Агроінженерія 1-курс, 1-група «Вища математика»

Будівництво та цивільна інженерія 1-курс «Вища математика»

Виконати запропоновані завдання до 17 березня та надіслати на перевірку наелектрону пошту «de-de@ukr.net»

3.6. Схема дослідження функції та побудова її графіка

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти (якщо можна) точки перетину графіка з координатними осями;
3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;
4) знайти точки розриву та дослідити їх;
5) знайти інтервали монотонності, точки екстремумів та значення функції в цих точках;
6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;
7) знайти асимптоти кривої;
8) побудувати графік функції.

Зразки розв'язування задач

Дослідити функції та побудувати їхні графіки.

1. $y = x^3 - 3x^2$.

1) Функція є многочленом, область існування якого – вся множина дійсних чисел. $D(y): x \in (-\infty;+\infty)$.

2) Знайдемо точки перетину графіка с віссю Ox, для цього покладемо $y = 0$: $x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0$, звідки $x_1 = 0,\ x_2 = 3$. Отже, в точках $O(0;0)$ та $A(3;0)$ графік перетинає вісь Ox.

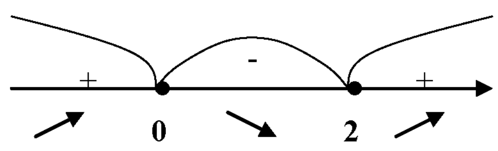
Точки перетину з віссю Oy: покладемо $x = 0$, тоді знайдемо $y = 0$. Тобто, графік перетинає вісь Oy у точці $O(0;0)$.

3) Функція не періодична, вона не є парною, не є непарною $(y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x))$.

4) Функція є неперервною на всій числовій прямій. Тобто точок розриву не має.

5) Досліджуємо функцію на монотонність та екстремум. Обчислимо $y' = 3x^2 - 6x$. Знайдемо критичні точки з рівняння $y' = 0$: $3x^2 - 6x = 0$

Знак y'



або $3x(x-2)=0$. Отримаємо, що $x_1=0$ та $x_2=2$.

Функція зростає на інтервалах $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; функція спадає на інтервалі $(0;2)$.

Згідно з правилом знаходження екстремуму, $x=0$ - точка максимуму, $x=2$ - точка мінімуму.

Обчислимо $y_{max}=y(0)=0$, $y_{min}=y(2)=2^3-3\cdot 2^2=-4$.

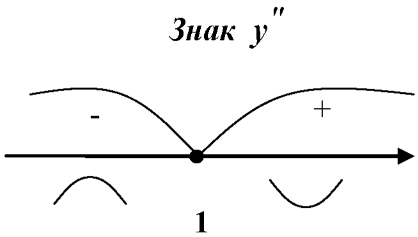
Таким чином, екстремальні точки: $O(0;0)$ та $B(2;-4)$.

6) Знайдемо інтервали вгнутості та опуклості, точки перегину.

$y''=\left(3x^2-6x\right)'=6x-6$.

Розв'яжемо рівняння $y''=0$: $6x-6=0 \Rightarrow x=1$ - критична точка другого роду.

Функція вгнута на інтервалі $(1;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;1)$. Значення $x=1$ є абсцисою точки перегину. Знайдемо $y(1)=1-3=-2$, тобто точка $C(1;-2)$ - точка перегину графіка.



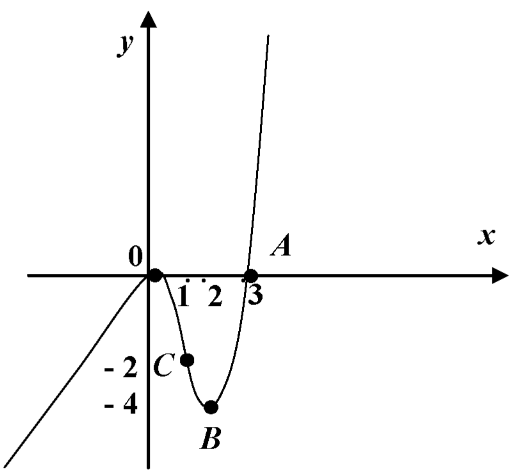
7) Знайдемо асимптоти заданої кривої.

