Агроінженерія 1-курс, 1-група «Вища математика»

Будівництво та цивільна інженерія 1-курс «Вища математика»

Енергетики 1-курс, «Вища математика»

Виконати запропоновані завдання до 24 березня та надіслати на перевірку наелектрону пошту «de-de@ukr.net»

Похідна та її застосування

Варіант 1

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$a) y=(3x-4\sqrt[3]{x}+2)^4; \quad b) y=\dfrac{4x+7\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+9x^2}}; \quad c) y=\cos 3x\cdot e^{\sin x}; \quad d) y=\ln \operatorname{acrtg} 2x.$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3+y^3=3xy$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму $y=x^3+\dfrac{5}{2}x^2-2x$.

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=2x^4-3x^2+x$.

Варіант 2

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$a) y=(3x^3-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2; \quad b) y=\dfrac{\arcsin 3x}{1-8x^2}; \quad c) y=2^{3x}\cdot \operatorname{tg}2x; \quad d) y=\cos\ln 5x.$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-x^2y+y^3=3$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=x^5-10x^2+3x$.

Варіант 3

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$a) y=(x^2-\dfrac{1}{x^3}+5\sqrt{x})^4; \quad b) y=\dfrac{\arcsin 7x}{x^4+e^x}; \quad c) y=e^{\operatorname{tg}x}\cdot \ln 2x; \quad d) y=\cos\sqrt{x^2+3}.$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $3^x+3^y=3^{x+y}$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{4}x^2-5x+\frac{25}{12}.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

Варіант 4

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(4x^2-\frac{3}{\sqrt{x}}+4)^3; \quad b) y=\frac{\sin 2x}{\cos 5x}; \quad c) y=2^{8x}\cdot tg3x; \quad d) y=\arcsin\ln 4x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-y=\mathrm{tg}y$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=2x^3-\frac{1}{2}x^2-x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\frac{x^3}{12+x^2}$.

Варіант 5

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5; \quad b) y=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+tgx}; \quad c) y=e^{\mathrm{ctg}x}\cdot\sin 4x; \quad d) y=\sin\ln 5x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $\ln x^3-xy^2=7$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+5.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\sqrt[3]{x+4}$.

Варіант 6

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(6x^2-\frac{2}{x^4}+5)^2; \quad b) y=\frac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}; \quad c) y=3^{\mathrm{tg}x}\cdot e^{\sin x}; \quad d) y=\ln\sin 6x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $xy-y^2=\mathrm{tg}x$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+1.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

Варіант 7

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$a) y=(x^3-4\sqrt[4]{x^3}+2)^3;\quad b) y=\dfrac{\operatorname{arctg}7x}{2-9x^2};\quad c) y=e^{\operatorname{ctg}x}\cdot\cos 6x;\quad d) y=\sin\ln 2x.$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3+y^3=3xy$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму $y=x^3+\dfrac{5}{2}x^2-2x$.

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=2x^4-3x^2+x$.

Варіант 8

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$a) y=(x^2-2\sqrt[5]{x}+4)^4;\quad b) y=\dfrac{x^3+e^x}{\sqrt{4-9x^5}};\quad c) y=e^{\operatorname{tg}2x}\cdot\ln x;\quad d) y=\ln\cos 7x.$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-x^2y+y^3=3$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=x^5-10x^2+3x$.

Варіант 9

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$a) y=(7x^2-\dfrac{2}{x^3}+5)^3;\quad b) y=\dfrac{\cos x}{\sqrt{3x^3+2}};\quad c) y=2^{\operatorname{tg}x}\cdot e^{\cos x};\quad d) y=\ln\sin 9x.$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $3^x+3^y=3^{x+y}$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{4}x^2-5x+\frac{25}{12}.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

Варіант 10

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y = (x^4 - 4\sqrt[4]{x^3} + 3)^4, \quad b) y = \frac{arctg 8x}{2 - 9x^3}, \quad c) y = e^{ctgx} \cdot \sin 6x, \quad d) y = \sin \ln 9x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3 - y = \mathrm{tg} y$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y = \dfrac{x^3}{12 + x^2}$.

Варіант 11

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y = (x^7 - 4\sqrt[4]{x^3} + 6)^2, \quad b) y = \frac{\mathrm{arctg} 5x}{2 - 3x^3}, \quad c) y = e^{\mathrm{ctg} x} \cdot \sin 5x, \quad d) y = \sin \ln 2x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $\ln x^3 - xy^2 = 7$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y = \sqrt[3]{x + 4}$.

