Агроінженерія 1-курс, «Вища математика»

Будівництво та цивільна інженерія 1-курс «Вища математика»

Виконати запропоновані завдання до 8 квітня та надіслати на перевірку

на електрону пошту «de-de@ukr.net».

Основні методи інтегрування (продовження)

Основними методами інтегрування є безпосереднє інтегрування, метод підстановки та інтегрування частинами.

Безпосереднє інтегрування

Обчислення інтегралів за допомогою таблиці основних інтегралів та властивостей невизначеного інтеграла називається безпосереднім інтегруванням.

Приклад 1. Знайти

а)	$\int (4x^3 + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x})dx$	б)	$\int \frac{2^x - 5^{2x}}{5^x}dx$

Розв'язання. а) користуючись властивостями 4,5 невизначеного інтеграла і табличними формулами, дістанемо

$$\int (4x^3 + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x})dx = 4\int x^3 dx + 2\int x^{-\frac{1}{2}} dx - \int \frac{1}{x}dx =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \ln|x| + C = x^4 + 4x^{\frac{1}{2}} - \ln|x| + C.$$

Зауваження 1. Довільні сталі, що з'являються при обчисленні невизначених інтегралів, об'єднані в одну сталу, позначену буквою C.

Правильність одержаного результату перевіряється за допомогою диференціювання.

Маємо

$$(x^4 + 4x^{\frac{1}{2}} - \ln|x| + C)' = 4x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} = 4x^3 + 2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x},$$

тобто дістали підінтегральну функцію.

б) при обчисленні цього інтеграла використовуємо формулу 5 с таблиці. Маємо

$$\int \frac{2^x - 5^{2x}}{5^x} dx = \int \left(\frac{2}{5}\right)^x dx - \int 5^x dx = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln \frac{2}{5}} - \frac{5^x}{\ln 5} + C.$$

Можливості застосування даного методу можна розширити, якщо використати прості перетворення диференціала (змінної інтегрування), зокрема

$$dx = \frac{1}{a} d\,(ax + b), \quad a = const, b = const$$

$$xdx = \frac{1}{2} d(x^2), \quad \cos x dx = d\,(\sin\, x)$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln\, x) \quad \text{і взагалі } \varphi'(x)dx = d\,(\varphi(x))$$

Пояснимо це на прикладах.

Приклад 2. Знайти

а)	$\int (x+7)^5 dx$	б)	$\int \sin(1-3x)dx$

Розв'язання.
а) при обчисленні цього інтеграла використовуємо табличну формулу 3 та просте перетворення диференціала, зокрема $dx = d(x + c)$.

Дістанемо

$$\int (x+7)^5 dx = \left| dx = d\,(x+7) \right| = \int (x+7)^5 d\,(x+7) = \frac{(x+7)^6}{6} + C.$$

б) $\int \sin(1-3x)dx = -\frac{1}{3}\int \sin(1-3x)\,d(1-3x) = \frac{1}{3}\cos(1-3x) + C.$

(використали табличну формулу 6).

Зауваження 2. Досить часто використовується ще один із прийомів безпосереднього інтегрування – це виділення "повного квадрата".

За допомогою цього прийому знаходимо інтеграли вигляду

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

де a, b, c – сталі $(a \neq 0)$.

Після виділення "повного квадрата" ці інтеграли зводяться до табличних (формули 14–16).

Приклад 3. Знайти

а) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+1}}$

Розв'язання. а) Маємо

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \left| \begin{array}{l} x^2+2x+3=(x^2+2\cdot x\cdot 1+1)-1+3= \\ =(x+1)^2+2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{(x+1)}{\sqrt{2}} + C.$$

(див. табличну формулу 10).

$$b)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-(\frac{\sqrt{5}}{2})^2}} = \int \frac{d(x-\frac{3}{2})}{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-(\frac{\sqrt{5}}{2})^2}} = .$$

$$= \arcsin \frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C = \arcsin \frac{2x-3}{\sqrt{5}} + C.$$

(див. табличну формулу 11).

Метод заміни змінної (метод підстановки)

Суть цього методу полягає у введенні нової змінної інтегрування. Цей метод ґрунтується на такий теоремі.

Теорема 3. Нехай функція $x=\varphi(t)$ неперервно диференційовна в деякому проміжку зміни t, що має обернену функцію, $f(x)$ – неперервна функція у відповідному проміжку зміни x.

Тоді

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

Ця формула називається формулою *заміни змінної* у невизначеному інтегралі.

Вибір функції $x=\varphi(t)$ – підстановки – має бути таким, щоб інтеграл, який стоїть праворуч у (3) був простішим, ніж заданий.

Після обчислення інтеграла $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ як функції аргументу t, потрібно повернутися до змінної x. Для цього слід знайти t з рівняння $x=\varphi(t)$ і підставити в одержану відповідь.