Вертикальних асимптот немає. З'ясуємо, чи є похилі асимптоти.

Обчислимо $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3x^2-6x\right)=+\infty$.

Отже, наша крива не має і похилих асимптот.

8) Побудуємо графік функції.



2. $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$.

1) $D(y): x\neq 0$, тобто $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

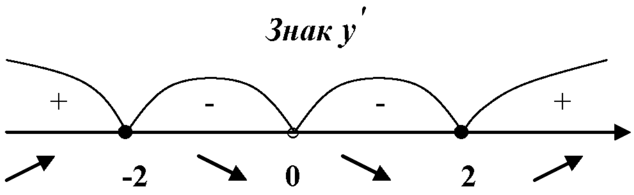
2) Точки перетину графіка з координатними осями. При $y=0: \frac{x}{2}+\frac{2}{x}=0 \Rightarrow$

$\frac{x^2+4}{2x}=0$, звідки $x^2+4\neq 0$, тобто з віссю Ox графік не перетинається. Зважаючи на те, що $x\neq 0$, робимо висновок, що графік не перетинає вісь Oy.

3) Функція не періодична, вона непарна бо $y(-x)=-\frac{x}{2}-\frac{2}{x}=-\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=$ $=-y(x)$. Тому її графік є симетричним відносно початку координат.

4) В точці $x=0$ функція має розрив ІІ-го роду, тому що $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\frac{x^2+4}{2x}=\pm\infty$. Отже, пряма $x=0$ - вертикальна асимптота.

5) Знайдемо $y'=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}$. Розв'яжемо рівняння $y'=0:$ $\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}=0$, $x^2=4$, звідки $x_1=2,\ x_2=-2$ - критичні точки функції. Похідна не існує при $x=0\notin D(y)$.



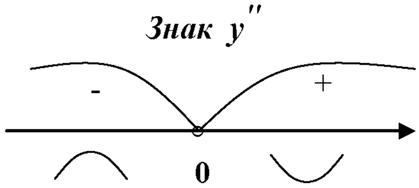
Функція зростає на інтервалах $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$; функція спадає на інтервалі $(-2;2)$.

$x=-2$ - точка максимуму функції, а $x=2$ - точка мінімуму.

Обчислимо $y_{max}=y(-2)=-1-1=-2$, $y_{min}=y(2)=1+1=2$.

Отже, $A_1(-2;-2)$, $A_2(2;2)$ - екстремальні точки.

6) Знайдемо $y''=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}\right)'=\frac{4}{x^3}$.



Зважаючи на те, що $y''=\frac{4}{x^3}\neq 0$, робимо висновок, що точок перегину графік функції не має. Функція угнута на інтервалі $(0;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;0)$.

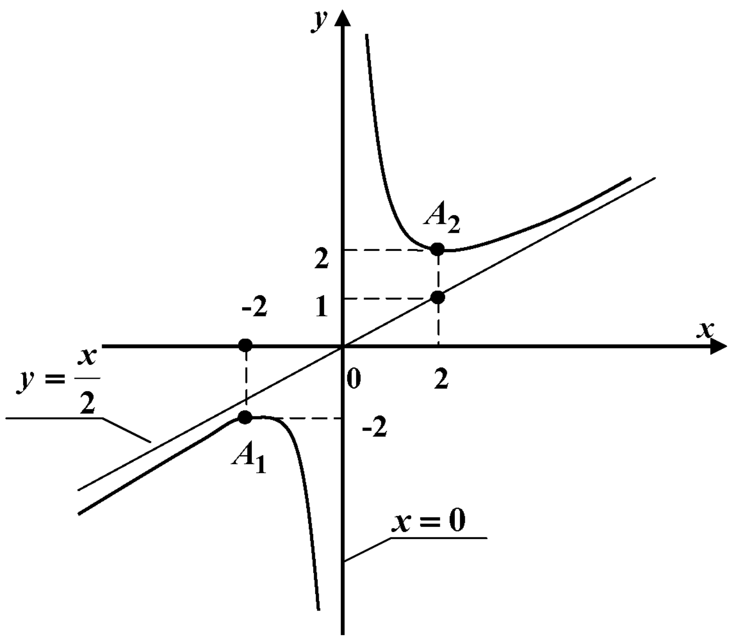
7) Вертикальну асимптоту ми вже знайшли: $x=0$. Знайдемо похилу асимптоту.

