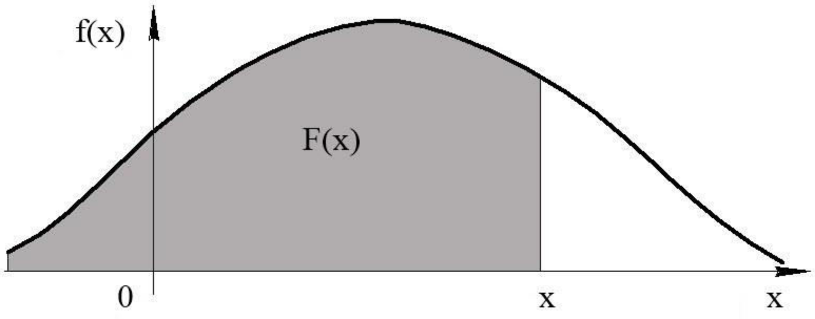

Рис.10.

3. Якщо $f(x)$ − диференціальна функція розподілу, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{13.8}$$

Невластивий інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ виражає ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення з інтервалу $(-\infty;+\infty)$. Вочевидь, така подія достовірна, тому ймовірність її дорівнює одиниці.

Наслідок. Зокрема, якщо всі можливі значення випадкової величини X належать інтервалу $(a;b)$, то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1. \tag{13.9}$$

Приклад 13.3. Диференціальна функція розподілу випадкової величини X має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ a\sin x, & 0 \le x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти: а) значення параметра a; б) ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з інтервалу $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. а) Застосуємо для розрахунків формулу (13.9):

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{\pi} f(x)dx = a\int_{0}^{\pi}\sin x dx = -a\cos x\Big|_0^{\pi} = -a(\cos\pi-\cos 0) = -a(-1-1) = 2a.$$

Отже, маємо таке рівняння відносно шуканого параметра: $2a = 1$, звідки $a = \frac{1}{2}$

б) Скористаємося формулою (13.6):

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\frac{1}{2}\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$$

13.2. Числові характеристики випадкових величин.

13.2.1. Математичне сподівання.

Означення. Математичним сподіванням $M(X)$ випадкової величини X називається ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ (для дискретних випадкових величин) і інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ (для неперервних випадкових величин), якщо вони абсолютно збіжні.

Якщо дискретна випадкова величина X приймає скінченну множину можливих значень $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ відповідно з ймовірностями $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n$, то математичне сподівання обчислюється за формулою

$$M(X) = x_1\ p_1 + x_2\ p_2 + \ldots + x_n\ p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\ . \tag{13.10}$$

Якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини X належать проміжку $[a;b]$, то

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx\ . \tag{13.11}$$

Ймовірнісний зміст $M(X)$: математичне сподівання випадкової величини X наближено дорівнює (тим точніше, чим більше число випробувань) середньому арифметичному $\overline{X}$ всіх значень, які прийняла випадкова величина, тобто

$$M(X) \approx \overline{X}\ .$$

Основні властивості $M(X)$.

1. Математичне сподівання сталої величини C дорівнює самій цій сталій

$$M(C) = C,\ C = const\ .$$

2. Сталий множник C можна виносити за знак математичного сподівання

$$M(CX) = C\ M(X),\ C = const\ .$$

3. Математичне сподівання суми (різниці) двох випадкових величин X, Y дорівнює сумі (різниці) математичних сподівань цих величин

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин X, Y дорівнює добутку їх математичних сподівань

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Приклад 13.4. Знайти математичне сподівання випадкової величини X, що задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}, & -2 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Розв’язання. Знайдемо щільність розподілу величини X:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \dfrac{1}{4}, & -2 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Математичне сподівання випадкової величини X обчислимо за формулою (13.11):

$$M(X) = \int_{-2}^{2} x \cdot \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} x dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_{-2}^{2} = \frac{1}{8}\left(2^2 - (-2)^2\right) = 0.$$

13.2.2. Дисперсія.

Означення. Дисперсією $D(X)$ випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \qquad (13.12)$$

Для обчислення дисперсії, крім формули (13.12), застосовують ще таку:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \qquad (13.13)$$

(дисперсія дорівнює математичному сподіванню квадрата випадкової величини мінус квадрат математичного сподівання).

