Модуль 2.
Завдання №4
з дисципліни «Теорія ймовірності і математична статистика»
для студентів спеціальності «Транспортні технології (автомобільний транспорт)», І курс (скорочений термін навчання), група 1906.

Варіант завдання (PDF) відповідає номеру за списком студентської групи.

Завдання №4.

Завдання №4. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини X. Знайти: а) математичне сподівання; б) дисперсію; в) середнє квадратичне відхилення; г) інтегральну функцію розподілу $F(x)$ величини X.

Вар.	X	1	2	5	3	Вар.	X	-1	-2	-3	0
1	P	0,5	0,2	0,1	0,2	16	P	0,5	0,3	0,1	0,1
Вар.	X	-1	2	0	1	Вар.	X	2	3	4	1
2	P	0,1	0,3	0,5	0,1	17	P	0,5	0,1	0,3	0,1
Вар.	X	1	3	4	5	Вар.	X	-1	-2	0	1
3	P	0,1	0,2	0,3	0,4	18	P	0,4	0,3	0,1	0,2
Вар.	X	-2	0	2	1	Вар.	X	2	5	2	1
4	P	0,1	0,5	0,3	0,1	19	P	0,3	0,4	0,1	0,2
Вар.	X	2	4	6	7	Вар.	X	-1	0	1	2
5	P	0,1	0,5	0,3	0,1	20	P	0,2	0,5	0,2	0,1
Вар.	X	1	4	2	1	Вар.	X	2	3	8	3
6	P	0,5	0,1	0,3	0,1	21	P	0,1	0,2	0,5	0,2
Вар.	X	2	4	7	3	Вар.	X	-1	-2	1	3
7	P	0,3	0,4	0,1	0,2	22	P	0,5	0,3	0,1	0,1
Вар.	X	4	6	5	2	Вар.	X	3	2	1	0
8	P	0,3	0,4	0,2	0,1	23	P	0,2	0,4	0,3	0,1
Вар.	X	1	3	2	1	Вар.	X	4	3	2	-1
9	P	0,5	0,1	0,3	0,1	24	P	0,2	0,2	0,2	0,4
Вар.	X	-2	-1	0	1	Вар.	X	10	8	7	2
10	P	0,3	0,2	0,4	0,1	25	P	0,1	0,1	0,1	0,7
Вар.	X	2	3	6	1	Вар.	X	2	3	1	-1
11	P	0,5	0,3	0,1	0,1	26	P	0,2	0,3	0,2	0,3
Вар.	X	-1	0	2	3	Вар.	X	4	3	-1	-2
12	P	0,3	0,4	0,2	0,1	27	P	0,4	0,3	0,2	0,1
Вар.	X	2	4	6	3	Вар.	X	2	3	5	2
13	P	0,1	0,2	0,3	0,4	28	P	0,2	0,1	0,2	0,5
Вар.	X	2	3	7	2	Вар.	X	-1	-3	2	3
14	P	0,5	0,1	0,2	0,3	29	P	0,6	0,2	0,1	0,1
Вар.	X	5	6	7	4	Вар.	X	5	3	2	1
15	P	0,4	0,1	0,3	0,2	30	P	0,1	0,1	0,2	0,6

Теоретичний матеріал до завдання №4:

4.1. Випадкові величини. Закон розподілу ймовірностей.

Означення 1. Випадковою називають величину, яка в результаті випробування прийме одне і тільки одне можливе значення, що наперед невідоме та залежить від випадкових причин, врахувати які заздалегідь неможливо.

Випадкові величини прийнято позначати великими літерами X, Y, Z,…, а їх можливі значення − відповідними малими x, y, z,…

Розрізняють дискретні та неперервні випадкові величини (ДВВ та НВВ).

Означення 2. Дискретною називають випадкову величину, яка приймає окремі, ізольовані можливі значення з певними ймовірностями.

Число можливих значень дискретної випадкової величини або скінченне або нескінченне.

Означення 3. Неперервною називають випадкову величину, яка може приймати будь-які значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку.

