Дистанційне навчання

До уваги студентів спеціальності «Галузеве машинобудування»,

У зв'язку з дистанційною формою складання літньої сесії 2019-2020 р.р. з 18 травня 2020 р. (наказ від 7.04 2020р. на сайті НУБіП) внесено такі коригування щодо дисципліни «Прикладна математика» (щоб встигнути за графіком деканатів, яких ще немає)

1. Рейтингова система складатиметься з 2 модулів (тест за модулем 2 складаєте за графіком).

2. Буде ще два завдання 7 та 8, матеріал яких буде входити до підсумкового контролю (іспиту). Видача цих завдань буде на наступному тижні.

3. Прошу надсилати виконані завдання за адресою: wnyrk15@gmail.com
З цих завдань складатиметься оцінка за навчальну роботу.

4. Студентам, які не пройшли тестування за модулем 1, за модулем 2 та з підсумкового контролю (іспит) – буде виставлено оцінку «незадовільно».
5. Дату іспиту буде встановлено деканатом. Щоб встигнути за графіком деканатів, іспит будемо проводити раніше на ЕНК АКІТ, ч.4 та ВМ Т з 12-14 травня 2020 р. Конккретне повідомлення буде пізніше.

Доц. Панталієнко Л.А.

Графік навчальної роботи за модулем 2 на ЕНК
(Завдання на сайті кафедри вищої та прикладної математики)

Група	Дисципліна	завдання №4 (дата здачі)	завдання №5 (дата здачі)	завдання №6 (дата здачі)	Тест за модулем 2 (дата здачі)
Гмаш1801	Прикладна математика	до 3квітня 2020	до 10 квітня 2020	до 20 квітня 2020	25 квітня 2020
Гмаш1802	Прикладна математика	до 3квітня 2020	до 10 квітня 2020	до 20 квітня 2020	26 квітня 2020
Гмаш1903	Прикладна математика	до 3квітня 2020	до 10квітня 2020	до 20 квітня 2020	22 квітня 2020

Завдання №6. Деталі, що випускає цех, розподілені за розміром діаметра по нормальному закону. Стандартний розмір деталі (математичне сподівання) дорівнює a мм, середнє квадратичне відхилення σ мм. Знайти: а) ймовірність того , що діаметр будь-якої взятої деталі буде більший ніж α мм і менший, ніж βмм; б) ймовірність того, що діаметр деталі відхиляється від стандартної величини не більше, ніж на δ мм.

Варіант	a	σ	α	β	δ
1	10	3	9	14	2
2	9	2	7	11	2
3	15	6	11	20	3
4	22	5	20	28	3
5	25	7	21	29	5
6	20	6	18	25	4
7	19	5	18	23	3
8	21	6	17	23	4
9	11	3	7	15	2
10	28	6	23	31	4
11	21	5	19	24	4
12	13	3	11	15	2
13	15	4	12	18	3
14	12	3	10	14	2
15	9	4	7	12	3
16	8	3	6	10	2
17	16	4	13	18	3
18	20	6	15	24	5
19	21	5	18	23	4
20	22	7	19	25	5
21	18	5	14	20	4
22	10	3	8	11	2
23	18	6	13	19	5
24	12	3	10	13	2
25	10	3	8	11	1
26	15	5	12	18	1
27	14	4	11	16	2
28	19	5	11	22	3
29	11	4	9	13	2
30	11	6	10	14	1

Теоретичний матеріал до завдання №6.

5.4. Основні неперервні розподіли.

5.4.1. Рівномірний закон розподілу

Рівномірним називають закон розподілу неперервної випадкової величини X, заданої на проміжку $[a;b]$ щільністю

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b; \\ 0, & x>b. \end{cases} \qquad (5.14)$$

Отже, при рівномірному розподілі на проміжку, що містить всі можливі значення НВВ, щільність розподілу зберігає стале значення.

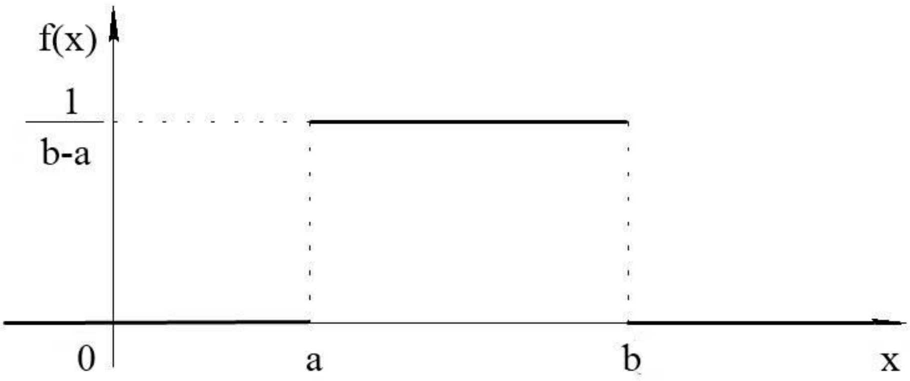

Рис.5.7.

Так, наприклад, похибку при округленні до найближчого цілої поділки на шкалі вимірювального приладу можна розглядати як випадкову величину X, яка може приймати зі сталою щільністю ймовірності будь-яке значення між двома сусідніми поділками. Тому величина X має рівномірний розподіл.

Рівномірно розподілена на відрізку $[a;b]$ випадкова величина X приймає значення тільки з цього проміжку. Її інтегральна функція визначається так:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b; \\ 1, & x\ge b, \end{cases}$$

а числові характеристики − за формулами

$$M(X)=\frac{b+a}{2},\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (5.15)$$

Графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ представлено на рис.5.7, 5.8.

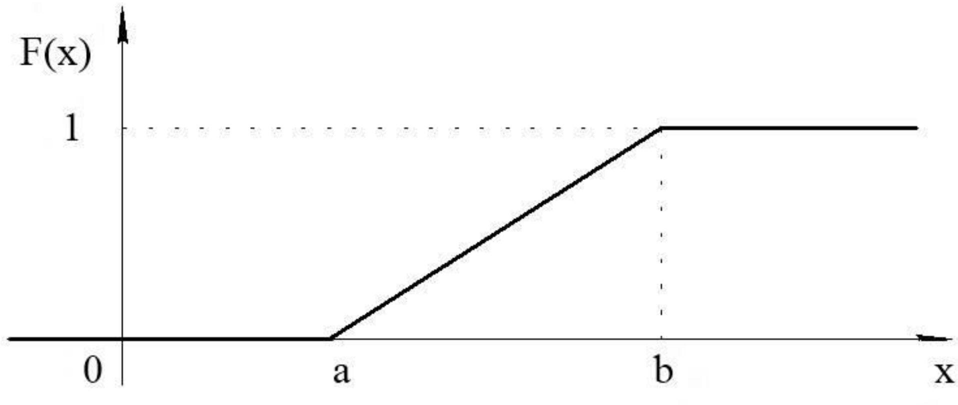

Рис.5.8.

