Завдання №3

з дисципліни «Теорія ймовірності і математична статистика»

для студентів спеціальності «Транспортні технології (автомобільний транспорт)», I курс (скорочений термін навчання), група 1906.

Варіант завдання (PDF) відповідає номеру за списком студентської групи.

Завдання №3. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює p. Знайти ймовірність того, що при n пострілах буде: а) m_1 влучень; б) від m_1 до m_2 влучень.

Варіант	n	p	m_1	m_2
1	220	0,75	175	215
2	400	0,9	345	372
3	625	0,2	450	570
4	150	0,6	80	120
5	225	0,2	45	80
6	100	0,8	72	84
7	400	0,5	200	220
8	650	0,4	210	250
9	225	0,8	170	190
10	670	0,8	520	570
11	900	0,9	790	830
12	440	0,5	215	270
13	300	0,25	75	100
14	600	0,6	330	385
15	175	0,2	150	160
16	800	0,8	720	736
17	376	0,5	330	350
18	444	0,8	360	375
19	280	0,2	140	174
20	425	0,5	312	328
21	225	0,9	200	215
22	700	0,5	470	520
23	400	0,8	300	340
24	325	0,8	290	310
25	650	0,64	560	590
26	225	0,1	130	142
27	150	0,4	54	76

28	245	0,64	140	175
29	400	0,64	245	310
30	330	0,36	180	230

Теоретичний матеріал до завдання №3:

3.1. Формула Пуассона

У випадку, коли в схемі Бернуллі число випробувань n велике ($n > 25$), а ймовірність p появи події A в кожному випробуванні мала ($p < 0{,}1$), тобто $np < 9$, застосовують асимптотичну формулу Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \qquad (3.14)$$

де $\lambda = np$ − стале число, що називається параметром Пуассона.

Іноді, в залежності від конкретної постановки задачі, параметр Пуассона обчислюється за формулою

$$\lambda = \lambda_1 \cdot S, \qquad (3.15)$$

де λ_1 − середнє число появ події A в одиниці області (площі, об’єму, відрізка, часу і т.і.), S − розмір (міра) цієї області.

Приклад 3.7. Завод відправив на базу 5000 високоякісних виробів. Ймовірність того, що в дорозі виріб буде пошкоджено, дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що на базу прибудуть 3 пошкоджені вироби.

Розв’язання. $n = 5000$, $p = 0{,}0002 < 0{,}1$, $\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1 < 9$. За формулою Пуассона (3.14) при $k = 3$ знаходимо

$$P_{5000}(3) \approx \frac{1^3}{3!} e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06.$$

Приклад 3.8. При визначенні зараженості зерна встановлено, що в 1 кг міститься в середньому 10 шкідників. Знайти ймовірність того, що в 100 г зерна не буде жодного шкідника.

Розв’язання. За умовою $\lambda_1 = 10 \frac{1}{кг}$, $S = 100г = 0{,}1\ кг$. Отже, параметр Пуассона $\lambda = \lambda_1 \cdot S = 10 \cdot 0{,}1 = 1$. Шукану ймовірність знаходимо за формулою (3.14)

$$P_0 \approx \frac{1^0}{0!} e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368.$$

Зауваження. За формулою Пуассона здійснюють розрахунок ймовірності подій, що відбуваються у випадкові моменти часу. Потік подій − послідовність таких подій. Це, наприклад, надходження викликів на АТС, пункт швидкої допомоги, прибуття літаків в аеропорт, клієнтів на підприємство, послідовність відмов елементів і т.і.

Приклад 3.9. Середнє число викликів, що надходять на АТС в одну хвилину (1 хв.), дорівнює 2. Знайти ймовірність того, що за 5 хвилин надійдуть 2 виклики.

Розв'язання. За умовою $n=5$, $\lambda_1 = 2\frac{1}{хв}$, $S = 5$ $хв$, $\lambda = \lambda_1 \cdot S = 2\cdot 5 = 10$, $k=2$. За формулою Пуассона (3.14) дістанемо

$$P_5(2) \approx \frac{10^2}{2!}e^{-10} = \frac{100\cdot 0{,}000045}{2} \approx 0{,}00225 .$$

Отже, подія «за 5 хвилин надійдуть 2 виклики» практично неможлива.

3.2. Найімовірніша кількість появи випадкової події.