Приклад 4.1. Число очок, що випали на гральному кубику при однократному киданні, є дискретною випадковою величиною, можливі значення якої 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Приклад 4.2. Шлях, який пролітає снаряд при пострілі з гармати, є неперервною випадковою величиною, що залежить не тільки від того, як встановлено приціл, а й від сили і напряму вітру, температури і т.і.

Дискретна випадкова величина вважається заданою, якщо вказані всі її можливі значення та ймовірності, з якими вона може приймати кожне своє значення.

Означення 4. Законом розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між можливими значеннями та їх ймовірностями.

Закон розподілу повністю характеризує дискретну випадкову величину, його можна задавати таблично, аналітично (формулою) та графічно. Закон розподілу дискретної випадкової величини ще називають її рядом розподілу.

Якщо дискретна випадкова величина (ДВВ) X може приймати скінченне число можливих значень x_1, x_2,…, x_n відповідно з ймовірностями p_1, p_2,…, p_n то її закон розподілу можна подати таблицею

Таблиця 1.

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Оскільки в кожному випробуванні випадкова величина X приймає одне і тільки одне можливе значення, події $X = x_1$, $X = x_2$,…, $X = x_n$

утворюють повну групу. Тому, сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці:

$$p_1 + p_2 +, \ldots, + p_n = 1. \qquad (4.1)$$

Якщо множина можливих значень X є нескінченною, то числовий ряд $p_1 + p_2 +, \ldots, + p_n + \ldots$ збігається до одиниці:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Для наочності закон розподілу ДВВ зображують графічно, для чого в прямокутній системі координат будують точки (x_i, p_i), $i = 1,2,...,n$, а потім з'єднують їх відрізками прямих (рис.4.1). Одержану фігуру називають многокутником розподілу.

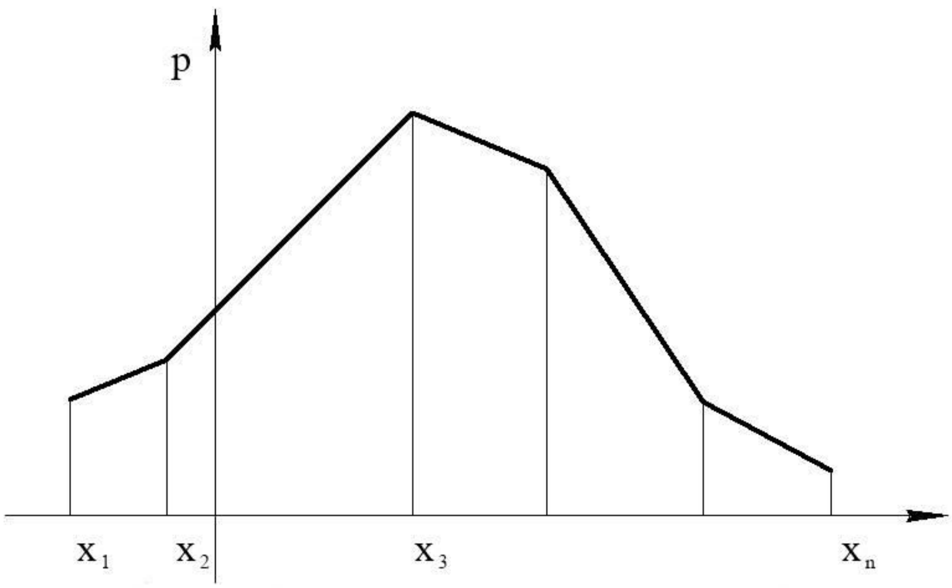

Рис.4.1.

Приклад 4.3. Для грошової лотереї випущено 100 білетів. Розігрується 1 виграш у 50 грн. і 10 виграшів по 1грн. Знайти закон розподілу випадкової величини X − вартості можливого виграшу для власника одного лотерейного білета.

