„ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ”

Лекція

Тема: Невизначений інтеграл.

Означення. Функція F(x) називається первісною функції f(x) на відрізку $[a,b]$, якщо в усіх точках цього відрізка виконується рівність F′(x) = f(x).
Якщо F(x) будь-яка первісна f(x), то будь-яка інша первісна для f(x) має вигляд F(x) + C, де C – *const*.
Означення. Сукупність усіх первісних функцій f(x) називається невизначеним інтегралом функції f(x) і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де F(x) – деяка первісна функції f(x), а C – довільна стала.
Символ $\int$ називається знаком інтеграла, f(x) – підінтегральна функція, f(x)dx – підінтегральний вираз, x – змінна інтегрування.
Операцію знаходження невизначеного інтеграла називають інтегруванням.

Властивості невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

3. $\int dF(x) = F(x) + C$;

4. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx, \quad C = const.$

5. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C \quad i \quad u = \varphi(x)$, тоді $\int f(u)du = F(u) + C.$

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \; a$, b є R, $a \neq 0$.

ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1),$
2. $\int dx = x + C$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$
5. $\int e^x dx = e^x + C.$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$
10. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C.$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C.$
12. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C.$
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C.$

Основними методами інтегрування є

безпосереднє інтегрування;

заміна змінної або підстановка;

інтегрування частинами.

Метод безпосереднього інтегрування ґрунтується на загальних властивостях невизначеного інтеграла, таблиці інтегралів і тотожних перетвореннях підінтегральної функції.

Метод безпосереднього інтегрування.

Приклад. Знайти інтеграл:

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}+4\sqrt{x}+3x^3+5x-7\right)dx.$$

Розв'язання:

I. Спочатку використовуємо властивості інтеграла:

1. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій

$$\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx.$$

!!! (скільки під знаком інтеграла доданків, стільки інтегралів і буде)

2. Сталий множник $k = const$ можна виносити за знак інтеграла

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$$

I. $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}+4\sqrt{x}+3x^3+5x-7\right)dx=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}+4\int\sqrt{x}dx+3\int x^3dx+5\int xdx-7\int dx=$

II. В таблиці інтегралів - інтеграла від кореня немає, тому:

$$\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}\quad !!!!!!!!!!$$

В таблиці інтегралів є первісна від степеневої функції $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$, яка стоїть в чисельнику, тому:

$$\frac{4}{x^n}=4x^{-n}\quad !!!!!!!!!!$$

II. $=\int x^{-\frac{5}{3}}dx+4\int x^{\frac{1}{2}}dx+3\int x^3dx+5\int xdx-7\int dx=$

III. Знаходимо первісні, використовуючи таблицю інтегралів. **(Сталу *C* не треба додавати після кожного доданку, додаємо один раз в кінці.)**

III. $$= \frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1} + 4\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 3\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1} + 5\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} - 7x + C =$$

$$= \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + 4\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3\cdot\frac{x^4}{4} + 5\cdot\frac{x^2}{2} - 7x + C =$$

$$= -\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + 4\cdot\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 3\cdot\frac{x^4}{4} + 5\frac{x^2}{2} - 7x + C$$

Приклад 2. Знайти інтеграл: $\int \frac{2\sqrt{x} - 3x^2}{5x\sqrt{x}}dx$.

Використовуємо вище розглянутий алгоритм.

$$\int \frac{2\sqrt{x} - 3x^2}{5x\sqrt{x}}dx = \int \frac{2x^{\frac{1}{2}} - 3x^2}{5x^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{2}{5}\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}dx - \frac{3}{5}\int \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}dx =$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x} - \frac{3}{5}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{3}{5}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{2}{5}x\sqrt{x} + C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл: $\int (3 - x^2)^3 dx$.

Використовуємо вище розглянутий алгоритм.

$$\int (3 - x^2)^3 dx = \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6)dx = 27\int dx - 27\int x^2 dx +$$

$$+ 9\int x^4 dx - \int x^6 dx = 27x - 27\cdot\frac{x^3}{3} + 9\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + C =$$

$$= 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C.$$

Метод заміни змінної або підстановки ґрунтується на введенні під знак інтеграла такої змінної, після підстановки якої та заміни диференціала заданої змінної на диференціал нової змінної, одержимо табличний інтеграл.

Приклад 4. Знайти інтеграл: $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \left|\begin{array}{c} \sqrt[3]{x}=t \\ x=t^3 \\ dx=3t^2dt \end{array}\right| = 3\int \frac{t^2\sin t}{t^2}dt = 3\int \sin t dt = -3\cos t + C =$$

$$= -3\cos\sqrt[3]{x} + C..$$

Приклад 5. Знайти інтеграл: $\int \sin(5x+7)dx$.

$$\int \sin(5x+7)dx = \left|\begin{array}{c} 5x+7=u \\ 5dx=du \\ dx=\frac{1}{5}du \end{array}\right| = \frac{1}{5}\int \sin u du = -\frac{1}{5}\cos u + C =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos(5x+7) + C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл: $\int \frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^{16}}}$.