При розв'язанні прикладних задач часто потрібно приблизно вирахувати значення сум типу (3.2) при досить великих n. Оскільки ймовірність $P_n(k)$ зі збільшенні k спочатку зростає до деякого значення k_0, а потім спадає (зменшується), необхідно знайти k_0.

Означення. Назвемо найбільш ймовірним числом появ події A в n незалежних випробуваннях таке число k_0, для якого виконується

$$P_n(k_0) \geq P_n(k) \tag{3.4}$$

для всіх $0 \leq k \leq n$.

k_0 ще називають числом успіхів, якому при заданому n відповідає максимальна біноміальна ймовірність $P_n(k_0)$.

Згідно з означенням при заданих n, p маємо:

$$P_n(k_0) \geq P_n(k_0+1) \text{ і } P_n(k_0) \geq P_n(k_0-1)$$

або

$$\frac{P_n(k_0+1)}{P_n(k_0)} \leq 1, \ \frac{P_n(k_0-1)}{P_n(k_0)} \leq 1. \tag{3.5}$$

Застосовуючи до нерівностей (3.5) формулу Бернуллі, дістанемо, що

$$np - q \leq k_0 \leq np + p . \tag{3.6}$$

Тут можливі такі випадки:

1) якщо $np-q$ − ціле, то існує два значення найбільш ймовірного числа успіхів k_0, а саме: $k_0^{(1)} = np-q$, $k_0^{(2)} = np+p$;
2) якщо $np-q$ − дробове , то існує одне значення числа успіхів k_0, що лежить в проміжку $\lfloor np-q;\ np+p \rfloor$;
3) якщо np − ціле число, то $k_0 = np$.

Приклад 3.3. Батарея робить 14 пострілів по об'єкту. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,2. Знайти найбільш ймовірне число влучень і ймовірність цього числа влучень.

Розв’язання. Подія A – «влучення при одному пострілі», $p = 0,2$, $q = 1 - 0,2 = 0,8$, $n = 14$. Для знаходження k_0 , дослідимо всі можливі випадки. $np = 2,8$ – дробове, а $np - q = 2$ – ціле число, значить маємо випадок 2). Тому $k_0^{(1)} = np - q = 2$, $k_0^{(2)} = np + p = 3$, тобто найбільш ймовірне число влучень 2 або 3. Ймовірність цього числа влучень знаходимо за формулою Бернуллі, оскільки $n = 14 < 25$,

$$P_{14}(2) = C_{14}^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{14-2} = \frac{14!}{2!\ 12!} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{12} = 0,25;$$

$$P_{14}(3) = C_{14}^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{14-3} = \frac{14!}{3!\ 11!} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{11} = 0,2504 .$$

Зауваження. З нерівності (3.6) маємо

$$p - \frac{q}{n} \le \frac{k_0}{n} \le p + \frac{q}{n} .$$

Звідси при достатньо великих n

$$p \approx \frac{k_0}{n} ,$$

тобто, найбільш ймовірна частота успіхів близька до ймовірності успіху в одному випробуванні. Отже, схемі Бернуллі притаманна властивість стійкості відносної частоти.

Методичні вказівки до завдання №3 ПР
за темою «Послідовність незалежних випробувань».

При вивченні цієї теми особливу увагу слід приділити постановці задачі схеми Бернуллі та основним задачам, пов′язаних з цією схемою. Тут важливо вміти за текстом задачі виділяти згадану постановку. Застосування певної формули за схемою Бернуллі необхідно здійснювати в залежності від визначальних параметрів (p, n) та основних задач. Тому засвоєння локальної та інтегральної теорем Лапласа, формул Бернуллі, Пуассона слід починати зі з’ясування умов щодо їхніх параметрів. В якості прикладань формули Пуассона необхідно виділити окремо розрахунок ймовірності подій, що відбуваються у випадкові моменти часу (потік подій), що стосується поширених задач.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулювати постановку задачі схеми Бернуллі.
2. Які основні задачі пов′язані зі схемою Бернуллі?

3. Записати формулу Бернуллі.
4. Як знайти найбільш ймовірне число появ події A в n незалежних випробуваннях? Сформулювати окремі випадки.
5. Сформулювати локальну теорему Лапласа та вказати умови її застосування.
6. Сформулювати інтегральну теорему Лапласа та вказати умови її застосування.
7. Сформулювати граничну теорему Пуассона і вказати умови її застосування.
8. Як обчислюється параметр Пуассона? розглянути два окремі випадки.
9. Як означається потік подій? Яка з формул схеми Бернуллі застосовується для розрахунку ймовірності?
10. Як обчислюється ймовірність відхилення відносної частоти від ймовірності? Довести розрахункову формулу на підставі інтегральної теореми Лапласа.