Розв'язання. Можливі значення випадкової величини X: $x_1 = 50$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ (немає виграшу). Ймовірності цих значень такі: $p_1 = \frac{1}{100} = 0{,}01$ (1 білет у 50 грн. із 100); $p_2 = \frac{10}{100} = 0{,}1$ (10 білетів по 1 грн. із 100); оскільки $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, то $p_3 = 1 - (0{,}01 + 0{,}1) = 0{,}89$.

Отже, шуканий закон розподілу величини X має вигляд

X	50	1	0
p	0,01	0,1	0,89

4.2. Незалежні дискретні величини та дії над ними.

Дві дискретні випадкові величини X та Y називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яке можливе значення прийняла інша випадкова величина. Якщо така залежність існує, то випадкові величини називаються залежними.

Кілька випадкових величин називаються взаємно незалежними, якщо закони розподілу будь-якої кількості з них не залежать від того, які можливі значення прийняли інші випадкові величини.

Добутком сталої величини C на ДВВ X називається випадкова величина CX, що визначається так: можливі значення CX дорівнюють добуткам сталої величини C на можливі значення X; ймовірності можливих значень CX дорівнюють ймовірностям відповідних можливих значень ДВВ X.

Отже, якщо закон розподілу випадкової величини X має вигляд

Таблиця 1.

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p	p_1	p_2	p_3	…	p_n

то випадкова величина CX матиме закон розподілу

Таблиця 2.

CX	Cx_1	Cx_2	Cx_3	…	Cx_n
p	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Сумою випадкових величин X та Y називається випадкова величина $X+Y$, що визначається так:

можливі значення $X+Y$ дорівнюють сумам кожного можливого значення X з кожним можливим значенням Y;

ймовірності можливих значень $X+Y$ для незалежних величин X та Y дорівнюють добуткам ймовірностей доданків; для залежних величин − добуткам ймовірності одного доданка на умовну ймовірність іншого. Якщо деякі значення величини $X+Y$ однакові, то їх ймовірності додаються.

За аналогією вводиться операція віднімання випадкових величин, оскільки $X-Y=X+(-1)\cdot Y$.

Добутком випадкових величин X та Y називається випадкова величина $X\cdot Y$, що визначається так:

можливі значення $X\ \ Y$ дорівнюють добуткам кожного можливого значення X на кожне можливе значення Y;

ймовірності можливих значень добутку $X\cdot Y$ дорівнюють добуткам ймовірностей можливих значень співмножників. Якщо деякі значення величини $X\cdot Y$ однакові, то їх ймовірності додаються.

Приклад 4.4. Монету підкидають двічі. Випадкова величина X − число появ герба при першому киданні монети, випадкова величина Y − число появ герба при другому киданні. Знайти закони розподілу випадкових величин $X+Y$ та $X \cdot Y$.

Розв'язання. Закони розподілу випадкових величин X та Y мають відповідно вигляд

X	0	1
p	0,5	0,5

Y	0	1
p	0,5	0,5

За означенням знаходимо закони розподілу випадкових величин $X+Y$ та $X \cdot Y$ (відповідні ймовірності можливих значень X та Y перемножуються):

$X+Y$	0+0	0+1	1+0	1+1
p	0,25	0,25	0,25	0,25

$X \cdot Y$	$0 \cdot 0$	$0 \cdot 1$	$1 \cdot 0$	$1 \cdot 1$
p	0,25	0,25	0,25	0,25

або, остаточно,

$X+Y$	0	1	2
p	0,25	0,5	0,25

$X \cdot Y$	0	1
p	0,75	0,25

Отже, маємо закони розподілу випадкової величини $X+Y$ – «при двократному киданні монети герб з'явиться принаймні один раз» та величини $X \cdot Y$ – «при двократному киданні монети герб з'явиться двічі».

4.3. Числові характеристики дискретних випадкових величин

Закон розподілу повністю характеризує дискретну випадкову величину. Проте часто цей закон невідомий і доводиться обмежуватися неповною інформацією про випадкову величину. Зокрема, таку сумарну інформацію дають числові характеристики випадкової величини X : математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

4.3.1. Математичне сподівання ДВВ

Означення 1. Математичним сподіванням дискретної випадкової величини (ДВВ) називається сума добутків всіх її можливих значень на їх ймовірності.