Варіант 12

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y = (x^2 - 2\sqrt[5]{x^3} + 7)^6, \quad b) y = \frac{x^3 + e^{2x}}{\sqrt{2 - 9x^2}}, \quad c) y = e^{\mathrm{tg} 2x} \cdot \ln 6x, \quad d) y = \ln \cos 2x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $xy - y^2 = \mathrm{tg} x$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$.

Варіант 13

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(3x^7-\frac{3}{x^3}-6)^2,\quad b) y=\frac{\cos 2x}{\sin 3x},\quad c) y=e^{x^2}\cdot \operatorname{tg}3x,\quad d) y=\arccos\ln 7x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3+y^3=3xy$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму $y=x^3+\frac{5}{2}x^2-2x$.

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=2x^4-3x^2+x$.

Варіант 14

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^4-2\sqrt[3]{x}+8)^7,\quad b) y=\frac{\sqrt{9-6x^3}}{e^x+\operatorname{tg}x},\ c) y=2^{\operatorname{ctg}x}\cdot\cos 2x,\ d) y=\cos\sqrt{\ln 9x}.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-x^2y+y^3=3$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=x^5-10x^2+3x$.

Варіант 15

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(5x^2-3\sqrt[5]{x^2}-2)^3,\ b) y=\frac{2^x+\operatorname{ctg}x}{\sqrt{4+2x^3}},\ c) y=e^{\sin x}\cos 3x,\quad d) y=\operatorname{arctg}\ln 7x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $3^x+3^y=3^{x+y}$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{4}x^2-5x+\frac{25}{12}.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\frac{1}{1-x^2}$.

Варіант 16

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a)y=(3x-4\sqrt[3]{x}+2)^4;\quad b)y=\frac{4x+7\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+9x^2}};\ c)y=\cos 3x\cdot e^{\sin x};\quad d)y=\ln \mathrm{acrtg}2x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3+y^3=3xy$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму $y=x^3+\frac{5}{2}x^2-2x$.

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=2x^4-3x^2+x$.

Варіант 17

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a)y=(3x^3-2\sqrt[3]{x^2}-1)^2;\ b)y=\frac{\arcsin 3x}{1-8x^2};\quad c)y=2^{3x}\cdot \mathrm{tg}2x;\qquad d)y=\cos\ln 5x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-x^2y+y^3=3$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=x^5-10x^2+3x$.

Варіант 18

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a)y=(x^2-\frac{1}{x^3}+5\sqrt{x})^4;\quad b)y=\frac{\arcsin 7x}{x^4+e^x};\quad c)y=e^{\mathrm{tg}x}\cdot \ln 2x;\quad d)y=\cos\sqrt{x^2+3}.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $3^x+3^y=3^{x+y}$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{4}x^2-5x+\frac{25}{12}.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\frac{1}{1-x^2}$.

Варіант 19

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(4x^2-\frac{3}{\sqrt{x}}+4)^3; \quad b) y=\frac{\sin 2x}{\cos 5x}; \quad c) y=2^{8x}\cdot tg3x; \quad d) y=\arcsin\ln 4x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-y=\mathrm{tg}y$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=2x^3-\frac{1}{2}x^2-x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\frac{x^3}{12+x^2}$.

Варіант 20

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^5-\sqrt[3]{x}+1)^5; \quad b) y=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+tgx}; \quad c) y=e^{\mathrm{ctg}x}\cdot\sin 4x; \quad d) y=\sin\ln 5x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $\ln x^3-xy^2=7$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+5.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\sqrt[3]{x+4}$.

Варіант 21

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(6x^2-\frac{2}{x^4}+5)^2; \quad b) y=\frac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}; \quad c) y=3^{\mathrm{tg}x}\cdot e^{\sin x}; \quad d) y=\ln\sin 6x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $xy-y^2=\mathrm{tg}x$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+1.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

Варіант 22

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^3-4\sqrt[4]{x^3}+2)^3; \quad b) y=\frac{\operatorname{arctg}7x}{2-9x^2}; \quad c) y=e^{\operatorname{ctg}x}\cdot\cos 6x; \quad d) y=\sin\ln 2x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3+y^3=3xy$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму $y=x^3+\frac{5}{2}x^2-2x$.

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=2x^4-3x^2+x$.