Нехай проміжок $[\alpha;\beta]$ є частиною відрізка $[a;b]$: $[\alpha;\beta]\subset[a;b]$.Тоді ймовірність того, що рівномірно розподілена на $[a;b]$ випадкова величина X прийме значення з проміжку $[\alpha;\beta]$ визначається так:

$$P(\alpha\le X\le\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\frac{\beta-a}{b-a}-\frac{\alpha-a}{b-a}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}. \qquad (5.16)$$

Приклад 5.6. Автобуси деякого маршруту рухаються строго за графіком з інтервалом руху 5хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, буде чекати чергового автобуса менше 3 хв.

Розв'язання. Неперервна випадкова величина X − «час до чергового автобуса» розподілена рівномірно в інтервалі $(0;\ 5)$, оскільки автобуси рухаються строго за графіком. Шукану ймовірність $P(0<X<3)$ знайдемо за формулою (5.16)

$$P(0<X<3)=\frac{3-0}{5}-\frac{0-0}{5}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

5.4.2. Нормальний закон розподілу

Нормальним називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X , щільність якого має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (5.17)$$

де a − математичне сподівання, σ − середнє квадратичне відхилення X (параметри розподілу).

Інтегральна функція нормально розподіленої випадкової величини визначається через функцію Лапласа:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ при різних значеннях σ зображено на рис.5.9, 5.10.

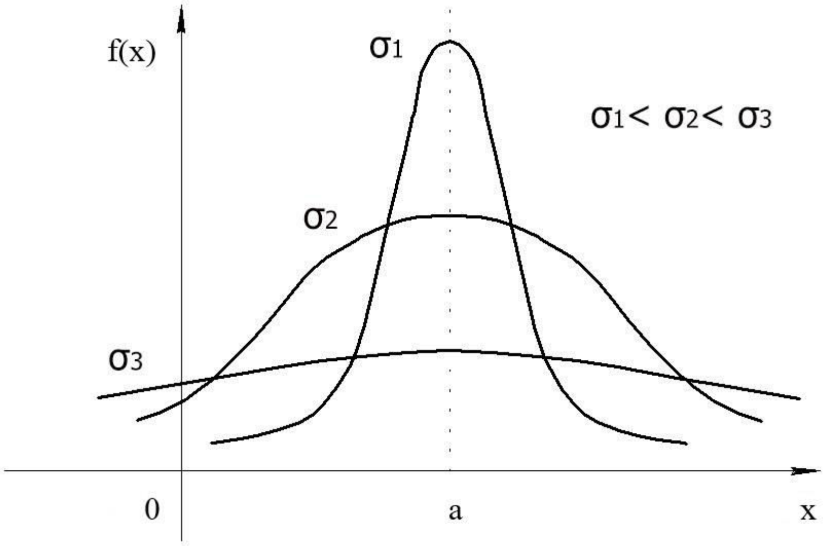

Рис. 5.9.

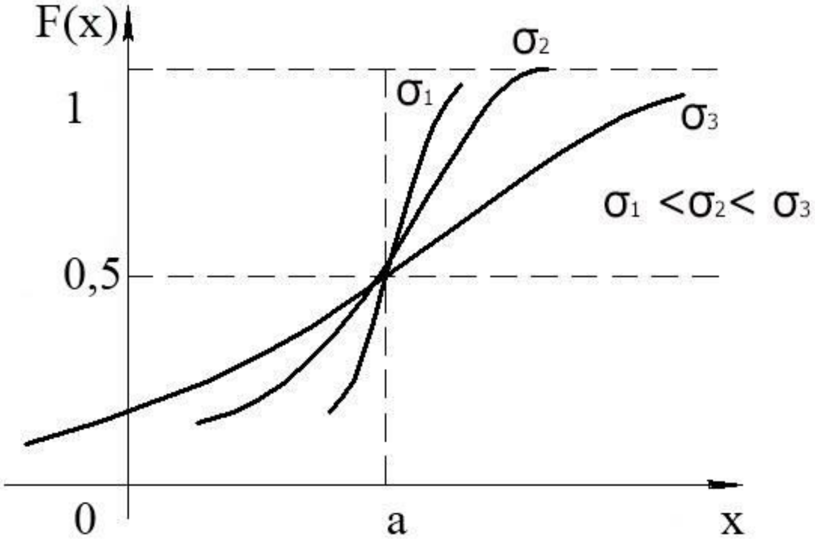

Рис. 5.10.

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X прийме значення з інтервалу $(\alpha;\beta)$ обчислюється так:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{5.18}$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ − функція Лапласа.

Зокрема, ймовірність того, що модуль відхилення величини X від свого математичного сподівання менший заданого числа $\varepsilon > 0$, обчислюється за формулою

$$P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (5.19)$$

Приклад 5.7. Відомо, що відхилення довжини виготовлених деталей від стандарту є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Якщо стандартна довжина дорівнює $m=40$ см, а середнє квадратичне відхилення $\sigma=0{,}4$ см, то яку точність довжини виробу можна гарантувати з ймовірністю $0{,}8$?

Розв'язання. Потрібно знайти додатне число ε, для якого $P(|X-40|<\varepsilon)=0{,}8$. Оскільки

$$P(|X-40|<\varepsilon)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}4\sqrt{2}}\right)=\Phi(1{,}77\varepsilon),$$

вихідна задача зводиться до розв'язання нерівності $\Phi(1{,}77\varepsilon)>0{,}8$. За допомогою таблиці встановлюємо, що $1{,}77\varepsilon>0{,}91$, звідки $\varepsilon>0{,}514$. Отже, найменше значення ε, що задовольняє останній нерівності, $\varepsilon=0{,}52$.

5.4.3. Показниковий (експоненціальний) закон розподілу

Показниковим називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X, що описується диференціальною функцією

$$f(x)=\begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \ \textit{при} \ x\ge 0, \end{cases} \qquad (5.20)$$

де λ − стала додатна величина (параметр показникового розподілу).

Графік щільності (5.20) представлено на рис.5.11.