Приклад 4. Знайти

а) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$	в) $\int \frac{\sqrt{10+x^2}}{x}dx$

Розв'язання. При обчисленні цих інтегралів використаємо метод заміни змінної.

$$a)\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \\ t=\sqrt{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{t}{1+t}dt = 2\int \frac{t+1-1}{1+t}dt =$$

$$= 2\int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} = 2t - 2\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C.$$

$$б)\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{matrix} x=t^6 \\ dx=6t^5dt \\ t=\sqrt[6]{x} \end{matrix} \right| = 6\int \frac{t^5}{t^3-t^2}dt = 6\int \frac{t^3}{t-1}dt = 6\int \frac{(t^3-1)+1}{t-1}dt =$$

$$= 6\int (t^2+t+1+\frac{1}{t-1})dt = 6\int (t^2+t+1)dt + 6\int \frac{1}{t-1}dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|\right)+C.$$

в) $\int \frac{\sqrt{10+x^2}}{x}dx = \left| \begin{matrix} 10+x^2=t^2, & x^2=t^2-10 \\ 2xdx=2tdt, & t=\sqrt{10+x^2} \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{t}{t^2-10}dt = \int \frac{(t^2-10)+10}{t^2-10}dt =$$

$$= \int dt + 10\int \frac{dt}{t^2-10} = t + \frac{\sqrt{10}}{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{10}}{t+\sqrt{10}}\right| + C =$$

$$= \sqrt{10+x^2} + \frac{\sqrt{10}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{10+x^2}-\sqrt{10}}{\sqrt{10+x^2}+\sqrt{10}}\right| + C.$$

Метод інтегрування частинами

Метод інтегрування частинами базується на формулі:

$$\int u dv = uv - \int v du, \qquad (4)$$

де $u(x), v = v(x)$ – дві неперервно диференційовані функції від x.

Для застосування формули (4) підінтегральний вираз потрібно розкласти на два множники, один з яких позначаємо як $u(x)$, другий $-dv(x) = v'(x)dx$.

Після цього знайти $du(x) = u'(x)dx, \quad v(x) = \int dv$, (можна вважати, що стала інтегрування $C = 0$) та підставити у праву частину формули (4). Мета застосування методу інтегрування частинами – одержати праворуч у формулі (4) інтеграл простіший ніж ліворуч.

Формула (4), в основному, застосовується при обчисленні інтегралів вигляду:

1) $\int P(x)e^{kx}dx$	$\int P(x)\sin kx dx$	$\int P(x)\cos kx dx$

де $P(x)$– многочлен, а k – дійсне число.

У цих випадках за $u(x)$ приймають степеневу функцію.

2) $\int P(x)\ln x dx$	$\int P(x)\arcsin x dx$
$\int P(x)\arccos x dx$	$\int P(x)\, arctgx\, dx$

де $P(x)$– многочлен. При обчисленні таких інтегралів за $u(x)$ беруть логарифмічну або обернену тригонометричну функцію.

3) $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$	$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx,\quad \alpha,\beta,-$дійсні числа.

Тут після двократного застосування формули (4) одержимо лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язав це рівняння, знаходимо інтеграл.

Приклад 5. Знайти

а) $\int x^n \ln x dx$	б) $\int x\cos 3x dx$
в) $\int e^x \cos x dx$	г) $\int x^2 e^x dx$

Розв'язання. При знаходженні цих інтегралів скористаємось методом інтегрування частинами.

$$\text{а)}\int x^n \ln x dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x & dv = x^n dx \\ du=\dfrac{1}{x}dx & v=\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{matrix} \right| = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x -$$

$$-\frac{1}{n+1}\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x - \frac{1}{n+1}) + C.$$

$$\text{б)}\int x\cos 3x dx = \left| \begin{matrix} u=x & dv=\cos 3x dx \\ du=dx & v=\int \cos 3x\,dx = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x dx dx = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C.$$

в) для обчислення інтеграла $\int e^x \cos x\,dx$ двічі застосовується формула (4), в результаті чого дістанемо лінійне рівняння відносно заданого інтеграла, який позначимо через I .

$$I=\int e^{x}\cos x dx=\left|\begin{matrix} u=e^{x} & dv=\cos x\,dx \\ du=e^{x}dx & v=\sin x\end{matrix}\right|=$$

$$=e^{x}\sin x-\int e^{x}\sin x dx=\left|\begin{matrix} u=e^{x} & dv=\sin x\,dx \\ du=e^{x}dx & v=-\cos x\end{matrix}\right|=$$

$$=e^{x}\sin x-(-e^{x}\cos x+\int e^{x}\cos x dx)=$$

$$=e^{x}\sin x+e^{x}\cos x-\int e^{x}\cos x dx.$$

Отже маємо рівняння

$I=e^{x}\sin x+e^{x}\cos x-I$, розв'язуючи яке дістанемо

$$I=\int e^{x}\cos x dx=\frac{e^{x}}{2}(\sin x+\cos x)+C.$$

г) для обчислення інтеграла $\int x^{2}e^{x}dx$ двічі застосовується формула (4).

$$\int x^{2}e^{x}dx=\left|\begin{matrix} u=x^{2};\ dv=e^{x}dx \\ du=2xdx;\ \ v=\int e^{x}dx=e^{x}\end{matrix}\right|=x^{2}e^{x}-2\int xe^{x}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x\quad ;\quad dv=e^{x}dx \\ du=dx\ ;\ v=\int e^{x}dx=e^{x}\end{matrix}\right|=x^{2}e^{x}-2\left(xe^{x}-\int e^{x}dx\right)=$$

$$=x^{2}e^{x}-2xe^{x}+\int e^{x}dx=x^{2}e^{x}-2xe^{x}+e^{x}+C=e^{x}\left(x^{2}-2x+1\right)+C.$$

Завдання для самостійної роботи (виконати до 8-квітня)

1) $\int\frac{2^{x}+9^{2x}}{9^{x}}dx$; 4) $\int x\,arctg\,3x dx$

2) $\int\frac{x+7}{\sqrt{1-4x^{2}}}dx$; 5) $\int x\ln x dx$

3) $\int\frac{4-\cos^{2}5x}{\sin^{2}5x}dx$; 6) $\int xe^{\frac{3}{2}x}dx$