ЛЕКЦІЯ 26

ТЕМА : Інтегрування дробово-раціональних та найпростіших ірраціональних функцій.

ЗМІСТ

Означення дробово-рацінальної функції

Розглянемо деякі методи інтегрування функцій спеціального вигляду.

Означення. Раціональним дробом називається дріб вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де P(x) та Q*(x)* - многочлени. Раціональний дріб називається правильним, коли степінь *P(x)* нижчий степеня Q*(x),* в протилежному випадку дріб називається неправильним. У неправильному дробі завжди можна виділити цілу частину і зобразити його у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу. Кожний правильний дріб розкладається на суму елементарних раціональних дробів типу:

$\frac{A}{x-a}$; $\frac{A}{(x-a)^m}$ (m – ціле число, m > 1),

$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ (n – ціле число, n > 1, квадратний тричлен x^2 + px +q не має дійсних коренів).

Такий розклад є єдиний, але методи розкладу різноманітні, з яких найбільш уживаний <u>метод невизначених коефіцієнтів.</u> Цей метод ґрунтується на наступному:

1) якщо задано неправильний раціональний дріб, треба виділити з нього цілу частину, тобто привести до вигляду:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$,де M(x) – многочлен, а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$, - правильний раціональний дріб;

2) розкласти знаменник дробу на прості множники першого та другого степеня:

$Q(x)=(x-a)^m\cdots(x^2+px+q)^n\cdots$, де $\frac{p^2}{4}-q<0$, тобто тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів;

3) правильний раціональний дріб розкласти на суму елементарних:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \ldots + \frac{A_m}{x-a} + \ldots + \frac{B_1 x + C_1}{\left(x^2 + px + q\right)^n} +$$

$$+ \frac{B_2 x + C_2}{\left(x^2 + px + q\right)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_n x + C_n}{x^2 + px + q} + \ldots;$$

обчислити невизначені коефіцієнти $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots, B_1, C_1, B_2, C_2, \ldots, B_n, C_n, \ldots$; для цього привести останню рівність до спільного знаменника, а потім порівняти коефіцієнти при однакових степенях *x* в лівій і правій частинах одержаної тотожності та розв'язати систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. Ці невідомі коефіцієнти можна знайти іншим способом, надаючи в одержаній тотожності змінній *x* довільних числових значень. В багатьох випадках корисно використовувати обидва способи обчислення невідомих коефіцієнтів.

Інтегрування елементарних раціональних дробів

Розглянемо інтегрування елементарних раціональних дробів:

1) $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

2) $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m} = A \cdot \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C = \frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C.$

3) $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \cdot dx, \quad де \ \ p^2 - 4q < 0.$

Спочатку виділяють в чисельнику дробу $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ похідну знаменника,

тобто чисельник записують в вигляді:

$Ax + B = (2x+p) \cdot \dfrac{A}{2} - \dfrac{Ap}{2} + B.$ Тоді:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

В першому інтегралі чисельник є похідною знаменника, тому

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx = \ln\left(x^2+px+q\right), \ бо \ x^2+px+q > 0, \ \ x \in (-\infty;\infty).$$

Перш ніж знайти другий інтеграл, треба перетворити квадратний тричлен в знаменнику, виділивши повний квадрат:

$$x^2+px+q=\left(x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

Тоді другий інтеграл зводиться до табличного арктангенса, або “високого” логарифма.

Приклад 1 Знайти інтеграл: $\displaystyle\int\frac{3x+2}{x^2+2x+10}dx.$

$$\int\frac{3x+2}{x^2+2x+10}dx=3\int\frac{x}{x^2+2x+10}\,dx+2\int\frac{dx}{x^2+2x+10}=$$

$$\left|\begin{array}{c}\left(x^2+2x+10\right)'=2x+2\\ x^2+2x+10=\left(x^2+2x+1\right)+9=(x+1)^2+9\end{array}\right|=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+2)-2}{x^2+2x+10}dx+$$

$$+2\int\frac{dx}{x^2+2x+10}=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+2)}{x^2+2x+10}\,dx+(-3+2)\int\frac{d(x+1)}{(x+1)\ \ +9}=$$

$$\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+10\right)-\frac{1}{3}arctg\,\frac{x+1}{3}+C.$$

Зауваження. Якщо квадратний тричлен має вигляд (ax^2+bx+c), тоді його треба перетворити так:

$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)$ і звести знаходження інтеграла

$\displaystyle\int\frac{Ax\ +B}{ax^2+bx+c}dx$ до розглянутого раніше інтеграла $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2\ +px+q}$.

Інтегрування дробово-раціональних виразів

Для інтегрування дробово-раціональних виразів достатньо розкласти такий дріб на елементарні дроби та застосувати вище розглянуті методи

Приклад 2. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{x^2-2}{x^5+4x^4+4x^3}\,dx.$

$$\int \frac{x^2-2}{x^5+4x^4+4x^3}\,dx = \int \frac{x^2-2}{x^3\left(x^2+4x+4\right)}\,dx = \int \frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2}\,dx.$$

Розкладемо дріб $\dfrac{x^2-2}{x^3(x+2)^2}$ на елементарні дроби.