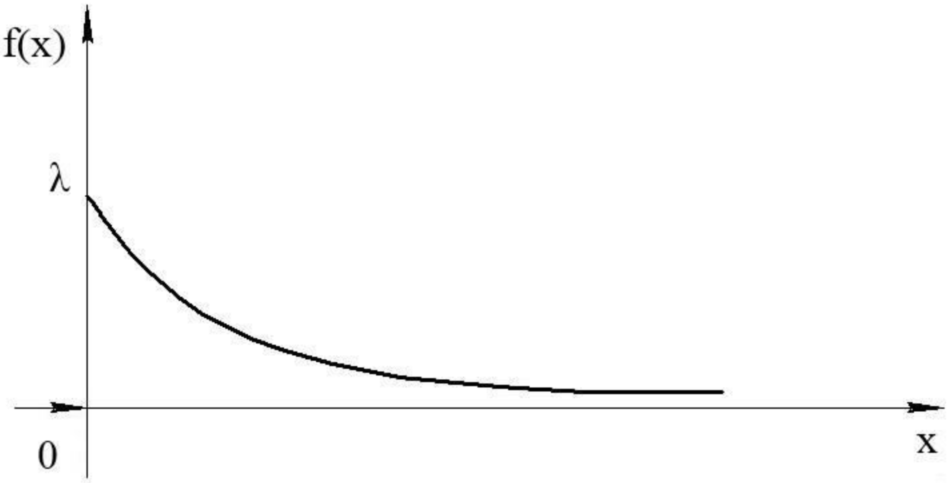

Рис. 5.11.

Функція розподілу показникового закону має вигляд (рис.5.12)

$$F(x)=\begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x<0, \\ 1-e^{-\lambda x} \ \textit{при} \ x \geq 0. \end{cases} \tag{5.21}$$

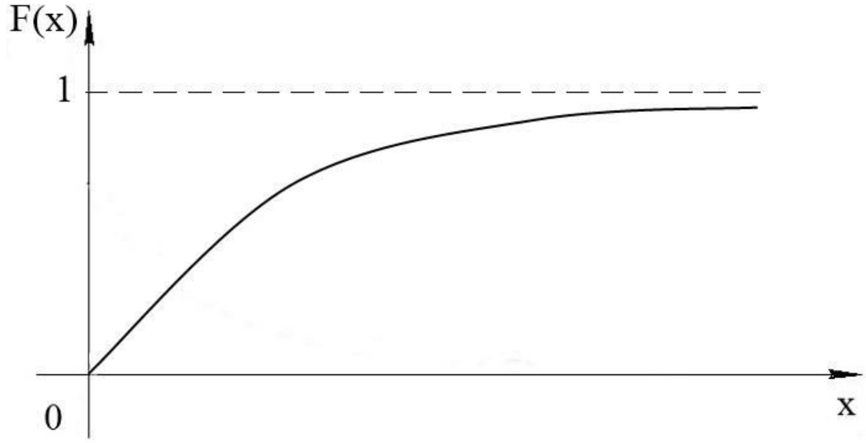

Рис. 5.12.

Ймовірність потрапляння в інтервал $(a;b)$ неперервної випадкової величини X, розподіленої за показниковим законом, обчислюється так:

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda \beta}. \tag{5.22}$$

Математичного сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення показникового розподілу відповідно дорівнюють

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \tag{5.23}$$

Отже, математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення показникового розподілу рівні між собою.

Показниковий закон широко використовується в прикладаннях, зокрема, в теорії надійності, одним із основних понять якої є функція надійності.

Нехай елемент (деякий пристрій) починає працювати в момент часу $t_0 = 0$, а через деякий час t настає відмова. Позначимо через T НВВ − час безвідмовної роботи елемента, а через λ − інтенсивність відмов (середнє число відмов в одиницю часу).

Часто тривалість безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл, інтегральна функція якого

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t},\ t \geq 0\ ,\lambda > 0 \qquad (5.24)$$

визначає ймовірність відмови елемента за час t.

Функцією надійності $R(t)$ називають функцію, що визначає ймовірність безвідмовної роботи елемента протягом часу t:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t},\ t \geq 0,\ \lambda > 0. \qquad (5.25)$$

Приклад 5.8. Тривалість часу T безвідмовної роботи першого з двох незалежно працюючих елементів має показниковий розподіл $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, другого $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Знайти ймовірність того, що за час $t = 6$ годин обидва елементи відмовлять.

Розв’язання. а) Ймовірність відмови першого елемента

$$p_1 = 1 - R_1(6) = 1 - e^{-0,02\cdot 6} = 1 - 0,887 = 0,113.$$

Ймовірність відмови другого елемента

$$p_2 = 1 - R_2(6) = 1 - e^{-0,05\cdot 6} = 1 - 0,741 = 0,259.$$

Ймовірність того, що обидва елементи відмовлять, за теоремою множення для незалежних подій, буде такою:

$$p_1 \cdot p_2 = 0,113 \cdot 0,259 \approx 0,03.$$

5.4. Основні неперервні розподіли.

5.4.1. Рівномірний закон розподілу

Рівномірним називають закон розподілу неперервної випадкової величини X, заданої на проміжку $[a;b]$ щільністю

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases} \qquad (5.14)$$

Отже, при рівномірному розподілі на проміжку, що містить всі можливі значення НВВ, щільність розподілу зберігає стале значення.

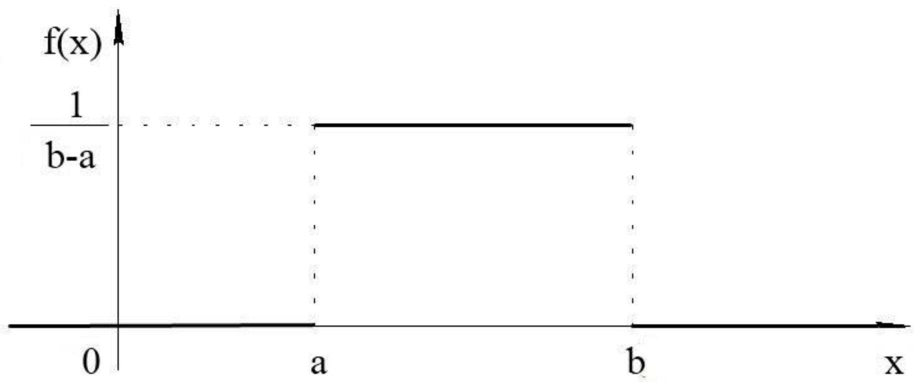

Рис.5.7.

Так, наприклад, похибку при округленні до найближчого цілої поділки на шкалі вимірювального приладу можна розглядати як випадкову величину X, яка може приймати зі сталою щільністю ймовірності будь-яке значення між двома сусідніми поділками. Тому величина X має рівномірний розподіл.