Якщо випадкова величина X може приймати тільки значення x_1, $x_2,\ldots$, x_n відповідно з ймовірностями p_1, $p_2,\ldots$, p_n, то математичне сподівання величини X, що позначається символом $M(X)$, обчислюється за формулою

$$M(X)=x_1\,p_1+x_2\,p_2+\ldots+x_n\,p_n=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i\,. \qquad (4.2)$$

Якщо ДВВ X приймає нескінченну множину можливих значень, то

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i\,,$$

причому ряд праворуч має бути абсолютно збіжним.

Як випливає із означення математичне сподівання ДВВ є величина невипадкова.

Ймовірнісний зміст $M(X)$: математичне сподівання випадкової величини X наближено дорівнює (тим точніше, чим більше число випробувань) середньому арифметичному $\overline{X}$ всіх значень, які прийняла випадкова величина, тобто

$$M(X)\approx\overline{X}\,.$$

Основні властивості $M(X)$.

1. Математичне сподівання сталої величини C дорівнює самій цій сталій

$$M(C)=C,\; C=const\,.$$

2. Сталий множник C можна виносити за знак математичного сподівання

$$M(CX)=C\,M(X),\; C=const\,.$$

3. Математичне сподівання суми (різниці) двох випадкових величин X, Y дорівнює сумі (різниці) математичних сподівань цих величин

$$M(X\pm Y)=M(X)\pm M(Y).$$

4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин X, Y дорівнює добутку їх математичних сподівань

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$$

4.3.2. Дисперсія ДВВ

Означення 2. Дисперсією (розсіюванням) дискретної випадкової величини (ДВВ) називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання. Дисперсія випадкової величини позначається через $D(X)$. Отже, згідно з означенням

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 . \qquad (4.3)$$

Крім формули (4.3), для обчислення дисперсії застосовують і таку:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 . \qquad (4.4)$$

Основні властивості дисперсії.

1. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю

$$D(C) = 0, \ C = const .$$

2. Сталий множник C можна виносити за знак дисперсії, піднісши його до квадрата

$$D(CX) = C^2 \, D(X), \ C = const .$$

3. Дисперсія суми (різниці) двох незалежних випадкових величин X , Y дорівнює сумі дисперсій цих величин

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

4.3.3. Середнє квадратичне відхилення

Означення 3. Середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X)$ випадкової величини X називають число, що дорівнює квадратному кореню з її дисперсії

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (4.5)$$

Приклад 4.5. Заданий закон розподілу дискретної випадкової величини X :

X	1	2	3
p	0,3	0,1	0,6

Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення величини X .

Розв’язання. Знайдемо математичне сподівання ДВВ X :

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 = 2{,}3 .$$

1 спосіб обчислення $D(X)$. Запишемо закони розподілу для відхилення $X - M(X)$ та квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

$X - M(X)$	1-2,3	2-2,3	3-2,3

p	0,3	0,1	0,6

$[X-M(X)]^2$	$(-1{,}3)^2$	$(-0{,}3)^2$	$(0{,}7)^2$
p	0,3	0,1	0,6

Тоді, за формулою (4.3),

$$D(X)=1{,}69\cdot 0{,}3+0{,}09\cdot 0{,}1+0{,}49\cdot 0{,}6=0{,}81.$$

2 спосіб обчислення $D(X)$. За законом розподілу ДВВ X запишемо закон розподілу величини X^2:

X^2	1^2	2^2	3^2
p	0,3	0,1	0,6

Тоді $M(X^2)=1\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}1+9\cdot 0{,}6=6{,}1$, $[M(X)]^2=(2{,}3)^2=5{,}29$. За формулою (4.4) знаходимо дисперсію: $D(X)=6{,}1-5{,}29=0{,}81$.

Згідно з (4.5) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{0{,}81}=0{,}9$.

4.4. Основні дискретні розподіли.