Обчислимо $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$,

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}=0.$$

Тоді пряма $y=\frac{x}{2}$ - похила асимптота.

8) Побудуємо графік.



3. $y=ln(x^2+4)$.

1) $D(y): x\in(-\infty;+\infty)$.

2) Розглянемо перетин графіка з координатними осями.

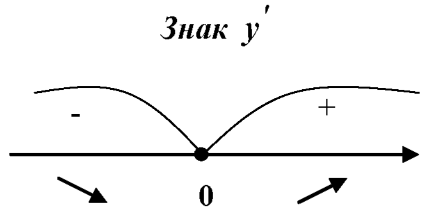
З віссю $0y: x=0 \quad\Rightarrow\quad y=ln\,4\approx 1{,}4$, тобто у точці $A(0;ln\,4)$ графік перетинає вісь $0y$. З віссю $0x: y=0 \quad\Rightarrow\quad ln(x^2+4)=0$, звідки $x^2+4=1$ або $x^2=-3$. Зрозуміло, що остання рівність розв'язків не має. Отже, графік не перетинає вісь $0x$.

3) Функція не періодична, але є парною, бо $y(-x)=ln(x^2+4)=y(x)$, тому її графік є симетричним відносно осі $0y$.

4) Точок розриву функція не має.

5) $y'=\frac{2x}{x^2+4}$. Знайдемо критичні точки: $\frac{2x}{x^2+4}=0 \quad\Rightarrow\quad 2x=0 \quad\Rightarrow\quad x=0$.

Функція зростає на інтервалі $(0;+\infty)$ та спадає на інтервалі $(-\infty;0)$.



Точка $x=0$ є точкою мінімуму функції.

Обчислимо $y_{min}=y(0)=ln\,4\approx 1{,}4$.

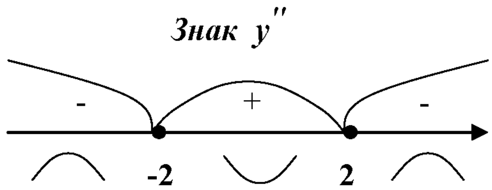
Тобто точка екстремуму нашої функції $A(0;1{,}4)$.

6) Знайдемо $y''=\left(\dfrac{2x}{x^2+4}\right)'=\dfrac{2(x^2+4)-2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$.

Дослідимо функцію на угнутість та опуклість.

$y''=0:\ \dfrac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}=0\Rightarrow 8-2x^2=0,\ x^2=4,$

звідки $x_1=-2, x_2=2$ - критичні точки.



Функція угнута на інтервалі $(-2;2)$, опукла на інтервалах $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$. У точках $x_1=-2$, $x_2=2$ функція має перегин графіка.

Знайдемо $y(-2)=ln8\approx 2{,}1$, $y(2)=ln8\approx 2{,}1$.

Отже, $C_1(-2;ln8)$, $C_2(2;ln8)$ - точки перегину.

7) Вертикальних асимптот графік не має.