Розв'язання типових прикладів.

Приклад 3.1. Два рівносильні суперники грають в шахи. Що більш ймовірно виграти 1 партію з 2-х чи 2 партії з 4-х?

Розв'язання. Грають 2 рівносильні суперники, тому ймовірність виграшу $p = 0{,}5$, отже, програшу $q = 1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$. Оскільки в усіх партіях p стала і не має значення. В якій послідовності будуть виграватися партії, то маємо схему Бернуллі.

Подія A − «виграш в одній партії». Знаходимо шукані ймовірності за формулою Бернуллі

$$P_2(1) = C_2^1 \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^1 = \frac{2!}{1!\ 1!} \cdot 0{,}25 = 0{,}5;$$

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^2 = \frac{4!}{2!\ 2!} \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}375.$$

Маємо: $P_2(1) > P_4(2)$. Отже, більш ймовірно виграти 1 партію з 2-х ніж 2 партії з 4-х.

Приклад 3.2. Спостереження показують, що серед кожної 1000 новонароджених в середньому 515 хлопчиків і 485 дівчаток. В сім'ї п'ятеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед них:

а) 3 дівчинки; б) не більше 2 дівчинок.

Розв'язання. Подія A − «народження дівчинки», $P(A) = p = \frac{485}{1000} = 0{,}485$, ймовірність народження хлопчика: $q = 1 - p = 1 - 0{,}485 = 0{,}515$.

а) $n = 5$, $k = 3$, застосовуємо формулу Бернуллі:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}485^3 \cdot 0{,}515^2 = \frac{5!}{2!\ 3!} \cdot 0{,}0025 \cdot 0{,}8573 \approx 0{,}021.$$

б) Згідно з умовою $k \le 2$, що означає настання події A або 0 разів, або 1 раз, або 2 рази. За теоремою додавання для попарно-несумісних подій маємо:

$$p = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2).$$

Кожний з доданків обчислимо за формулою (3.1):

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0{,}485^0 \cdot 0{,}515^5 = 0{,}0362;$$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}485^1 \cdot 0{,}515^4 \approx 0{,}1703;$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}485^2 \cdot 0{,}515^3 = 0{,}32.$$

Отже, шукана ймовірність

$$p = 0{,}0362 + 0{,}1703 + 0{,}32 = 0{,}5265 \approx 0{,}53.$$

Приклад 3.3. ВТК перевіряє партію з десяти деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,75. Знайти найбільш ймовірне число деталей, які будуть визнані стандартними.

Розв'язання. Нехай подія A – «деталь, що перевіряється, стандартна». За умовою задачі:

$$n = 10,\ p = 0{,}75,\ q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$$

Найбільш імовірне число k_0 деталей, які будуть визнані стандартними, обчислюємо за формулою (3.6). Дослідимо всі можливі випадки: $np = 7{,}5$ – дробове, $np - q = 7{,}5 - 0{,}25 = 7{,}25$ – дробове число, отже маємо випадок 2). Значить існує одне ціле значення числа успіхів k_0, що лежить в проміжку $[np - q;\ np + p]$. Знаходимо $np + p = 7{,}5 + 0{,}75 = 8{,}25$. Маємо проміжок $[7{,}25;\ 8{,}25]$, в якому міститься одне ціле значення 8. Тому $k_0 = 8$.

Приклад 3.4. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, при 100 пострілах буде:

а) 75 влучень; б) від 75 до 90 влучень; в) не менше 75 влучень.

Розв'язання. а) Тут подія A – «влучення в мішень при одному пострілі». Тоді $p = P(A) = 0{,}8$, $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $n = 100$, $k = 75$, $np = 100 \cdot 0{,}8 = 80 > 9$. Тому для обчислення ймовірності $P_{100}(75)$ застосовуємо локальну теорему Лапласа.

Знаходимо спочатку аргумент функції Гаусса за формулою (3.8)

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \sqrt{16} = 4,$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 80}{4} = -\frac{5}{4} \approx -1{,}25.$$

Отже, за (3.7), враховуючи парність функції Гаусса φ(x), маємо

$$P_{100}(75) \approx \frac{1}{4}\varphi(-1{,}25) = \frac{1}{4}\varphi(1{,}25) = \frac{1}{4} \cdot 0{,}1826 \approx 0{,}04565.$$

(значення φ(1,25)=0,1826 знаходимо за Додатком 1).

