

Завдання №2 з дисципліни «Прикладна математика» для студентів спеціальності «Галузеве машинобудування», Пкурс+I курс (скорочений термін навчання), групи 1801, 1802,1903.

Обчислити надійність ділянки технічної системи, що складається з п'яти елементів. Безвідмовна робота протягом часу T кожного з п'яти елементів системи – незалежні події, що мають ймовірності p_i , $i = 1,2,3,4,5$ відповідно.

Для кожного варіанту задано схему та надійності елементів.

Варіант	№ схеми	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
1	1	0,7	0,8	0,9	0,6	0,8
2	2	0,9	0,7	0,2	0,9	0,75
3	3	0,4	0,6	0,6	0,4	0,6
4	4	0,6	0,9	0,5	0,5	0,6
5	5	0,9	0,4	0,8	0,9	0,6
6	6	0,8	0,9	0,4	0,4	0,7
7	7	0,5	0,8	0,5	0,4	0,8
8	8	0,4	0,5	0,9	0,25	0,5
9	9	0,8	0,2	0,9	0,8	0,7
10	10	0,8	0,8	0,6	0,8	0,8
11	1	0,9	0,5	0,8	0,9	0,5
12	2	0,5	0,9	0,9	0,8	0,8
13	3	0,8	0,9	0,7	0,5	0,5
14	4	0,6	0,4	0,7	0,5	0,7
15	5	0,9	0,9	0,8	0,7	0,8
16	6	0,8	0,8	0,6	0,8	0,9
17	7	0,5	0,7	0,7	0,8	0,9
18	8	0,8	0,6	0,5	0,6	0,6
19	9	0,9	0,6	0,8	0,7	0,5
20	10	0,5	0,6	0,9	0,4	0,8
21	1	0,9	0,7	0,6	0,9	0,4
22	2	0,5	0,8	0,9	0,8	0,7
23	3	0,8	0,5	0,9	0,5	0,9
24	4	0,8	0,6	0,4	0,8	0,9
25	5	0,6	0,8	0,5	0,8	0,6
26	6	0,9	0,5	0,5	0,7	0,8
27	7	0,4	0,8	0,9	0,7	0,9
28	8	0,6	0,5	0,8	0,3	0,2
29	9	0,4	0,7	0,8	0,9	0,7
30	10	0,6	0,8	0,5	0,9	0,8

Схема 1.

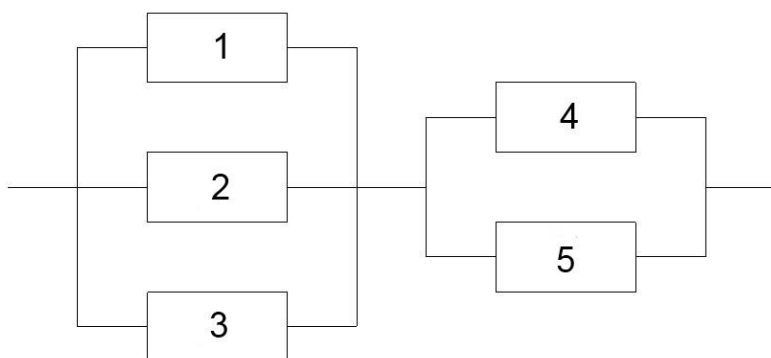


Схема 2.

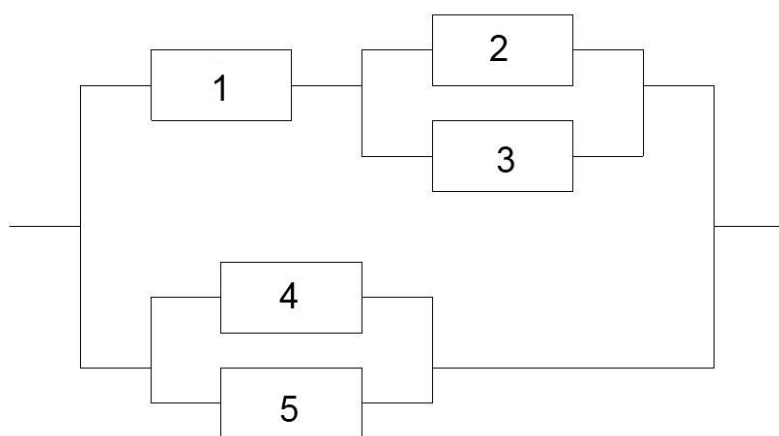


Схема 3.