Варіант 23

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^2-2\sqrt[5]{x}+4)^4; \quad b) y=\frac{x^3+e^x}{\sqrt{4-9x^5}}; \quad c) y=e^{\operatorname{tg}2x}\cdot\ln x; \quad d) y=\ln\cos 7x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-x^2y+y^3=3$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=x^5-10x^2+3x$.

Варіант 24

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(7x^2-\frac{2}{x^3}+5)^3; \quad b) y=\frac{\cos x}{\sqrt{3x^3+2}}; \quad c) y=2^{\operatorname{tg}x}\cdot e^{\cos x}; \quad d) y=\ln\sin 9x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $3^x+3^y=3^{x+y}$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{4}x^2-5x+\frac{25}{12}.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\frac{1}{1-x^2}$.

Варіант 25

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^4-4\sqrt[4]{x^3}+3)^4, \quad b) y=\frac{arctg 8x}{2-9x^3}, \quad c) y=e^{ctgx}\cdot\sin 6x, \quad d) y=\sin\ln 9x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-y=\mathrm{tg}y$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=2x^3-\frac{1}{2}x^2-x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\dfrac{x^3}{12+x^2}$.

Варіант 26

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^7-4\sqrt[4]{x^3}+6)^2, \quad b) y=\frac{\mathrm{arctg} 5x}{2-3x^3}, \quad c) y=e^{\mathrm{ctg}x}\cdot\sin 5x, \quad d) y=\sin\ln 2x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $\ln x^3-xy^2=7$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+5.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\sqrt[3]{x+4}$.

Варіант 27

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a) y=(x^2-2\sqrt[5]{x^3}+7)^6, \quad b) y=\frac{x^3+e^{2x}}{\sqrt{2-9x^2}}, \quad c) y=e^{\mathrm{tg}2x}\cdot\ln 6x, \quad d) y=\ln\cos 2x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $xy-y^2=\mathrm{tg}x$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+1.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

Варіант 28

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=(3x^7-\frac{3}{x^3}-6)^2, \quad b)\, y=\frac{\cos 2x}{\sin 3x}, \quad c)\, y=e^{x^2}\cdot \mathrm{tg}3x, \quad d)\, y=\arccos \ln 7x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3+y^3=3xy$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму $y=x^3+\frac{5}{2}x^2-2x$.

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=2x^4-3x^2+x$.

Варіант 29

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=(x^4-2\sqrt[3]{x}+8)^7, \quad b)\, y=\frac{\sqrt{9-6x^3}}{e^x+\mathrm{tg}x}, \quad c)\, y=2^{\mathrm{ctg}x}\cdot\cos 2x, \quad d)\, y=\cos\sqrt{\ln 9x}.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $x^3-x^2y+y^3=3$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=x^5-10x^2+3x$.

Варіант 30

Задача 1. Знайти похідні функцій:

$$a)\, y=(5x^2-3\sqrt[5]{x^2}-2)^3, \quad b)\, y=\frac{2^x+\mathrm{ctg}x}{\sqrt{4+2x^3}}, \quad c)\, y=e^{\sin x}\cos 3x, \quad d)\, y=\mathrm{arctg}\ln 7x.$$

Задача 2. Знайти похідну функції, яка задана неявно $3^x+3^y=3^{x+y}$.

Задача 3. Знайти значення функції у точці максимуму

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{3}{4}x^2-5x+\frac{25}{12}.$$

Задача 4. Знайти точки перегину графіка функції $y=x^4+x^3+x$.

3.6. Схема дослідження функції та побудова її графіка

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти (якщо можна) точки перетину графіка з координатними осями;
3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;
4) знайти точки розриву та дослідити їх;
5) знайти інтервали монотонності, точки екстремумів та значення функції в цих точках;
6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;
7) знайти асимптоти кривої;
8) побудувати графік функції.

Зразки розв'язування задач

Дослідити функції та побудувати їхні графіки.

1. $y = x^3 - 3x^2$.

   1) Функція є многочленом, область існування якого – вся множина дійсних чисел. $D(y): x \in (-\infty;+\infty)$.