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2} = \frac{A_1}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x} + \frac{B_1}{(x+2)^2} + \frac{B_2}{x+2}.$$

Зведемо до спільного знаменника вираз у правій частині та прирівняємо чисельники дробів.

$$x^2-2 = A_1(x+2)^2 + A_2x(x+2)^2 + A_3x^2(x+2)^2 + B_1x^3 + B_2x^3(x+2)$$

$$x^2-2 = A_1\left(x^2+4x+4\right) + A_2\left(x^3+4x^2+4x\right) + A_3\left(x^4+4x^3+4x^2\right) +$$

$$+ B_1x^3 + B_2\left(x^4+2x^3\right)$$

$$\begin{array}{c|cc}
x=-2 & -8B_1 = 2; & B_1 = -\dfrac{1}{4}; \\
x=0 & 4A_1 = -2; & A_1 = -\dfrac{1}{2}; \\
 & A_3 + B_2 = 0; & A_3 + B_2 = 0; \\
x^3 & A_2 + 4A_3 + B_1 + 2B_2 = 0; & A_2 + 4A_3 = 2B_2 = \dfrac{1}{4}; \\
x^2 & A_1 + 4A_2 = 4A_3 = 14; & A_2 + 4A_3 = \dfrac{3}{2};
\end{array}$$

Звідки $A_1 = -\dfrac{1}{2}$, $A_2 = \dfrac{1}{2}$, $A_3 = -\dfrac{1}{8}$, $B_1 = -\dfrac{1}{4}$, $B_2 = \dfrac{1}{8}$.

Остаточно отримаємо

$$\int \frac{x^2-2}{x^5+4x^4+4x^3}\,dx = \int \frac{x^2-2}{x^3\left(x^2+2\right)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2} - \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x} -$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+2)^2} + \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+2} = -\frac{1}{2}\int x^{-3}dx + \frac{1}{2}\int x^{-2}dx - \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int (x+2)^{-2}d(x+2) +$$

$$+\frac{1}{8}\int\frac{d(x+2)}{x+2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{(-2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-1}}{(-1)} - \frac{1}{8}\ln|x| - \frac{1}{4}\cdot\frac{(x+2)^{-1}}{(-1)} + \frac{1}{8}\ln|x+2| + C =$$

$$=\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8}\ln|x|+\frac{1}{4(x+2)}+\frac{1}{8}\ln|x+2|+C=.$$

$$=\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+2}{x}\right|+\frac{1}{4(x+2)}+C.$$

Зауваження. Інтеграл виду $I_n=\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx,\quad p^2-4q<0,\quad n\geq 2$ підстановкою $x=t-\frac{p}{2}$ зводиться до суми інтегралів:

$$I_n=A\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n},\ a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

Перший з цих інтегралів обчислюється безпосередньо, а другий за рекурентною формулою:

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}=\frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}\ .$$

Приклад3. Знайти $\int\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}dx.$

Розв’язання.

1) Підінтегральна функція – неправильний дріб. Ділимо чисельник на знаменник. Матимемо
$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}=x+\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}.$$

2) Розкладаємо дріб $\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}$ на суму найпростіших дробів. Для цього розкладемо спочатку знаменник $2x^3-x-1$ на множники. Легко бачити, що *x=1* є коренем цього многочлена і
$$2x^3-x-1=(x-1)(2x^2+2x+1).$$
Тричлен $2x^3+2x+1$не має дійсних коренів. Дістанемо
$$\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}=\frac{6x^2+x-2}{(x-1)(2x^2+2x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{2x^2+2x+1}.$$

3) Знаходимо невизначені коефіцієнти *A,M,N* із тотожності
$$6x^2+x-2=A(2x^2+2x+1)+(Mx+N)(x-1).$$
За першим способом знаходження коефіцієнтів складаємо систему рівнянь

$x^2 \mid 6 = 2A + M,$

$x \mid 1 = 2A - M + N,$

$x^0 \mid -2 = A - N.$

Для полегшення розв’язання підставляємо у тотожність значення *x = 1* (корінь знаменника). Дістанемо *5=5A*, тобто *A=1*, а тоді із системи знаходимо *M=4, N=3*.

4) Переходимо до інтегрування

$$\int \frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1} dx = \int \left(x + \frac{6x^2 + x - 2}{2x^3 - x - 1} \right) dx = \int x dx + \int \frac{1}{x-1} dx +$$

$$+ \int \frac{4x+3}{2x^2 + 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \int \frac{(4x+2)+1}{2x^2+2x+1} dx = \left| \begin{matrix} d(2x^2 + 2x + 1) = \\ = (4x+2)dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \int \frac{d(2x^2+2x+1)}{2x^2+2x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + x + \frac{1}{2}} = \left| \begin{matrix} x^2 + x + \frac{1}{2} = \\ = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \ln|2x^2 + 2x + 1| + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2} \right)}{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} = \frac{x^2}{2} +$$

$$+ \ln|(x-1)(2x^2 + 2x + 1)| + arctg(2x+1) + C.$$

Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій.