$$\int \frac{x^7dx}{\sqrt{1-x^{16}}} = \int \frac{x^7dx}{\sqrt{1-\left(x^8\right)^2}} = \left|\begin{array}{c} x^8=u \\ 8x^7dx=du \\ x^7dx=\frac{1}{8}du \end{array}\right| = \frac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= \frac{1}{8}\arcsin u + C = \frac{1}{8}\arcsin x^8 + C.$$

<u>Приклад 7.</u> Знайти інтеграл: $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$.

$$\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{c} 2+\sqrt{x}=u \\ x=(u-2)^2 \\ dx=2(u-2)du \end{array} \right| = 2\int \frac{u-2}{u}du = 2\int \frac{u}{u}du - 2\cdot 2\int \frac{du}{u} =$$

$$= 2u - 4\ln|u| + C = 2\left(2+\sqrt{x}\right) - 4\ln\left|2+\sqrt{x}\right| + C.$$

Частинним випадком методу заміни змінної є метод підведення функції під знак диференціала, який ґрунтується на наступній властивості невизначеного інтеграла:

якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$, тоді $\int f(u)du = F(u)+C$,

де u = φ(x) – будь-яка диференційована функція.

<u>Приклад 8.</u> Знайти інтеграл: $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} = \left| d\left(\sqrt{x}\right) = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \right| = 2\int e^{\sqrt{x}} d\left(\sqrt{x}\right) = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

<u>Приклад 9.</u> Знайти інтеграл: $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \left| d(\ln x) = \frac{dx}{x} \right| = \int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

Агроінженерія 1-курс, 1-група «Вища математика»

Будівництво та цивільна інженерія 1-курс «Вища математика»

Енергетики 1-курс, «Вища математика»

Виконати запропоновані завдання до 24 березня та надіслати на перевірку наелектрону пошту «de-de@ukr.net»

Похідна та її застосування

Варіант 1

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$a) y=(3x-4\sqrt[3]{x}+2)^4;\quad b) y=\dfrac{4x+7\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+9x^2}};\ c) y=\cos 3x\cdot e^{\sin x};\quad d) y=\ln \mathrm{acrtg}2x.$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3+y^3=3xy$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму $y=x^3+\dfrac{5}{2}x^2-2x$.

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=2x^4-3x^2+x$.

Варіант 2

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$a) y=(3x^3-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2;\ b) y=\dfrac{\arcsin 3x}{1-8x^2};\quad c) y=2^{3x}\cdot\mathrm{tg}2x;\qquad d) y=\cos\ln 5x.$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-x^2y+y^3=3$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=x^5-10x^2+3x$.

Варіант 3

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$a) y=(x^2-\dfrac{1}{x^3}+5\sqrt{x})^4;\quad b) y=\dfrac{\arcsin 7x}{x^4+e^x};\quad c) y=e^{\mathrm{tg}x}\cdot\ln 2x;\quad d) y=\cos\sqrt{x^2+3}.$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $3^x+3^y=3^{x+y}$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{4}x^2-5x+\frac{25}{12}.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

Варіант 4

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(4x^2-\frac{3}{\sqrt{x}}+4)^3;\quad b) y=\frac{\sin 2x}{\cos 5x};\quad c) y=2^{8x}\cdot tg3x;\quad d) y=\arcsin\ln 4x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-y=\mathrm{tg}y$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=2x^3-\frac{1}{2}x^2-x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\frac{x^3}{12+x^2}$.

Варіант 5

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5;\quad b) y=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+tgx};\quad c) y=e^{\mathrm{ctg}x}\cdot\sin 4x;\quad d) y=\sin\ln 5x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $\ln x^3-xy^2=7$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+5.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\sqrt[3]{x+4}$.

Варіант 6

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(6x^2-\frac{2}{x^4}+5)^2;\quad b) y=\frac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}};\quad c) y=3^{\mathrm{tg}x}\cdot e^{\sin x};\quad d) y=\ln\sin 6x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $xy-y^2=\mathrm{tg}x$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+1.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

Варіант 7

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$a) y = (x^3 - 4\sqrt[4]{x^3} + 2)^3;\quad b) y = \dfrac{\operatorname{arctg} 7x}{2 - 9x^2};\quad c) y = e^{\operatorname{ctg} x} \cdot \cos 6x;\quad d) y = \sin \ln 2x.$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3 + y^3 = 3xy$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму $y = x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - 2x$.

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y = 2x^4 - 3x^2 + x$.

Варіант 8

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$a) y = (x^2 - 2\sqrt[5]{x} + 4)^4;\quad b) y = \dfrac{x^3 + e^x}{\sqrt{4 - 9x^5}};\quad c) y = e^{\operatorname{tg} 2x} \cdot \ln x;\quad d) y = \ln \cos 7x.$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3 - x^2 y + y^3 = 3$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y = x^5 - 10x^2 + 3x$.