4.4.1. Біномний закон розподілу

Нехай здійснюється n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може з'явитись або ж ні. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні стала і дорівнює p, $0<p<1$, $q=1-p$. Розглянемо дискретну випадкову величину (ДВВ) X − «число появ події A в n випробуваннях», її можливі значення: 0, 1, 2, …, n. Ймовірності цих значень при наявності певних вимог для p, n ($p\ge 0{,}1$; $n<25$) знайдемо за формулою Бернуллі

$$P(X=k)=P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k},\ k=0,1,2,...,n. \qquad (4.6)$$

Формула (4.6) є аналітичним виразом закону розподілу величини X.

Означення 1. Біномним називають закон розподілу ймовірностей, що визначається за формулою Бернуллі.

Права частина рівності (4.6) є загальним членом розкладу бінома Ньютона і

$$C_n^n\cdot p^n+C_n^{n-1}\cdot p^{n-1}\cdot q^1+...+C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}+...+C_n^0\cdot p^0\cdot q^n=(p+q)^n=1.$$

Числові характеристики біномного закону розподілу визначаються за формулами

$$M(X)=np,\ D(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}. \qquad (4.7)$$

4.4.2. Закон розподілу Пуассона

Якщо в схемі незалежних повторних випробувань n велике, а p або $q = 1 - p$ прямують до нуля ($p \le 0{,}1$) , то біномний закон апроксимується розподілом Пуассона

$$P(X = k) = P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \ \lambda = np, \ k = 0,1,2,...,n. \qquad (4.8)$$

Дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, дорівнює її математичному сподіванню (λ):

$$D(X) = M(X) = \lambda. \qquad (4.9)$$

Розподіл Пуассона описує також кількість незалежних подій, що відбуваються у випадкові моменти часу зі сталою інтенсивністю (потік подій). Інтенсивністю потоку λ_1 називається середнє число подій, що з'являються в одиницю часу. Якщо стала λ_1 відома, то ймовірність появи k подій потоку за час t обчислюється за формулою Пуассона

$$P_t(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \ k = 0,1,2,...,n.$$

де $\lambda = \lambda_1 t$.

4.4.3. Геометричний розподіл

Нехай незалежні випробування, в кожному з яких ймовірність появи події A стала і дорівнює p , $0 < p < 1$, проводять до першого настання події A. Отже, якщо подія A з'явилась в k-му випробуванні, то в попередніх $(k-1)$ її не було.

Позначимо через X ДВВ − число випробувань, які потрібно провести до першої появи події A. Можливими значеннями величини X є натуральні числа: 1, 2, …

Якщо в перших $(k-1)$ випробуваннях подія A не з'явилась, а в k-му випробуванні настала, то ймовірність такої «складеної події» за теоремою множення ймовірностей для незалежних подій

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p, \ k = 1,2,... \qquad (4.10)$$

Поклавши в формулі (4.10) $k = 1,2,...$, n,…, дістанемо геометричну прогресію

$$p, \ q \cdot p, \ q^2 \cdot p, \ \ldots, \ q^n \cdot p, \ldots$$

зі знаменником $q = 1 - p$ та одиничною сумою: $S = \dfrac{p}{1-q} = 1$. За цією причиною розподіл (4.10) називається геометричним.

Числові характеристики геометричного розподілу визначаються за формулами

$$M(X)=\frac{1}{p},\ D(X)=\frac{1-p}{p^2}. \qquad (4.11)$$

Приклад 4.6. Стрільба з гармати здійснюється до першого улучання. Ймовірність улучання в ціль дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що улучання відбудеться при третьому пострілі.

Розв'язання. Маємо схему повторних випробувань, X − число пострілів, які потрібно провести до першого улучання, $p=0{,}6$; $q=1-0{,}6=0{,}4$; $k=3$. Тоді, ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення 3 знаходимо за формулою (4.10):

$$P(X=3)=0{,}4^{3-1}\cdot 0{,}6=0{,}096.$$

4.4.4. Гіпергеометричний розподіл

Гіпергеометричний розподіл описує ймовірність настання m успішних результатів у n випробуваннях, якщо значення n мале порівняно з обсягом сукупності N:

$$P(X=m)=\frac{C_k^m\cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n},\ m=0,1,2,\ldots,n;\ k\ge n. \qquad (4.12)$$

Наприклад, ймовірність того, що з n деталей, які випадково вибрано з партії обсягом N , m деталей виявляться бракованими, має гіпергеометричний закон розподілу (k − кількість бракованих деталей у партії).