Рівномірно розподілена на відрізку $[a;b]$ випадкова величина X приймає значення тільки з цього проміжку. Її інтегральна функція визначається так:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b;\\ 1, & x\ge b,\end{cases}$$

а числові характеристики − за формулами

$$M(X)=\frac{b+a}{2},\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (5.15)$$

Графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ представлено на рис.5.7, 5.8.

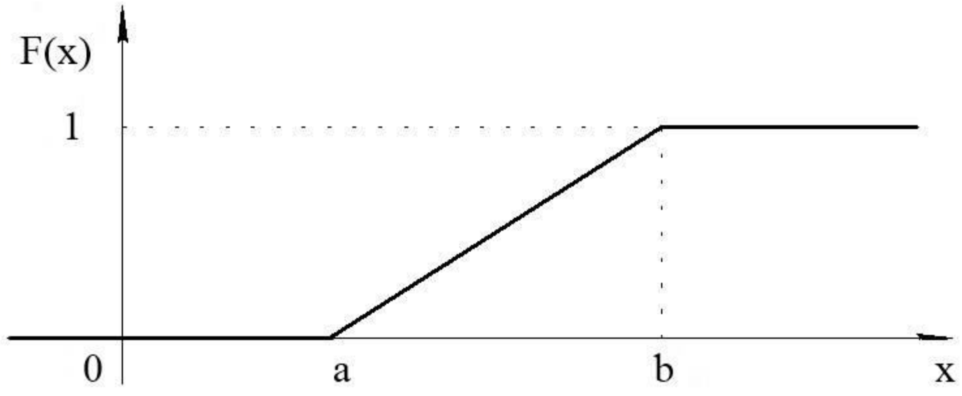

Рис.5.8.

Нехай проміжок $[\alpha;\beta]$ є частиною відрізка $[a;b]$: $[\alpha;\beta]\subset[a;b]$.Тоді ймовірність того, що рівномірно розподілена на $[a;b]$ випадкова величина X прийме значення з проміжку $[\alpha;\beta]$ визначається так:

$$P(\alpha\le X\le\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\frac{\beta-a}{b-a}-\frac{\alpha-a}{b-a}=\frac{\beta-\alpha}{b-a}. \qquad (5.16)$$

Приклад 5.6. Автобуси деякого маршруту рухаються строго за графіком з інтервалом руху 5хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, буде чекати чергового автобуса менше 3 хв.

Розв'язання. Неперервна випадкова величина X − «час до чергового автобуса» розподілена рівномірно в інтервалі $(0;\,5)$, оскільки автобуси рухаються строго за графіком. Шукану ймовірність $P(0<X<3)$ знайдемо за формулою (5.16)

$$P(0<X<3)=\frac{3-0}{5}-\frac{0-0}{5}=\frac{3}{5}=0{,}6\,.$$

5.4.2. Нормальний закон розподілу

Нормальним називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X , щільність якого має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (5.17)$$

де a − математичне сподівання, σ − середнє квадратичне відхилення X (параметри розподілу).

Інтегральна функція нормально розподіленої випадкової величини визначається через функцію Лапласа:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ при різних значеннях σ зображено на рис.5.9, 5.10.

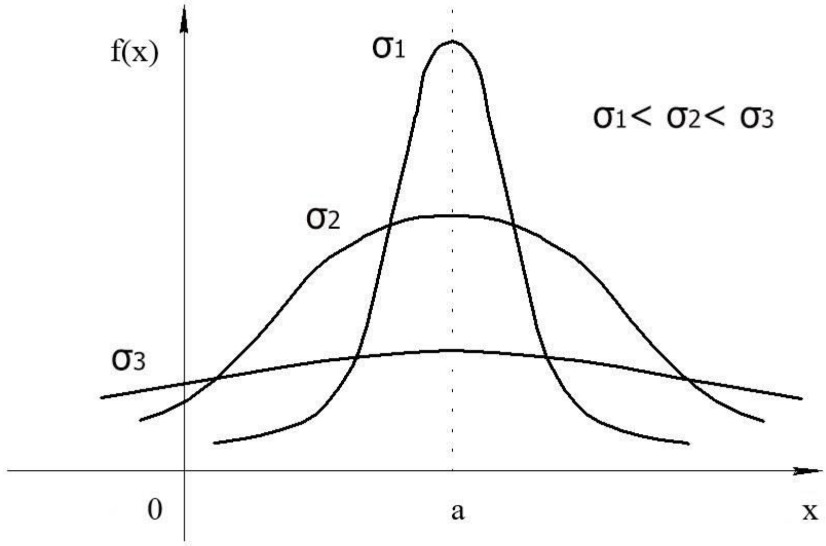

Рис. 5.9.

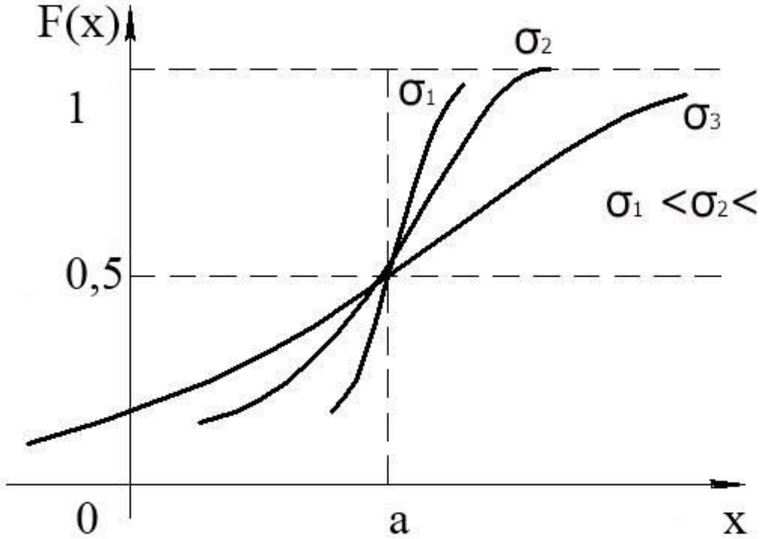

Рис. 5.10.

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X прийме значення з інтервалу $(\alpha;\beta)$ обчислюється так:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \qquad (5.18)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ − функція Лапласа.

Зокрема, ймовірність того, що модуль відхилення величини X від свого математичного сподівання менший заданого числа $\varepsilon > 0$, обчислюється за формулою

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (5.19)$$

Приклад 5.7. Відомо, що відхилення довжини виготовлених деталей від стандарту є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Якщо стандартна довжина дорівнює $m = 40$ см, а середнє квадратичне відхилення $\sigma = 0{,}4$ см, то яку точність довжини виробу можна гарантувати з ймовірністю $0{,}8$?