Варіант 9

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$a) y = (7x^2 - \dfrac{2}{x^3} + 5)^3;\quad b) y = \dfrac{\cos x}{\sqrt{3x^3 + 2}};\quad c) y = 2^{\operatorname{tg} x} \cdot e^{\cos x};\quad d) y = \ln \sin 9x.$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $3^x + 3^y = 3^{x+y}$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{3}{4}x^2 - 5x + \frac{25}{12}.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

Варіант 10

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^4-4\sqrt[4]{x^3}+3)^4, \quad b) y=\frac{arctg 8x}{2-9x^3}, \quad c) y=e^{ctgx}\cdot \sin 6x, \quad d) y=\sin \ln 9x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-y=\mathrm{tg}y$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=2x^3-\frac{1}{2}x^2-x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\dfrac{x^3}{12+x^2}$.

Варіант 11

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^7-4\sqrt[4]{x^3}+6)^2, \quad b) y=\frac{\mathrm{arctg} 5x}{2-3x^3}, \quad c) y=e^{\mathrm{ctg}x}\cdot \sin 5x, \quad d) y=\sin \ln 2x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $\ln x^3-xy^2=7$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+5.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\sqrt[3]{x+4}$.

Варіант 12

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^2-2\sqrt[5]{x^3}+7)^6, \quad b) y=\frac{x^3+e^{2x}}{\sqrt{2-9x^2}}, \quad c) y=e^{\mathrm{tg}2x}\cdot \ln 6x, \quad d) y=\ln\cos 2x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $xy-y^2=\mathrm{tg}x$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+1.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

Варіант 13

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(3x^7-\frac{3}{x^3}-6)^2, \quad b) y=\frac{\cos 2x}{\sin 3x}, \quad c) y=e^{x^2}\cdot \mathrm{tg}3x, \quad d) y=\arccos \ln 7x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3+y^3=3xy$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму $y=x^3+\frac{5}{2}x^2-2x$.

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=2x^4-3x^2+x$.

Варіант 14

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^4-2\sqrt[3]{x}+8)^7, \quad b) y=\frac{\sqrt{9-6x^3}}{e^x+\mathrm{tg}x}, \; c) y=2^{\mathrm{ctg}x}\cdot\cos 2x, \; d) y=\cos\sqrt{\ln 9x}.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-x^2y+y^3=3$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=x^5-10x^2+3x$.

Варіант 15

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(5x^2-3\sqrt[5]{x^2}-2)^3, \; b) y=\frac{2^x+\mathrm{ctg}x}{\sqrt{4+2x^3}}, \; c) y=e^{\sin x}\cos 3x, \quad d) y=\mathrm{arctg}\ln 7x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $3^x+3^y=3^{x+y}$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{4}x^2-5x+\frac{25}{12}.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\frac{1}{1-x^2}$.

Варіант 16

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(3x-4\sqrt[3]{x}+2)^4; \quad b) y=\frac{4x+7\text{tg}x}{\sqrt{1+9x^2}}; \; c) y=\cos 3x\cdot e^{\sin x}; \quad d) y=\ln \text{acrtg} 2x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3+y^3=3xy$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму $y=x^3+\frac{5}{2}x^2-2x$.

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=2x^4-3x^2+x$.

Варіант 17

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(3x^3-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2; \; b) y=\frac{\arcsin 3x}{1-8x^2}; \quad c) y=2^{3x}\cdot \text{tg}2x; \qquad d) y=\cos\ln 5x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-x^2y+y^3=3$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=x^5-10x^2+3x$.

Варіант 18

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^2-\frac{1}{x^3}+5\sqrt{x})^4; \quad b) y=\frac{\arcsin 7x}{x^4+e^x}; \quad c) y=e^{\text{tg}x}\cdot \ln 2x; \quad d) y=\cos\sqrt{x^2+3}.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $3^x+3^y=3^{x+y}$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{4}x^2-5x+\frac{25}{12}.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\frac{1}{1-x^2}$.

Варіант 19

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(4x^2-\frac{3}{\sqrt{x}}+4)^3; \quad b) y=\frac{\sin 2x}{\cos 5x}; \quad c) y=2^{8x}\cdot tg3x; \quad d) y=\arcsin\ln 4x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-y=\mathrm{tg}y$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=2x^3-\frac{1}{2}x^2-x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\dfrac{x^3}{12+x^2}$.

Варіант 20

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5; \quad b) y=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+tgx}; \quad c) y=e^{\mathrm{ctg}x}\cdot\sin 4x; \quad d) y=\sin\ln 5x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $\ln x^3-xy^2=7$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+5.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\sqrt[3]{x+4}$.

Варіант 21

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(6x^2-\frac{2}{x^4}+5)^2; \quad b) y=\frac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}; \quad c) y=3^{\mathrm{tg}x}\cdot e^{\sin x}; \quad d) y=\ln\sin 6x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $xy-y^2=\mathrm{tg}x$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+1.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

Варіант 22

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$a) y=(x^3-4\sqrt[4]{x^3}+2)^3$; $b) y=\dfrac{\operatorname{arctg}7x}{2-9x^2}$; $c) y=e^{\operatorname{ctg}x}\cdot\cos 6x$; $d) y=\sin\ln 2x.$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3+y^3=3xy$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму $y=x^3+\dfrac{5}{2}x^2-2x$.

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=2x^4-3x^2+x$.

Варіант 23

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$a) y=(x^2-2\sqrt[5]{x}+4)^4$; $b) y=\dfrac{x^3+e^x}{\sqrt{4-9x^5}}$; $c) y=e^{\operatorname{tg}2x}\cdot\ln x$; $d) y=\ln\cos 7x.$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-x^2y+y^3=3$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=x^5-10x^2+3x$.