Числові характеристики гіпергеометричного розподілу:

$$M(X)=\frac{kn}{N},\ D(X)=\frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Зі зменшенням відношення $\frac{n}{N}$ гіпергеометричний розподіл наближається до біномного з параметрами n і $p=\frac{k}{N}$. Дуже часто гіпергеометричний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, якщо $\lambda=\frac{nk}{N}$.

Методичні вказівки до завдання №4 ПР
за темою 4 «Дискретні випадкові величини»

Вивчення цієї теми слід починати із базових понять: «випадкова величина», «дискретна випадкова величина», «неперервна випадкова величина». Необхідно виділити окремо основний спосіб завдання дискретної випадкової величини (ряд розподілу ймовірностей), його графічне зображення (многокутник розподілу), дії над величинами. Особливу увагу слід приділити числовим характеристикам дискретних випадкових величин (ДВВ), їхнім властивостям та обчисленню. Для засвоєння даної теми в плані прикладань необхідно вивчити основні закони розподілу ДВВ, що зв'язані зі схемою Бернуллі (біноміний, геометричний та закон розподілу Пуассона).

Запитання для самоперевірки

1. Дати означення випадкової величини.
2. Яка випадкова величина називається дискретною?
3. Яка випадкова величина називається неперервною?
4. Як задають розподіл дискретної випадкової величини?
5. Що слугує графічним зображенням розподілу дискретної випадкової величини?
6. Які дискретні випадкові величини називають незалежними?
7. Як означається добуток сталої на дискретну випадкову величину? Запишіть закон розподілу для CX.
8. Як означаються сума, добуток двох дискретних випадкових величин?
9. Які основні числові характеристики дискретної випадкової величини? Дати їх означення.
10. Навести два способи обчислення дисперсії.
11. У чому полягає ймовірнісний зміст математичного сподівання?
12. Які основні властивості математичного сподівання?
13. Які основні властивості дисперсії?
14. Навести основні закони розподілу дискретної випадкової величини.
15. За якими формулами визначаються числові характеристики біномного закону? Закону розподілу Пуассона?

Розв'язання типових прикладів.

Приклад 4.1. Пристрій складається з 3-х незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента в одному досліді дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількість елементів, що відмовили в одному досліді.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина (ДВВ) X може приймати такі значення: 0, 1, 2, 3. ДВВ X розподілена за біномним законом.

Відмови елементів є незалежними один від одної, ймовірності відмови кожного елемента рівні, тому застосовуємо формулу Бернуллі.

Тут подія A – «відмова одного елемента в досліді», $P(A)= p=0{,}1$, $q=1-0{,}1=0{,}9$, $n=3$.

Якщо $X=0$, то жодний з елементів не відмовив. Тому

$$P(X=0)=C_3^0\cdot 0{,}1^0\cdot 0{,}9^3=\frac{3!}{0!\ 3!}\cdot 1\cdot 0{,}9^3=0{,}729.$$

Якщо $X=1$, то відмовив тільки 1 елемент, а решта (2 елементи) не відмовили. Тому

$$P(X=1)=C_3^1\cdot 0{,}1^1\cdot 0{,}9^2=\frac{3!}{1!\ 2!}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^2=0{,}243.$$

Якщо $X=2$, то відмовили 2 елементи, а решта (1 елемент) не відмовив. Тому

$$P(X=2)=C_3^2\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^1=\frac{3!}{2!\ 1!}\cdot 0{,}01\cdot 0{,}9=0{,}027.$$

Якщо $X=3$, то відмовили всі 3 елементи. Відповідна ймовірність

$$P(X=3)=C_3^3\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^0=\frac{3!}{0!\ 3!}\cdot 0{,}001\cdot 1=0{,}001.$$

Маємо таку таблицю розподілу:

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

Контроль: 0,729+0,243+0,027+0,001=1 (сума ймовірностей дорівнює 1).