У випадку неперервної випадкової величини X, що має диференціальну функцію розподілу $f(x)$, формули (13.12), (13.13) набувають відповідно вигляду:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx, \qquad (13.14)$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-[M(X)]^2. \qquad (13.15)$$

Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать проміжку $[a;b]$, то

$$D(X)=\int_{a}^{b}[x-M(X)]^2 f(x)dx. \qquad (13.16)$$

$$D(X)=\int_{a}^{b}x^2f(x)dx-[M(X)]^2. \qquad (13.17)$$

Основні властивості дисперсії.

1. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю:

$$D(C)=0,\ C=const.$$

2. Сталий множник C можна виносити за знак дисперсії, піднісши його до квадрата:

$$D(CX)=C^2\ D(X),\ C=const.$$

3. Дисперсія суми (різниці) двох незалежних випадкових величин X, Y дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

13.2.3. Середнє квадратичне відхилення.

Означення. Середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X)$ випадкової величини X називають число, що дорівнює квадратному кореню з її дисперсії

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \qquad (13.18)$$

Приклад 13.5. Заданий закон розподілу дискретної випадкової величини X:

X	-2	-1	0	1	2	3
p	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1

Знайти середнє квадратичне відхилення величини X.

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання ДВВ X за формулою (13.10):

$$M(X)=(-2)\cdot 0{,}1+(-1)\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1=0{,}4.$$

За законом розподілу ДВВ X запишемо закон розподілу величини X^2:

X^2	$(-2)^2$	$(-1)^2$	0^2	1^2	2^2	3^2
p	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,1

Тоді $M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}1 = 2{,}4$, $[M(X)]^2 = (0{,}4)^2 = 0{,}16$. За формулою (13.13) знаходимо дисперсію: $D(X) = 2{,}4 - 0{,}16 = 2{,}24$.

Згідно з формулою (13.18) обчислюємо середнє квадратичне відхилення: $\sigma(X) = \sqrt{2{,}24} \approx 1{,}497$.

13.3. Основні закони розподілу.

Розподіли залежно від дискретного чи неперервного типу простору елементарних подій U класифікують на дискретні та неперервні. Дискретні задають рядом розподілу ймовірностей, неперервні − функцією розподілу ймовірностей або щільністю розподілу.

13.3.1. Дискретні розподіли.

Для опису дискретного розподілу записують ряд (закон) розподілу, тобто простір елементарних подій U та відповідні елементарним подіям ймовірності.

Бернулієвський розподіл описує випадкову величину X, яка дорівнює числу появ події A в одному спостереженні, якщо ймовірність появи цієї події для одного спостереження дорівнює p.

У цьому розподілі множина можливих значень U завжди складається з двох елементів: U$\{0{,}1\}$. p-бернулієвський розподіл ($0 \le p \le 1$) характеризують рядом розподілу:

U	0	1
P_U	q	p

де $p + q = 1$. Отже, характеристична властивість (нормованість) задовольняється.

Приклад 13.6. а) бернулієвський розподіл з параметром 7/8 задано рядом розподілу:

U	0	1
P_U	1/8	7/8

б) бернулієвський розподіл з параметром j задано рядом розподілу:

U	0	1
P_U	1-j	j

Для бернулієвської випадкової величини математичне сподівання та дисперсія, обчислені за рядом розподілу, мають значення p та $p \cdot q$ відповідно: $M(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$,

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot p =$$

$$= p^2 \cdot q + p \cdot q^2 = p \cdot q \cdot (p + q) = p \cdot q .$$

Отже, $M(X) = p$, $D(X) = p \cdot q$.

Біноміальний розподіл задають рядом розподілу:

U	0	1	2	…	n
P_U	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	…	$P_n(n)$

Ймовірності можливих значень 0, 1, 2, …, n величину X знаходять за формулою Бернуллі

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \; k = 0,1,2,...,n, \qquad (13.19)$$

де $0 \le p \le 1$.