Варіант 24

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$a) y=(7x^2-\dfrac{2}{x^3}+5)^3$; $b) y=\dfrac{\cos x}{\sqrt{3x^3+2}}$; $c) y=2^{\operatorname{tg}x}\cdot e^{\cos x}$; $d) y=\ln\sin 9x.$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $3^x+3^y=3^{x+y}$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{4}x^2-5x+\frac{25}{12}.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

Варіант 25

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^4-4\sqrt[4]{x^3}+3)^4,\quad b) y=\frac{arctg8x}{2-9x^3},\quad c) y=e^{ctgx}\cdot\sin 6x,\quad d) y=\sin\ln 9x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-y=\mathrm{tg}y$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=2x^3-\frac{1}{2}x^2-x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\dfrac{x^3}{12+x^2}$.

Варіант 26

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^7-4\sqrt[4]{x^3}+6)^2,\quad b) y=\frac{\mathrm{arctg}5x}{2-3x^3},\quad c) y=e^{\mathrm{ctg}x}\cdot\sin 5x,\quad d) y=\sin\ln 2x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $\ln x^3-xy^2=7$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+5.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\sqrt[3]{x+4}$.

Варіант 27

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^2-2\sqrt[5]{x^3}+7)^6,\quad b) y=\frac{x^3+e^{2x}}{\sqrt{2-9x^2}},\quad c) y=e^{\mathrm{tg}2x}\cdot\ln 6x,\quad d) y=\ln\cos 2x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $xy-y^2=\mathrm{tg}x$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+1.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

Варіант 28

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(3x^7-\frac{3}{x^3}-6)^2, \quad b) y=\frac{\cos 2x}{\sin 3x}, \quad c) y=e^{x^2}\cdot \mathrm{tg} 3x, \quad d) y=\arccos \ln 7x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3+y^3=3xy$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму $y=x^3+\frac{5}{2}x^2-2x$.

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=2x^4-3x^2+x$.

Варіант 29

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^4-2\sqrt[3]{x}+8)^7, \quad b) y=\frac{\sqrt{9-6x^3}}{e^x+\mathrm{tg} x}, \quad c) y=2^{\mathrm{ctg} x}\cdot \cos 2x, \quad d) y=\cos\sqrt{\ln 9x}.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-x^2y+y^3=3$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=x^5-10x^2+3x$.

Варіант 30

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(5x^2-3\sqrt[5]{x^2}-2)^3, \quad b) y=\frac{2^x+\mathrm{ctg} x}{\sqrt{4+2x^3}}, \quad c) y=e^{\sin x}\cos 3x, \quad d) y=\mathrm{arctg} \ln 7x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $3^x+3^y=3^{x+y}$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{4}x^2-5x+\frac{25}{12}.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=x^4+x^3+x$.

3.6. Схема дослідження функції та побудова її графіка

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти (якщо можна) точки перетину графіка з координатними осями;
3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;
4) знайти точки розриву та дослідити їх;
5) знайти інтервали монотонності, точки екстремумів та значення функції в цих точках;
6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;
7) знайти асимптоти кривої;
8) побудувати графік функції.

Зразки розв'язування задач

Дослідити функції та побудувати їхні графіки.

1. $y = x^3 - 3x^2$.

1) Функція є многочленом, область існування якого – вся множина дійсних чисел. $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

2) Знайдемо точки перетину графіка с віссю Ox, для цього покладемо $y = 0$: $x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0$, звідки $x_1 = 0,\ x_2 = 3$. Отже, в точках $O(0;0)$ та $A(3;0)$ графік перетинає вісь Ox.

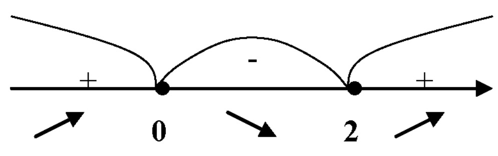
Точки перетину з віссю Oy: покладемо $x = 0$, тоді знайдемо $y = 0$. Тобто, графік перетинає вісь Oy у точці $O(0;0)$.

3) Функція не періодична, вона не є парною, не є непарною $(y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x))$.

4) Функція є неперервною на всій числовій прямій. Тобто точок розриву не має.

5) Досліджуємо функцію на монотонність та екстремум. Обчислимо $y' = 3x^2 - 6x$. Знайдемо критичні точки з рівняння $y' = 0$: $3x^2 - 6x = 0$

Знак y'



або $3x(x-2)=0$. Отримаємо, що $x_1=0$ та $x_2=2$.

Функція зростає на інтервалах $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; функція спадає на інтервалі $(0;2)$.

Згідно з правилом знаходження екстремуму, $x=0$ - точка максимуму, $x=2$ - точка мінімуму.

Обчислимо $y_{max}=y(0)=0$, $y_{min}=y(2)=2^3-3\cdot 2^2=-4$.

Таким чином, екстремальні точки: $O(0;0)$ та $B(2;-4)$.