Розв'язання. Потрібно знайти додатне число ε, для якого $P(|X - 40| < \varepsilon) = 0{,}8$. Оскільки

$$P(|X - 40| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}4\sqrt{2}}\right) = \Phi(1{,}77\varepsilon),$$

вихідна задача зводиться до розв'язання нерівності $\Phi(1{,}77\varepsilon) > 0{,}8$. За допомогою таблиці встановлюємо, що $1{,}77\varepsilon > 0{,}91$, звідки $\varepsilon > 0{,}514$. Отже, найменше значення ε, що задовольняє останній нерівності, $\varepsilon = 0{,}52$.

5.4.3. Показниковий (експоненціальний) закон розподілу

Показниковим називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X, що описується диференціальною функцією

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \ \text{при} \ x \geq 0, \end{cases} \tag{5.20}$$

де λ − стала додатна величина (параметр показникового розподілу).

Графік щільності (5.20) представлено на рис.5.11.

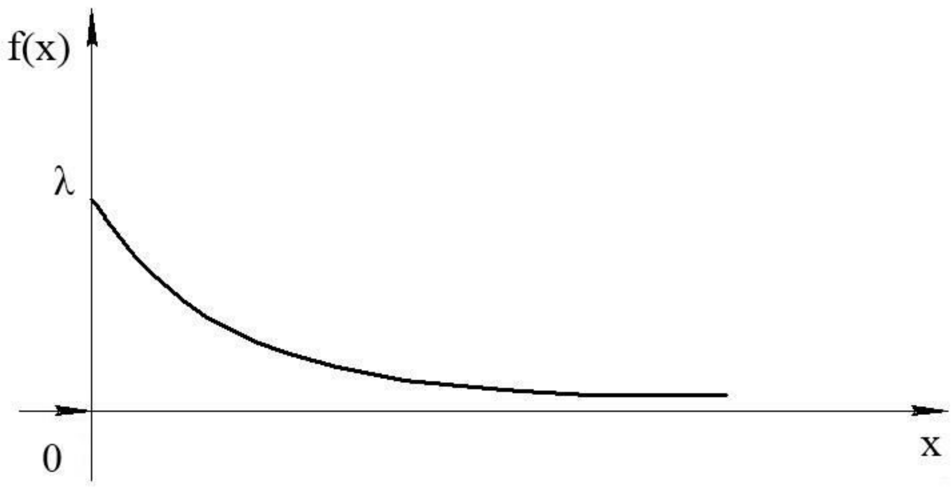

Рис. 5.11.

Функція розподілу показникового закону має вигляд (рис.5.12)

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x<0, \\ 1-e^{-\lambda x} \text{ } при \text{ } x \ge 0. \end{cases} \tag{5.21}$$

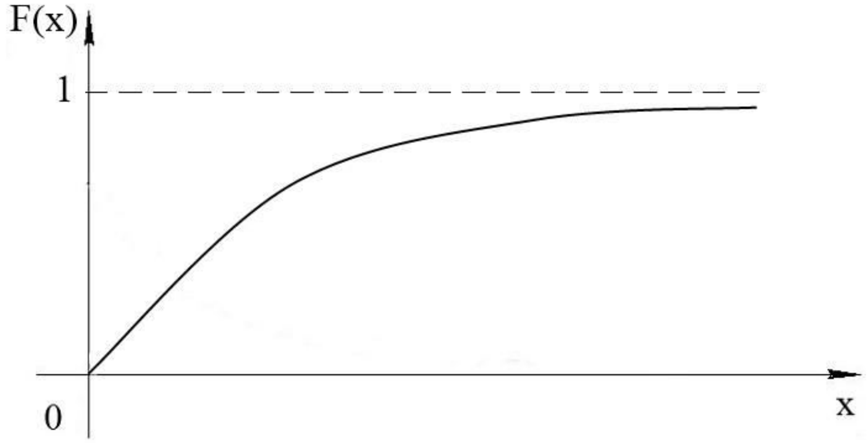

Рис. 5.12.

Ймовірність потрапляння в інтервал $(a;b)$ неперервної випадкової величини X, розподіленої за показниковим законом, обчислюється так:

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda \beta} . \tag{5.22}$$

Математичного сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення показникового розподілу відповідно дорівнюють

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda} . \tag{5.23}$$

Отже, математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення показникового розподілу рівні між собою.

Показниковий закон широко використовується в прикладаннях, зокрема, в теорії надійності, одним із основних понять якої є функція надійності.

Нехай елемент (деякий пристрій) починає працювати в момент часу $t_0=0$, а через деякий час t настає відмова. Позначимо через T НВВ − час безвідмовної роботи елемента, а через λ − інтенсивність відмов (середнє число відмов в одиницю часу).

Часто тривалість безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл, інтегральна функція якого

$$F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t},\ t \ge 0\ ,\lambda>0 \tag{5.24}$$

визначає ймовірність відмови елемента за час t.

Функцією надійності $R(t)$ називають функцію, що визначає ймовірність безвідмовної роботи елемента протягом часу t:

$$R(t)=P(T>t)=1-F(t)=e^{-\lambda t},\ t\ge 0,\ \lambda>0. \qquad (5.25)$$

Приклад 5.8. Тривалість часу T безвідмовної роботи першого з двох незалежно працюючих елементів має показниковий розподіл $F_1(t)=1-e^{-0,02t}$, другого $F_2(t)=1-e^{-0,05t}$. Знайти ймовірність того, що за час $t=6$ годин обидва елементи відмовлять.

Розв’язання. а) Ймовірність відмови першого елемента

$$p_1=1-R_1(6)=1-e^{-0,02\cdot 6}=1-0,887=0,113.$$

Ймовірність відмови другого елемента

$$p_2=1-R_2(6)=1-e^{-0,05\cdot 6}=1-0,741=0,259.$$

Ймовірність того, що обидва елементи відмовлять, за теоремою множення для незалежних подій, буде такою:

$$p_1\cdot p_2=0,113\cdot 0,259\approx 0,03.$$

Практичне заняття №5. Неперервні випадкові величини.

Опитування з теорії.