Виконання характеристичної властивості гарантує біном Ньютона:

$$C_n^n \cdot p^n + C_n^{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q^1 + ... + C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} + ... + C_n^0 \cdot p^0 \cdot q^n = (p + q)^n = 1 .$$

Біноміально розподіленою випадковою величиною X є число появ події A в n незалежних випробуваннях, якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні стала і дорівнює p, $0 \le p \le 1$, $q = 1 - p$.

Приклад 13.7. Якщо розглядати випадкову величину «кількість запізнень на заняття протягом робочого тижня» з ймовірністю запізнення кожного дня 1/10, то ця випадкова величина матиме біноміальний розподіл з параметрами $n = 5$ і $p = 1/10$.

Числові характеристики біноміального закону розподілу визначаються за формулами

$$M(X) = np, \; D(X) = npq, \sigma(X) = \sqrt{npq} . \qquad (13.20)$$

Пуассонівський розподіл. λ-пуассонівський розподіл ($\lambda > 0$) має вигляд:

U	0	1	2	…	n	…
P_U	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	…	$P_n(n)$	…

де ймовірності значень 0, 1, 2, …, n ,… величини X обчислюють за формулою Пуассона:

$$P(X=k)=P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda},\ \lambda=np,\ k=0,1,2,...,n,\dots \qquad (13.21)$$

Пуассонівська випадкова величина описує, наприклад, кількість викликів на телефонній станції протягом певного проміжку часу (λ − середня кількість викликів протягом відповідного проміжку часу); кількість α -частинок, що випромінює радіоактивне джерело протягом певного проміжку часу.

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, дорівнює її математичному сподіванню (λ):

$$D(X)=M(X)=\lambda. \qquad (13.22)$$

Розподіл Паскаля (геометричний розподіл) задають рядом розподілу, що відповідає таблиці:

U	1	2	…	n	…
P_U	P_1	P_2	…	P_n	…

де ймовірності можливих значень 1, 2, …, n,… величини X обчислюють за формулою:

$$P(X=k)=q^{k-1}\cdot p,\ k=1,2,... \qquad (13.23)$$

Ці ймовірності утворюють геометричну прогресію (звідси назва розподілу) з першим членом p та знаменником q . Виконання характеристичної властивості гарантує рівність:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}p\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{p}{1-q}=\frac{p}{p}=1$$

(сума нескінченної кількості членів геометричної прогресії дорівнює одиниці).

Геометричним розподілом описують випадкову величину X − число випробувань, які потрібно провести до першої появи події A за схемою Бернуллі. Ця випадкова величина набуває натуральних значень від 1 (під час першого випробування подія A відбулась) до нескінченності. Отже, простір елементарних подій U є зліченним.

Математичне сподівання та дисперсія величини X , розподіленої за геометричним законом, мають вигляд:

$$M(X)=\frac{1}{p},\ D(X)=\frac{1-p}{p^2}. \qquad (13.24)$$

Практичне заняття №5. Неперервні випадкові величини.

Опитування з теорії.

1. Як означається інтегральна функція розподілу? Для завдання яких величин вона застосовується?
2. Навести основні властивості інтегральної функції розподілу. Які з них притаманні лише неперервній випадковій величині?
3. Дати означення диференціальної функції розподілу неперервної випадкової величини. Чому її називають ще щільністю ймовірності (розподілу)?
4. Чим відрізняється дискретна випадкова величина від неперервної випадкової величини?
5. Навести основні властивості диференціальної функції та їх геометричне тлумачення.
6. Який зв'язок між інтегральною функцією розподілу та щільністю розподілу?
7. Як визначити ймовірність того, що випадкова величина прийме значення із заданого інтервалу? Навести два способи обчислення.
8. Які основні числові характеристики неперервної випадкової величини? Як вони обчислюються?
9. Навести основні розподіли неперервної випадкової величини. За якою характеристикою означається кожний з розподілів?
10. Якими є визначальні параметри нормального та показникового розподілу?
11. Як знайти ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X прийме значення з інтервалу $(\alpha;\beta)$? Ймовірність $P(|X-a|<\varepsilon)$?
12. Як зв’язані математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення показникового розподілу? Як означається функція надійності?
13. Як знайти розподіл функції за відомим законом розподілу аргумента? Окремо розглянути випадок дискретної та неперервної випадкової величини.
14. У чому полягає закон великих чисел? Навести теорему Чебишева, її практичне значення.
15. Сформулювати теорему Ляпунова (центральну граничну теорему).