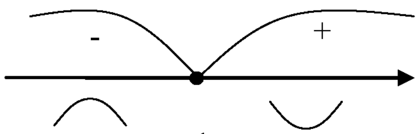
6) Знайдемо інтервали вгнутості та опуклості, точки перегину.

$y''=\left(3x^2-6x\right)'=6x-6$.

Розв'яжемо рівняння $y''=0$: $6x-6=0 \Rightarrow x=1$ - критична точка другого роду.

Функція вгнута на інтервалі $(1;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;1)$. Значення $x=1$ є абсцисою точки перегину. Знайдемо $y(1)=1-3=-2$, тобто точка $C(1;-2)$ - точка перегину графіка.

Знак y''



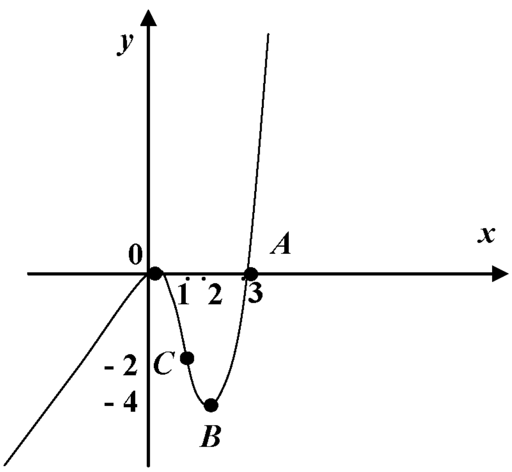
7) Знайдемо асимптоти заданої кривої.

Вертикальних асимптот немає. З'ясуємо, чи є похилі асимптоти.

Обчислимо $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3x^2-6x\right)=+\infty$.

Отже, наша крива не має і похилих асимптот.

8) Побудуємо графік функції.



2. $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$.

1) $D(y): x\neq 0$, тобто $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2) Точки перетину графіка з координатними осями. При $y=0: \frac{x}{2}+\frac{2}{x}=0 \Rightarrow$

$\frac{x^2+4}{2x}=0$, звідки $x^2+4\neq 0$, тобто з віссю Ox графік не перетинається. Зважаючи на те, що $x\neq 0$, робимо висновок, що графік не перетинає вісь Oy.

3) Функція не періодична, вона непарна бо $y(-x)=-\frac{x}{2}-\frac{2}{x}=-\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=$

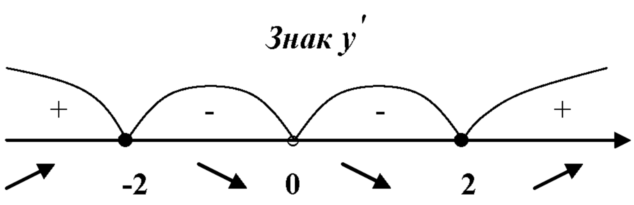
$=-y(x)$. Тому її графік є симетричним відносно початку координат.

4) В точці $x=0$ функція має розрив ІІ-го роду, тому що $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\frac{x^2+4}{2x}=\pm\infty$. Отже, пряма $x=0$ - вертикальна асимптота.

5) Знайдемо $y'=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}$. Розв'яжемо рівняння $y'=0:$ $\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}=0$, $x^2=4$,

звідки $x_1=2,\ x_2=-2$ - критичні точки функції. Похідна не існує при $x=0\notin D(y)$.



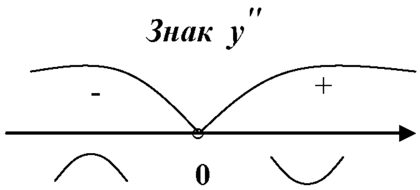
Функція зростає на інтервалах $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$; функція спадає на інтервалі $(-2;2)$.

$x=-2$ - точка максимуму функції, а $x=2$ - точка мінімуму.

Обчислимо $y_{max}=y(-2)=-1-1=-2$, $y_{min}=y(2)=1+1=2$.

Отже, $A_1(-2;-2)$, $A_2(2;2)$ - екстремальні точки.

6) Знайдемо $y''=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}\right)'=\frac{4}{x^3}$.



Зважаючи на те, що $y''=\frac{4}{x^3}\neq 0$, робимо висновок, що точок перегину графік функції не має. Функція угнута на інтервалі $(0;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;0)$.

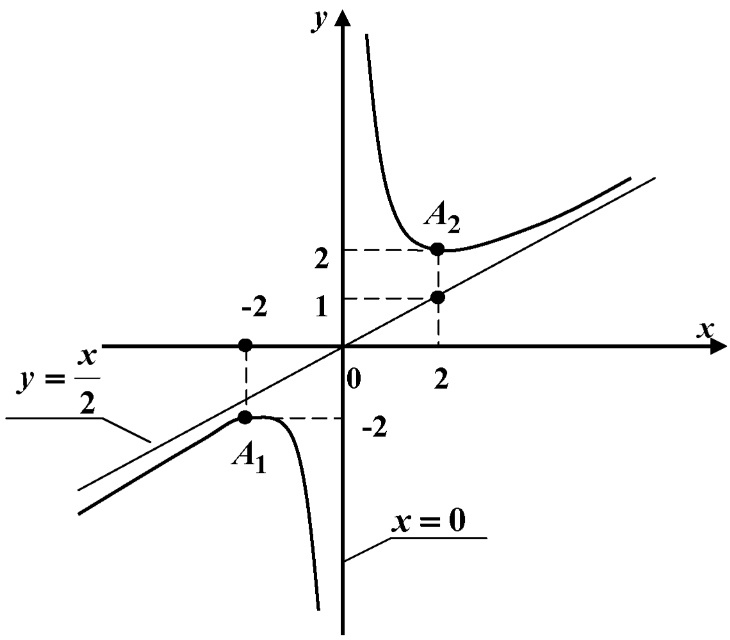
7) Вертикальну асимптоту ми вже знайшли: $x=0$. Знайдемо похилу асимптоту.