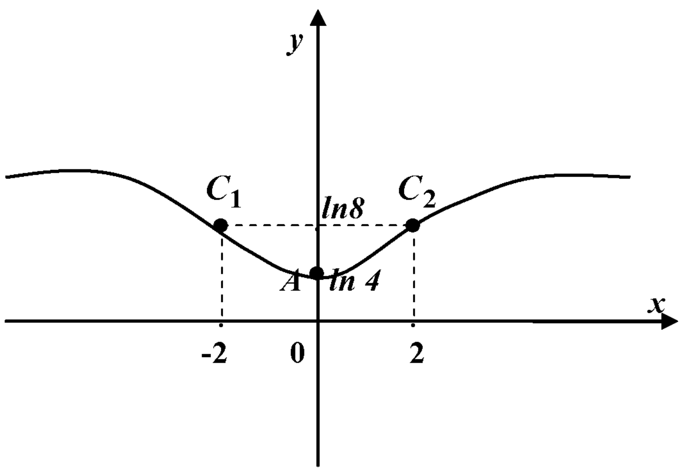
Для похилих асимптот знайдемо k і b.

Будемо мати: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ln(x^2+4)}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x^2+4}=0,$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}ln(x^2+4)=+\infty.$$

Отже, похилих асимптот не буде.

8) Будуємо графік.



4. $y = x \cdot e^{-x}$.

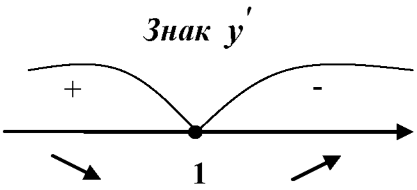
1) $D(y): x \in (-\infty;+\infty)$.

2) Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Знайшли, що графік перетинає вісь $0y$ у точці $O(0;0)$. Якщо $y = 0$, то $x \cdot e^{-x} = 0$, звідки $e^{-x} \neq 0$, тому $x = 0$. Знову отримали ту саму точку $O(0;0)$, в якій графік перетинає вісь $0x$. З’ясовано , що тільки у початку координат графік перетинає обидві координатні осі.

3) Функція не періодична, не є парною або непарною $(y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x))$.

4) Функція неперервна в області визначення, тому точок розриву не має.

5) Обчислимо $y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$.



З умови $y' = 0$ знайдемо критичні точки.

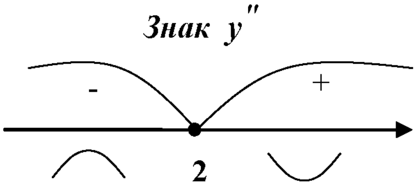
Будемо мати: $e^{-x}(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-x} \neq 0$, тому $1 - x = 0$, звідки $x = 1$.

Функція зростає на інтервалі $(-\infty;1)$ та спадає на інтервалі $(1;+\infty)$. Зрозуміло, що $x = 1$ - точка максимуму функції. $y_{max} = y(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}4$.

Точка $B\left(1;\frac{1}{e}\right)$ - екстремальна точка функції.

6) Знайдемо $y'' = \left(e^{-x} - xe^{-x}\right)' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$.

Тоді $y'' = 0 : e^{-x}(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-x} \neq 0$, тому $x - 2 = 0$, звідки $x = 2$ - критична точка функції.



Функція вгнута на інтервалі $(2;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;2)$.

Отже, у точці $x = 2$ функція має перетин.

$y(2) = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2} \approx 0{,}3$.

Тому $A\left(2;\frac{2}{e^2}\right)$ - точка перетину графіка функції.

7) Вертикальної асимптоти графік функції не має.

Для похилих асимптот знайдемо k і b.