Приклад 4.2. Задані закони розподілу незалежних випадкових величин X та Y:

X	-1	1	2
p	0,2	0,3	0,5

Y	1	3
p	0,3	0,7

Скласти закони розподілу величин $X+Y$, $X\cdot Y$.

Розв'язання. За означенням знаходимо закони розподілу випадкових величин $X+Y$ та $X\cdot Y$ (відповідні ймовірності можливих значень X та Y перемножуються)

$X+Y$	-1+1=0	-1+3=2	1+1=2	1+3=4	2+1=3	2+3=5
p	0,06	0,14	0,09	0,21	0,15	0,35

$X\cdot Y$	$-1\cdot 1$=-1	$-1\cdot 3$=-3	$1\cdot 1$=1	$1\cdot 3$=3	$2\cdot 1$=2	$2\cdot 3$=6

p	0,06	0,14	0,09	0,21	0,15	0,35

Об'єднуємо стовпці з однаковими значеннями (додаємо відповідні ймовірності). Отже, остаточно, маємо такі закони розподілу:

$X+Y$	0	2	3	4	5
p	0,06	0,23	0,15	0,21	0,35

$X \cdot Y$	-3	-1	1	2	3	6
p	0,06	0,14	0,09	0,21	0,15	0,35

(сума ймовірностей має дорівнювати одиниці).

Приклад 4.3 Нехай випадкова величина X розподілена за біномним законом. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. Загальне число X появ події A в n незалежних випробуваннях складається з числа появ події A в окремих випробуваннях. Тому, якщо X_i − число появ події A в i -му випробуванні ($i=1,2,...,n$), то $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Випадкові величини X_i, $i=1,2,...,n$ незалежні, кожна з яких може приймати два можливі значення 1 та 0 (подія A з'явилась або ні в i -му випробуванні) з ймовірностями p та $q=1-p$:

X_i	1	0
p	p	q

За властивістю 3 математичного сподівання

$$M(X)=M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n).$$

Оскільки $M(X_i)=1\cdot p+0\cdot q=p$, $i=1,2,...,n$, то $M(X)=np$.

Аналогічно,

$$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n).$$

За законом розподілузнаходимо відхилення

$X_i - M(X_i)$	$1-p$	$0-p$
p	p	q

знайдемо дисперсію числа появ події A в одному (i -му) випробуванні

$$D(X_i)=(1-p)^2\cdot p+(0-p)^2\cdot q=q^2\cdot p+p^2q=pq(q+p)=pq,\ i=1,2,...,n.$$

Тому $D(X)=npq$, а $\sigma(X)=\sqrt{npq}$.

Отже, числові характеристики біномного закону розподілу визначаються за такими формулами:

$$M(X)=np,\ D(X)=npq,\sigma(X)=\sqrt{npq}.$$

Приклад 4.4. Випадкові величини X та Y незалежні. Знайти дисперсію випадкової величини $Z = 2X + 3Y$, якщо відомо $D(X) = 4$, $D(Y) = 5$.

Розв'язання. Скористаємося властивостями 2, 3 дисперсії:

$$D(Z) = D(2X + 3Y) = D(2X) + D(3Y) = 2^2 D(X) + 3^2 D(Y) = 2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 5 = 16 + 45 = 61.$$

Отже, дисперсія випадкової величини $Z = 2X + 3Y$ дорівнює 61.

Приклад 4.5. Дискретна випадкова величина (ДВВ) X приймає три можливих значення $x_1 = 4$, $x_2 = 6$ та x_3 з ймовірностями $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}3$, p_3 відповідно. Знайти x_3 та p_3 за умовою, що $M(X) = 8$.