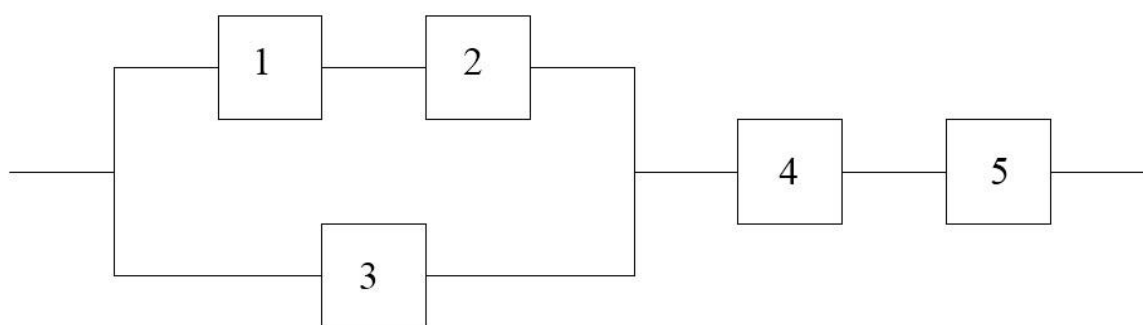


Схема 4.

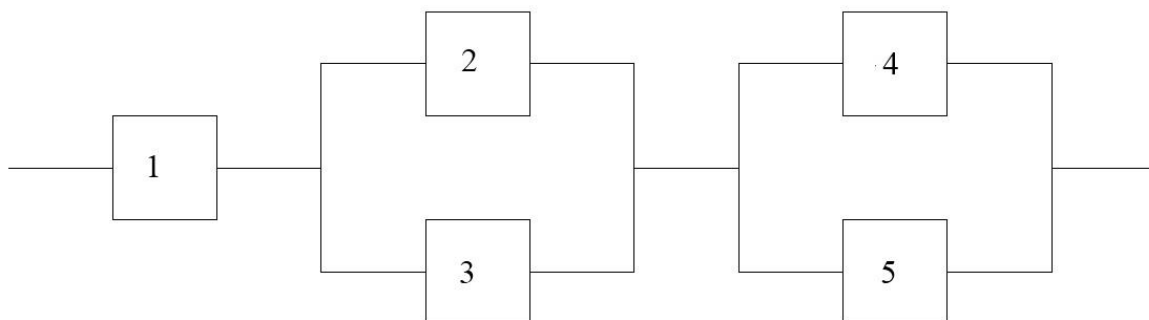


Схема 5.

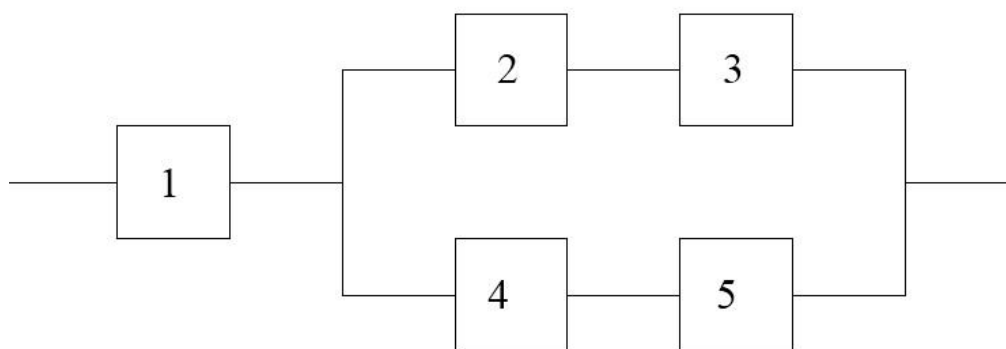


Схема 6.