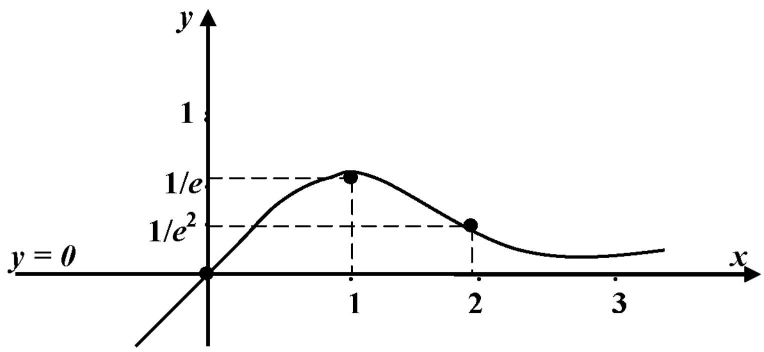
Отримаємо: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$,

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0.$$

Тому $y=0$ - пряма, яка співпадає з віссю $0x$, буде горизонтальною асимптотою.

У випадку, коли $x\to-\infty$: $k=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x}}=+\infty$, тому ніякої асимптоти не буде.

8) Будуємо графік.



5. $y=\frac{x^3}{x^2-1}$.

1) Оскільки задана функція дробово-раціональна, то вона не існує в тих точках, де знаменник дорівнює нулю: $x^2-1=0$, звідки $x_{1,2}=\pm1$.

Отже, $D(y): x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2) Нехай $y=0$, тоді $\frac{x^3}{x^2-1}=0$, звідки $x=0$.

Нехай $x=0$, тоді $y=0$. Отже, графік перетинає обидві координатні осі в точці $O(0;0)$, тобто проходить через початок координат.

3) Функція не періодична, вона непарна, тому що $y(-x)=\frac{-x^3}{(-x)^2-1}=$

$$=-\frac{x^3}{x^2-1}=-y(x).$$

Її графік є симетричним відносно початку координат.

4) Маємо дві точки розриву II-го роду: $x_1=-1$ та $x_2=-1$, тому що

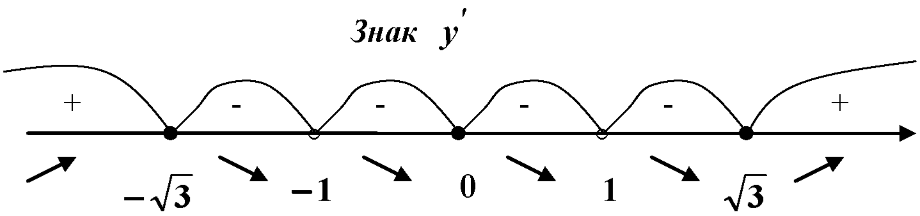
$$\lim_{x\to-1\pm0}\frac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty \text{ та } \lim_{x\to1\pm0}\frac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty .$$

Отже, прямі $x=-1$ та $x=1$ є вертикальними асимптотами.

5) Знайдемо $y' = \dfrac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$.

Розв'яжемо рівняння $y'=0$: $\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=0$, звідки $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$ - критичні точки функції.

Помітимо, що похідна не існує при $x=\pm 1$, але вони обидві не входять до області визначенності функції.



Функція зростає на інтервалах $(-\infty;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};+\infty)$, функція спадає на інтервалах $(-\sqrt{3};-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;\sqrt{3})$.

Похідна змінює знак при переході через точки $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$. А саме: $x_2=\sqrt{3}$ є точкою мінімуму функції, а $x_3=-\sqrt{3}$ - точкою максимуму.

$y_{min}=y(\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3^3}}{3-1}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $y_{max}=y(-\sqrt{3})=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Отже, екстремальні точки $A_1\left(\sqrt{3};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_2\left(-\sqrt{3};-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

6) Обчислимо

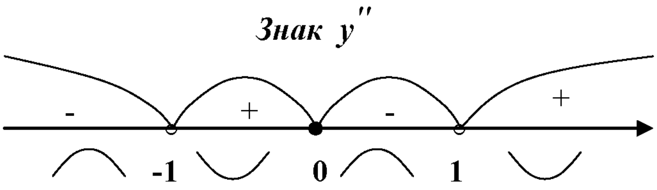
$$y''=\left(\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}\right)'=\frac{(4x^3-6x)\cdot(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2x(2x^2-3)\cdot(x^2-1)^2-4x^3\cdot(x^2-3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2x\cdot(x^2-1)\cdot\left[(2x^2-3)\cdot(x^2-1)-2x^2\cdot(x^2-3)\right]}{(x^2-1)^4}=\frac{2x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Розв'яжемо рівняння $y''=0:\ \dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=0$, звідки $2x\left(x^2+3\right)=0$, а саме $x=0$ - це критична точка функції.