1. Як означається інтегральна функція розподілу? Для завдання яких величин вона застосовується?
2. Навести основні властивості інтегральної функції розподілу. Які з них притаманні лише неперервній випадковій величині?
3. Дати означення диференціальної функції розподілу неперервної випадкової величини. Чому її називають ще щільністю ймовірності (розподілу)?
4. Чим відрізняється дискретна випадкова величина від неперервної випадкової величини?
5. Навести основні властивості диференціальної функції та їх геометричне тлумачення.
6. Який зв'язок між інтегральною функцією розподілу та щільністю розподілу?
7. Як визначити ймовірність того, що випадкова величина прийме значення із заданого інтервалу? Навести два способи обчислення.
8. Які основні числові характеристики неперервної випадкової величини? Як вони обчислюються?
9. Навести основні розподіли неперервної випадкової величини. За якою характеристикою означається кожний з розподілів?
10. Якими є визначальні параметри нормального та показникового розподілу?
11. Як знайти ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X прийме значення з інтервалу $(\alpha;\beta)$? Ймовірність $P(|X-a|<\varepsilon)$?
12. Як зв'язані математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення показникового розподілу? Як означається функція надійності?
13. Як знайти розподіл функції за відомим законом розподілу аргумента? Окремо розглянути випадок дискретної та неперервної випадкової величини.
14. У чому полягає закон великих чисел? Навести теорему Чебишева, її практичне значення.
15. Сформулювати теорему Ляпунова (центральну граничну теорему).

Завдання для аудиторної роботи.

Приклад 5.1. Випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ \frac{1}{2}(x-1), & 1\le x\le 3; \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті досліду випадкова величина X прийме значення: а) з інтервалу $(1{,}5;2{,}5)$; б) з інтервалу $(2{,}5;3{,}5)$.

Розв'язання. а) За наслідками властивості 2 інтегральної функції маємо

$$P(1{,}5 < X < 2{,}5) = F(2{,}5) - F(1{,}5) = \frac{1}{2}(2{,}5-1) - \frac{1}{2}(1{,}5-1) = \frac{1{,}5-0{,}5}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5\,.$$

б) Шукану ймовірність знаходимо за аналогією з пунктом а) з урахуванням умови задачі:

$$P(2{,}5 < X < 3{,}5) = F(3{,}5) - F(2{,}5) = 1 - \frac{1}{2}(2{,}5-1) = 1 - \frac{1{,}5}{2} = \frac{2-1{,}5}{2} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25\,.$$

Приклад 5.2. Задана диференціальна функція $f(x)$ неперервної випадкової величини (НВВ) X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ x - \dfrac{1}{2}, & 1 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (5.6).

Якщо $x \le 1$, то $f(x) = 0$, тому $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0$.

Нехай $1 < x \le 2$, тоді

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} 0 \cdot dx + \int\limits_{1}^{x}\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot dx = 0 + \int\limits_{1}^{x}\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot d\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}\Bigg|_1^x =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}x(x-1).$$

Якщо $x > 2$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} 0 \cdot dx + \int\limits_{1}^{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot dx +$$

$$+ \int\limits_{2}^{x} 0 \cdot dx = 0 + \int\limits_{1}^{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot d\left(x - \frac{1}{2}\right) + 0 = \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}\left[\left(2-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{2}\right)^2\right] = 1\,.$$

Отже, остаточно маємо інтегральну функцію величини X вигляду

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1;\\ \frac{1}{2}x(x-1), & 1<x\le 2;\\ 1, & x>2. \end{cases}$$

Приклад 5.3. Диференціальна функція неперервної випадкової величини (НВВ) X в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ має вигляд $f(x)=\frac{2}{\pi}\cos^2 x$ та $f(x)=0$ зовні цього інтервалу. Знайти ймовірність того, що в трьох незалежних випробуваннях X прийме 2 рази значення з інтервалу $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. За формулою (5.5) знайдемо ймовірність того, що X прийме 1 раз значення з інтервалу $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$:

$$P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4}\cos^2 x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/4}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos 2x d(2x)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(x\Big|_0^{\pi/4}+\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/4}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi+2}{4\pi}.$$

Ймовірність того, що в трьох незалежних випробуваннях величина X прийме 2 рази значення з інтервалу $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ знайдемо за формулою Бернуллі

$$P_3(2)=C_3^2\cdot p^2\cdot q^1=3\cdot p^2\cdot(1-p),\text{ де } p==\frac{\pi+2}{4\pi}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}.$$

Отже,

$$P_3(2)=3\frac{(\pi+2)^2}{16\pi^2}\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}\right)=3\left(\frac{\pi+2}{4\pi}\right)^2\cdot\frac{3\pi-2}{4\pi}.$$

Приклад 5.4. Знайти числові характеристики неперервної випадкової величини X, що задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2;\\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2}, & -2<x\le 2;\\ 1, & x>2. \end{cases}$$

Розв'язання. 1 спосіб. За означенням знайдемо щільність розподілу величини X:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2;\\ \frac{1}{4}, & -2<x\le 2;\\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Математичне сподівання випадкової величини X обчислимо за формулою (5.10)

$$M(X)=\int_{-2}^{2} x\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{2}=\frac{1}{8}\left(2^2-(-2)^2\right)=0,$$

а дисперсію − за формулою (5.12):

$$D(X)=\int_{-2}^{2} x^2\cdot\frac{1}{4}dx-0^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}=\frac{1}{12}\left[2^3-(-2)^3\right]=\frac{1}{12}\cdot 2\cdot 8=\frac{4}{3}.$$

Нарешті знаходимо середнє квадратичне відхилення: $\sigma(X)=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2 спосіб. Для обчислення дисперсії скористаємося формулою (5.11):

$$D(X)=\int_{-2}^{2}[x-0]^2\cdot\frac{1}{4}dx=\int_{-2}^{2} x^2\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}=\frac{1}{12}\left[2^3-(-2)^3\right]=\frac{1}{12}\cdot 2\cdot 8=\frac{4}{3}.$$

Отже, маємо такий самий результат.

Приклад 5.5. Ціна поділки шкали вимірювального приладу дорівнює 0,1. Вимірювання округлюють до найближчої цілої поділки на шкалі. Знайти ймовірність того, що в розрахунках буде зроблено похибку, яка перевищує 0,02.

Розв'язання. Похибку округлення можна розглядати як випадкову величину X, розподілену рівномірно в інтервалі між двома сусідніми поділками. Довжина інтервалу $b-a$, де містяться можливі значення величини НВВ X, дорівнює 0,1. Тому, за формулою (5.14), щільність рівномірного розподілу буде такою: $f(x)=\frac{1}{0{,}1}=10$ в межах $(a;\ b)$ та $f(x)=0$ зовні цього інтервалу.

Очевидно, похибка розрахунків перевищить 0,02, якщо вона міститься в інтервалі $(0{,}02;\ 0{,}08)$: $0+0{,}02=0{,}02$; $0{,}1-0{,}02=0{,}08$.