Завдання для аудиторної роботи.

Приклад 5.1. Випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ \frac{1}{2}(x-1), & 1\le x\le 3; \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті досліду випадкова величина X прийме значення: а) з інтервалу $(1{,}5;2{,}5)$; б) з інтервалу $(2{,}5;3{,}5)$.

Розв'язання. а) За наслідками властивості 2 інтегральної функції маємо

$$P(1{,}5 < X < 2{,}5) = F(2{,}5) - F(1{,}5) = \frac{1}{2}(2{,}5-1) - \frac{1}{2}(1{,}5-1) = \frac{1{,}5-0{,}5}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5\,.$$

б) Шукану ймовірність знаходимо за аналогією з пунктом а) з урахуванням умови задачі:

$$P(2{,}5 < X < 3{,}5) = F(3{,}5) - F(2{,}5) = 1 - \frac{1}{2}(2{,}5-1) = 1 - \frac{1{,}5}{2} = \frac{2-1{,}5}{2} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25\,.$$

Приклад 5.2. Задана диференціальна функція $f(x)$ неперервної випадкової величини (НВВ) X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ x - \dfrac{1}{2}, & 1 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (5.6).

Якщо $x \le 1$, то $f(x) = 0$, тому $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0$.

Нехай $1 < x \le 2$, тоді

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} 0 \cdot dx + \int\limits_{1}^{x}\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot dx = 0 + \int\limits_{1}^{x}\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot d\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{2}\Bigg|_1^x =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}x(x-1).$$

Якщо $x > 2$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} 0 \cdot dx + \int\limits_{1}^{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot dx +$$

$$+ \int\limits_{2}^{x} 0 \cdot dx = 0 + \int\limits_{1}^{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot d\left(x - \frac{1}{2}\right) + 0 = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{2}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}\left[\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2\right] = 1\,.$$

Отже, остаточно маємо інтегральну функцію величини X вигляду

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 1; \\ \frac{1}{2}x(x-1), \ 1<x\le 2; \\ 1, \ x>2. \end{cases}$$

Приклад 5.3. Диференціальна функція неперервної випадкової величини (НВВ) X в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ має вигляд $f(x)=\frac{2}{\pi}\cos^2 x$ та $f(x)=0$ зовні цього інтервалу. Знайти ймовірність того, що в трьох незалежних випробуваннях X прийме 2 рази значення з інтервалу $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. За формулою (5.5) знайдемо ймовірність того, що X прийме 1 раз значення з інтервалу $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$:

$$P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4}\cos^2 x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/4}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos 2x d(2x)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(x\Big|_0^{\pi/4}+\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/4}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi+2}{4\pi}.$$

Ймовірність того, що в трьох незалежних випробуваннях величина X прийме 2 рази значення з інтервалу $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ знайдемо за формулою Бернуллі

$$P_3(2)=C_3^2\cdot p^2\cdot q^1=3\cdot p^2\cdot(1-p), \text{ де } p==\frac{\pi+2}{4\pi}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}.$$

Отже,

$$P_3(2)=3\frac{(\pi+2)^2}{16\pi^2}\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}\right)=3\left(\frac{\pi+2}{4\pi}\right)^2\cdot\frac{3\pi-2}{4\pi}.$$

Приклад 5.4. Знайти числові характеристики неперервної випадкової величини X, що задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ x\le -2; \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2}, \ -2<x\le 2; \\ 1, \ x>2. \end{cases}$$

Розв'язання. 1 спосіб. За означенням знайдемо щільність розподілу величини X:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, \ x\le -2; \\ \frac{1}{4}, \ -2<x\le 2; \\ 0, \ x>2. \end{cases}$$

Математичне сподівання випадкової величини X обчислимо за формулою (5.10)

$$M(X)=\int_{-2}^{2}x\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{2}=\frac{1}{8}\left(2^2-(-2)^2\right)=0,$$