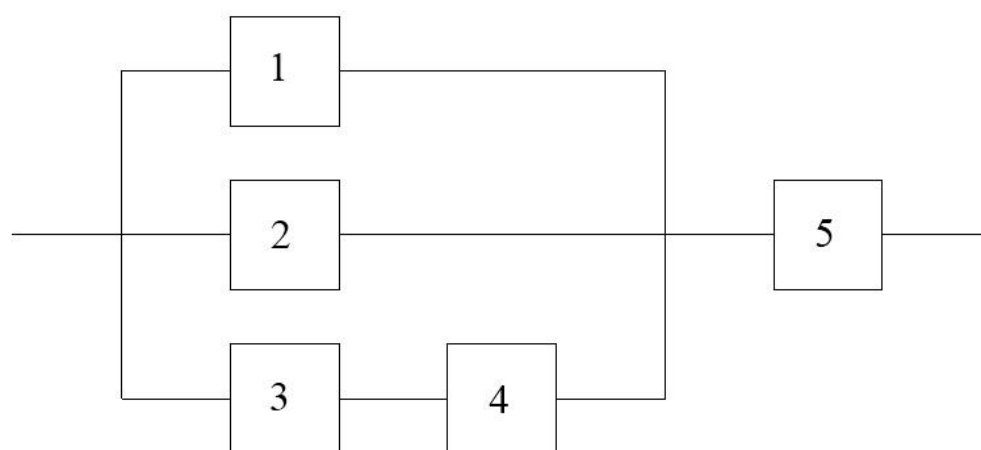


Схема 7.

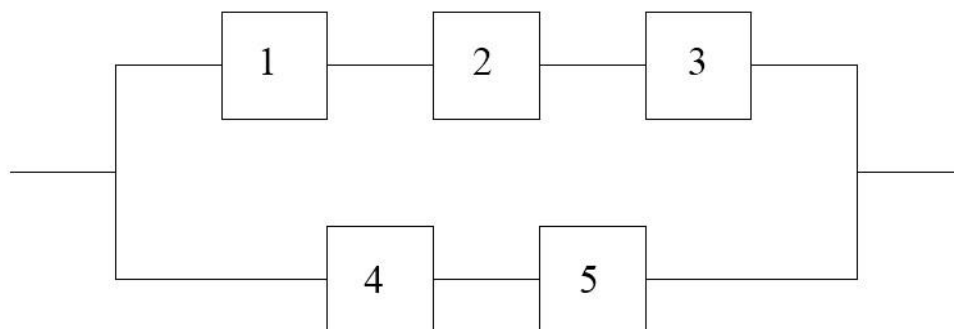


Схема 8.

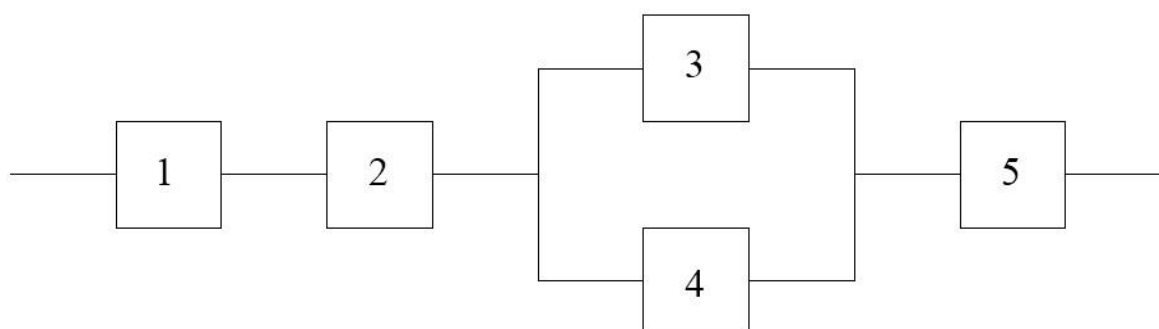


Схема 9.