За формулою (5.5) дістанемо

$$P(0{,}02\le X<0{,}08)=\int_{0{,}02}^{0{,}08}10dx=10\int_{0{,}02}^{0{,}08}dx=10x\Big|_{0{,}02}^{0{,}08}=0{,}6.$$

Приклад 5.6. Ведіння стрільби здійснюється з точки O вздовж прямої OX. Середня далекість льоту снаряда дорівнює m. Припускаючи, що далекість льоту X розподілена за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $\sigma=80$ м, знайти, який відсоток випускових снарядів будуть давати перелітання від 120 до 160м.

Розв'язування. За умовою НВВ «далекість льоту» X розподілена за нормальним законом з параметрами $M(X)=m$ (м), $\sigma(X)=80$ (м). Визначимо з якою ймовірністю випускові снаряди будуть давати перелітання від 120 до 160м, тобто

$$P(m+120 \le X < m+160) = \Phi\left(\frac{m+160-m}{80}\right) - \Phi\left(\frac{m+120-m}{80}\right) = \Phi(2) - \Phi(1,5) =$$
$$= 0,4772 - 0,4332 = 0,044\,.$$

Отже, 4,4% випускових снарядів будуть давати перелітання від 120 до 160м.

Приклад 5.7. Тривалість часу T безвідмовної роботи першого з двох незалежно працюючих елементів має показниковий розподіл $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, другого $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Знайти ймовірність того, що за час $t = 6$ годин:

а) обидва елементи не відмовлять;

б) відмовить тільки один елемент;

в) відмовить хоч один елемент.

Розв'язання. а) Ймовірність відмови першого елемента

$$p_1 = 1 - R_1(6) = 1 - e^{-0,02\cdot 6} = 1 - 0,887 = 0,113\,.$$

Ймовірність відмови другого елемента

$$p_2 = 1 - R_2(6) = 1 - e^{-0,05\cdot 6} = 1 - 0,741 = 0,259\,.$$

Ймовірність безвідмовної роботи першого елемента

$$q_1 = R_1(6) = e^{-0,02\cdot 6} = 0,887.$$

Ймовірність безвідмовної роботи другого елемента

$$q_2 = R_2(6) = e^{-0,05\cdot 6} = 0,741\,.$$

Ймовірність безвідмовної роботи обох елементів

$$q_1 \cdot q_2 = 0,887 \cdot 0,741 \approx 0,66\,.$$

б) Ймовірність того, що відмовить тільки один елемент

$$p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0,113 \cdot 0,741 + 0,887 \cdot 0,259 \approx 0,31\,.$$

в) Ймовірність того, що відмовить хоч один елемент

$$P = 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - 0,66 \approx 0,34\,.$$

Приклад 5.8. Випадкова величина X розподілена рівномірно в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y = \sin X$.

Розв'язання. Знайдемо щільність розподілу $f(x)$ рівномірно розподіленої величини X за формулою (5.14): $f(x) = \dfrac{1}{\pi/2 - (-\pi/2)} = \dfrac{1}{\pi}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ та $f(x) = 0$ зовні інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Функція $y = \sin x$ в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ строго зростає, тому на цьому інтервалі вона має однозначну обернену функцію $x = \psi(y) = \arcsin y$. Знайдемо похідну $\psi'(y)$:

$$\psi'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Оскільки $f(x) = \frac{1}{\pi} = const$, то $f[\psi(y)] = \frac{1}{\pi}$ і $|\psi'(y)| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. За формулою (5.27) дістанемо, що $g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, причому $y \in (-1;\ 1)$, бо функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Отже, в інтервалі $(-1;\ 1)$ маємо $g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$; зовні цього інтервалу $g(y) = 0$.

Контроль:

$$\int_{-1}^{1} g(y)dy = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi}\arcsin y\Big|_0^1 = 2/\pi \cdot \pi/2 = 1.$$

Приклад 5.9. Прилад складається з 10 незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента за час t дорівнює 0,05. За допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю елементів, що відмовили, та середнім числом (математичним сподіванням) відмов за час t буде не меншою двох.

Розв'язання. Позначимо через X ДВВ − «число елементів, що відмовили за час t». Оскільки X розподілена за біномним законом, то

$$M(X) = np = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5;\ D(X) = npq = 10 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}475.$$

Підставивши в нерівність (5.28) $M(X) = 0{,}5$; $D(X) = 0{,}475$; $\varepsilon = 2$, дістанемо

$$P(|X - 0{,}5| < 2) \ge 1 - \frac{0{,}475}{4} = 0{,}88.$$

Події $|X - 0{,}5| \ge 2$ та $|X - 0{,}5| < 2$ протилежні, тому сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці. Отже,

$$P(|X - 0{,}5| \ge 2) \le 1 - 0{,}88 = 0{,}12.$$

Приклад 6.6. Деталь, виготовлена станком-автоматом, вважається придатною, якщо відхилення X контрольованого розміру від проектного значення не перевищує 10мм. Точність виготовлення деталей характеризується стандартним відхиленням σ. Вважаючи, що для даної технології σ = 5 і величина X розподілена нормально (σ(X)= σ, M(X)=0), з'ясувати: а) скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат? б) якою має бути точність виготовлення, щоб відсоток придатних деталей дорівнював 98?

Розв'язання. а) Деталь, виготовлена станком-автоматом, вважається придатною, якщо виконується умова

$$| X - M(X) | \le 10 \text{ або } | X | \le 10.$$

За формулою (5.19) знаходимо ймовірність цієї події

$$P(| X |\le 10) = 2\Phi\left(\frac{10}{5}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Отже, станок-автомат виготовляє приблизно 95% придатних деталей.

б) Нову точність σ виготовлення деталей, при якій станок-автомат буде виготовляти 98% придатних деталей, знаходимо за умовою

$$P(| X |\le 10) = 2\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}98.$$

Маємо: $\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}49$, звідки, за додатком 2 (таблицею значень функції Лапласа), знаходимо $\frac{10}{\sigma} = 2{,}33$ або $\sigma = \frac{10}{2{,}33} \approx 4{,}29.$

Приклад 6.7. Випадкова величина X має показниковий розподіл з функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-3x} & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) ймовірність того, що в результаті досліду випадкова величина X прийме значення з інтервалу]1; 2[; в) числові характеристики величини X .