а дисперсію − за формулою (5.12):

$$D(X)=\int_{-2}^{2}x^2\cdot\frac{1}{4}dx-0^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}=\frac{1}{12}\left[2^3-(-2)^3\right]=\frac{1}{12}\cdot 2\cdot 8=\frac{4}{3}.$$

Нарешті знаходимо середнє квадратичне відхилення: $\sigma(X)=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2 спосіб. Для обчислення дисперсії скористаємося формулою (5.11):

$$D(X)=\int_{-2}^{2}[x-0]^2\cdot\frac{1}{4}dx=\int_{-2}^{2}x^2\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}=\frac{1}{12}\left[2^3-(-2)^3\right]=\frac{1}{12}\cdot 2\cdot 8=\frac{4}{3}.$$

Отже, маємо такий самий результат.

Приклад 5.5. Ціна поділки шкали вимірювального приладу дорівнює 0,1. Вимірювання округлюють до найближчої цілої поділки на шкалі. Знайти ймовірність того, що в розрахунках буде зроблено похибку, яка перевищує 0,02.

Розв'язання. Похибку округлення можна розглядати як випадкову величину X, розподілену рівномірно в інтервалі між двома сусідніми поділками. Довжина інтервалу $b-a$, де містяться можливі значення величини НВВ X, дорівнює 0,1. Тому, за формулою (5.14), щільність рівномірного розподілу буде такою: $f(x)=\frac{1}{0{,}1}=10$ в межах $(a;\ b)$ та $f(x)=0$ зовні цього інтервалу.

Очевидно, похибка розрахунків перевищить 0,02, якщо вона міститься в інтервалі $(0{,}02;\ 0{,}08)$: $0+0{,}02=0{,}02$; $0{,}1-0{,}02=0{,}08$.

За формулою (5.5) дістанемо

$$P(0{,}02\le X<0{,}08)=\int_{0{,}02}^{0{,}08}10dx=10\int_{0{,}02}^{0{,}08}dx=10x\Big|_{0{,}02}^{0{,}08}=0{,}6.$$

Приклад 5.6. Ведіння стрільби здійснюється з точки O вздовж прямої OX. Середня далекість льоту снаряда дорівнює m. Припускаючи, що далекість льоту X розподілена за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $\sigma=80$ м, знайти, який відсоток випускових снарядів будуть давати перелітання від 120 до 160м.

Розв'язування. За умовою НВВ «далекість льоту» X розподілена за нормальним законом з параметрами $M(X)=m$ (м), $\sigma(X)=80$ (м). Визначимо з якою ймовірністю випускові снаряди будуть давати перелітання від 120 до 160м, тобто

$$P(m+120 \le X < m+160) = \Phi\left(\frac{m+160-m}{80}\right) - \Phi\left(\frac{m+120-m}{80}\right) = \Phi(2) - \Phi(1,5) =$$
$$= 0,4772 - 0,4332 = 0,044.$$

Отже, 4,4% випускових снарядів будуть давати перелітання від 120 до 160м.

Приклад 5.7. Тривалість часу T безвідмовної роботи першого з двох незалежно працюючих елементів має показниковий розподіл $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, другого $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Знайти ймовірність того, що за час $t = 6$ годин:

а) обидва елементи не відмовлять;

б) відмовить тільки один елемент;

в) відмовить хоч один елемент.

Розв'язання. а) Ймовірність відмови першого елемента

$$p_1 = 1 - R_1(6) = 1 - e^{-0,02 \cdot 6} = 1 - 0,887 = 0,113.$$

Ймовірність відмови другого елемента

$$p_2 = 1 - R_2(6) = 1 - e^{-0,05 \cdot 6} = 1 - 0,741 = 0,259.$$

Ймовірність безвідмовної роботи першого елемента

$$q_1 = R_1(6) = e^{-0,02 \cdot 6} = 0,887.$$

Ймовірність безвідмовної роботи другого елемента

$$q_2 = R_2(6) = e^{-0,05 \cdot 6} = 0,741.$$

Ймовірність безвідмовної роботи обох елементів

$$q_1 \cdot q_2 = 0,887 \cdot 0,741 \approx 0,66.$$

б) Ймовірність того, що відмовить тільки один елемент

$$p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0,113 \cdot 0,741 + 0,887 \cdot 0,259 \approx 0,31.$$

в) Ймовірність того, що відмовить хоч один елемент

$$P = 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - 0,66 \approx 0,34.$$

Приклад 5.8. Випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y = \sin X$.