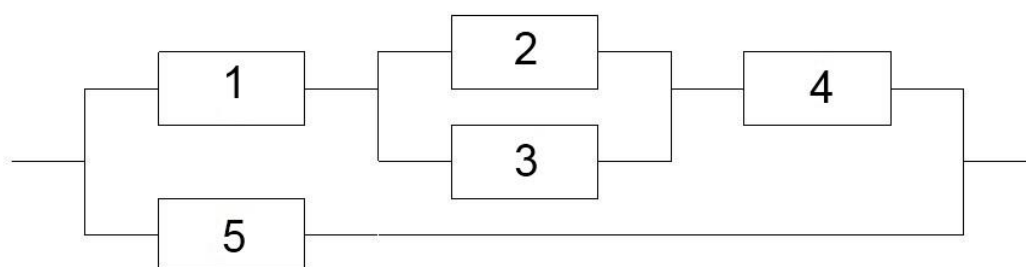
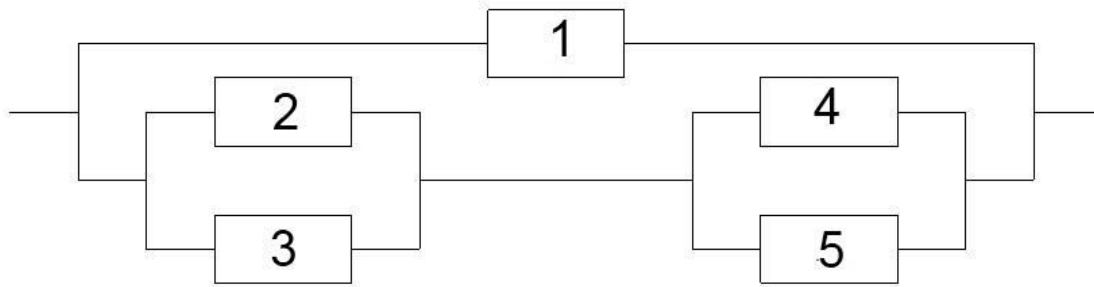


Схема 10.



**Методичні вказівки до завдання №2 ПР
за темою 2 «Теорема про ймовірності подій».**

ЛІТЕРАТУРА: [22], гл.ІІ, §1–5; [24], с.22-28, [32], с.9-14.

При вивченні цієї теми необхідно акцентувати увагу на двох основних операціях над подіями – додаванні та множенні, їх геометричному тлумаченні. Особливу увагу слід приділити поняттям незалежних, залежних подій та несумісних, сумісних подій, за якими здійснюється класифікація теорем про ймовірності подій. Тут необхідно вміти за текстом задачі розрізняти згадані поняття. Для засвоєння поняття умовної ймовірності розберіть класичні задачі вибору без повернення та з поверненням. Доцільно вивчити постановки задачі формули повної ймовірності та формул Байеса, їх відмінності. Для розрахунку надійності технічної системи (схеми) слід опрацювати базові випадки послідовно (паралельно) з'єднаних елементів на підставі теорем про ймовірності подій.

Запитання для самоперевірки

1. Які операції можна виконувати над подіями?
2. Як означається сума двох (скінченної кількості) подій? Проілюструвати діаграмою.
3. Як означається добуток двох (скінченної кількості) подій? Проілюструвати діаграмою.
4. Сформулювати основні властивості операцій над подіями.
5. У чому полягає теорема додавання ймовірностей? Сформулювати для випадку несумісних та сумісних подій.
6. Чому дорівнює сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу? Протилежних подій?
7. Які події називають незалежними, залежними?
8. Як означається умовна ймовірність?

9. У чому полягає теорема множення ймовірностей? Сформулювати для випадку незалежних, залежних подій.
10. Чому дорівнює ймовірність появи хоча б однієї з подій, незалежних в сукупності?
11. Сформулювати постановку задачі формули повної ймовірності, формул Байєса.
12. Які події називають гіпотезами? У якому варіанті постановки задачі.
13. Записати формулу повної ймовірності.
14. За допомогою теорем про ймовірності подій довести формули Байєса.
15. Як здійснюється розрахунок надійності технічної системи для випадку послідовно (паралельно) з'єднаних елементів?