Помічаємо, що y'' не існує при $x=\pm1\notin D(y)$.



Функція вгнута на інтервалах $(-1;0)\cup(1;+\infty)$, функція опукла на інтервалах $(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

При переході через $x=0$ y'' змінює знак.

$y(0)=\dfrac{0}{0-1}=0$. Точка $O(0;0)$ є точкою перегину.

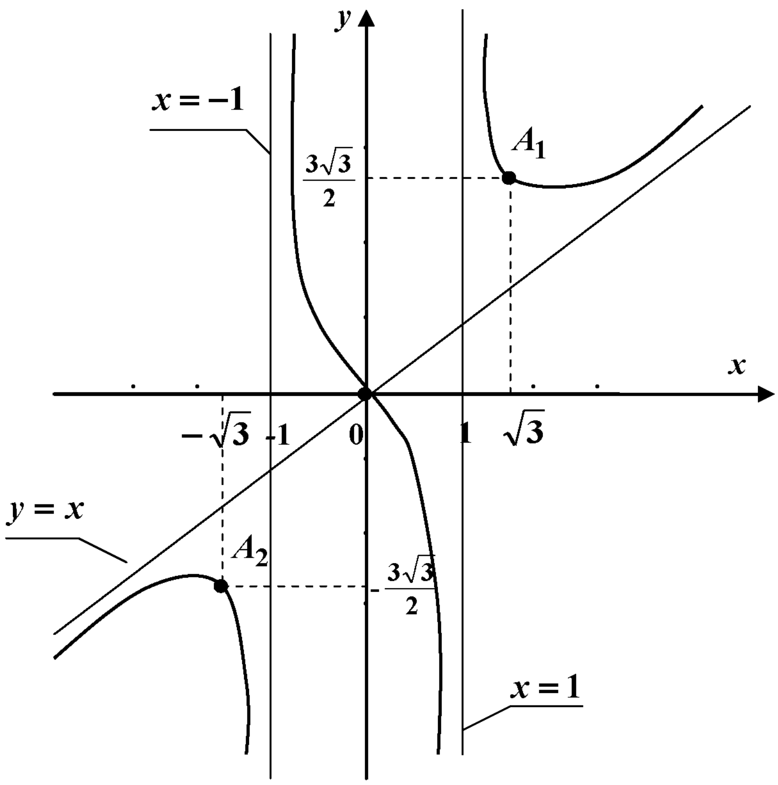
7) Вертикальні асимптоти: $x=\pm1$. Для похилих асимптот знайдемо k і b.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\left(x^2-1\right)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0.$$

Отже, рівняння похилої асимптоти: $y=x$.

8) Побудуємо графік функції.



Завдання для самостійної роботи

Дослідити функції та побудувати їхні графіки:

1. $y = 2x^4 - x^2 + 1$;
2. $y = x^2\sqrt{x-3}$;
3. $y = x^2 - 2\ln x$;
4. $y = \dfrac{e^x}{x}$;
5. $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001.
2. Овчинников П.П. та інші. Вища математика: Підручник. У 2 ч. – К.: Техніка, 2004.
3. Шипачёв В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1998.
4. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. У 3-х кн. – К.: Либідь, 1994.
5. Вища математика: Збірник задач: Навчальний посібник / За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004.
6. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов.- М.: Высшая школа, 2002.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2000.