   2) Знайдемо точки перетину графіка с віссю Ox, для цього покладемо $y = 0$:

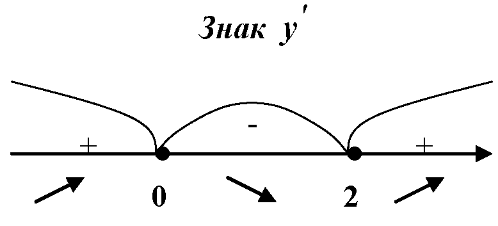
   $x^3 - 3x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2(x-3) = 0$, звідки $x_1 = 0,\ x_2 = 3$. Отже, в точках $O(0;0)$ та $A(3;0)$ графік перетинає вісь Ox.

   Точки перетину з віссю Oy: покладемо $x = 0$, тоді знайдемо $y = 0$. Тобто, графік перетинає вісь Oy у точці $O(0;0)$.

   3) Функція не періодична, вона не є парною, не є непарною $(y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x))$.

   4) Функція є неперервною на всій числовій прямій. Тобто точок розриву не має.

   5) Досліджуємо функцію на монотонність та екстремум. Обчислимо $y' = 3x^2 - 6x$. Знайдемо критичні точки з рівняння $y' = 0$: $3x^2 - 6x = 0$



або $3x(x-2)=0$. Отримаємо, що $x_1=0$ та $x_2=2$.

Функція зростає на інтервалах $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; функція спадає на інтервалі $(0;2)$.

Згідно з правилом знаходження екстремуму, $x=0$ - точка максимуму, $x=2$ - точка мінімуму.

Обчислимо $y_{max}=y(0)=0$, $y_{min}=y(2)=2^3-3\cdot 2^2=-4$.

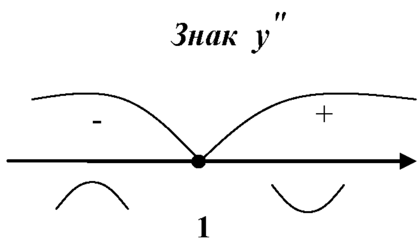
Таким чином, екстремальні точки: $O(0;0)$ та $B(2;-4)$.

6) Знайдемо інтервали вгнутості та опуклості, точки перегину.

$y''=(3x^2-6x)'=6x-6$.

Розв'яжемо рівняння $y''=0$: $6x-6=0 \Rightarrow x=1$ - критична точка другого роду.

Функція вгнута на інтервалі $(1;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;1)$. Значення $x=1$ є абсцисою точки перегину. Знайдемо $y(1)=1-3=-2$, тобто точка $C(1;-2)$ - точка перегину графіка.



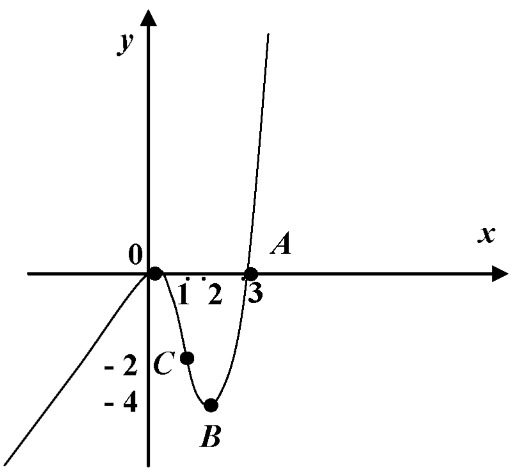
7) Знайдемо асимптоти заданої кривої.

Вертикальних асимптот немає. З'ясуємо, чи є похилі асимптоти.

Обчислимо $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(3x^2-6x)=+\infty$.

Отже, наша крива не має і похилих асимптот.

8) Побудуємо графік функції.



2. $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$.

1) $D(y): x\neq 0$, тобто $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2) Точки перетину графіка з координатними осями. При $y=0: \dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}=0 \Rightarrow$

$\dfrac{x^2+4}{2x}=0$, звідки $x^2+4\neq 0$, тобто з віссю Ox графік не перетинається. Зважаючи на те, що $x\neq 0$, робимо висновок, що графік не перетинає вісь Oy.

3) Функція не періодична, вона непарна бо $y(-x)=-\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}=-\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right)=$

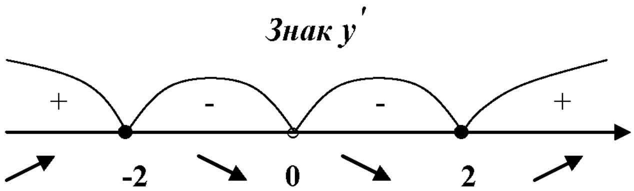
$=-y(x)$. Тому її графік є симетричним відносно початку координат.