Розв'язання типових прикладів.

Приклад 2.1. Чотири студенти складають іспит. Нехай подія A_i , $i = 1, 2, 3, 4$ полягає в тому, що i -тий студент склав іспит. Виразити у вигляді суми й добутоків подій A_i , \bar{A}_i , $i = 1, 2, 3, 4$ такі події:

- а) всі чотири студенти склали іспит (подія A);
- б) всі чотири студенти не склали іспит (подія B);
- в) хоча б один студент склав іспит (подія C);
- г) не менше трьох студентів склали іспит (подія D);
- д) іспит склав тільки четвертий студент (подія E).

Розв'язання. а) Подія A полягає в тому, що і перший, і другий, і третій, і четвертий студент склали іспит, тобто

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4.$$

б) Аналогічно, подія B полягає в тому, що і перший, і другий, і третій, і четвертий студент не склали іспит:

$$B = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4.$$

- в) Подія C відповідає операції додавання подій A_i , $i = 1, 2, 3, 4$:

$$C = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

г) Подія D полягає в тому, що склали іспит або три студенти (в усіх можливих варіантах) або чотири студенти, тобто

$$D = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \bar{A}_4 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 \cdot A_4 + A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot A_4 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4.$$

д) Подію E слід розуміти так: іспит склав тільки четвертий студент, а значить решта (перший, другий, третій студенти) не склали іспит, тобто

$$E = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot A_4.$$

Приклад 2.2. Над виготовленням деталі послідовно працюють три робітники. Якість деталі при передачі наступному робітникові не перевіряється. Перший робітник допускає брак з ймовірністю 0,1, другий –

0,15, третій – 0,2. . Знайти ймовірність того, що при виготовленні деталі буде допущено брак.

Розв'язання. Подія A полягає в тому, що при виготовленні деталі буде допущено брак, тобто хоча б один робітник допустить брак. Позначимо через A_i , $i=1,2,3$ – « i -тий робітник допускає брак». Це незалежні події з ймовірностями:

$$P(A_1) = 0,1, P(A_2) = 0,15, P(A_3) = 0,2,$$

причому

$$P(\bar{A}_1) = 1 - 0,1 = 0,9, P(\bar{A}_2) = 1 - 0,15 = 0,85, P(\bar{A}_3) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Подія $\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$ – всі три робітники допустили брак є протилежною до події A , тому

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Звідси, за теоремою множення для незалежних подій,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

Підставивши числові значення, дістанемо

$$P(A) = 1 - 0,9 \cdot 0,85 \cdot 0,8 = 1 - 0,612 = 0,388.$$

Приклад 2.3. На полиці бібліотеки випадковим чином розставлено 15 підручників, 5 з яких у твердій палітурці. Бібліотекар бере навмання 3 підручники. Знайти ймовірність того, що принаймні один із взятих підручників буде з твердою палітуркою.

Розв'язання. 1 спосіб. Введемо необхідні позначення. Подія A – «принаймні один із взятих підручників буде з твердою палітуркою». Подія A буде здійснена, якщо настане будь-яка з трьох сумісних подій:

подія B – «один підручник у твердій палітурці»;

подія C – «два підручника у твердій палітурці»;

подія D – «три підручника у твердій палітурці».

Згідно з означенням операції додавання подій, маємо

$$A = B + C + D.$$

Звідси, за теоремою додавання ймовірностей для несумісних подій,

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D).$$

Знайдемо складові розрахункової формули за класичним означенням ймовірності. Знаменник n для всіх ймовірностей однаковий – це число способів, якими можна вибрати 3 підручника із загальної кількості 15:

$$n = C_{15}^3 = \frac{15!}{3! 12!} = 13 \cdot 7 \cdot 5 = 455.$$

Оскільки для події B з трьох вибраних підручників лише один має бути з твердою палітуркою, а інші два – без палітурки, то

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{225}{455} = \frac{45}{91}$$

Аналогічно

$$P(C) = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91},$$

$$P(D) = \frac{C_5^3 \cdot C_{10}^0}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}.$$

Отже,

$$P(A) = \frac{45}{91} + \frac{20}{91} + \frac{2}{91} = \frac{67}{91}.$$

2 спосіб. Протилежною до події A – «принаймні один із взятих підручників з твердою палітуркою» буде подія \bar{A} – «жодний із взятих навмання 3-х підручників не має палітурки».