Розв'язання. За формулою (5.21) знаходимо значення параметра λ показникового розподілу: λ = 3. Запишемо щільність розподілу за (5.20):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 3e^{-3x} & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

б) Ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення з інтервалу] 1; 2[обчислимо за формулою (5.22):

$$P(1 < X < 2) = e^{-3} - e^{-6} = 0{,}0498 – 0{,}00248 \approx 0{,}047.$$

в) Математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення величини X знаходимо за формулами (5.23):

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{3}, \quad D(X) = \frac{1}{9}.$$

Завдання для самостійної роботи.

1. Дискретна випадкова величина X задана законом (рядом) розподілу:

X	-2	0	1	3	5
p_i	0,15	0,1	0,3	0,2	0,25

Знайти інтегральну функцію розподілу величини X і побудувати її графік.

Відповідь: $F(x)=\begin{cases} 0; \ x \le -2, \\ 0{,}15; \ -2 < x \le 0, \\ 0{,}25; \ 0 < x \le 1, \\ 0{,}55; \ 1 < x \le 3, \\ 0{,}75; \ 3 < x \le 5, \\ 1; \ x \ge 5. \end{cases}$

2. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x^4}, x > 1 \\ 0, \quad x \le 1 \end{cases}.$$

Знайти: а) інтегральну функцію розподілу $F(x)$; б) ймовірність потрапляння X в інтервал $(0{,}5;1{,}25)$; в) числові характеристики величини X.
Відповідь: а) $F(x)=1-1/x^3$; б) $P(0{,}5 < X < 1{,}25)=0{,}488$; в) $M(X)=1{,}5=D(X)$; $\sigma(X)\approx 1{,}22$.

3. При яких значеннях параметрів функція $F(x)=\begin{cases} ax+b, \ c < x < d, \\ 1, \ x \ge d, \\ 0, \ x \le c \end{cases}$

буде інтегральною функцією розподілу неперервної випадкової величини?
Відповідь: $a=\dfrac{1}{d-c}$; $b=-\dfrac{c}{d-c}$.
4. За умовою попередньої задачі знайти $M(X), D(X)$.
Відповідь: $M(X)=\dfrac{c+d}{2}$; $D(X)=\dfrac{(d-c)^2}{12}$.
5. Неперервна випадкова величина задана диференціальною функцією:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \ x < 0; \\ \dfrac{1}{2}\sin x, \ 0 \le x < \pi; \\ 0, \ x \ge \pi, \end{cases}$$

Знайти: а) інтегральну функцію розподілу $F(x)$; б) ймовірність того, що величина X прийме значення з інтервалу $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$.

Відповідь: а) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0\le x<\pi; \\ 1, & x\ge\pi, \end{cases}$ б) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

6. Випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ a(x+1), & -1\le x\le 1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Знайти а) невідомий параметр c; б) числові характеристики величини X.

Відповідь: а) $a=\frac{1}{2}$; б) $M(X)=\frac{1}{3}$; $D(X)=\frac{2}{9}$; $\sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

7. Випадкова величина X має щільність розподілу $f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y=X^2$.

Відповідь: $f(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x}$.

8. За умовою попередньої задачі знайти щільність розподілу випадкової величини $Y=\frac{1}{X}$.

Відповідь: $f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$.

9. Діаметр круга – неперервна випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[1;2]$. Знайти щільність розподілу площі круга Y і обчислити ймовірність $P\{2<Y<4\}$.

Відповідь: $P(2<Y<4)\cong 0{,}66$; $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}, x\in(\frac{\pi}{4},\pi)$ і 0 в інших випадках.

10. За умовою попередньої задачі обчислити $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

Відповідь: $M(Y)=\frac{7}{12}\pi; D(Y)\approx 0{,}05\pi^2; \sigma(Y)\approx 0{,}22\pi$.

11. Для рівномірно розподіленої величини X на відрізку $[1;4]$ знайти функцію розподілу випадкової величини $Y=\sqrt{X}$.

Відповідь: $F(x)=\begin{cases} 0, x<1 \\ \frac{x^2-1}{3}.,1\le x\le 2 \\ 1, x>2 \end{cases}$.

12 Показати, що функція $F(x)=e^{-e^{-x}}$ є інтегральною функцією розподілу неперервної випадкової величини. Знайти щільність розподілу.

Відповідь: $f(x)=e^{-x}\cdot e^{-e^{-x}}$.

13. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, відповідно дорівнюють 20 і 5. Знайти ймовірність того, що в результаті досліду величина X прийме значення: а) менше 12; б) більше 20; в) з інтервалу]15; 25[.

Відповідь: а) 0,0548; б) 0,5; в) 0,6826.

14. Кулька, виготовлена станком-автоматом, вважається придатною, якщо відхилення X діаметра кульки від проектного розміру менше за абсолютною величиною ніж 0,7 мм. Вважаючи випадкову величину X розподіленою нормально із середнім квадратичним відхиленням σ=0,4 мм, знайти, скільки придатних кульок буде серед 100 виготовлених.

Відповідь: 92.

15. Норма висіву на 1га дорівнює 160 кг. Випадкові відхилення фактичних витрат насіння на 1га від норми характеризуються середнім квадратичним відхиленням 10 кг. Знайти: а) ймовірність того, що витрати насіння на 100га не перевищать 16,05т; б) кількість насіння, яка забезпечить посів 100 га з імовірністю 0,95.

Відповідь: а) 0,6915; б) 16,164т.

Список джерел.

1. Сулима І.М., Яковенко В.М. Вища математика. Теорія ймовірностей. Математична статистика. Навчальний посібник. К.: Вид. Центр НАУ, 2004. – 238 с.
2. Сулима І.М., Ковтун І.І., Нікітіна І.А., Скороход Т.А., Яковенко В.М. Прикладна математика. Теорія ймовірностей. Математична статистика. Навчально-методичний посібник. К.: Вид. Центр НАУ, 2005. – 148 с.
3. Панталієнко Л.А. Методичні вказівки до виконання тестових завдань з дисципліни «Вища математика« за модулем «Теорія ймовірностей, математична статистика та основи кореляційного аналізу». – Видавничий центр НУБіП, 2011. – 71 с.
4. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. – метод. посібник. У 2 ч. Ч. 1: Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000. – 304с.
5. Медведєв М.Г., Пащенко І.О. Теорія ймовірностей і математична статистика: К.: Ліра-К, 2008. – 536 с.
6. Астахов В.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Навчально-методичний посібник / В.М.Астахов, Г.С. Буланов, В.О. Паламарчук – Краматорськ: ДДМА, 2009. – 64 с.

http://www.dgma.donetsk.ua/metod/vm/tims.pdf

Викладач: доц. Панталієнко Л.А.
Термін виконання: до 20 квітня 2020р.
Прошу надсилати виконані завдання за адресою: wnyrk15@gmail.com