Обчислимо $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$,

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}=0.$$

Тоді пряма $y=\frac{x}{2}$ - похила асимптота.

8) Побудуємо графік.



3. $y=ln\left(x^2+4\right)$.

1) $D(y): x\in(-\infty;+\infty)$.

2) Розглянемо перетин графіка з координатними осями.

З віссю $0y: x=0 \quad\Rightarrow\quad y=ln\,4\approx 1{,}4$, тобто у точці $A(0;ln\,4)$ графік перетинає вісь $0y$. З віссю $0x: y=0 \quad\Rightarrow\quad ln\left(x^2+4\right)=0$, звідки $x^2+4=1$ або $x^2=-3$. Зрозуміло, що остання рівність розв'язків не має. Отже, графік не перетинає вісь $0x$.

3) Функція не періодична, але є парною, бо $y(-x)=ln\left(x^2+4\right)=y(x)$, тому її графік є симетричним відносно осі $0y$.

4) Точок розриву функція не має.

5) $y'=\frac{2x}{x^2+4}$. Знайдемо критичні точки: $\frac{2x}{x^2+4}=0 \;\Rightarrow\; 2x=0 \;\Rightarrow\; x=0$.

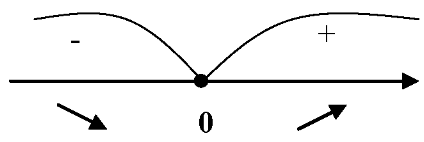
Функція зростає на інтервалі $(0;+\infty)$ та спадає на інтервалі $(-\infty;0)$.

Точка $x=0$ є точкою мінімуму функції.

Обчислимо $y_{min}=y(0)=ln\,4\approx 1{,}4$.

Тобто точка екстремуму нашої функції $A(0;1{,}4)$.

Знак y'



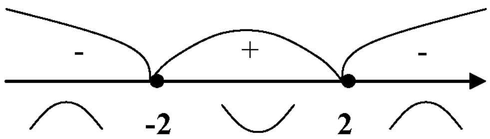
6) Знайдемо $y''=\left(\dfrac{2x}{x^2+4}\right)'=\dfrac{2(x^2+4)-2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$.

Дослідимо функцію на угнутість та опуклість.

$$y''=0:\ \frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}=0\Rightarrow 8-2x^2=0,\ x^2=4,$$

звідки $x_1=-2, x_2=2$ - критичні точки.

Знак y''



Функція угнута на інтервалі $(-2;2)$, опукла на інтервалах $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$. У точках $x_1=-2$, $x_2=2$ функція має перегин графіка.

Знайдемо $y(-2)=ln8\approx 2{,}1$, $y(2)=ln8\approx 2{,}1$.

Отже, $C_1(-2;ln8)$, $C_2(2;ln8)$ - точки перегину.

7) Вертикальних асимптот графік не має.

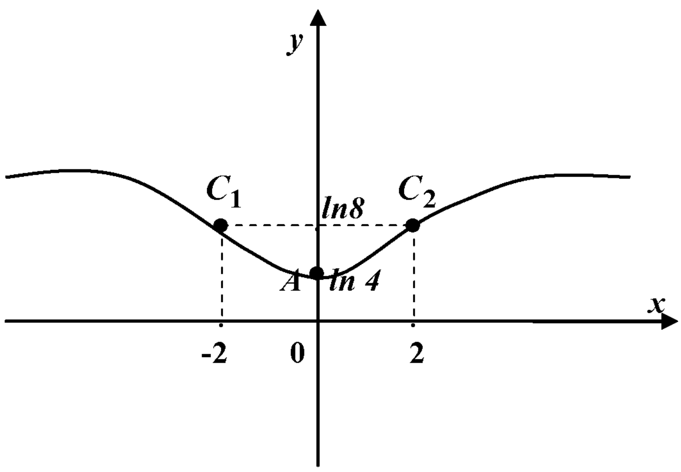
Для похилих асимптот знайдемо k і b.

Будемо мати: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ln(x^2+4)}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x^2+4}=0,$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}ln(x^2+4)=+\infty.$$

Отже, похилих асимптот не буде.

8) Будуємо графік.



4. $y = x \cdot e^{-x}$.