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}.$$

Оскільки $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, остаточно дістанемо

$$P(A) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}.$$

Приклад 2.4. Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучення при одному пострілі для I стрільця дорівнює 0,7; для II-го – 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі по мішені:

- а) буде хоча б одне влучення;
- б) влучить тільки один стрілець.

Розв'язання. а) Введемо такі позначення: події A_i , $i = 1, 2$ – при одному пострілі по мішені влучить i -тий стрілець; подія A – при одному пострілі по мішені влучить хоча б один стрілець. Події A_1 , A_2 – незалежні, але сумісні. $P(A_1) = 0,8$, $P(A_2) = 0,7$, $A = A_1 + A_2$. Тоді, за теоремою 3,

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Отже, $P(A) = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 0,94$.

Інший спосіб розв'язання цієї задачі полягає у застосуванні формули (2.10) при $n = 2$. Оскільки $P(\bar{A}_1) = 1 - 0,7 = 0,3$, $P(\bar{A}_2) = 1 - 0,8 = 0,2$, то

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 1 - 0,3 \cdot 0,2 = 0,94.$$

б) Тут подія A – «при одному пострілі по мішені влучить тільки один стрілець», причому $A = A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2$, а доданки останньої суми – несумісні події. За теоремами 1, 4 дістанемо

$$P(A) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) = 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,38.$$

Приклад 2.4. В урні знаходяться 4 чорних, 5 білих і 6 синіх куль.

Якою буде ймовірність:

а) витягнути по черзі чорну, білу і синю кулю у вказаному порядку?

б) витягнути ці кулі у будь-якому порядку (подія E)?

Розв'язання. а) Введемо позначення для подій: A – першою витягнули чорну кулю, B – другою витягнули білу кулю, C – третьою витягнули синю кулю. Позначимо через D подію, що полягає в одночасній появі подій A , B , C .

Оскільки події A , B , C – залежні (вибір без повернення), то

$$P(D) = P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

Знайдемо ймовірність кожного множника за класичною формулою:

$P(A) = \frac{4}{15}$ (всього куль 15, з них 4 чорних); $P_A(B) = \frac{5}{14}$ (залишилось 14 куль, з них 5 білих); $P_{AB}(C) = \frac{6}{13}$ (залишилось 13 куль, з них 6 синіх).

Отже, шукана ймовірність $P(D) = \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{6}{13} \approx 0,044$.

б) Розглянемо можливість витягнути ці три кулі у довільному порядку. Опишемо простір елементарних подій. Будемо вважати, що елементарна подія – це набір з трьох довільних куль, таких подій буде $C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$.

Знайдемо число сприятливих подій, їх буде $C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1$, оскільки одну кулю потрібно вибрати з чорних, одну з білих і одну з синіх.

Тому шукана ймовірність $P(E) = \frac{C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1}{C_{15}^3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{455} \approx 0,264$. Зауважимо, що ця ймовірність у 6 разів більша за $P(D)$.

Приклад 2.5. Радіодеталь може належати до однієї з трьох партій з ймовірностями p_1 , p_2 , p_3 , де $p_1 = p_3 = 0,25$, $p_2 = 0,5$. Ймовірність того, що деталь пропрацює без відмов заданий час T для цих партій відповідно дорівнює 0,1; 0,2 і 0,4. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь пропрацює заданий час T .

Розв'язання. Введемо позначення для подій:

подія A – деталь пропрацює заданий час T ,

подія B_i , $i = 1, 2, 3$ – деталь належить до i -тої партії.