При інтегруванні ірраціональних функцій застосовують заміни змінних, які дозволяють звести інтеграл від ірраціональної функції до інтеграла від функції раціональної (раціоналізувати інтеграл) і, отже, обчислити заданий інтеграл у скінченому вигляді.

Розглянемо деякі підкласи ірраціональних функцій, інтеграли від яких виражаються в скінченому вигляді через елементарні функції.

1. Інтеграл вигляду

$\int R\left(x, \sqrt[n]{x^m}, \sqrt[q]{x^p}, \ldots\right)dx = \int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots\right)dx,$ де $m, n, p, q -$ натуральні числа.

Раціоналізація такого інтеграла проводиться за допомогою заміни $x = t^s, dx = st^{s-1}dt,$ де $s -$ спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \ldots$

(інакше,s=НКС$\{n, q, \ldots\}$ – найменше спільне кратне чисел n,q,…).

Приклад 4. Знайти

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}-1}dx = \left| \begin{array}{c} x = t^4; t = \sqrt[4]{x} \\ dx = 4t^3dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2}{t^3-1}\cdot 4t^3dt = 4\int \frac{t^2\left(\left(t^3-1\right)+1\right)}{t^3-1}dt =$$

$$= 4\int \frac{t^2\left(t^3-1\right)}{t^3-1}dt + 4\int \frac{t^2}{t^3-1}dt = \left| d\left(t^3-1\right) = 3t^2dt \right| = 4\int t^2dt + \frac{4}{3}\int \frac{d\left(t^3-1\right)}{t^3-1}dt =$$

$$= \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{3}\ln\left|t^3-1\right| + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + \frac{3}{4}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}-1\right| + C.$$

Приклад 5. Знайти $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{3x^2-4x}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{3x^2-4x}} = \left| \begin{array}{l} x-1 = \frac{1}{t}, x = \frac{1}{t}+1 \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{3\left(\frac{1}{t}+1\right)^2 - 4\left(\frac{1}{t}+1\right)}} =$$

$$= -\int \frac{tdt}{t^2\sqrt{\frac{3}{t^2}+\frac{6}{t}+3-\frac{4}{t}-4}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{3+2t-t^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 3+2t-t^2 = -(t^2-2t+1-1)+3 = \\ = 4-(t-1)^2 \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{\sqrt{4-(t-1)^2}} =$$

$$= -\arcsin\frac{t-1}{2} + C = -\arcsin\frac{2-x}{2(x-1)} + C.$$

Приклад 6. Знайти

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{1+x}{1-x}=t^2, 1+x=t^2(1-x), x=\dfrac{t^2-1}{t^2+1},\\ dx=\dfrac{2t\left(t^2+1\right)-2t\left(t^2-1\right)}{\left(1+t^2\right)^2}dt=\dfrac{4tdt}{\left(t^2+1\right)^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int t\cdot\frac{1}{1-\dfrac{t^2-1}{t^2+1}}\cdot\frac{4tdt}{\left(t^2+1\right)^2}=\int\frac{t\left(t^2+1\right)4tdt}{\left(t^2+1-\left(t^2-1\right)\right)\left(t^2+1\right)^2}=\int\frac{4t^2}{2\left(t^2+1\right)}dt=$$

$$=2\int\frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1}dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=2t-\operatorname{arc}tgt+C=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\operatorname{arc}tg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

2) Інтеграли типу $\int R\left(x,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right)dx$, де R - раціональна функція, m_1, n_1, m_2, n_2, …- цілі числа, зводяться до інтегралів від раціональних функцій підстановкою $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^s$ де s – спільний знаменник показників степенів $\dfrac{m_1}{n_1},\dfrac{m_2}{n_2},\ldots$.

Приклад 7. Знайти $I=\displaystyle\int\frac{dx}{(3+2x)^{\frac{2}{3}}-(3+2x)^{\frac{1}{2}}}$.

Спільний знаменник дробів $\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{2}$ дорівнює s = 6. Застосовуємо підстановку *3+2x* = t^6 звідки $x=\dfrac{t^6-3}{2}$, тоді $dx=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot t^5dt=3t^5dt$, $t=\sqrt[6]{2x+3}$.

Отже,

$$I=\int\frac{dx}{(3+2x)^{\frac{2}{3}}-(3+2x)^{\frac{1}{2}}}=3\int\frac{t^5dt}{t^4-t^3}=3\int\frac{t^5dt}{t^3(t-1)}=3\int\frac{t^2dt}{t-1}=$$

$$=3\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t-1}dt=3\int\frac{\left(t^2-1\right)}{t-1}dt+3\int\frac{dt}{t-1}=3\int\frac{(t-1)(t+1)}{t-1}dt+3\int\frac{d(t-1)}{t-1}=$$

$$=3\int(t+1)dt+3\ln|t-1|=3\left(\frac{t^2}{2}+t\right)+3\ln|t-1|+C=$$

$$=3\left(\frac{\sqrt[3]{2x+3}}{2}+\sqrt[6]{2x+3}\right)+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+3}-1\right|+C$$