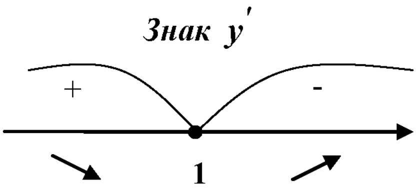
1) $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

2) Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Знайшли, що графік перетинає вісь $0y$ у точці $O(0;0)$. Якщо $y = 0$, то $x \cdot e^{-x} = 0$, звідки $e^{-x} \neq 0$, тому $x = 0$. Знову отримали ту саму точку $O(0;0)$, в якій графік перетинає вісь $0x$. З'ясовано , що тільки у початку координат графік перетинає обидві координатні осі.

3) Функція не періодична, не є парною або непарною $\left(y(-x) \neq y(x)\right.$ та $\left.y(-x) \neq -y(x)\right)$.

4) Функція неперервна в області визначення, тому точок розриву не має.

5) Обчислимо $y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$.



З умови $y' = 0$ знайдемо критичні точки.

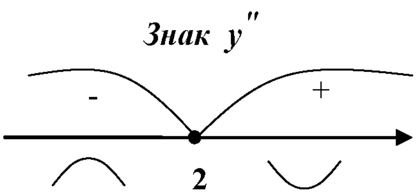
Будемо мати: $e^{-x}(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-x} \neq 0$, тому $1 - x = 0$, звідки $x = 1$.

Функція зростає на інтервалі $(-\infty; 1)$ та спадає на інтервалі $(1; +\infty)$. Зрозуміло, що $x = 1$ - точка максимуму функції. $y_{max} = y(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}4$.

Точка $B\left(1; \frac{1}{e}\right)$ - екстремальна точка функції.

6) Знайдемо $y'' = \left(e^{-x} - xe^{-x}\right)' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x - 2)$.

Тоді $y'' = 0 : e^{-x}(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-x} \neq 0$, тому $x - 2 = 0$, звідки $x = 2$ - критична точка функції.



Функція вгнута на інтервалі $(2; +\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty; 2)$.

Отже, у точці $x = 2$ функція має перетин.

$y(2) = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2} \approx 0{,}3$.

Тому $A\left(2; \frac{2}{e^2}\right)$ - точка перетину графіка функції.

7) Вертикальної асимптоти графік функції не має.

Для похилих асимптот знайдемо k і b.

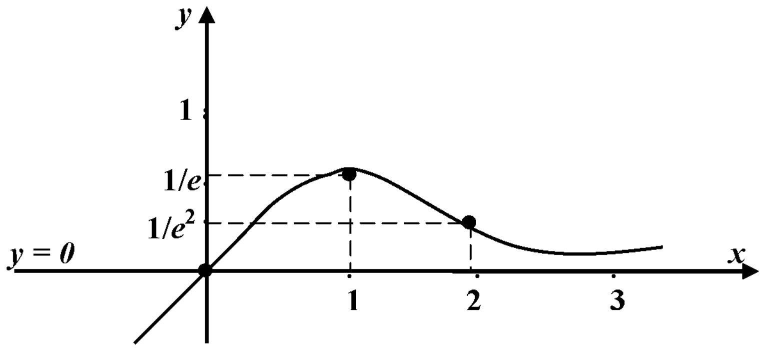
Отримаємо: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$,

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Тому $y=0$ - пряма, яка співпадає з віссю $0x$, буде горизонтальною асимптотою.

У випадку, коли $x\to-\infty$: $k=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty$, тому ніякої асимптоти не буде.

8) Будуємо графік.



5. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

1) Оскільки задана функція дробово-раціональна, то вона не існує в тих точках, де знаменник дорівнює нулю: $x^2-1=0$, звідки $x_{1,2}=\pm1$.

Отже, $D(y): x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2) Нехай $y=0$, тоді $\dfrac{x^3}{x^2-1}=0$, звідки $x=0$.

Нехай $x=0$, тоді $y=0$. Отже, графік перетинає обидві координатні осі в точці $O(0;0)$, тобто проходить через початок координат.

3) Функція не періодична, вона непарна, тому що $y(-x)=\dfrac{-x^3}{(-x)^2-1}=$

$$=-\frac{x^3}{x^2-1}=-y(x).$$

Її графік є симетричним відносно початку координат.

4) Маємо дві точки розриву II-го роду: $x_1=-1$ та $x_2=-1$, тому що

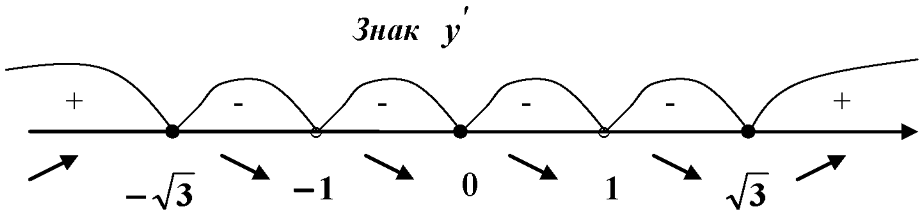
$$\lim_{x\to-1\pm0}\frac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty \text{ та } \lim_{x\to1\pm0}\frac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty .$$

Отже, прямі $x=-1$ та $x=1$ є вертикальними асимптотами.

5) Знайдемо $y'=\dfrac{3x^2\left(x^2-1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Розв'яжемо рівняння $y'=0:\ \dfrac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=0$, звідки $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$ - критичні точки функції.