4) В точці $x=0$ функція має розрив ІІ-го роду, тому що $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\dfrac{x^2+4}{2x}=\pm\infty$. Отже, пряма $x=0$ - вертикальна асимптота.

5) Знайдемо $y'=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{x^2}$. Розв'яжемо рівняння $y'=0:$ $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{x^2}=0$, $x^2=4$,

звідки $x_1=2,\ x_2=-2$ - критичні точки функції. Похідна не існує при $x=0\notin D(y)$.



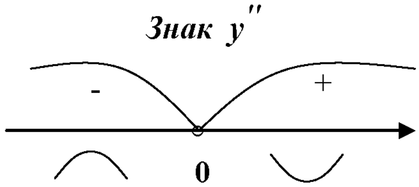
Функція зростає на інтервалах $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$; функція спадає на інтервалі $(-2;2)$.

$x=-2$ - точка максимуму функції, а $x=2$ - точка мінімуму.

Обчислимо $y_{max}=y(-2)=-1-1=-2$, $y_{min}=y(2)=1+1=2$.

Отже, $A_1(-2;-2)$, $A_2(2;2)$ - екстремальні точки.

6) Знайдемо $y''=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{x^2}\right)'=\dfrac{4}{x^3}$.



Зважаючи на те, що $y''=\dfrac{4}{x^3}\neq 0$, робимо висновок, що точок перегину графік функції не має. Функція угнута на інтервалі $(0;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;0)$.

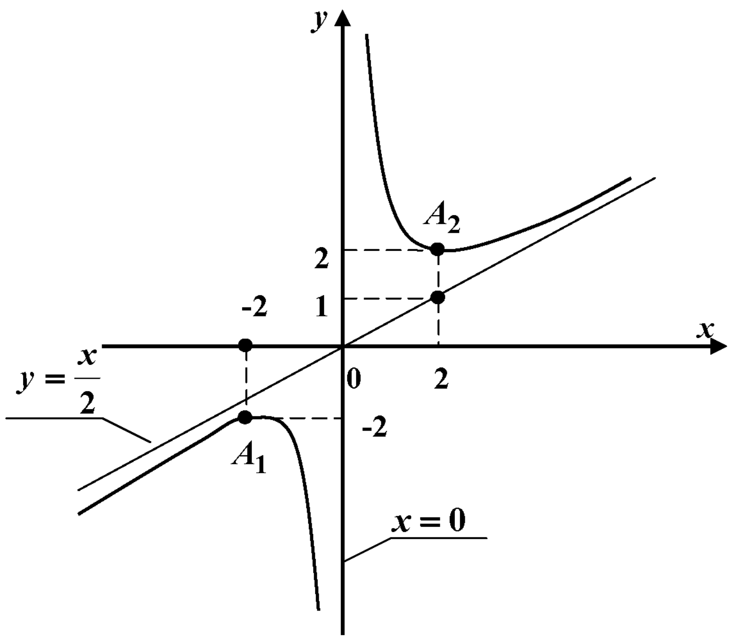
7) Вертикальну асимптоту ми вже знайшли: $x = 0$. Знайдемо похилу асимптоту.

Обчислимо $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$,

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - k \cdot x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{2} x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Тоді пряма $y = \frac{x}{2}$ - похила асимптота.

8) Побудуємо графік.



3. $y = ln(x^2 + 4)$.

1) $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

2) Розглянемо перетин графіка з координатними осями.

З віссю $0y : x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = ln 4 \approx 1{,}4$, тобто у точці $A(0; ln 4)$ графік перетинає вісь $0y$. З віссю $0x : y = 0 \quad \Rightarrow \quad ln(x^2 + 4) = 0$, звідки $x^2 + 4 = 1$ або $x^2 = -3$. Зрозуміло, що остання рівність розв'язків не має. Отже, графік не перетинає вісь $0x$.

3) Функція не періодична, але є парною, бо $y(-x) = ln(x^2 + 4) = y(x)$, тому її графік є симетричним відносно осі $0y$.

4) Точок розриву функція не має.

5) $y' = \frac{2x}{x^2 + 4}$. Знайдемо критичні точки: $\frac{2x}{x^2 + 4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$.

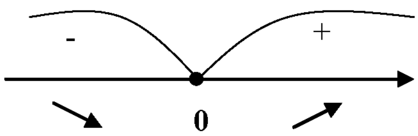
Функція зростає на інтервалі $(0;+\infty)$ та спадає на інтервалі $(-\infty;0)$.