Події B_1, B_2, B_3 утворюють повну групу подій. За умовою задачі

$$P(B_1) = 0,25; P(B_2) = 0,5; P(B_3) = 0,25;$$

$$P(A/B_1) = 0,1; P(A/B_2) = 0,2; P(A/B_3) = 0,4.$$

Ймовірність події A знаходимо за формулою (2.12) при $n = 3$:

$$P(A) = 0,25 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,25 \cdot 0,4 = 0,025 + 0,10 + 0,1 = 0,225.$$

Приклад 2.6. Початкова умова така, як у прикладі 2.5. Навмання взята деталь пропрацювала заданий час T . Знайти ймовірність того, що ця деталь з першої партії.

Розв'язання. На відміну від попередньої задачі, тут подія A вже здійснилась. Потрібно переоцінити ймовірність гіпотези B_1 . За формулами Байєса (2.13) при $i=1$ знаходимо шукану ймовірність:

$$P(B_1 / A) = \frac{0,25 \cdot 0,1}{0,225} = \frac{0,025}{0,225} \approx 0,111.$$

Так само, при $i=2,3$ можна переоцінити й інші гіпотези.

Приклад 2.7. Схема ділянки технічної системи має вигляд як на рис.2.1. Вихід з ладу за час T кожного з чотирьох елементів системи – незалежні події, що мають ймовірності 0,3; 0,2; 0,2; 0,1; 0,3 відповідно. Обчислити надійність даної ділянки системи.

Розв'язання. Нехай A_i – «безвідмовна робота протягом часу T i -го елемента» ($i = 1,4$), A – «безвідмовна робота протягом часу T системи».

За умовою

$$q_1 = P(\bar{A}_1) = 0,3; \quad q_2 = P(\bar{A}_2) = 0,2; \quad q_3 = P(\bar{A}_3) = 0,2; \quad q_4 = P(\bar{A}_4) = 0,1.$$

Тоді

$$p_1 = P(A_1) = 1 - 0,3 = 0,7; \quad p_2 = P(A_2) = 1 - 0,2 = 0,8; \quad p_3 = P(A_3) = 1 - 0,2 = 0,8; \\ p_4 = P(A_4) = 1 - 0,1 = 0,9.$$

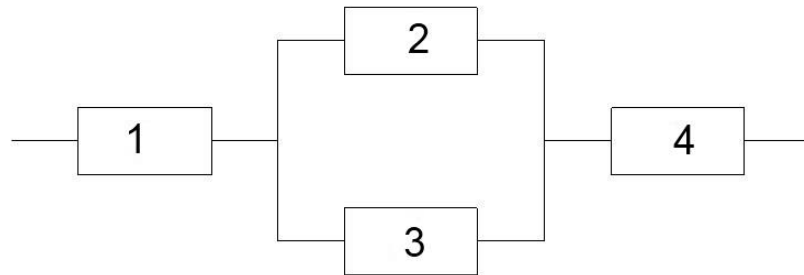


Рис.2.1.

$$p_{23} = 1 - q_2 \cdot q_3 = 1 - 0,2 \cdot 0,2 = 1 - 0,04 = 0,96.$$

Елементи 1, 4 та ділянка 2, 3 з'єднані послідовно, тому надійність системи

$$p = p_1 \cdot p_{23} \cdot p_4 = 0,7 \cdot 0,96 \cdot 0,9 = 0,6048 \approx 0,605.$$

Теоретичний матеріал до завдання №2:

1. Сулима І.М., Яковенко В.М. Вища математика. Теорія ймовірностей. Математична статистика. Навчальний посібник. К.: Вид. Центр НАУ, 2004. – 238 с.
2. Панталієнко Л.А. Методичні вказівки до виконання тестових завдань з дисципліни «Вища математика» за модулем «Теорія ймовірностей, математична статистика та основи кореляційного аналізу». – Видавничий центр НУБІП, 2011. – 71 с.
3. Панталієнко Л.А., Шостак С.В. Методичні вказівки для розв'язання типових задач з дисципліни „Прикладна математика” для студентів інженерних факультетів. К.: Вид. центр НАУ, 2007. – 54 с.
4. Конспект лекцій.

Викладач: доц. Панталієнко Л.А.

Термін виконання: до 25 березня 2020р.

Прошу надсилати виконані завдання за адресою: wnyrk15@gmail.com