Помітимо, що похідна не існує при $x=\pm 1$, але вони обидві не входять до області визначенності функції.



Функція зростає на інтервалах $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$, функція спадає на інтервалах $\left(-\sqrt{3};-1\right)\cup\left(-1;0\right)\cup\left(0;1\right)\cup\left(1;\sqrt{3}\right)$.

Похідна змінює знак при переході через точки $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$. А саме: $x_2=\sqrt{3}$ є точкою мінімуму функції, а $x_3=-\sqrt{3}$ - точкою максимуму.

$$y_{min}=y\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3^3}}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}}{2},\quad y_{max}=y\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, екстремальні точки $A_1\left(\sqrt{3};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_2\left(-\sqrt{3};-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

6) Обчислимо

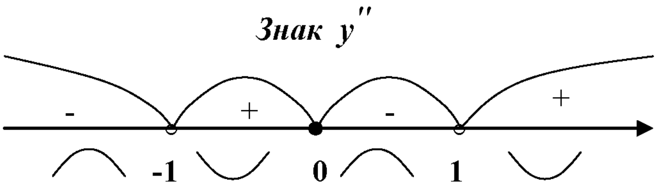
$$y''=\left(\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(4x^3-6x\right)\cdot\left(x^2-1\right)^2-\left(x^4-3x^2\right)\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(2x^2-3\right)\cdot\left(x^2-1\right)^2-4x^3\cdot\left(x^2-3\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)\cdot\left[\left(2x^2-3\right)\cdot\left(x^2-1\right)-2x^2\cdot\left(x^2-3\right)\right]}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2x\cdot\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Розв'яжемо рівняння $y''=0$: $\dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=0$, звідки $2x\left(x^2+3\right)=0$, а саме $x=0$ - це критична точка функції.

Помічаємо, що y'' не існує при $x=\pm1\notin D(y)$.



Функція вгнута на інтервалах $(-1;0)\cup(1;+\infty)$, функція опукла на інтервалах $(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

При переході через $x=0$ y'' змінює знак.

$y(0)=\dfrac{0}{0-1}=0$. Точка $O(0;0)$ є точкою перегину.

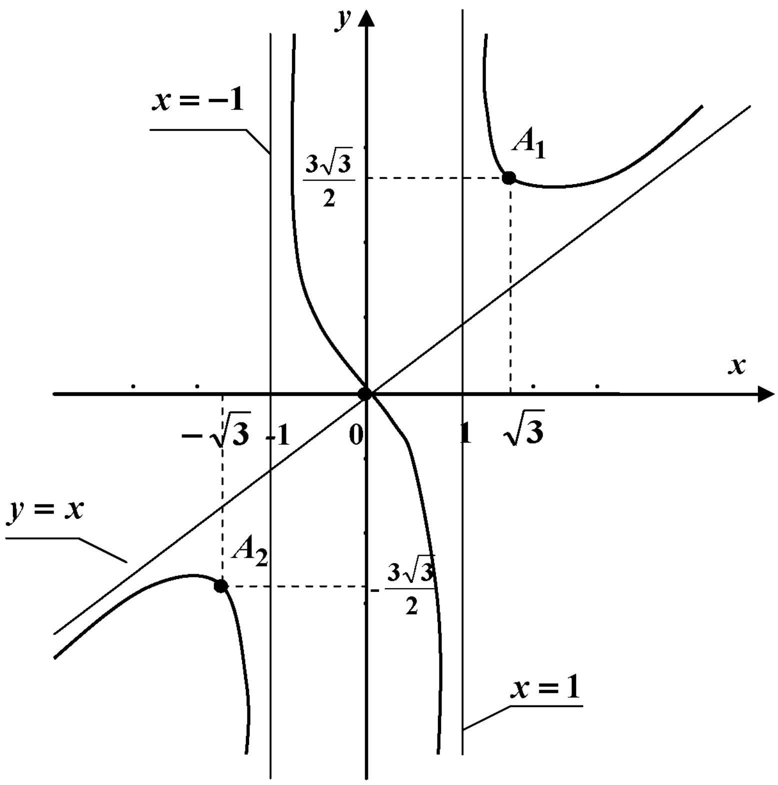
7) Вертикальні асимптоти: $x=\pm1$. Для похилих асимптот знайдемо k і b.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\left(x^2-1\right)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0.$$

Отже, рівняння похилої асимптоти: $y=x$.

8) Побудуємо графік функції.



Завдання для самостійної роботи

Дослідити функції та побудувати їхні графіки:

1. $y = 2x^4 - x^2 + 1$;
2. $y = x^2\sqrt{x-3}$;
3. $y = x^2 - 2\ln x$;
4. $y = \dfrac{e^x}{x}$;
5. $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001.
2. Овчинников П.П. та інші. Вища математика: Підручник. У 2 ч. – К.: Техніка, 2004.
3. Шипачёв В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1998.
4. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. У 3-х кн. – К.: Либідь, 1994.
5. Вища математика: Збірник задач: Навчальний посібник / За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004.
6. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов.- М.: Высшая школа, 2002.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2000.