Точка $x=0$ є точкою мінімуму функції.

Обчислимо $y_{min} = y(0) = ln\,4 \approx 1{,}4$.

Тобто точка екстремуму нашої функції $A(0;1{,}4)$.

Знак y'



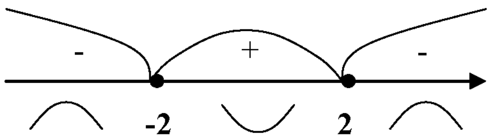
6) Знайдемо $y'' = \left(\dfrac{2x}{x^2+4}\right)' = \dfrac{2(x^2+4) - 2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$.

Дослідимо функцію на угнутість та опуклість.

$$y''=0: \frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}=0 \Rightarrow 8-2x^2=0,\ x^2=4,$$

звідки $x_1=-2, x_2=2$ - критичні точки.

Знак y''



Функція угнута на інтервалі $(-2;2)$, опукла на інтервалах $(-\infty;-2)$ та $(2;+\infty)$. У точках $x_1=-2$, $x_2=2$ функція має перегин графіка.

Знайдемо $y(-2)=ln8 \approx 2{,}1$, $y(2)=ln8\approx 2{,}1$.

Отже, $C_1(-2;ln8)$, $C_2(2;ln8)$ - точки перегину.

7) Вертикальних асимптот графік не має.

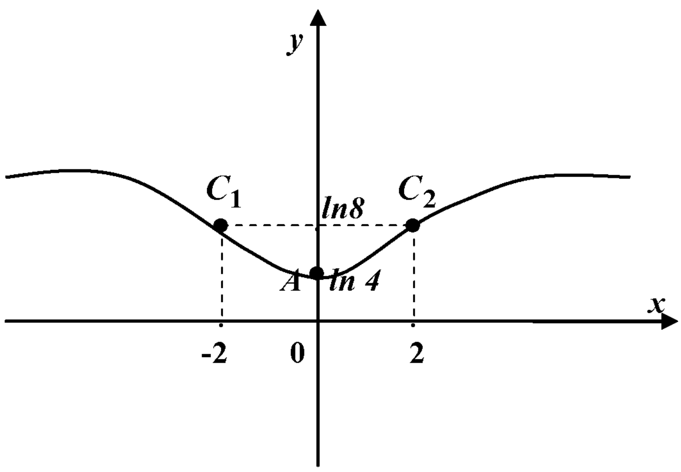
Для похилих асимптот знайдемо k і b.

Будемо мати: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ln(x^2+4)}{x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x^2+4}=0,$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-k\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} ln(x^2+4) = +\infty.$$

Отже, похилих асимптот не буде.

8) Будуємо графік.



4. $y = x \cdot e^{-x}$.

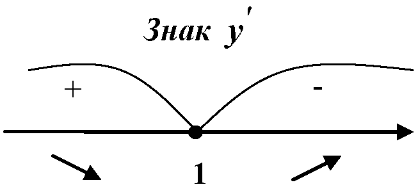
1) $D(y): x \in (-\infty;+\infty)$.

2) Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Знайшли, що графік перетинає вісь $0y$ у точці $O(0;0)$. Якщо $y = 0$, то $x \cdot e^{-x} = 0$, звідки $e^{-x} \neq 0$, тому $x = 0$. Знову отримали ту саму точку $O(0;0)$, в якій графік перетинає вісь $0x$. З'ясовано , що тільки у початку координат графік перетинає обидві координатні осі.

3) Функція не періодична, не є парною або непарною $(y(-x) \neq y(x)$ та $y(-x) \neq -y(x))$.

4) Функція неперервна в області визначення, тому точок розриву не має.

5) Обчислимо $y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$.



З умови $y' = 0$ знайдемо критичні точки.

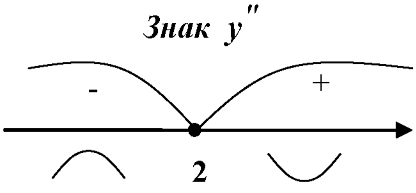
Будемо мати: $e^{-x}(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-x} \neq 0$, тому $1 - x = 0$, звідки $x = 1$.

Функція зростає на інтервалі $(-\infty;1)$ та спадає на інтервалі $(1;+\infty)$. Зрозуміло, що $x = 1$ - точка максимуму функції. $y_{max} = y(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,4$.