б) Тут $n=900$, $k_1=75$, $k_2=90$. За інтегральною теоремою Лапласа знаходимо

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-80}{4}=-\frac{5}{4}=-1{,}25;$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{90-80}{4}=\frac{10}{4}=2{,}5.$$

Отже, за (3.10), враховуючи непарність функції Лапласа, маємо

$$P_{100}(75;90)\approx\Phi(2{,}5)-\Phi(-1{,}25)=\Phi(2{,}5)+\Phi(1{,}25)=0{,}4938+0{,}3944=0{,}8882.$$

(значення $\Phi(2{,}5)=0{,}4938$, $\Phi(1{,}25)=0{,}3944$ знаходимо за Додатком 2).

в) Вимога, що при 100 пострілах буде не менше 75 влучень означає, що влучень буде від 75 до 100. Отже, маємо $n=900$, $k_1=800$, $k_2=900$. Розрахунки здійснюємо за аналогією з пунктом б):

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-80}{4}=-\frac{5}{4}=-1{,}25;$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-80}{4}=5.$$

Обчислимо шукану ймовірність

$$P_{100}(75;100)\approx\Phi(5)-\Phi(-1{,}25)=\Phi(5)+\Phi(1{,}25)=0{,}5+0{,}3944=0{,}8944.$$

Приклад 3.5. Апаратура містить 2000 однаково надійних елементів, ймовірність відмови для кожного з яких дорівнює 0,0005. Знайти ймовірність відмови апаратури, якщо вона відбувається при відмові хоч одного елемента.

Розв'язання. Тут подія A − «відмова одного елемента». $n=2000$, $p=P(A)=0{,}0005$, $\lambda=np=2000\cdot0{,}0005=1<9$.

Події B «відмова хоч одного елемента» та $\overline{B}$ − «жоден елемент не відмовив» є протилежними. Тому

$$P(B)=1-P(\overline{B}).$$

Застосовуючи формулу Пуассона, остаточно дістанемо

$$P(B)=1-P_{2000}(0)\approx1-\frac{1^0}{0!}e^{-1}\approx1-0{,}36788=0{,}632.$$

Приклад 3.7. На факультеті навчається 500 студентів. Знайти ймовірність того, що днем народження двох студентів факультету буде 1 вересня.

Розв'язання. Нехай подія A − «днем народження одного студента факультету є 1 вересня». Тоді $\lambda_1=\frac{1}{365}=0{,}0027$ (1 вересня − це один день з 365 днів року), тобто в середньому на рік на одного студента цей день трапляється 0,0027 разів. $S=500$, $\lambda=\lambda_1\cdot S=0{,}0027\cdot500=1{,}36$, $k=2$.

За формулою Пуассона (3.14) дістанемо

$$p_2 \approx \frac{1{,}36^2}{2!}e^{-1{,}36} = \frac{1{,}84}{2e^{1{,}36}} \approx 0{,}9248 \cdot 0{,}257 = 0{,}23767\ .$$

Список джерел.

1. Сулима І.М., Яковенко В.М. Вища математика. Теорія ймовірностей. Математична статистика. Навчальний посібник. К.: Вид. Центр НАУ, 2004. – 238 с.
2. Панталієнко Л.А. Методичні вказівки до виконання тестових завдань з дисципліни «Вища математика« за модулем «Теорія ймовірностей, математична статистика та основи кореляційного аналізу». – Видавничий центр НУБІП, 2011. – 71 с.
3. Панталієнко Л.А. Методичні вказівки до виконання тестових завдань з дисципліни «Теорія ймовірностей та випадкові процеси». – Видавничий центр НУБІП, 2009. – 64 с.
4. Конспект лекцій.
5. Астахов В.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Навчально-методичний посібник / В.М.Астахов, Г.С. Буланов, В.О. Паламарчук – Краматорськ: ДДМА, 2009. – 64 с. http://www.dgma.donetsk.ua/metod/vm/tims.pdf

Викладач: доц. Панталієнко Л.А.
Термін виконання: до 23 березня 2020р.
Прошу надсилати виконані завдання за адресою: wnyrk15@gmail.com