Розв'язання. Знайдемо щільність розподілу $f(x)$ рівномірно розподіленої величини X за формулою (5.14): $f(x) = \frac{1}{\pi/2 - (-\pi/2)} = \frac{1}{\pi}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ та $f(x) = 0$ зовні інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Функція $y=\sin x$ в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ строго зростає, тому на цьому інтервалі вона має однозначну обернену функцію $x=\psi(y)=\arcsin y$. Знайдемо похідну $\psi'(y)$:

$$\psi'(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Оскільки $f(x)=\frac{1}{\pi}=const$, то $f[\psi(y)]=\frac{1}{\pi}$ і $|\psi'(y)|=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. За формулою (5.27) дістанемо, що $g(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, причому $y\in(-1;\ 1)$, бо функція $y=\sin x$ зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Отже, в інтервалі $(-1;\ 1)$ маємо $g(y)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$; зовні цього інтервалу $g(y)=0$.

Контроль:

$$\int_{-1}^{1} g(y)dy=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{2}{\pi}\arcsin y\Big|_0^1=2/\pi\cdot\pi/2=1.$$

Приклад 5.9. Прилад складається з 10 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента за час t дорівнює 0,05. За допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю елементів, що відмовили, та середнім числом (математичним сподіванням) відмов за час t буде не меншою двох.

Розв’язання. Позначимо через X ДВВ − «число елементів, що відмовили за час t». Оскільки X розподілена за біномним законом, то

$$M(X)=np=10\cdot 0{,}05=0{,}5;\ D(X)=npq=10\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95=0{,}475.$$

Підставивши в нерівність (5.28) $M(X)=0{,}5$; $D(X)=0{,}475$; $\varepsilon=2$, дістанемо

$$P(|X-0{,}5|<2)\geq 1-\frac{0{,}475}{4}=0{,}88.$$

Події $|X-0{,}5|\geq 2$ та $|X-0{,}5|<2$ протилежні, тому сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці. Отже,

$$P(|X-0{,}5|\geq 2)\leq 1-0{,}88=0{,}12.$$

Завдання для самостійної роботи.

1. Дискретна випадкова величина X задана законом (рядом) розподілу:

X	-2	0	1	3	5
p_i	0,15	0,1	0,3	0,2	0,25

Знайти інтегральну функцію розподілу величини X і побудувати її графік.

Відповідь: $F(x)=\begin{cases} 0; \ x\le -2, \\ 0{,}15; \ -2<x\le 0, \\ 0{,}25; \ 0<x\le 1, \\ 0{,}55; \ 1<x\le 3, \\ 0{,}75; \ 3<x\le 5, \\ 1; \ x\ge 5. \end{cases}$

2. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x^4}, x>1 \\ 0, \quad x\le 1 \end{cases}.$$

Знайти: а) інтегральну функцію розподілу $F(x)$; б) ймовірність потрапляння X в інтервал $(0{,}5;1{,}25)$; в) числові характеристики величини X.

Відповідь: а) $F(x)=1-1/x^3$; б) $P(0{,}5<X<1{,}25)=0{,}488$; в) $M(X)=1{,}5=D(X)$; $\sigma(X)\approx 1{,}22$.

3. При яких значеннях параметрів функція $F(x)=\begin{cases} ax+b, \ c<x<d, \\ 1, \ x\ge d, \\ 0, \ x\le c \end{cases}$

буде інтегральною функцією розподілу неперервної випадкової величини?

Відповідь: $a=\dfrac{1}{d-c}$; $b=-\dfrac{c}{d-c}$.

4. За умовою попередньої задачі знайти $M(X), D(X)$.

Відповідь: $M(X)=\dfrac{c+d}{2}$; $D(X)=\dfrac{(d-c)^2}{12}$.