Точка $B\left(1;\frac{1}{e}\right)$ - екстремальна точка функції.

6) Знайдемо $y'' = \left(e^{-x} - xe^{-x}\right)' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$.

Тоді $y'' = 0 : e^{-x}(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-x} \neq 0$, тому $x - 2 = 0$, звідки $x = 2$ - критична точка функції.



Функція вгнута на інтервалі $(2;+\infty)$ та опукла на інтервалі $(-\infty;2)$.

Отже, у точці $x = 2$ функція має перетин.

$y(2) = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2} \approx 0,3$.

Тому $A\left(2;\frac{2}{e^2}\right)$ - точка перетину графіка функції.

7) Вертикальної асимптоти графік функції не має.

Для похилих асимптот знайдемо k і b.

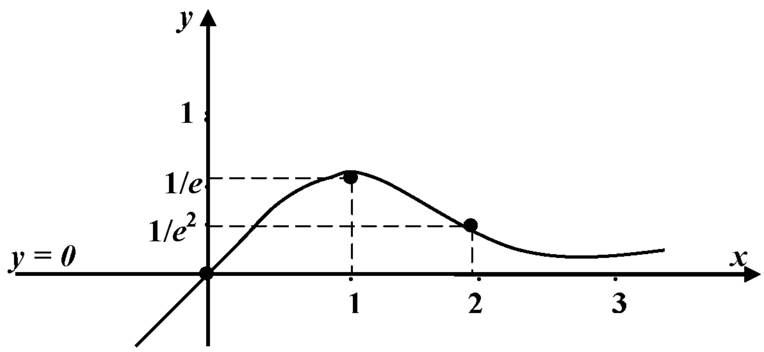
Отримаємо: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$,

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0.$$

Тому $y=0$ - пряма, яка співпадає з віссю $0x$, буде горизонтальною асимптотою.

У випадку, коли $x\to-\infty$: $k=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x}}=+\infty$, тому ніякої асимптоти не буде.

8) Будуємо графік.



5. $y=\frac{x^3}{x^2-1}$.

1) Оскільки задана функція дробово-раціональна, то вона не існує в тих точках, де знаменник дорівнює нулю: $x^2-1=0$, звідки $x_{1,2}=\pm1$.

Отже, $D(y): x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2) Нехай $y=0$, тоді $\frac{x^3}{x^2-1}=0$, звідки $x=0$.

Нехай $x=0$, тоді $y=0$. Отже, графік перетинає обидві координатні осі в точці $O(0;0)$, тобто проходить через початок координат.

3) Функція не періодична, вона непарна, тому що $y(-x)=\frac{-x^3}{(-x)^2-1}=$

$$=-\frac{x^3}{x^2-1}=-y(x).$$

Її графік є симетричним відносно початку координат.

4) Маємо дві точки розриву II-го роду: $x_1=-1$ та $x_2=-1$, тому що

$$\lim_{x\to-1\pm0}\frac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty \text{ та } \lim_{x\to1\pm0}\frac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty .$$

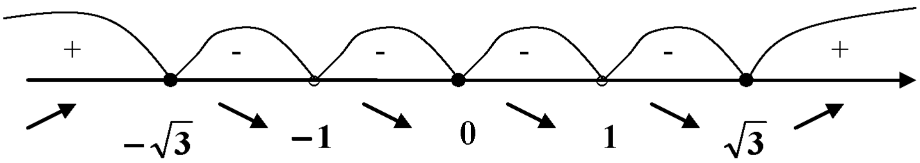
Отже, прямі $x=-1$ та $x=1$ є вертикальними асимптотами.

5) Знайдемо $y'=\dfrac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$.

Розв'яжемо рівняння $y'=0:\ \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=0$, звідки $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$ - критичні точки функції.

Помітимо, що похідна не існує при $x=\pm 1$, але вони обидві не входять до області визначенності функції.

Знак y'



Функція зростає на інтервалах $(-\infty;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};+\infty)$, функція спадає на інтервалах $(-\sqrt{3};-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;\sqrt{3})$.