Розв'язання. Для знаходження p_3 скористаємося рівністю

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

тобто

$$0{,}5 + 0{,}3 + p_3 = 1,\ \ p_3 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Таким чином, маємо такий закон розподілу для величини X:

X	4	6	x_3
p	0,5	0,3	0,2

Далі застосуємо формулу для обчислення математичного сподівання (4.2)

$$8 = M(X) = 0{,}5 \cdot 4 + 0{,}3 \cdot 6 + 0{,}2 \cdot x_3,$$

звідки

$$8 - 3{,}8 = 0{,}2 \cdot x_3,\ \ 4{,}2 = 0{,}2 \cdot x_3,\ \ x_3 = 21.$$

Отже, $x_3 = 21$, $p_3 = 0{,}2$.

Приклад 4.6. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини (ДВВ) X – число появ події A в n незалежних випробуваннях, якщо ймовірність появи події A в окремих випробуваннях однакові і відомо, що $M(X) = 1{,}2$.

Розв'язання. Можливі значення величини X такі: $x_1 = 0$ (подія A не з'явилась жодного разу), $x_2 = 1$ (подія A з'явилась 1 раз) та $x_3 = 2$ (подія A з'явилась 2 рази). Знайдемо ймовірності можливих значень за формулою Бернуллі (3.1):

$$P(X = 0) = C_2^0 \cdot p^0 \cdot q^2 = \frac{2!}{0!\ 2!} \cdot 1 \cdot q^2 = q^2,$$

$$P(X = 1) = C_2^1 \cdot p^1 \cdot q^1 = \frac{2!}{1!\ 1!} \cdot p \cdot q = 2pq,$$

$$P(X = 2) = C_2^2 \cdot p^2 \cdot q^0 = \frac{2!}{2!\ 0!} \cdot p^2 = p^2.$$

Запишемо закон розподілу для величини X:

X	0	1	2

$$p \qquad q^2 \qquad 2pq \qquad p^2$$

та обчислимо математичного сподівання за формулою (4.2):

$$M(X) = 0 \cdot q^2 + 1 \cdot 2pq + 2 \cdot p^2 = 2p(q+p) = 2p$$

(враховано, що $p + q = 1$).

За умовою задачі $M(X) = 1{,}2$, тому $1{,}2 = 2p$, $p = 0{,}6$. Звідси $q = 1 - p = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Шукана дисперсія для біномного закону розподілу обчислюється за формулою див. приклад 4.3)

$$D(X) = npq.$$

Отже, $D(X) = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}48$.

Зауваження. Так само для розрахунку математичного сподівання біномного закону розподілу можна було скористатися готовою формулою

$$M(X) = np.$$

Приклад 4.7. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона:

$$P(X = k) = P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},\ \lambda = np,\ k = 0,1,2,\ldots,n.$$

Розв'язання. За означенням математичного сподівання дискретної випадкової величини маємо

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Тут при перетвореннях застосували формулу Маклорена розкладу в степеневий ряд функції e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Отже, шукане математичне сподівання величини X:

$$M(X) = \lambda$$

(дорівнює параметру Пуассона).

Список джерел.

1. Сулима І.М., Яковенко В.М. Вища математика. Теорія ймовірностей. Математична статистика. Навчальний посібник. К.: Вид. Центр НАУ, 2004. – 238 с.
2. Панталієнко Л.А. Методичні вказівки до виконання тестових завдань з дисципліни «Вища математика« за модулем «Теорія ймовірностей, математична статистика та основи кореляційного аналізу». – Видавничий центр НУБІП, 2011. – 71 с.
3. Панталієнко Л.А., Шостак С.В. Методичні вказівки для розв'язання типових задач з дисципліни „Прикладна математика" для студентів інженерних факультетів. К.: Вид. центр НАУ, 2007. – 54 с.
4. Конспект лекцій.

5. Астахов В.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Навчально-методичний посібник / В.М.Астахов, Г.С. Буланов, В.О. Паламарчук – Краматорськ: ДДМА, 2009. – 64 с. http://www.dgma.donetsk.ua/metod/vm/tims.pdf

Викладач: доц. Панталієнко Л.А.
Термін виконання: до 3 квітня 2020 р.
Прошу надсилати виконані завдання за адресою: wnyrk15@gmail.com