5. Неперервна випадкова величина задана диференціальною функцією:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \ x<0; \\ \dfrac{1}{2}\sin x, \ 0\le x<\pi; \\ 0, \ x\ge \pi, \end{cases}$$

Знайти: а) інтегральну функцію розподілу $F(x)$; б) ймовірність того, що величина X прийме значення з інтервалу $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$.

Відповідь: а) $F(x)=\begin{cases} 0, \;\; x<0; \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), \;\; 0\le x<\pi; \\ 1, \;\; x\ge\pi, \end{cases}$ б) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

6. Випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ a(x+1), & -1\le x\le 1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Знайти а) невідомий параметр c; б) числові характеристики величини X.

Відповідь: а) $a=\frac{1}{2}$; б) $M(X)=\frac{1}{3}$; $D(X)=\frac{2}{9}$; $\sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

7. Випадкова величина X має щільність розподілу $f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y=X^2$.

Відповідь: $f(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x}$.

8. За умовою попередньої задачі знайти щільність розподілу випадкової величини $Y=\frac{1}{X}$.

Відповідь: $f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$.

9. Діаметр круга – неперервна випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[1;2]$. Знайти щільність розподілу площі круга Y і обчислити ймовірність $P\{2<Y<4\}$.

Відповідь: $P(2<Y<4)\cong 0{,}66$; $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}, x\in(\frac{\pi}{4},\pi)$ і 0 в інших випадках.

10. За умовою попередньої задачі обчислити $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

Відповідь: $M(Y)=\frac{7}{12}\pi; D(Y)\approx 0{,}05\pi^2; \sigma(Y)\approx 0{,}22\pi$.

11. Для рівномірно розподіленої величини X на відрізку $[1;4]$ знайти функцію розподілу випадкової величини $Y=\sqrt{X}$.

Відповідь: $F(x)=\begin{cases} 0, x<1 \\ \frac{x^2-1}{3}.,1\le x\le 2 \\ 1, x>2 \end{cases}$.

12 Показати, що функція $F(x) = e^{-e^{-x}}$ є інтегральною функцією розподілу неперервної випадкової величини. Знайти щільність розподілу.

Відповідь: $f(x) = e^{-x} \cdot e^{-e^{-x}}$.

13. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, відповідно дорівнюють 20 і 5. Знайти ймовірність того, що в результаті досліду величина X прийме значення: а) менше 12; б) більше 20; в) з інтервалу]15; 25[.

Відповідь: а) 0,0548; б) 0,5; в) 0,6826.

14. Кулька, виготовлена станком-автоматом, вважається придатною, якщо відхилення X діаметра кульки від проектного розміру менше за абсолютною величиною ніж 0,7 мм. Вважаючи випадкову величину X розподіленою нормально із середнім квадратичним відхиленням σ=0,4 мм, знайти, скільки придатних кульок буде серед 100 виготовлених.

Відповідь: 92.

15. Норма висіву на 1га дорівнює 160 кг. Випадкові відхилення фактичних витрат насіння на 1га від норми характеризуються середнім квадратичним відхиленням 10 кг. Знайти: а) ймовірність того, що витрати насіння на 100га не перевищать 16,05т; б) кількість насіння, яка забезпечить посів 100 га з імовірністю 0,95.

Відповідь: а) 0,6915; б) 16,164т.

Список джерел.

1. Сулима І.М., Яковенко В.М. Вища математика. Теорія ймовірностей. Математична статистика. Навчальний посібник. К.: Вид. Центр НАУ, 2004. – 238 с.
2. Сулима І.М., Ковтун І.І., Нікітіна І.А., Скороход Т.А., Яковенко В.М. Прикладна математика. Теорія ймовірностей. Математична статистика. Навчально-методичний посібник. К.: Вид. Центр НАУ, 2005. – 148 с.
3. Панталієнко Л.А. Методичні вказівки до виконання тестових завдань з дисципліни «Вища математика« за модулем «Теорія ймовірностей, математична статистика та основи кореляційного аналізу». – Видавничий центр НУБІП, 2011. – 71 с.
4. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. – метод. посібник. У 2 ч. Ч. 1: Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000. – 304с.
5. Медведєв М.Г., Пащенко І.О. Теорія ймовірностей і математична статистика: К.: Ліра-К, 2008. – 536 с.