Похідна змінює знак при переході через точки $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$. А саме: $x_2=\sqrt{3}$ є точкою мінімуму функції, а $x_3=-\sqrt{3}$ - точкою максимуму.

$$y_{min}=y(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3^3}}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}}{2},\quad y_{max}=y(-\sqrt{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, екстремальні точки $A_1\left(\sqrt{3};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_2\left(-\sqrt{3};-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

6) Обчислимо

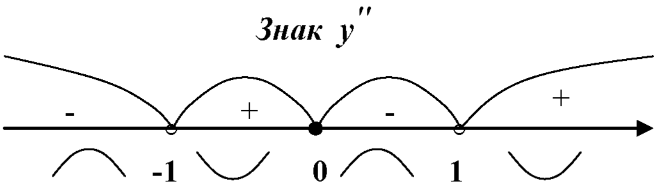
$$y''=\left(\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}\right)'=\frac{(4x^3-6x)\cdot(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2x(2x^2-3)\cdot(x^2-1)^2-4x^3\cdot(x^2-3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2x\cdot(x^2-1)\cdot\left[(2x^2-3)\cdot(x^2-1)-2x^2\cdot(x^2-3)\right]}{(x^2-1)^4}=\frac{2x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Розв'яжемо рівняння $y''=0: \dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=0$, звідки $2x\left(x^2+3\right)=0$, а саме $x=0$ - це критична точка функції.

Помічаємо, що y'' не існує при $x=\pm 1 \notin D(y)$.



Функція вгнута на інтервалах $(-1;0)\cup(1;+\infty)$, функція опукла на інтервалах $(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

При переході через $x=0$ y'' змінює знак.

$y(0)=\dfrac{0}{0-1}=0$. Точка $O(0;0)$ є точкою перегину.

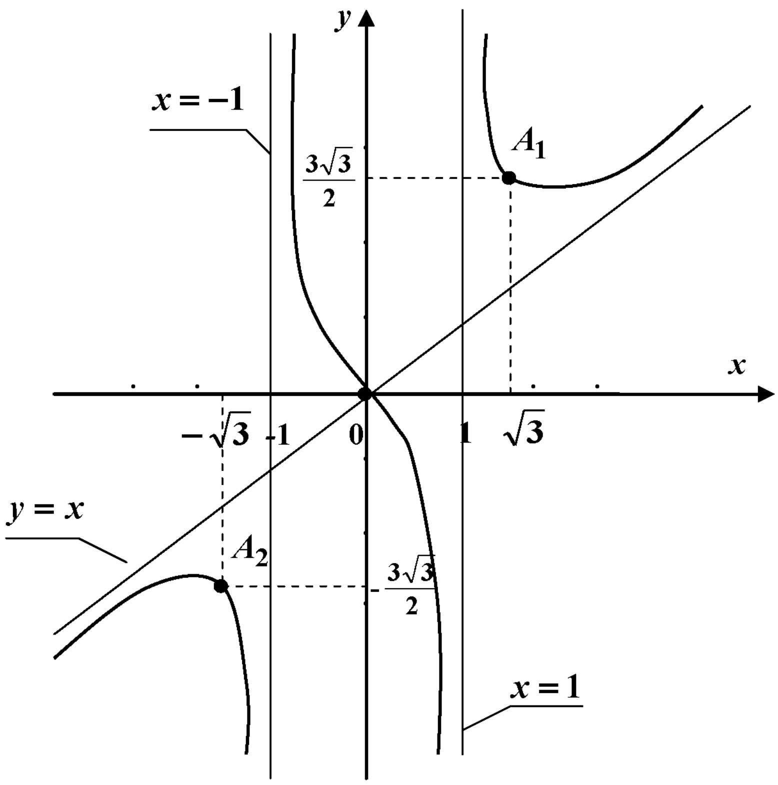
7) Вертикальні асимптоти: $x=\pm 1$. Для похилих асимптот знайдемо k і b.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\left(x^2-1\right)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0.$$

Отже, рівняння похилої асимптоти: $y=x$.

8) Побудуємо графік функції.



Завдання для самостійної роботи

Дослідити функції та побудувати їхні графіки:

1. $y = 2x^4 - x^2 + 1$;
2. $y = x^2\sqrt{x-3}$;
3. $y = x^2 - 2\ln x$;
4. $y = \dfrac{e^x}{x}$;
5. $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001.
2. Овчинников П.П. та інші. Вища математика: Підручник. У 2 ч. – К.: Техніка, 2004.
3. Шипачёв В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1998.
4. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. У 3-х кн. – К.: Либідь, 1994.
5. Вища математика: Збірник задач: Навчальний посібник / За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004.
6. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов.- М.: Высшая школа, 2002.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2000.